arXiv:2302.04205v1 [math.AC] 8 Feb 2023

模的余有限性与局部上同调

HAJAR SABZEH 和 REZA SAZEEDEH

摘要。设 A 是一个交换诺特环， $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，且 n 是一个非负整数。本文研究 $\mathsf{S}_n(\mathfrak{a})$，这是一类特殊的 A-模，并找出一些充分条件，使得一个模属于 $\mathsf{S}_n(\mathfrak{a})$。此外，当 $\dim A/\mathfrak{a} \geq 3$ 时，我们研究局部上同调模的余有限性。

目录

1. 引言 1
2. 模余有限性的判据 2
3. 局部上同调模的余有限性 4
参考文献 7

1. 引言

本文中，假设 A 是交换诺特环， $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，M 是一个 A-模，且 n 是非负整数。根据 [H], ，若 A-模 M 满足 $\operatorname{Supp}_A(M) \subseteq V(\mathfrak{a})$，并且对所有整数 $i \geq 0$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a},\ M)$ 都是有限生成的，则称其为$\mathfrak{a}$-余有限。作者们 [KS] 研究了模余有限性的一个判据。我们用 $\mathsf{S}_n(\mathfrak{a})$ 表示所有满足下述蕴含关系的A-模 M 构成的类:

If 若对所有 $i \leq n$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a},\ M)$ 都是有限生成的，且 $\operatorname{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{a})$，则 M 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

$\mathfrak{a}$-余有限模范畴的阿贝尔性引起了许多从事交换代数研究的数学家的兴趣。许多作者研究了低维情形下的这一课题（参见 [K、M1、M2、BNS1]）。由于 Koszul 复形是降低维数的有效工具，Sazeedeh [S] 研究了 Koszul 上同调模的余有限性。

在第 2 节中，我们借助模的 Koszul上同调，旨在确定该模何时属于 $\mathsf{S}_n(\mathfrak{a})$。设 $\mathbf{x} = x_1,...,x_t$ 是 $\mathfrak{a}$ 中的一列元素。我们证明，若对所有 $i \leq n+1$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的，并且对所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_1(\mathfrak{a})$，则对所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$- 余有限的（参见命题 2.2 ）。此外，我们还证明了以下定理。

定理1.1. 若对所有 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_1(\mathfrak{a})$，则 $M \in \mathcal{S}_{t+1}(\mathfrak{a})$。

作为该定理的一个应用，若对所有 $i \geq 0$，$\dim H^i(\mathbf{x}\ M) \leq 1$，则 $M \in \mathsf{S}_{t+1}(\mathfrak{a})$（参见推论 2.4）。设对所有 $i \leq n+2$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的，并且对所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_2(\mathfrak{a})$。于是我们证明，对所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，当且仅当对所有 $i \leq n+1$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 是有限生成的（参见命题 2.5）。此外，我们还有以下定理。

定理 1.2. 设 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{a})$ 使得对所有$i \geq 0$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 均为有限生成的。则 $M \in \mathcal{S}_{t+2}(\mathfrak{a})$。

对所有 $i \leq n+3$，令 $\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 有限生成，并令 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_3(\mathfrak{a})$。于是我们证明，若对所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的，则 $\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 是有限

2010 数学主题分类。 13D02, 13D45, 13E05。关键词与短语。 Koszul 上同调、余有限模、局部上同调。

生成的，对所有 $i \leq n+1$ 都成立； $j=0$， 1；此外，若 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^{n+2}(\mathbf{x}\ M))$ 有限生成，则逆命题也成立（参见命题 2.8）。此外，我们有如下定理。

定理 1.3. 设 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_3(\mathfrak{a})$ 满足：对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 和 $\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 均为有限生成的。则 $M \in \mathcal{S}_{t+3}(\mathfrak{a})$。

作为该定理的一个应用，设 A 为一个局部环，使得对某个 $x \in \mathfrak{a}$，$\dim A/(\mathbf{x})+xA) \leq 3$。若对所有 $i \geq 0$ 以及 $j = 0,1$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M)/xH^i(\mathbf{x}\ M))$ 和 $\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 均为有限生成的，则 $M \in \mathrm{S}_{t+3}(\mathfrak{a})$（参见推论2.10）。

在第 3 节中，我们研究局部上同调模的余有限性。设对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 均为有限生成的，并设 $t < s$ 为非负整数，且对所有 $i \neq t, s$， $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 均为 $\mathfrak{a}$-余有限。于是我们证明，$H^t_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathrm{S}_{n+s-t+1}(\mathfrak{a})$ 当且仅当 $H^s_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{a})$（参见定理3.1）。此外，我们有以下定理。

定理 1.4. 设$\dim A/\mathfrak{a} = d \geq 3$且$\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(M)\ A/\mathfrak{a}) \geq d-2$。若对于所有 $i \leq n+1$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$均为有限生成，则对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 为有限生成，当且仅当对于所有 $i < n.$， $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 为 $\mathfrak{a}$-余有限

在本文最后，我们将对满足 $\dim A \geq 4$ 的环 A 得到一个类似的结果。

2. 模余有限性的判据

在本节中， M 始终是一个 A-模，满足 $\mathrm{Supp}_A M \subseteq V(\mathfrak{a})$； n 是一个非负整数，而$\mathbf{x} = x_1, .., x_t$是 $\mathfrak{a}$ 中的一列元素。

若对所有整数 $i \geq 0$，$\mathrm{Supp}_A(M) \subseteq V(\mathfrak{a})$ 且 $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 均为有限生成，则称 A-模 M 为 $\mathfrak{a}$-余有限 。

对于非负整数 n，我们用 $\mathrm{S}_n(\mathfrak{a})$ 表示满足以下蕴含关系的所有 A-模 M 所构成的类：

If 对于所有 $i \leq n$，若 $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 是有限生成的，且 $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{a})$，那么 M是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

例 2.1。 (i) 假设 $\mathfrak{a}$ 是 A 的任意理想，且 M 是维数为 d 的 A-模，其中 $\dim M$ 表示 $\mathrm{Supp}_A M$ 的维数；即 $\mathrm{Supp}_A M$ 中素理想链的最长长度。那么 $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ 属于 $\mathrm{S}_0(\mathfrak{a})$。更准确地说，如果 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^d_{\mathfrak{a}}(M))$ 是有限生成的 A-模，那么由 [NS，定理 3.11] 可知， $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ 是阿廷的。因此，由于 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^d_{\mathfrak{a}}(M))$ 具有有限长度，根据 [M2，命题 4.1],，模 $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

(ii) 给定 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$，根据 [BNS1，命题 2.6]，对于所有满足 $\dim M \leq 1$ 的模 M，均有 $\mathrm{S}_1(\mathfrak{a})$。特别地，若 $\dim A/\mathfrak{a} = 1$，则由 [M2，定理 2.3] 可得 $\mathrm{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathrm{Mod}$-$A$，即所有 A-模构成的范畴。此外，若 $\dim A = 2$，则由 [NS，推论 2.4] 可得，对于 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\mathrm{S}_1(\mathfrak{a}) =$Mod-$A$ 。

(iii) 设 $\mathfrak{a}$ 是局部环 A 的一个理想，且 $\dim A/\mathfrak{a} = 2$。由 [BNS2，定理 3.5] 可得 $\mathrm{S}_2(\mathfrak{a}) = \mathrm{Mod}$-$A$。此外，若 A 是满足 $\dim A = 3$ 的局部环，则由 [NS，推论 2.5] 可得，对于 A 的任意理想 $\mathfrak{a}$，均有 $\mathrm{S}_2(\mathfrak{a}) = \mathrm{Mod}$-$A$ 。

当一个 A-模的 Koszul 上同调模属于 $\mathrm{S}_1(\mathfrak{a})$ 时，下面的结果表明它们是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

命题 2.2. 设对于所有 $i \leq n+1$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的。若对于所有 $i \leq n$， $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_1(\mathfrak{a})$，则对于所有 $i \leq n$， $H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

证明。 考虑 Koszul 复形

$$K^*(\mathbf{x}, M) : 0 \longrightarrow K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{t-1}} K^t \longrightarrow 0$$

and 假设对每个 i， $Z^i = \mathrm{Ker}\ d^i$, $B^i = \mathrm{Im}\ d^{i-1}$, $C^i = \mathrm{Coker}\ d^i$ 以及 $H^i = H^i(\mathbf{x}\ M)$。该 n 对于 e 对于每个 $j \geq 0$，我们有一个模的正合列

$$0 \longrightarrow H^j \longrightarrow C^j \longrightarrow K^{j+1} \longrightarrow C^{j+1} \longrightarrow o \qquad (\dagger_j).$$

我们对 i 使用归纳法，证明 H^i 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，并且对所有 $i \leq n$ 和所有 $j \leq n-i$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 都是有限生成的。假设 $i < n$，因此归纳假设推出，对所有 $j \leq n+1-i$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^i)$ 都是有限生成的。由 $(\dagger_i)$ 可知，对于 $i = 0,1$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i)$ 是有限生成的。因此，$H^i \in \mathsf{S}_1(\mathfrak{a})$ 这一事实意味着 H^i 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，并且对所有 $j \leq n-i$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 都是有限生成的。□

下面的定理给出了一个充分条件，使得一个模属于 $\mathsf{S}_{t+1}(\mathfrak{a})$。

定理 2.3. 若对所有 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_1(\mathfrak{a})$，则 $M \in \mathcal{S}_{t+1}(\mathfrak{a})$。

证明. 假设对所有 $i \leq t+1$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的。由命题 2.2 可知，对所有 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此，由 [S，定理 2.4] 可知，M 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。□

推论 2.4. 若对所有 $i \geq 0$，维数 $H^i(\mathbf{x}\ M) \leq 1$，则 $M \in \mathcal{S}_{t+1}(\mathfrak{a})$。

证明. 根据例 2.1，对所有 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_1(\mathfrak{a})$，因此结论由定理 2.3 得出。□

当一个 A-模的 Koszul 上同调模属于 $\mathsf{S}_2(\mathfrak{a})$ 时，我们有以下关于其 $\mathfrak{a}$-余有限性的结果。

命题 2.5。对于所有 $i \leq n+2$，若$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$是有限生成的，且对于所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{a})$，则以下条件成立。

(i) 对于所有 $i \leq n$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。(ii) $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 对于所有 $i \leq n+1$都是有限生成的。

证明。沿用命题 2.2 证明中的记号。(i)⇒(ii)。由假设，对于所有 $i \leq n$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i)$ 都是有限生成的。因此，显然，对于所有 $i \leq n+1$ 和所有 $j \leq n+2-i$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^i)$ 都是有限生成的。由于 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, C^{n+1})$ 是有限生成的，$(\dagger_{n+1})$ 蕴含 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^{n+1})$ 是有限生成的。(ii)⇒(i)。我们对 i 进行归纳，证明 H^i 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，且对于所有$i \leq n$和所有 $j \leq n+1-i$，$\operatorname{Ext}^j_A((A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 是有限生成的。归纳假设蕴含对于所有 $j \leq n+2-i$，$\operatorname{Ext}^j_A((A/\mathfrak{a}, C^i)$ 是有限生成的。由于根据假设 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^{i+1})$ 是有限生成的，$(\dagger_{i+1})$ 蕴含 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 是有限生成的；因此，$(\dagger_i)$ 蕴含对于所有 $j \leq 2$，$\operatorname{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i)$ 是有限生成的。现在，由于 $H^i \in \mathsf{S}_2(\mathfrak{a})$，它是 $\mathfrak{a}$-余有限的；此外，$(\dagger_i)$ 蕴含对于所有 $i \leq n$ 和所有 $j \leq n+1-i$，$\operatorname{Ext}^j_A((A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 是有限生成的。□

下述定理给出了一个充分条件，使得一个模属于 $\mathsf{S}_{t+2}(\mathfrak{a})$.

定理 2.6。设 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{a})$，使得对所有$i \geq 0$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 都是有限生成的。则 $M \in \mathcal{S}_{t+2}(\mathfrak{a})$。

证明。假设对于所有 $i \leq t+2$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的。由命题 2.5 可知，对于所有 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此，根据 [S，定理 2.4] 表明，M 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。□

推论 2.7。设 A 是一个局部环，使得 维数 $A/(\mathbf{x}) \leq 3$，并且对所有 $i \geq 0$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 都是有限生成的。则 $M \in \mathcal{S}_{t+2}(\mathfrak{a})$。

证明。令 $B = A/(\mathbf{x})$ 和 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}B$。我们注意到，对于每个 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是一个 B-模；又由于 $\dim B \leq 3$，由例 2.1 (iii) 可知，对每个 $i \geq 0$，$H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_2(\mathfrak{a}B)$。现在，[KS，命题 2.15] 推出 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathsf{S}_2(\mathfrak{a})$；因此，由定理 2.6 可得 $M \in \mathsf{S}_{t+2}(\mathfrak{a})$。□

当一个 A-模的 Koszul 上同调模属于 $S_3(\mathfrak{a})$ 时，关于其 $\mathfrak{a}$-余有限性，我们有以下结果

命题 2.8. 设对所有 $i \leq n+3$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 均有限生成，并且对所有 $i \leq n$， $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_3(\mathfrak{a})$。考虑以下命题。

(i) 对所有 $i \leq n$， $H^i(\mathbf{x}\ M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。(ii) $\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 对 $j = 0$、1 及所有 $i \leq n+1$. 都是有限生成的

则(i) $\Rightarrow$ (ii) 成立。此外，若$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^{n+2}(\mathbf{x}\ M))$ 是有限生成的，则(ii) $\Rightarrow$ (i)成立。

证明。采用命题 2.2 的证明中的相同记号。(i)⇒(ii)。显然，对所有 $i \leq n$ 和 $j = 0$，1，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i)$ 是有限生成的；此外，对所有 $i \leq n+1$ 和所有 $j \leq n+3-i$，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^i)$ 是有限生成的。由于对 $j = 0$，1，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^{n+1})$ 是有限生成的，正合列 $(\dagger_{n+1})$ 蕴含 $\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^{n+1})$ 对 $j = 0$，1 是有限生成的。(ii)⇒(i)。我们对 i 使用归纳法，证明 H^i 是 $\mathfrak{a}$- 余有限的，且对所有 $i \leq n$ 和所有 $j \leq n+2-i$，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 是有限生成的。正合列 $(\dagger_{i+2})$ 蕴含 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, C^{i+2})$ 是有限生成的，因此由 $(\dagger_{i+1})$ 可知，$\mathrm{Ext}^j(A/\mathfrak{a}, C^{i+1})$ 对 $j = 0$，1 是有限生成的。由归纳假设，对所有 $j \leq n+3-i$，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, C^i)$ 是有限生成的，故正合列 $(\dagger_i)$ 蕴含对所有 $j \leq n+3-i$，$\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i)$ 是有限生成的；因此，由于 $H^i \in S_3(\mathfrak{a})$，我们推得 H^i 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。□

下面的定理给出了使模属于 $S_{t+3}(\mathfrak{a})$ 的充分条件 .

定理 2.9。 设 $H^i(\mathbf{x}\ M) \in \mathcal{S}_3(\mathfrak{a})$，使得对于所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 和$\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{a}, H^i(\mathbf{x}\ M))$ 都是有限生成的。则 $M \in \mathcal{S}_{t+3}(\mathfrak{a})$。

证明。 假设对于所有 $i \leq t+3$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的。由命题 2.8 可知，对于所有 $i \geq 0$， $H^i(\mathbf{x}\ M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此， [S，根据定理 2.4]，可得 M 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。□

推论*2.10.* 设 A 是一个局部环，满足对于某个 $x \in \mathfrak{a}$，$\dim A/(x) + xA) \leq 3$ 。如果对于所有 $i \geq 0$ 和 $j = 0$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i(x\ M)/xH^i(x\ M))$ 和 $\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathfrak{a}, H^i(x\ M))$，*1*，都是有限生成的，则 $M \in S_{t+3}(\mathfrak{a})$。

证明。 令 $B = A/xA$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}/xA$。根据正合列

$$H^i(\mathbf{x}, x, M) \longrightarrow H^i(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{x.} H^i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbf{x}, x, M)$$

对于 $i \geq 0$，存在一个正合列

$$0 \longrightarrow (0 :_{H^i(\mathbf{x},M)} x) \longrightarrow H^i(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{x.} H^i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H^i(\mathbf{x}, M)/xH^i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow 0.$$

由于 $(0 :_{H^i(\mathbf{x}\ M)} x)$ 和 $H^i(\mathbf{x}\ M)/xH^i(\mathbf{x}\ M)$ 是 B-模，根据例 2.1 (iii)，它们属于 $S_2(\mathfrak{b})$，因此根据 [KS，命题 2.15]，，它们属于 $S_2(\mathfrak{a})$。于是，定理 2.6 表明，对于每个 $i \geq 0$， $H^i(\mathbf{x}\ M) \in S_3(\mathfrak{a})$，进而利用定理 2.9 可得 $M \in S_{t+3}(\mathfrak{a})$。□

3. 局部上同调模的余有限性

在本节中， M 是一个 A-模， $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，且 n 是一个正整数。我们研究局部上同调的余有限性。关于局部上同调的更多细节，请参阅 Brodmann 和 Sharp 的教材 [BS]。在本节中， n 是一个非负整数。

定理3.1。 设对于所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 均为有限生成的，并设 $t < s$ 为非负整数，使得对于所有 $i \neq t, s$， $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 均为 $\mathfrak{a}$- 余有限。那么，当且仅当 $H^s_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathcal{S}_n(\mathfrak{a})$ 时， $H^t_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathcal{S}_{n+s-t+1}(\mathfrak{a})$。

证明。 我们首先假设 $H^t_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathsf{S}_{n+s-t+1}(\mathfrak{a})$，并且对于所有 $p \le n$，$\operatorname{Ext}^p_A(A/\mathfrak{a}, H^s_{\mathfrak{a}}(M)) \in \mathsf{S}_n(\mathfrak{a})$ 均为有限生成的。存在格罗滕迪克谱序列

$$E_2^{p,q} := \operatorname{Ext}^p_A(A/\mathfrak{a}, H^q_{\mathfrak{a}}(M)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_A(A/\mathfrak{a}, M).$$

对于每个 $r \ge 3$，考虑序列 $E^{p-r+1,t+r-2}_{r-1} \xrightarrow{d^{p-r+1,t+r-2}_{r-1}} E^{p,t}_{r-1} \xrightarrow{d^{p,t}_{r-1}} E^{p+r-1,t-r+2}_{r-1}$，因此 $E^{p,t}_r = \operatorname{Ker} d^{p,t}_{r-1} / \operatorname{Im} d^{p-r+1,t+r-2}_{r-1}$。考虑 $p \le n+s-t+1$，我们证明 $E^{p,t}_2$ 是有限生成的。如果 $r = s-t+2$，那么 $p-r+1 \le n$，因此根据证明开始处的论证，$E^{p-r+1,t+r-2}_{r-1}$ 是有限生成的。如果 $r \ne s-t+2$，则假设意味着对于所有 $p \ge 0$，$E^{p-r+1,t+r-2}_{r-1}$ 都是有限生成的（我们注意到 $t+r-2 \ne t$）。因此，对于所有 $r \ge 3$ 和 $p \le n+s-t+1$，$\operatorname{Im} d^{p-r+1,t+r-2}_{r-1}$ 是有限生成的。但是存在一个有限滤过

$$0 = \Phi^{p+t+1}H^{p+t} \subset \Phi^{p+t}H^{p+t} \subset \cdots \subset \Phi^1 H^{p+t} \subset \Phi^0 H^{p+t} \subset H^{p+t}$$

使得 $\Phi^p H^{p+t}/\Phi^{p+1}H^{p+t} \cong E^{p,t}_\infty$ 对所有 $p \ge 0$均成立。根据假设，$H^{p+t} = \operatorname{Ext}^{p+t}_A(A/\mathfrak{a}, M)$是有限生成的，因此对所有 $p \ge 0$，$E^{p,t}_\infty$都是有限生成的。另一方面，当 r 充分大时，$E^{p,t}_r = E^{p,t}_\infty$，因此对所有 $p \ge 0$，$E^{p,t}_r$都是有限生成的。前述论证表明，对所有 $p \le n+s-t+1$，$\operatorname{Ker} d^{p,t}_{r-1}$ 都是有限生成的；此外，由于 $r \ge 3$，我们有 $t-r+2 \le t-1$，因此假设意味着 $E^{p+r-1,t-r+2}_{r-1}$ 是有限生成的，进而对所有 $p \le n+s-t+1$，$E^{p,t}_{r-1}$ 都是有限生成的。如此继续，我们可推得对所有 $p \le n+s-t+1$，$E^{p,t}_2$ 都是有限生成的；又由于 $H^t_{\mathfrak{a}}(M) \in \mathsf{S}_{n+s-t+1}(\mathfrak{a})$，我们推得$H^t_{\mathfrak{a}}(M)$是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此，对所有 $q \ne s$ 和所有 $p \ge 0$，$E^{p,q}_2$ 都是有限生成的。类似地，当 r 充分大且对所有 $p \ge 0$ 时，我们有 $E^{p,s}_\infty = E^{p,s}_r$；又由于 $E^{p,s}_\infty$是$\operatorname{Ext}^{p+s}_A(A/\mathfrak{a}, M)$的一个子商，它是有限生成的，因此 $E^{p,s}_r$是有限生成的。鉴于
在序列 $E^{p-r+1,s+r-2}_{r-1} \xrightarrow{d^{p-r+1,s+r-2}_{r-1}} E^{p,s}_{r-1} \xrightarrow{d^{p,s}_{r-1}} E^{p+r-1,s-r+2}_{r-1}$ 中，由于 $E^{p-r+1,s+r-2}_{r-1}$ 是有限生成的，且 $E^{p,s}_r = \operatorname{Ker} d^{p,s}_{r-1} / \operatorname{Im} d^{p-r+1,s+r-2}_{r-1}$，因此我们得出$\operatorname{Ker} d^{p,s}_{r-1}$是有限生成的；从而 $E^{p,s}_{r-1}$ 也是有限生成的。继续如此推理，可得 $E^{p,s}_3$ 是有限生成的，因此对于所有 $p \ge 0$，$\operatorname{Ker} d^{p,s}_2$ 也是有限生成的。现在，正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^{p,s}_2 \longrightarrow E^{p,s}_2 \longrightarrow E^{p+2,s+1}_2$ 蕴含 $E^{p,s}_2$ 对于所有 $p \ge 0$都是有限生成的；因此 $H^s_{\mathfrak{a}}(M)$是 $\mathfrak{a}$-余有限的。反向结论可用类似方法证明。□

下面的引理推广了 [KS，命题 2.6]。

引理 3.2。 设 维数 $A/\mathfrak{a} = 3$ 且深度$(\operatorname{Ann}(M)\ A/\mathfrak{a}) > 0$。如果对于所有 $i \le n+1$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 都是有限生成的，则以下条件等价。(i) $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 对于所有 $i \le n$ 都是有限生成的。(ii) $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 对于所有 $i < n$都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

证明。 由于 $\operatorname{depth}(\operatorname{Ann}(M)\ A/\mathfrak{a}) > 0$，存在元素 $x \in \operatorname{Ann}(M)$，使得 x是 $A/\mathfrak{a}$上的非零因子。取 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + xA$，我们有 $\dim A/b = 2$，由 [DM，命题 1] 可知，对于所有 $i \le n+1$，$\operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, M)$ 是有限生成的。此外，我们有$\Gamma_{xA}(M) = \Gamma_{x\mathfrak{a}}(M) = M$以及 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$。因此，$A$的理想 $\mathfrak{a}$和 xA给出了如下 Mayer–Vietoris 正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow H^1_{\mathfrak{b}}(M) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow 0$$

并且对每个 $i \ge 2$，同构 $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{b}}(M)$ 成立。(i)⇒(ii)。 $n = 1$的情形由 [KS，命题 2.6] 得出。对于 $n \ge 2$，$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。于是 $\Gamma_{\mathfrak{b}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ 也为 $\mathfrak{b}$-余有限。此外，显然对所有 $i \le n$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 都是有限生成的。将函子 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, -)$ 应用于上述正合列，便可得出 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, \Gamma_{\mathfrak{b}}(M))$ 和 $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^1_{\mathfrak{b}}(M))$ 均为有限生成的。此外，对每个 $2 \le i \le n$，$\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{b}}(M)) \cong \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 都是有限生成的。现在，[NS，定理 3.7] 表明 $H^i_{\mathfrak{b}}(M)$ 是 $\mathfrak{b}$-余有限的，因此利用 [DM，命题 2]，对所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。(ii)⇒(i) 由于对所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的，根据前面的论证，对所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{b}}(M)$ 都是 $\mathfrak{b}$-余有限的；因此由 [NS，

定理 3.7] 表明，对所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{b}}(M))$ 都是有限生成的。我们注意到，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)) = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 是有限生成的。此外，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^1_{\mathfrak{b}}(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_A(A/xA, H^1_{\mathfrak{b}}(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^1_{\mathfrak{b}}(M))$ 是有限生成的。现在，由于 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，将函子 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, -)$ 应用于上述正合列，我们得出 $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^1_{\mathfrak{a}}(M))$ 是有限生成的。根据证明开头提到的论证，对所有 $2 \leq i \geq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{b}}(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{b}}(M))$ 是有限生成的。□

文献 [NS 的定理 3.3、3.7] 证明，若 $\dim A/\mathfrak{a} \leq 2$，则引理 3.2 中的条件等价。下面的定理在附加一个假设的情况下，将这一结果推广到 $\dim A/\mathfrak{a} \geq 3$。

定理 3.3. 设 $\dim A/\mathfrak{a} = d \geq 3$，且 $\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(M)\ A/\mathfrak{a}) \geq d-2$。若对所有 $i \leq n+1$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, M)$ 均有限生成，则引理 *3.2* 中的条件等价。

证明。对 d 使用归纳法。$d = 3$ 的情形由引理 3.2 得出，因此可假设 $d \geq 4$。由于 $\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(M)\ A/\mathfrak{a}) > 0$，存在一个元素 $x \in \mathrm{Ann}_R M$，它在 $A/\mathfrak{a}$ 上是非零因子。取 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + xA$，可得 $\dim A/\mathfrak{b} = d-1$。由于 $\mathrm{Supp}_A A/\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Supp}_A A/\mathfrak{a}$，因此对所有 $i \leq n+1$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, M)$ 均有限生成。若对每个 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的，则对每个 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{b}}(M)$ 都是 $\mathfrak{b}$-余有限的。由归纳假设，对所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{b}}(M))$ 均有限生成。按照引理 3.2 证明中的相同推理可得，对所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 均有限生成。反之，假设对所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 均有限生成，因此对所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, H^i_{\mathfrak{b}}(M))$ 也均有限生成。由归纳假设，对每个 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{b}}(M)$ 都是 $\mathfrak{b}$-余有限的，因此对每个 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。□

推论 3.4. 设 $\mathfrak{b}$ 是 A 的一个理想，且 $\mathfrak{a} = \Gamma_{\mathfrak{b}}(A)$ 满足 维数 $A/\mathfrak{a} = 3$。则对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}))$ 有限生成，当且仅当对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b})$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。

证明。由于 $\Gamma_{\mathfrak{b}}(A/\mathfrak{a}) = 0$，我们有深度$(\mathfrak{b}, A/\mathfrak{a}) > 0$。现在利用引理 3.2 即可得到所述结论。□

推论 3.5. 设 $\mathfrak{b}$ 是 A 的一个理想，且 $\mathfrak{a} = \Gamma_{\mathfrak{b}}(A)$ 满足 维数 $A/\mathfrak{a} = 3$。则对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A))$ 有限生成，当且仅当对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。特别地，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^1_{\mathfrak{a}}(A))$ 有限生成。

证明。存在一个正整数 t，使得 $\mathfrak{b}^t\mathfrak{a} = 0$，因此 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^t) = \mathfrak{b}^t$。于是，将函子 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ 作用于正合列 $0 \longrightarrow \mathfrak{b}^t \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{b}^t \longrightarrow 0$，可推出对于每个 $i > 0$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A) \cong H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}^t)$。由于 $\Gamma_{\mathfrak{b}}(A/\mathfrak{a}) = 0$，我们有深度$(\mathfrak{b}^t, A/\mathfrak{a}) =$ 深度$(\mathfrak{b}, A/\mathfrak{a}) > 0$。若对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A))$ 有限生成，则对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}^t))$ 有限生成。现在由引理 3.2 可知，对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}^t)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的；因此，对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。反过来，若对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的，则对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}^t)$ 是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此再次利用引理 3.2，对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{b}^t)$ 有限生成，从而对于所有 $i \leq n$ □，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, H^i_{\mathfrak{a}}(A))$ 有限生成

推论 3.6. 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，且 维数 $A/\mathfrak{p} = 3$；设 $\mathfrak{b}$ 是 A 的一个理想，使得$\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}$。那么，对于所有 $i \leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, H^i_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{b}))$ 有限生成，当且仅当对于所有 $i < n$，$H^i_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{b})$ 是$\mathfrak{p}$-余有限的。

Proof. 由于 $\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}$，我们有 $\mathrm{depth}(\mathfrak{b}, A/\mathfrak{p}) > 0$，因此结论由定理 3.3 得出。 □

若 $\dim A \geq 4$，则有如下结果。

命题 3.7. 设 $\dim\ A\ =\ d\ \geq\ 4$ 满足$\mathrm{depth}(\mathrm{Ann}(M)\ A/(\mathfrak{a}\ +\ \Gamma_{\mathfrak{a}}(A)))\ \geq\ d-3$，并且对所有 $i\ \leq\ n+1$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a},M)$ 均为有限生成。那么引理 *3.2* 中的条件等价。

证明。我们可以选取一个整数 t，使得 $(0:_A\ \mathfrak{a}^t)\ =\ \Gamma_{\mathfrak{a}}(A)$。令 $\overline{A}\ =\ A/\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)$，并令 $\overline{M}\ =M/(0:_M\ \mathfrak{a}^t)$，它是一个 $\overline{A}$-模。取 $\overline{\mathfrak{a}}$ 为 $\mathfrak{a}$ 在 $\overline{A}$中的像，我们有 $\Gamma_{\overline{\mathfrak{a}}}(\overline{A})\ =0$。因此，$\overline{\mathfrak{a}}$包含一个 $\overline{A}$-正则元素，从而 $\dim\ A/\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)\ =\dim\overline{A}/\overline{\mathfrak{a}}\leq d-1$。关于 M的假设，结合 $\mathrm{Supp}_A(A/\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A))\ \subset\ \mathrm{Supp}_A(A/\mathfrak{a})$ 这一事实以及 [DM 命题 1]，可知对所有 $i\leq n$，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)\ M)$ 都是有限生成的。由于根据假设 $(0:_M\ \mathfrak{a})$ 是有限生成的，显然 $(0:_M\ \mathfrak{a}^t)$ 也是有限生成的，因此我们有一个正合列

$$0\longrightarrow(0:_M\ \mathfrak{a}^t)\longrightarrow\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)\longrightarrow\Gamma_{\mathfrak{a}}(\overline{M})\longrightarrow 0$$

并且对所有 $i>0$，同构 $H^i_{\mathfrak{a}}(M)\ \cong\ H^i_{\mathfrak{a}}(\overline{M})$ 成立。为证明 (i)⇒(ii)，假设对所有 $i\leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 都是有限生成的。鉴于前面的论证以及局部上同调独立性定理，对所有 $i\leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)\ H^i_{\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)}(\overline{M}))$ 都是有限生成的。由此，根据定理 3.3，对所有 $i<n$，$H_{\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)}(\overline{M})$ 是 $\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)$-余有限的；因此，利用换环原理 [DM 命题 2]，$H^i_{\mathfrak{a}}(\overline{M})$ 对所有 $i<n$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。因此，前面的论证表明，对所有 $i<n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。(ii)⇒(i)。假设对所有 $i<n$，$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ 都是 $\mathfrak{a}$-余有限的。根据前面提到的相同推理，我们可得对所有 $i<n$，$H^i_{\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)}(\overline{M})$ 都是 $\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)$-余有限的。现在再次利用定理 3.3，我们可得对所有 $i\leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},H^i_{\mathfrak{a}}(\overline{M}))\ \cong\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)\ H^i_{\mathfrak{a}+\Gamma_{\mathfrak{a}}(A)}(\overline{M}))$ 是有限生成的；因此，前面的论证表明，对所有 $i\leq n$，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 都是有限生成的。□

参考文献

[BNS1] K. Bahmanpour, R. Naghipour, M. Sedghi，关于小维数理想的余有限性，Algebr. Represent. Theory, 18 (2014), no. 2, 369–379. [BNS2] K. Bahmanpour, R. Naghipour, M. Sedghi，关于余有限模的阿贝尔范畴，Proc. Amer. Math. Soc, 142 (2014), no. 4, 1101–1107. [BS] M. Brodmann, R.Y. Sharp，局部上同调：带有几何应用的代数导论，Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1998). [DM] D. Delfino, T. Marley，局部上同调的余有限模，J. Pure. Appl, Algebra, 121(1) (1997), 45–52. [H] R. Hartshorne，仿射对偶与余有限性，Invent. Math. 9 (1970), 145–164. [K] K-I. Kawasaki，关于余有限模的阿贝尔范畴，Math. Z, 269 (2011), no. 1-2, 587–608. [KS] M. Khazaei, R. Sazeedeh，模余有限性的判据，Rend. Sem. Mat. Padova, 即将发表。[M1] L. Melkersson，关于理想余有限的模，J. Algebra 285 (2005), 649–668. [M2] L. Melkersson，关于一维理想的余有限性，J. Algebra 372 (2012), 459–462. [NS] M. Nazari, R. Sazeedeh，关于两个理想的余有限性与局部上同调，Algebr Represent Theory, 22 (2019), 375–385. [S] R. Sazeedeh, Koszul 上同调模的余有限性，arXiv:submit/4690830 [math.AC] 13 2023年1月。

数学系 ，乌尔米亚大学 ，邮政信箱：165 ，乌尔米亚，IRAN
电子邮箱： h.sabzeh96@gmail.com

数学系，乌尔米亚大学，邮政信箱：165，乌尔米亚，伊朗电子邮箱： rsazeedeh@ipm.ir