arXiv:2302.04207v1 [math.CT] 8 Feb 2023

稳定等变同伦论的自由对偶与一种新的泛性质

TIMOTHY F. CAMPION

Abstract. 我们研究从具有对偶和有限余极限的对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴到具有有限余极限的对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴的遗忘函子的左伴随 $\mathbb{D}$，以及相关的自由构造。主要结果是，$\mathbb{D}\mathcal{C}$ 总可分解为 3 个因子的积，每个因子都由某种泛性质刻画。作为应用，我们证明，对于任意紧李群 G，真正的 G-谱的 ∞-范畴可由 Bredon（$a.k.a$ “朴素”）G-谱的 ∞-范畴通过自由添加紧对象的对偶，同时保持余极限而得到。

Contents

0. 引言 3 0.1. 动机：等变同伦论 3 0.2. 扭曲平凡编织 5 0.3. 自由添加对偶：寻找恰当的设定 6 0.4. 变体 7 0.5. 概述 7 0.6. 致谢 8 1. 1-范畴预备知识 9 1.1. 幺半范畴 9 1.2. 对偶 10 1.3. 基点范畴 11 1.4. 半加性范畴 11 1.5. （余）群对象 12 2. 1-范畴论中的结构 14 2.1. 具有（扭曲）平凡编织的对象与对称性条件 14 2.2. 幂等对象与 smashing 局部化 18 2.3. 扭曲平凡编织、对偶性与幂等元 21 2.4. 互补 smashing 局部化 25 3. ∞-范畴预备知识 27 3.1. Lurie 的拟运算理论简述 27 3.2. 在同伦范畴中检测到的结构 31 3.3. 具有某些余极限的 ∞-范畴 35 4. 具有对偶和某些余极限的对称幺半 ∞-范畴 38 4.1. 典范分裂 38 4.2 初始对象 43

5. 在等变同伦论中的应用 5.1. 等变同伦论 5.2. 定理 5.1.4 的证明 参考文献 51
51
54
59

0. Introduction

这篇论文[1] 探讨可对偶对象对对称幺半 ∞-范畴的整体结构所产生的影响（$\mathcal{C}$、$\wedge$、S）。我们揭示了其中若干影响。[2] 我的最终目标是运用这些观察，理解向一个对称幺半∞-范畴自由添加对偶时会发生什么。

0.1. 动机：等变同伦论。Charles Rezk（[Rez17]）提出了这一方向上的动机性问题。设 G 为一个紧李群（例如， G 可能是有限群）。粗略地说，Rezk 问道：

（1）向有限带基点 G-空间的 ∞-范畴 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$自由添加对偶时，会发生什么?
（2）特别地，所得范畴是否与真正 G-谱的范畴 $G\mathrm{Spt}$ 有关?

作为初步说明，Rezk 所问的是某些同伦性的泛性质，这立即表明，回答他的问题应采用 ∞-范畴的语言（而不是例如模型范畴的语言）。因此，尽管这篇论文中的许多“行动”发生在相关的同伦范畴中，主要结果仍以 ∞-范畴的语言表述并证明。

不过，Rezk 提出的动机性问题或许本身也需要一些动机。为此，我们先回顾几个关于紧李群 G 的等变同伦论的事实。在不稳定情形下，粗略来说， G-等变同伦论有两种形式。一方面是 Borel$G$-等变同伦论，它在点集层面研究带有 G-作用的空间，并将底空间上的弱同伦等价视为等价。也就是说，在 Borel 框架中，若一个 G-等变映射是底空间之间的弱等价，就被视为“等价”。另一方面是 G-等变同伦论，其中只有当一个 G-等变映射在每个闭子群$H \subseteq G$的 H-不动点集上都限制为弱同伦等价时，才将其视为弱等价。许多自然的等变问题源于 Borel 框架，但 G-等变框架能提供更精细的信息，并具有更好的形式性质。Rezk 的问题涉及 G-等变同伦论。

既然我们同意研究等变同伦论，而不是伯莱尔等变同伦论，那么在进入等变同伦论的稳定范畴时，还需要作进一步区分。一方面，我们有布雷登等变稳定同伦论，[3] 其中涉及的“G-谱”允许相对于 S^1进行解环。另一方面，还有真等变稳定同伦论，其中涉及的“G-谱”不仅允许相对于

[1]这是我于2021年在圣母大学撰写的博士论文的预出版版本，导师是 Chris Schommer-Pries。[2]关于对称幺半范畴 $\mathcal{C}$中对象 X 的 $dual$ 概念的回顾，请参见定义 1.2.6；同伦论学者在研究 Spanier-Whitehead对偶性时对此概念十分熟悉。在同伦论文献中，这一概念通常被称为 $strong\ dualizability$ 。我们遵循范畴论文献中的惯例，直接称其为 $dualizable$，因为在本文中我们不会使用“可对偶性”的其他概念。[3]Bredon等变稳定同伦论常常被（略带贬义地）称为 $naive$ 等变稳定同伦论。

S^1进行解环，还允许相对于每个表示球 S^V进行解环。[4] 这里同样适用类似的评论：布雷登等变同伦论在某种意义上更容易定义，但真正等变同伦论具有更好的形式性质；对于等变同伦论的重要应用而言，使用这一更为精细的框架是必不可少的。

真正等变同伦论所具有的令人称道的形式性质之一，是其拥有良好的斯潘尼尔-怀特海德对偶理论。也就是说，正如在非等变同伦论中一样，每个有限真正 G-谱 X都有一个对偶 $X^\vee$ （参见引理 5.1.3），称为其“斯潘尼尔-怀特海德对偶”。具体而言，有限 G-谱的同伦范畴在楔积下构成对称幺半范畴，其中所有对象都有对偶。相比之下，有限布雷登谱一般不可对偶化。

虽然这与本文的主题没有直接关系，但值得指出的是，这种模式在同伦论的其他领域也会出现。例如，若 S 是一个概形，则可以将不稳定动机范畴 $H(S)$相对于 S^1 稳定化，从而得到一个稳定范畴 $SH^{S^1}(S)$；但若进一步相对于 $\mathbb{P}^1$ 而不仅仅是 S^1 稳定化，则能获得更好的形式性质，从而得到稳定动机范畴 $SH(S)$。与前述情形类似， $SH(S)$令人称道的形式性质之一是：每个定义在 S 上的光滑射影概形，在$SH(S)$中都是可对偶化的，但在 $SH^{S^1}(S)$中则不是。

一般模式似乎大致如下。给定一个“几何” ∞范畴 $\mathcal{C}$，若要得到一个令人满意的 $\mathcal{C}$“稳定版本”，仅仅寻找相对于 S^1的解环是不够的。还应在 $\mathcal{C}$中寻找其他任何“类似球面”的对象，并询问相对于这些对象的解环。迄今为止的讨论表明，判定哪些对象与此相关地“类似球面”并值得进行解环，是某种艺术形式；它以一种本质的方式编码了关于 $\mathcal{C}$中“类似球面”对象几何性质的某些信息。若要将这一在等变情形和动机情形中反复出现的一般过程形式化，可以先公理化一个对象 $C \in \mathcal{C}$ 被视为“球面”所需满足的适当性质，再研究在幺半积下将此类对象取逆后会发生什么。Robalo [Rob15],沿着 Voevodsky [Voe98], 的思路，对这一范式作了较为一般的研究；Voevodsky 将其归功于 Jeff Smith 对 Adams 构造谱的楔积 [Ada95]所作的未发表研究。在那里，若一个对象 T 是对称的，它就被称为“类似球面”；这里的对称是指循环置换$T^{\wedge 3} \to T^{\wedge 3}$ （如果幺半积 $\wedge$ 是笛卡尔积，则记作（x， y， z） $\mapsto$ （z， x， y））应与恒等式同伦（[Rob15，定义 2.16]）。Robalo / Voevodsky / Smith 证明，若 T是对称的，那么按定义由 $\mathcal{C}$ 在幺半积 T 下普遍取逆所得到的范畴 $\mathcal{C}[T^{-1}]$，可以按熟悉的方式计算为对称幺半 ∞范畴的序列余极限 $\mathcal{C}_T \operatorname{lim}\longrightarrow(\mathcal{C} \xrightarrow{T\wedge}(\mathcal{C} \xrightarrow{T\wedge} \cdots)$。反过来亦成立：若$\mathcal{C}_T$能正确计算出 $\mathcal{C}[T^{-1}]$，则 T是对称的（参见 [Nik17，命题 6]）。此外还有一个无限型版本：若 $\mathcal{C}$ 是可呈示对称幺半的，则令$\mathcal{C}[T^{-1}, L]$ 为由 $\mathcal{C}$ 在 $\wedge$ 下普遍取逆 T，同时保持余极限后得到的可呈示对称幺半 ∞范畴。那么，若 T 是对称的，

[4]这里， V 是一个实 G-表示，而表示球 S^V 是它的一点紧化。

我们有逆极限公式 $\mathcal{C}[T^{-1},L]=\lim\!\leftarrow\!\!-(\mathcal{C}\xleftarrow{-\otimes T}\mathcal{C}\xleftarrow{-\otimes T}\cdots)$；反过来，若该公式成立，则 T是对称的。这类定理应与代数 K理论中的“群完备化”定理相比较，例如 McDuff-Segal 的定理 [MS76]。

此时，我们或许可以得出如下结论：

（1）“类球”对象应简单地定义为对称对象。（2）一个良好的“真正稳定化”理论应致力于识别这类类球对象，并在幺半群意义下对它们求逆。（3）当一个对象是类球对象时，我们应当庆幸有一个特别简单的公式可以对其求逆。

然而，这些结论多少有些预设了问题：如果我们相信这就是故事的终点，那么从某种意义上说，对类球对象求逆的最终理由，只不过是我们恰好知道一个便于执行这一操作的公式。例如，我们尚未找出与类球对象求逆相关的泛性质。我们也尚未将类球对象的求逆与良好对偶性质这一要求联系起来。除了这些构造的公式简明而熟悉之外，对于这些优美公式的重要意义，我们几乎无话可说。

在本文中，我们反其道而行之。我们提出，不应将“真正稳定化”这一现象理解为对精心挑选的对象进行求逆的过程，而应将其理解为对相当一般地选取的对象施加斯潘尼尔-怀特海德对偶理论的过程。也就是说，人们常以真等变稳定同伦论具有良好的斯潘尼尔-怀特海德对偶理论为由，论证其用途；我们则主张认真对待这一论据。我们证明（推论 3.2.2），对于一个对称幺半紧生成 ∞-范畴的紧对象，存在一种良定义的方式，可以自由地为其添加对偶。此外，我们证明，对带基点 G-空间的 ∞-范畴 $G\mathrm{Top}_*$ 进行这一操作后，所得范畴 $\mathbb{D}_\omega G\mathrm{Top}_*$ 几乎就是由真 G-谱构成的 ∞范畴 $G\mathrm{Spt}$；事实上，$\mathbb{D}_\omega G\mathrm{Top}_*$ 可分解为若干子范畴的积；其中一个因子（其特征是唯一的稳定因子）正是 $G\mathrm{Spt}$（推论 5.1.5）。

因此，对 Rezk 所提问题的回答是：在适当意义下，我们确实可以自由地为 G-空间添加对偶；由此得到的范畴与 G-谱范畴密切相关，但还附带一些额外的非稳定“杂项”。如果我们进一步将范畴稳定化，例如对 Bredon G-谱的对称幺半 ∞-范畴$G\mathrm{Top}_*[(S^1)^{-1}]$ 应用函子 $\mathbb{D}_\omega$，就能除去这些“杂项”，此时所得的正是由真正的 G- 谱构成的对称幺半 ∞- 范畴 $G\mathrm{Spt}$。

0.2. 扭曲平凡编织。推论 5.1.5 的证明确实让我们对“类球对象”的本质有了一些了解，因为该结果取决于对称对象的行为。事实上，在论文的大部分内容中，我们使用稍强的条件（引理 2.1.10）：对象 T 具有扭曲平凡编织（定义 2.1.2），这意味着编织，或称“交换”映射 $\beta_{T,T}\colon T\wedge T\to T\wedge T$是（同伦于）形如 $\mathrm{id}_T\wedge t\colon T\wedge T\to T\wedge T$的映射，其中 $t\colon T\to T$。[5]例如（例 2.1.4），当 $T=S^n$ 是带基点同伦

[5]如果还假设 T 可对偶化，那么 T 是对称的，当且仅当它具有扭曲平凡编织（引理 2.1.11）。由于我们通常无论如何都会强制使 T 可对偶化，因此这个区别对我们来说并不十分重要。

范畴 hoTop_*中的一个球面时，该条件由 $t=(-1)^n:\ S^n\to S^n$满足。类似地，带基点 G-空间的同伦范畴 $G\mathrm{Top}_*$ 中的表示球 S^V 具有扭曲平凡编织（例 2.1.6），不稳定带基点动机范畴 $H(S)$中的射影空间 $\mathbb{P}^1_S$ 也是如此（例 2.1.7）。关键观察是，如果 T 具有扭曲平凡编织，并且被强制变得可对偶化，那么在温和条件下，所得范畴分裂为“T-稳定”对象子范畴与“T-挠对象”子范畴的积（定理 3.2.10）。在前一个因子中，T 变得可逆；而在后一个因子中，T 变为零。因此，如果我们将“具有扭曲平凡编织”这一性质视为对“类球”含义的粗略近似阐释，那么定理 3.2.10 可以宽泛地表述如下：类球对象在可对偶化时，要么是可逆的，要么是幂零的。

在等变同伦论中，表示球 S^V 为带有扭曲平凡编织的 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$提供了大量对象，其中每一个对象都会诱导出 ∞-范畴$\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$的一种分裂；该范畴是通过向 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 自由添加对偶而得到的。在由 S^V 诱导的分裂中，一个因子（“S^V- 稳定”因子）使其变得可逆，而另一个因子（“S^V-挠”因子）则使其变得平凡。为了得到主要结果（推论 5.1.5、推论 5.1.6），等变同伦论所提供的真正关键在于证明：至少当我们将注意力限制在 $\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$的稳定因子上时，所有 S^V-挠因子实际上都消失了，从而 $\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$的稳定因子中的所有表示球 S^V 都变得可逆。由于 GSpt 通常被定义为（[Rob15], [GM20]）由 $G\mathrm{Top}$ 通过将表示球 S^V普遍地变为可逆而得到的，我们现在可以得出结论：$\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$的这个稳定因子恰好就是有限 G-谱的 ∞-范畴$G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$。换言之，真正等变同伦论是从 Bredon 等变同伦论出发，通过为紧对象普遍添加对偶而得到的。

0.3. 自由添加对偶：寻找合适的设定。现在我们将说明“普遍地添加对偶”的含义，并预览第 3.2.1 节的部分内容。回顾一下，根据一维配边假设 [Lur09b, Har12]，存在由一个对象生成的自由对称幺半 ∞-范畴，它由定向 0-流形及其间的定向配边构成的对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$ 给出。因此，若 X 是对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}$中的一个对象，则可通过转至对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}\cup_{\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}}}\mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$，为对象 X 普遍地添加一个对偶；其中 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{iso}}$ 是有限集的对称幺半群胚，推出是在对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴 SMC 中取的。此外，由于 SMC 是可呈示的，并且具有对偶的对称幺半 ∞-范畴所构成的全子范畴 SMD $\subset$ SMC，恰好是规范对称幺半函子 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{iso}}\to\mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$ 的右正交补对象，由伴随函子定理可知，包含函子也有一个左伴随 $\mathbb{D}:\mathrm{SMC}\to\mathrm{SMD}$。

然而，就当前目的而言，函子 $\mathbb{D}$ 略显粗糙。相反，我们研究诸如包含映射 $\mathrm{SMD}^{\mathrm{rex}}\to\mathrm{SMC}^{\mathrm{rex}}$ 这样的变体范畴：它将带有对偶和有限余极限的对称幺半 ∞-范畴包含到带有有限余极限的对称幺半 ∞-范畴中（且这些有限余极限在每个变量上都由张量积保持），以及到该全子范畴的反射 $\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}$。毕竟，人们很少有兴趣研究从诸如 $G\mathrm{Top}^{\mathrm{fin}}$ 这样具有有趣有限余极限的对称幺半 ∞-范畴出发的任意对称幺半函子。范畴

$G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 同样具有有趣的有限余极限，而它应当与该构造的输出相关。因此，自然应当在构造的两端都考虑这些余极限。此外，为了运用前面提到的分裂定理（定理 3.2.10）的全部威力，有必要知道泛函 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \to \mathbb{D}^{\mathrm{rex}} G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$保持余群对象，而余群对象是利用余积定义的。再者，为了对对象 $S^1 \in G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$及其至关重要的扭曲平凡编织作出某种合理解释，最好让所有相关函子都保持悬挂。基于这些原因，我们通常考虑函子 $\mathbb{D}^{\mathrm{rex}}$ 及保持其他余极限类的变体，而不是普通函子 $\mathbb{D}$。

0.4. 变体。主要结果有若干种版本，既有有限型版本，也有非有限型版本（见推论 5.1.6 ）。例如， $G\mathrm{Spt}$ 是由 $G\mathrm{Top}_*$ 生成的自由紧生成对称幺半 ∞ 范畴，其中紧对象具有对偶。这一结果可由有限型版本对所有对象应用 Ind 构造得到。

关于基点的一点说明：我们认为使用基点并非必要，因为任何具有对象对偶和始对象的对称幺半 ∞范畴实际上都是带基点的（命题 1.3.3）。因此，只要证明 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 是由 $G\mathrm{Top}^{\mathrm{fin}}$ 生成的自由对称幺半、带基点且具有有限余极限的 ∞ 范畴（将其视为具有有限余极限的对称幺半 ∞ 范畴），便可得出 $\mathbb{D}^{\mathrm{rex}} G\mathrm{Top}^{\mathrm{fin}} = \mathbb{D}^{\mathrm{rex}} G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$，从而上述讨论应当可以省去基点。不过，我们目前尚未证明 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 具有所需的泛性质。事实上，经过类似考量，应当可以为等变稳定同伦论导出一种泛性质，其起始数据甚至更简单——仅有轨道范畴 $\mathcal{O}_G$ 本身。

我们希望将这一方法也用于为稳定动机范畴 $SH(S)$建立泛性质。然而，这里的情况稍微复杂一些：一般而言，并非每个紧对象都是可对偶化的（尽管光滑射影概形提供了丰富的可对偶对象）。此外，在这种情况下，似乎仅仅自由地为对象 $\mathbb{P}^1$ 添加一个对偶并进行稳定化，并不能恰好缩减为 $SH(S)$——似乎还存在其他稳定因子。我们希望在未来的工作中研究这些因子。

0.5. 概述。第 1 节和第 2 节与本文其余部分不同，完全置于 1-范畴设定中。第 1 节介绍了关于（对称）幺半 1-范畴的一些标准背景知识，其中没有新内容。这里提及的最不熟悉的事实或许是 Houston 定理，即命题 1.4.6：任何具有有限余积和对偶的辫编织幺半范畴都是半加性的。第 2 节同样完全置于 1-范畴设定中，但包含了关于分裂幺半局部化的最关键结果，这些结果本质上属于 1-范畴。在定义 2.1.2 中，我们引入了具有扭曲平凡编织的对象这一概念，它与对称性条件（定义 2.1.8）密切相关。Voevodsky、 [Rob15、定义 2.16], [Hov01、定义 9.2], [Nik 17], 及其他人都曾使用这一条件来控制幺半局部化。我们证明（命题 2.3.1），任何具有扭曲平凡编织的可对偶对象都会导出一个 smashing-cosmashing 局部化。我们在第 2.4 节回顾这一点如何常常意味着，整个范畴会沿着由该对象所确定的方向分裂。

接下来，我们将这些 1-范畴结果应用于 ∞-范畴设定。第 3 节构建了在 ∞-范畴设定中应用这些结果所需的基础设施，主要回顾了 [Lur17] 的相关内容。第 4 节探讨了当对偶与余极限相互作用时，在极广泛的情形下出现的某些分裂。第 5 节将这一理论应用于等变同伦论这一实例，并由此导出主要定理——推论 5.1.6。

0.6. 致谢。本文是我博士论文的预出版版本，该论文于2016年至2021年在圣母大学完成。此后，我对其进行了少量增补和修订。我要感谢我的导师 Chris Schomer-Pries，感谢他帮助我成长，并逐渐成熟为一名数学家，也感谢他在我面临困难时给予支持。还要感谢我的论文答辩委员会成员 Chris Schommer-Pries、Mark Behrens、Stephan Stolz 和 Pavel Mnev——在我于圣母大学期间，他们每一位都慷慨地付出了时间并给予支持。借此机会，我也要感谢在圣母大学期间与我共事的所有优秀人士，尤其是几何与拓扑研究组的成员；我要感谢我的家人，感谢他们在我面临困难时一直支持我。我衷心感谢美国国家科学基金会资助项目 DMS-1547292 对本研究部分工作的支持，以及美国陆军研究办公室通过多学科大学研究计划资助项目 W911NF-20-1-0082 提供的支持。

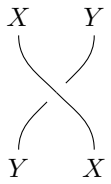
1. 1-Categorical Preliminaries

本章讨论 1-范畴和幺半 1-范畴中遇到的若干基本结构。与本文其余部分不同，本章不会出现任何 ∞-范畴。大部分内容是对一些基本概念的回顾。不过，本文的核心思想也出现在第 2.1 节和第 2.3 节中，即在可对偶性的背景下，关注具有扭曲平凡编织的对象（定义 2.1.2）。关于这些对象的主要定理是命题 2.3.1；结合命题 2.4.2，它表明具有扭曲平凡编织的可对偶对象往往会导致整个范畴的分裂。将这些观察应用于此类对象的各种“类球面”实例（见第 2.1 节）后所得到的推论，是本文的主要议题，并将在第 4 节和第5节中进一步探讨。

第 1.4 节将讨论一个或许广为人知、但宣传不足的事实：在命题 1.4.6 中，我们回顾了 Robin Houston 的一个结果 [Hou08]：任何具有对偶和有限余积的对称幺半范畴都是半加性的。

本章中，我们通常讨论编织幺半范畴。这并不是因为我们特别关注那些有编织结构但不具对称性的例子，而是因为与对称情形相比，我们发现相应的弦图在辫编织情形下更容易理解。

1.1. 幺半范畴。我们假定读者熟悉范畴论的基本概念，以及幺半范畴、编织幺半范畴和对称幺半范畴。我们将经常利用 Mac Lane 相干定理，假定幺半范畴是严格的，也就是说，结合子和单位子都是恒等态射。我们也将自由使用弦图，在幺半范畴、编织幺半范畴或对称幺半范畴中进行推理。我们假定读者熟悉弦图的用法。我们的约定是，弦图从上到下阅读，编织同构表示如下：

$\beta_{X,Y} =$ 

作为使用弦图的一部分，我们假设读者熟悉与对偶对象相关的“杯”和“帽”的用法（对偶对象的定义将在下文定义 1.2.6 中重述）。在弦图中考虑同时涉及某个对象及其对偶对象的态射时，我们会用箭头标明弦的方向。如果对象 X 的方向向下，那么 $X^\vee$ 的方向就向上，依此类推。

记号 1.1.1. 一方面，幺半范畴及其强幺半函子与另一方面的唯一对象双范畴之间存在等价。若 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，则用 $\mathbb{B}\mathcal{C}$ 表示相应的单对象双范畴。

定义 1.1.2. 设 $\mathcal{K}$ 为小范畴类。带有 $\mathcal{K}$-余极限的幺半范畴是指幺半范畴 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$，满足 $\mathcal{C}$ 具有 $\mathcal{K}$-余极限，且 $\wedge$

在每个变量中分别保持这些余极限。带有 $\mathcal{K}$-余极限的辫编（分别为对称）幺半范畴，是指其底层幺半范畴为带有 $\mathcal{K}$-余极限的幺半范畴的辫编（分别为对称）幺半范畴。

注 1.1.3。关于幺半结构与余极限在 ∞-范畴语境下如何相互作用的更系统论述，见第3.3节。

定义 1.1.4。局部化是一个伴随 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon i$，其余单位 $Li \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 是同构。单体局部化是一个局部化 $L \dashv i$，其中 L 是强单体的。辫编织（分别地，对称）幺半局部化按显然的方式定义。

smashing 局部化是一个辫编织幺半局部化 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon i$，满足对于所有 $X \in \mathcal{C}$，映射 $i(S) \wedge X \to iL(X)$ 都是同构（这里 S 是$\mathcal{D}$ 的单位，$\wedge$ 是 $\mathcal{C}$中的张量积）。

关于 smashing 局部化，我们将在下文第2.2节进一步讨论。

1.2. 对偶。本节回顾幺半范畴，尤其是编织幺半范畴中的可对偶性概念。

定义 1.2.1. 设 $(\mathcal{C}, S, \wedge)$ 是一个幺半范畴。若 C 是 $\mathbb{B}\mathcal{C}$ 中的一个等价，则称对象 $C \in \mathcal{C}$ 可逆。具体而言，这意味着存在一个对象 $C^{-1} \in \mathcal{C}$，使得 $C^{-1} \wedge C \cong S$ 且 $C \wedge C^{-1} \cong S$。我们称 C^{-1} 为 C 的逆元。

注 1.2.2. 若 $\mathcal{C}$ 是辫化的，则两个同构 $C^{-1} \wedge C \cong S$ 和 $C \wedge C^{-1} \cong S$ 等价，因此只需验证其中一个。

注 1.2.3. 设 $(\mathcal{C}, S, \wedge)$ 是一个幺半范畴。若 $C \in \mathcal{C}$ 的逆元存在，则其在同构意义下唯一，这也说明了定义 1.2.1 中所用记号 C^{-1} 的合理性。

注记 1.2.4. 强幺半函子保持可逆对象及其逆元。

例 1.2.5. 幺半范畴的单位对象与自身互为逆元。

定义 1.2.6. 设 $(\mathcal{C}, S, \wedge)$ 是一个幺半范畴。在 $\mathcal{C}$ 中，对偶数据由相关双范畴 $\mathbb{B}\mathcal{C}$ 中的一个伴随构成。具体而言，这意味着我们有一对对象 R, L 和态射 $\eta\colon S \to R \wedge L$（单位），$\varepsilon\colon L \wedge R \to S$（余单位），它们满足三角等式：$(\varepsilon \wedge L)(L \wedge \eta) = \mathrm{id}_L$ 和 $\mathrm{id}_R = (R \wedge \varepsilon)(\eta \wedge R)$。我们称 L 为左对偶，R 为右对偶；或者称 L 是 R 的左对偶，而 R 是 L 的右对偶。若 $\mathcal{C}$ 是辫状的，则左对偶与右对偶重合，因此我们在术语中省略左右性，并记作 $L = R^{\vee}, R = L^{\vee}$。

注 1.2.7. 设 L 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。那么，将 L 扩张为左对偶为 L 的对偶数据，其群胚要么为空，要么是可缩的。因此，拥有右对偶和拥有右伴随一样，是对象的一种性质，而非一种结构。这一事实说明了定义 1.2.6 中引入的记号 $X^{\vee}$ 是合理的。

注 1.2.8. 强幺半函子保持对偶：若 $(L, R, \eta, \varepsilon)$ 是一个对偶数据，且 F 是一个强幺半函子，那么 $(F(L)\ F(R)\ F(\eta)\ F(\varepsilon))$ 也是一个对偶数据。

注 1.2.9. 在一些代数拓扑文献中，“强可对偶”一词用于指称我们在定义 1.2.6 中所称的“可对偶化”。这种术语有一定道理：若 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个具有内部同态的幺半范畴，那么根据伴随的唯一性，X 的对偶必定与内部同态 $[X, S]$ 一致。因此，将 $[X, S]$ 称为一种在存在内部同态时总是存在的“对偶”，并将“强对偶”一词留给存在单位映射以补全对偶数据的情形，确有一定道理。然而，由于我们在此不考虑 X 并非（强）可对偶化时的内部同态 $[X, S]$，因此我们选择用普通术语“可对偶化”来指称定义 1.2.6 中的情形。

例 1.2.10。任何可逆对象都是可对偶化的。这是以下事实的特例：2-范畴中的任何等价都可以提升为伴随等价。

1.3. 基点范畴。本节回顾具有零对象的范畴的基本概念。

定义 1.3.1。若范畴 $\mathcal{C}$ 有一个既是始对象又是终对象的对象 $0 = 0_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$，则称其为带基点的。基点范畴之间的基点函子是保持零对象的函子。带基点的幺半范畴是具有始对象且其底层范畴为基点范畴的幺半范畴。带辫的（分别地，对称的）带基点幺半范畴是指其底层幺半范畴为带基点幺半范畴的带辫的（分别地，对称的）幺半范畴。

注 1.3.2。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有始对象 $\emptyset$ 和终对象 1 的 ∞-范畴。那么，$\mathcal{C}$ 是带基点的，当且仅当唯一的映射 $\emptyset \to 1$ 可逆。

一个民间结果是

命题 1.3.3. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个幺半范畴，具有一个始对象 $\emptyset$，且对任意对象 X，$X \wedge (-)$ 都保留它。那么 $\emptyset$ 有右对偶 $\emptyset^\vee$，当且仅当 $\emptyset = \emptyset^\vee$ 是零对象。

证明. 一个方向上，容易验证零对象是典范自对偶的。反过来，假设 $\emptyset$ 有对偶 $\emptyset^\vee$，且 $\wedge$ 保留始对象。三角等式之一表明，$\emptyset^\vee$ 是 $\emptyset \wedge \emptyset^\vee \wedge \emptyset = \emptyset$ 的一个收缩，因此 $\emptyset^\vee \cong \emptyset$。于是，映射 $X \to \emptyset$ 通过伴随对应于映射 $\emptyset = X \wedge \emptyset^\vee \to S$，因此 $\emptyset$ 也是终对象，正如所需。□

1.4. 半加性范畴。本节回顾以交换幺半群为丰的范畴的基本概念。

定义 1.4.1. 设 X、Y、Z 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象。若存在图表 $X \leftrightarrows Z \rightleftarrows Y$，使 X、Y 成为交换幂等元的分裂，同时使 Z 成为 X 和 Y 的积与余积，则称 Z 为 X 和 Y 的（二元）双积或直和，并记作 $Z = X \oplus Y$。称 X、Y 是 Z 的互补收缩。若每对 X、Y 都能纳入一个双积图表，则称 $\mathcal{C}$ 具有二元双积；若此外 $\mathcal{C}$ 具有零对象，则称 $\mathcal{C}$ 具有有限双积，或称 $\mathcal{C}$ 是半加性的。

若 $\mathcal{C}$ 是幺半的，则当双积被 $X \wedge (-)$ 和 $(-) \wedge X$ 对每个 $X \in \mathcal{C}$ 保持时，它也是幺半的。幺半半加性范畴是指具有有限余积且其底层范畴为半加性范畴的幺半范畴。编织（分别地，对称）幺半半加性范畴的定义显而易见。

注 1.4.2. 设 $Z = X \oplus Y$ 属于范畴 $\mathcal{C}$。设 e、f 分别是由 X、Y 分裂的 Z 上的幂等元。那么 ef 也是一个幂等元，其分裂 W （它存在于 $\mathcal{C}$ 的幂等完备化中）既是子终端的（即任意对象到 W 的映射至多有一个），也是余子终端的（即任意对象到 W 的映射至多有一个）。因此，若 $\mathcal{C}$ 有零对象，那么 W 就是零对象。

注 1.4.3. 假设 X 是 Z 的一个收缩，且 Y、Y' 是 Z 的收缩，并且二者都与 X 互为补对象。那么， Y、Y' 作为 Z 的子对象（或商对象）是相等的。因此，如果存在，我们可以谈论 Z 的一个收缩的补对象。

注 1.4.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限双积的范畴。那么， $\mathcal{C}$ 上唯一地具有交换幺半群富集结构。反过来，若 $\mathcal{C}$ 富集于交换幺半群且具有有限积或有限余积，则 $\mathcal{C}$ 是半加性的。

注 1.4.5. 若 $\mathcal{C}$ 是带基点的，且有 X、$Y \in \mathcal{C}$，则 X 与 Y 的双积存在，当且仅当余积 $X \amalg Y$ 和积 $X \times Y$ 存在，并且典范映射 $X \amalg Y \to X \times Y$ 是一个同构。

类比命题 1.3.3，我们还有另一个广为人知的结果：

命题 1.4.6（[Hou08], ，另见 [GS16]）。设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个具有零对象的辫编织幺半范畴。假设积 $S \times S$ 存在，并且设 $X, Y \in \mathcal{C}$是满足余积 $X \amalg Y$存在的对象；此外， $X \wedge (-)$、 $Y \wedge (-)$ 和 $(X \amalg Y) \wedge (-)$ 都保留积 $S \times S$，而 $(-) \wedge (S \times S)$ 保留余积 $X \amalg Y$。那么 $X \amalg Y$是一个双积 $X \oplus Y$。

注 1.4.7。特别地，这个结果及其对偶意味着，若 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个辫编织幺半范畴，且其有限余积在每个变量中都由 $\wedge$ 保留，那么在以下任一情形下，双积 $X \oplus Y$ 都存在：

(1) $S \times S$ 存在，且 X、Y 有对偶。(2) $S \amalg S$ 有对偶。(3) 每个对象都有对偶。

命题 1.4.6 的证明。根据假设，我们有

$$\begin{aligned}(X \times X) \amalg (Y \times Y) &= ((X \wedge S) \times (X \wedge S)) \amalg ((Y \wedge S) \times (Y \wedge S)) \\ &= (X \wedge (S \times S)) \amalg (Y \wedge (S \times S)) \\ &= (X \amalg Y) \wedge (S \times S) \\ &= ((X \amalg Y) \wedge S) \times ((X \amalg Y) \wedge S) \\ &= ((X \wedge S) \amalg (Y \wedge S)) \times ((X \wedge S) \amalg (Y \wedge S)) \\ &= (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)\end{aligned}$$

（谨慎地说，我们有$(X \amalg Y) \wedge (S \times S)$存在，并由假设推得其他对象的存在。）其可逆性定义半可加性的典范映射 $X \amalg Y \to X \times Y$是这个典范同构的一个收缩，因此也是同构。□

1.5. （余）群对象。本节回顾群对象和余群对象的基本概念。

定义 1.5.1。在具有有限积的范畴 $\mathcal{C}$ 中，群对象是一个对象X ，它带有映射 $1 \xrightarrow{u} X \xleftarrow{m} X \times X$ （单位和乘法）以及一个取逆映射 $(-1)\colon\ X \to X$ ，并满足群公理。对偶地，我们定义具有有限余积的范畴中的余群对象。

加性范畴是这样一种半加性范畴：其中每个对象都是群对象，或者（等价地——见注释 1.5.2）都是余群对象。幺半加性范畴是这样一种幺半半加性范畴：其底层范畴是加性范畴。编织的（分别地，对称的）幺半加性范畴以显然的方式定义。

注释 1.5.2. 如果 $\mathcal{C}$ 是半加性的，那么群对象和余群对象是同一回事，并且一个对象至多以一种方式成为（余）群。对象X 是（余）群对象，当且仅当对于所有 Y，交换幺半群 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 是阿贝尔群；当且仅当对于所有 Y，交换幺半群 $\mathrm{Hom}(Y,X)$ 是阿贝尔群；当且仅当对于所有 X，交换幺半群 $\mathrm{Hom}(X,X)$ 是阿贝尔群。换一种说法，“剪切”映射 $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ * & \mathrm{id} \end{pmatrix}\colon$

$X \oplus X \to X \oplus X$ 是一个同构。

注记 1.5.3. （余）群对象在任何保持有限（余）积的函子下都不变。

注记 1.5.4. 假设 X 是一个余群对象，并且余乘法 $X \to X \amalg X$ 的余纤维 C 存在。那么， C 余表征 $\mathrm{Hom}(X, -)$ 中的可逆元素。

例 1.5.5. 球面 S^1 是 hoTop_* 中的一个余群对象，其中 hoTop_* 是带基点空间的同伦范畴。

例 1.5.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带悬挂和有限余积的带基点 ∞-范畴。由例 1.5.5 可知，任意对象 X 的悬挂 ΣX 都是 $\mathrm{ho}\mathcal{C}$ 中的一个余群对象。

余群结构提供了一种确保补对象存在的方法：

引理 1.5.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带基点的范畴，并假设 $X \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} Z$ 是一个收缩。若存在一个补对象 $Z \underset{q}{\overset{j}{\rightleftarrows}} Y$，使其为 i 到 X 的补对象，则 q 将 Y 表示为 i 的余核（对偶地，j 将 Y 表示为 p 的核）。反过来，若 $\mathcal{C}$ 是半加性的且 X 是一个群对象，则 i 的任意余核（或 p 的任意核）都是 X 的补对象。或者，对 $1 + i(-1)$ 的幂等元分裂 r 会给出 Z 的一个补收缩。

证明。只有“反过来”这部分并非完全标准。为此，利用 X 上的取反构造作用于 Z 的幂等元 $1 + i(-1)p$ ，然后按通常方法继续。□

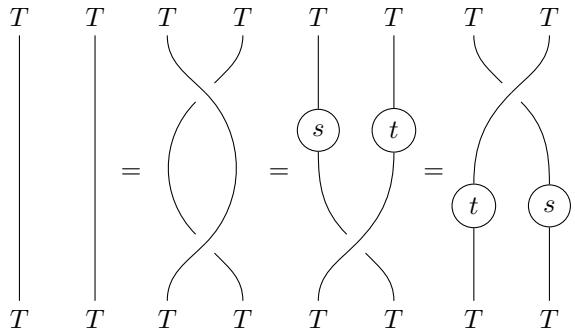
2. Structures in 1-Category Theory

2.1. 具有（扭曲）平凡编织和对称性条件的对象。本节讨论具有扭曲平凡编织的对象（定义 2.1.2），以及它与对称性条件（定义 2.1.8）之间的关系。后者在单体局部化研究中广为人知；前者一般更强（引理 2.1.10），但有时更容易验证。此外，只要所讨论的对象可对偶化，这两个条件就等价（引理 2.1.11）。我们稍后会看到，例如在第 2.3 节中，当为对象添置一个 $\wedge$-对偶而非 $\wedge$-逆元时，这些条件仍然适用。

命题 2.1.1. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 为一个辫编织幺半范畴。设 T 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，并设 $s, t : T \rightrightarrows T$ 是 T 的自同态。考虑编织态射 $\beta_{T,\,T} : T \wedge T \to T \wedge T$。以下各项等价：

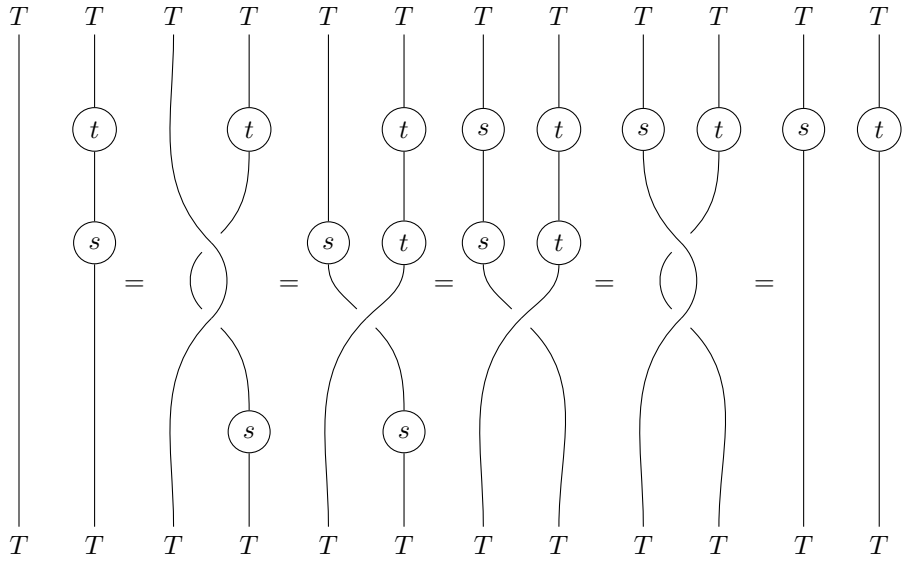
(1) $\beta_{T,\,T} = s \wedge t$
(2) $\beta_{T,\,T} = t \wedge s$
(3) $\beta_{T,\,T} = ts \wedge \mathrm{id}_T$
(4) $\beta_{T,\,T} = st \wedge \mathrm{id}_T$
(5) $\beta_{T,\,T} = \mathrm{id}_T \wedge ts$
(6) $\beta_{T,\,T} = \mathrm{id}_T \wedge st$

证明。首先我们证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。假设 (1)，计算如下：



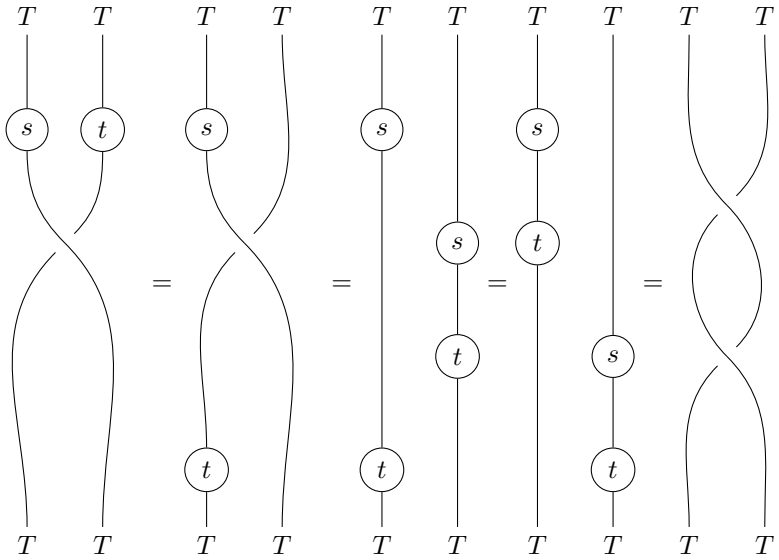
这里在第一个等式中我们进行了同伦变形，因此在第二个等式中可以应用式 (1) 中的恒等式 $\beta_{T,\,T} = s \wedge t$。在第三个等式中我们进行了同伦变形。这表明 $\mathrm{id}_{T\wedge T} = (t \wedge s)\beta_T^{-1}{}_{,\,T}$。由于编织可逆，这意味着 $t \wedge s = \beta_{T,\,T}$，即式 (2) 成立。当然，由对称性可得 (2) $\Rightarrow$ (1)。这也意味着 (3) $\Leftrightarrow$ (5) 和 (2) $\Leftrightarrow$ (4)。

现在我们证明 (1) ⇒ (5)。假设 (1) 成立，我们计算：



在第一个等式中，我们进行了同伦变形，因此在第二个等式中可以应用式 (1) 的恒等式 $\beta_{T,\ T} = s \wedge t$。在第三个等式中，我们进行了同伦变形，因此在第四个等式中可以再次应用恒等式 $\beta_{T,\ T} = s \wedge t$。在第五个等式中，我们进行了同伦变形。最后得到 $\mathrm{id}_T \wedge ts = s \wedge t$，根据假设，它与 $\beta_{T,\ T}$ 相同，因此 (5) 如所声称成立。

现在我们证明 (5) ⇒ (1)。假设 (5) 成立，我们计算：



在第一个等式中，我们进行了同伦变形，因此在第二个等式中可以使用式 (5) 中的等式 $\beta_{T,\ T} = \mathrm{id}_T \wedge ts$。在第三个等式中，我们进行了同伦变形，因此在第四个等式中可以再次使用式 (5) 中的等式 $\beta_{T,\ T} = \mathrm{id}_T \wedge ts$，以及式 (3) 中的等式 $\beta_{T,\ T} = ts \wedge \mathrm{id}_T$，我们已经

可见这等价于 (5)。由此得到的等式 $\beta_{T,\,T}(s\wedge t)=\beta^2_{T,\,T}$ 意味着$s\wedge t=\beta_{T,\,T}$，因为 $\beta_{T,\,T}$可逆。因此，(5) $\Rightarrow$ (1)，证毕。

当然，由对称性可知，(1) $\Leftrightarrow$ (5) 蕴含 (2) $\Leftrightarrow$ (4)。结合前面的等价关系，即得结论。□

定义 2.1.2. 设 T 是一个辫编织幺半范畴中的对象，且t 是 T 的自同态。若编织态射 $\beta_{T,\,T}\colon T\wedge T\to T\wedge T$ 等于 $\mathrm{id}_T\wedge t$ （或者根据命题 2.1.1，等价地等于 $t\wedge \mathrm{id}_T$），则称 T 具有 t-扭曲平凡编织。若 t 是恒等式，则称 T 具有平凡编织。称 T 具有扭曲平凡编织，是指它具有某个 t 对应的 t-扭曲平凡编织。

注 2.1.3. 辫编织幺半群函子保持扭曲平凡编织：若 $X\in\mathcal{C}$ 具有扭曲平凡编织，且 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个辫编织幺半群函子，则 $F(X)$ 也具有扭曲平凡编织。

具有扭曲平凡编织的对象会在各种情境中作为“预-∧-可逆”对象出现。

例 2.1.4. 球面 S^1 作为 hoTop_*中以 $1=e^0$为基点的对象，具有 (-1)-平凡编织。这里，(-1)是将 $e^{i\theta}$ 映至 $e^{-i\theta}$的 S^1 自同构。这是因为矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 经由可逆矩阵构成的同伦与矩阵 $1\oplus(-1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$同伦，例如取同伦$\begin{pmatrix}\sin t\cos t\\ \cos t\quad -\sin t\end{pmatrix}$即可。

例 2.1.5. 设 $(\mathcal{C},\wedge,S)$ 是一个 E_n-幺半带基点的 ∞-范畴 $(n\geq 2)$，具有悬挂（ X 的悬挂记作 ΣX），且 $\wedge$ 在其上分配。则ΣS 具有 $(-1)_{\mathcal{C}}$-扭曲平凡编织，其中 $(-1)_{\mathcal{C}}\colon\Sigma S\to\Sigma S$ 由例 2.1.4 中 S^1 的自同构 (-1) 诱导。

例 2.1.6. 设 G 是一个紧李群， V 是一个维数为 n 的表示。设 S^V 是相应的表示球面，即 V 的一点紧化。则 S^V 自然是基点 G-空间的同伦范畴 $\mathrm{ho}G\mathrm{Top}_*$ 中的一个对象，基点可以取在 0 或 ∞。任一基点都被由 $-\mathrm{id}_V$ 归纳而来的 G-等变自同构 $(-1)^n\colon S^V\to S^V$ 固定。 S^V 上的编织是 $(-1)^n$-平凡的。对此，可以将例 2.1.4 中的线性同伦与 V 张量积，得到一个经过 V 的自同构的等变同伦，并由此在球面 S^V 上归纳出一个等变同伦。例 2.1.4 是 G 为平凡群的情形。

这个例子引出了本文的主要结果，即推论 5.1.5。

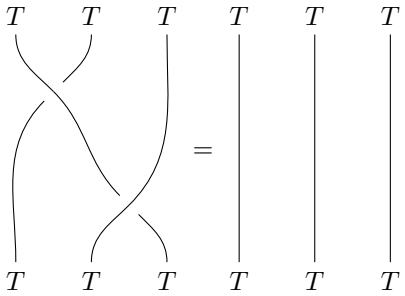
例 2.1.7. 设 S 是一个概形。那么， $\mathbb{P}^1_S$，即 S上的 Tate 球面，在 0 或 ∞处都可取一个基点；无论取哪一个，该基点都在由 $\mathbb{A}^1_S$上的（-1）映射诱导的自同构（-1）下保持不变，其中 $\mathbb{A}^1_S$是秩为 1 的平凡丛。 [6] $\mathbb{P}^1_S$ 上的编织在以 $\mathbb{A}^1_S$局部化的、 S 上的带基点光滑概形同伦范畴 $\mathrm{hoSm}_{S,*}$ 中是（-1）-平凡的。为此，我们使用 Thom 空间结构： $\mathbb{P}^1_S\wedge_S$

[6]请注意，即使转到稳定范畴后，这个映射也不是恒等映射的加法逆元，因此（-1）或许是个误称。例如，它的 Betti 实现与恒等映射同伦，而不是恒等映射的加法逆元。

$\mathbb{P}^1_S = \mathrm{Th}(\mathbb{A}^1_S) \wedge_S \mathrm{Th}(\mathbb{A}^1_S) = \mathrm{Th}(\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{A}^1_S) = \mathrm{Th}(\mathbb{A}^2_S)$。因此，通过 $\mathbb{A}^2_S$ 的线性自同构给出的一个 $\mathbb{A}^1$-同伦，会在 $\mathbb{P}^1_S \wedge_S \mathbb{P}^1_S$的诱导自映射之间产生一个 $\mathbb{A}^1$-同伦，所以只需证明来自（例 2.1.4）的矩阵 B 和$1 \oplus$ （-1）在 $\mathbf{GL}_2$中是 $\mathbb{A}^1$-同伦的。目前尚不清楚能否通过单个 $\mathbb{A}^1$-同伦做到这一点，但可以分两步完成，因为线性同伦 $\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1+t & -t \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & -1 \end{pmatrix}$（注意二者的行列式都是常数 -1）分别表明 B 和 $1\oplus$（-1）与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$是 $\mathbb{A}^1$-同伦的。我们计划在未来的工作中进一步研究这个例子。

在文献中，通常采用一个稍弱的条件来代替：

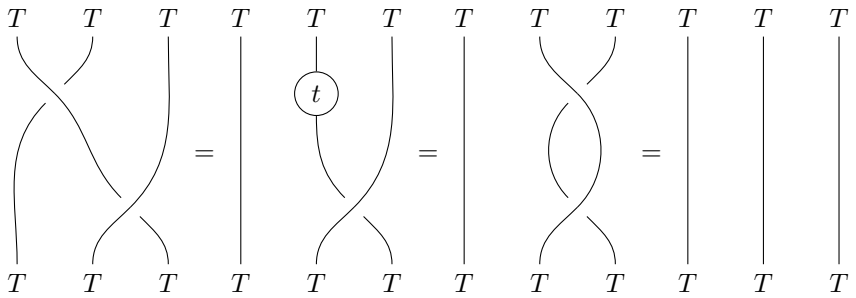
定义 2.1.8（Smith, [Voe98]）。设 T 是辫编织幺半范畴中的一个对象。若映射 $(\mathrm{id}_T \wedge \beta^{-1}_{T\,T,})(\beta_{T,T} \wedge \mathrm{id}_T)$ 等于 id_{T^3}，则称 T 是对称的。



注 2.1.9。我们不知道定义 2.1.8 是否曾在一般的辫编织幺半范畴（而不仅仅是对称幺半范畴）中出现于文献。交叉的左右性选择旨在确保下面的引理 2.1.10 成立。在对称幺半范畴中，若T 是对称的，则对任意 $n \in \mathbb{N}$，同态 $\Sigma_n \to \mathrm{Aut}(T^{\wedge n})$ 可经由符号同态 $\mathrm{sgn} : \Sigma_n \to C_2$ 分解。类似地，在辫编织情形中，若 T 是对称的，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，典范映射 $B_n \to \mathrm{Aut}(T^{\wedge n})$ 可经由阿贝尔化同态 $B_n \to \mathbb{Z}$ 分解（其中 B_n 是有n 股辫的辫群）。从 B_n 的通常生成元与关系描述很容易看出这一点：生成元 b_i 是第 i 股辫从第（$i+1$）股辫上方穿过的正交叉，因为对称性条件要求 $b_i b_{i+1}^{-1} \equiv 1$。

引理 2.1.10. 设 T 是一个具有扭曲 -
平凡编织的辫编织幺半范畴中的对象。那么 T 是对称的。

证明。设 t 为扭转。我们有（利用命题 2.1.1）：

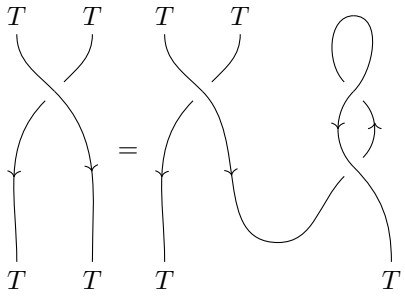


□

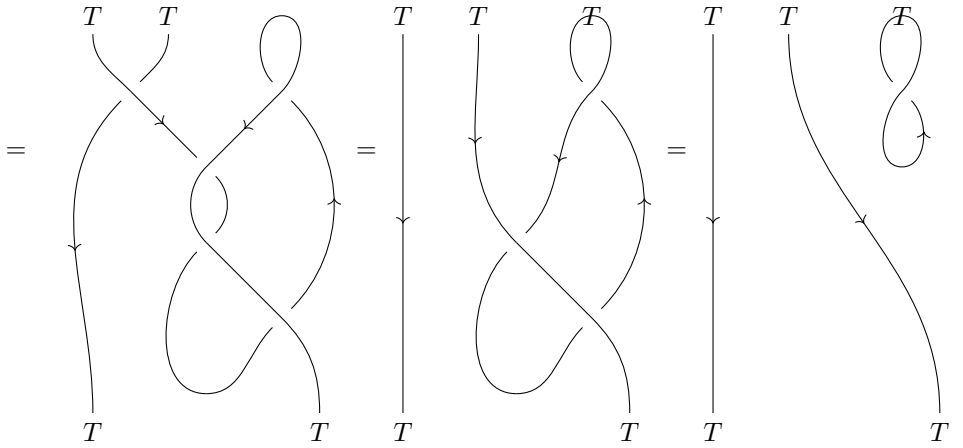
反过来，若 T 可对偶化，则结论成立——而这正是我们希望强制满足的条件。

引理 2.1.11. 设 T 是辫编织幺半范畴中的一个对象。假设 T 是对称的且可对偶化的。那么 T 具有 t-扭曲平凡编织，其中 $t = \mathrm{id}_T \wedge (\varepsilon \beta_T^{-1}{}_{,T^\vee} \eta)$ 是乘以 T 的欧拉特征。

证明. 首先，我们引入一些杯、帽和交叉：



现在我们再引入几个交叉，然后应用对称性条件，最后进行化简：



□

2.2. 幂等对象与 smashing 局部化。本节回顾 smashing 和余 smashing 局部化的一些基本概念。本节的大部分内容可见于预印本 [BD06], , 该预印本此前曾发布在 Drinfeld 的网站上。

定义 2.2.1（[BD06]）。设 $(\mathcal{C}, S, \wedge)$ 是一个辫编织幺半范畴。

- $\mathcal{C}$ 中的闭幂等元是一个对象 E，它配备了一个态射 $r : S \to E$，使得诱导的态射 $r \wedge \mathrm{id}_E \colon S \wedge E \to E \wedge E$ 是一个同构（等价地，$\mathrm{id}_E \wedge r \colon E \wedge S \to E \wedge E$ 是一个同构）。

- 对偶地，开幂等元是 $\mathcal{C}_{\mathrm{op}}$ 中的闭幂等元，即一个配备映射 $i \colon E \to S$ 的对象 E，使得 $i \wedge \mathrm{id}_E$ 是一个同构。

• 开闭幂等元是一个对象 E，带有映射 $r\colon S \to E$、$i\colon E \to S$，并满足以下方程

$$ri = \mathrm{id}_E \text{（“分裂”）和 } ir \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E\wedge E} \text{（“稳定性”）}$$

• 若 $r\colon S \to E$（分别为 $i\colon E \to S$）是一个映射且 $X \in \mathcal{C}$，则称 X 是 r-稳定的（分别为 i-稳定的），如果 $r \wedge \mathrm{id}_X\colon X \to E \wedge X$（分别为 $i \wedge \mathrm{id}_X\colon E \wedge X \to X$）是一个同构。若 r（分别为 i）已知，也可简称为 E-稳定。我们用$\mathcal{C}_E \subseteq \mathcal{C}$ 表示由 E-稳定对象构成的全子范畴。

• 若 E 是一个对象且 $\mathcal{C}$ 是带基点的，则称对象 X 是 E-挠的，如果$E \wedge X = 0$。

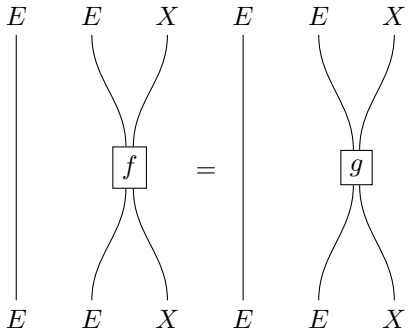
注 2.2.2. 任意辫编织幺半群函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都会保留开、闭和开闭幂等元，也保留稳定性，即若 X 是 E-稳定的，则$F(X)$ 是 $F(E)$-稳定的。此外，若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 均为带基点的，且 F 保留零对象，则若 X 是 E-挠的，$F(X)$ 也是 $F(E)$-挠的。

命题 2.2.3. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个辫编织幺半范畴，且 $(E, r\colon S \to E)$ 是一个闭幂等元。那么函子 $E \wedge (-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个局部化，其本质像为 $\mathcal{C}_E$。在 $X \in \mathcal{C}$ 处的单位由 $r \wedge \mathrm{id}_X\colon X \to E \wedge X$ 给出，并且等式 $r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \wedge r$ 成立。

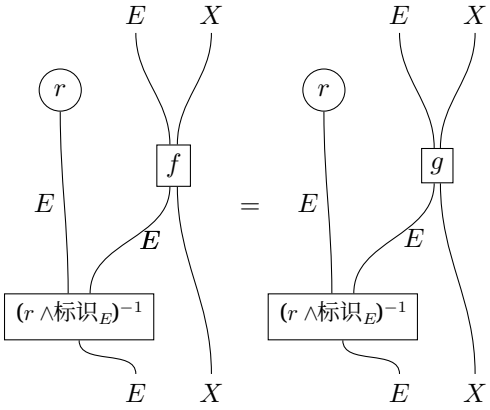
此外，$\mathcal{C}_E$ 在 $\wedge$ 下构成一个辫编织幺半范畴，其单位为 E，且局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_E$ 是辫编织幺半范畴。

证明。首先，我们检查 $E \wedge (-)$ 限制在其像上时是忠实的。设 $f, g\colon E \wedge X \rightrightarrows E \wedge Y$，并假设 $\mathrm{id}_E \wedge f = \mathrm{id}_E \wedge g$。在该等式后复合 $(r \wedge \mathrm{id}_E)^{-1} \wedge \mathrm{id}_Y$，并在前复合 $r \wedge \mathrm{id}_E \wedge \mathrm{id}_X$；将 r 向下移动并消去逆元，得到 $f = g$。

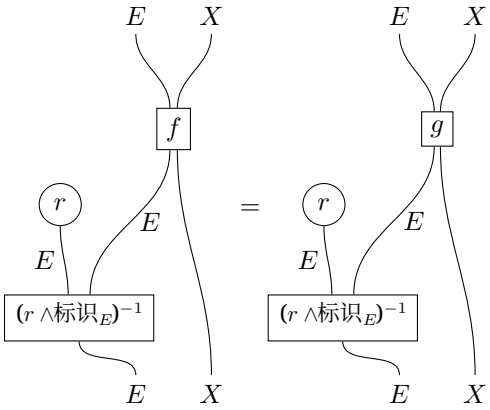
(2.2.4)



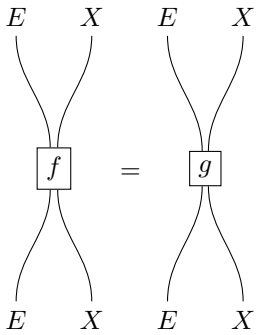
(2.2.5)



(2.2.6)



(2.2.7)



现在我们断言 $r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \wedge r$。根据第一步，只需验证 $\mathrm{id}_E \wedge r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \wedge \mathrm{id}_E \wedge r$。在同构 $\mathrm{id}_E \wedge r$ 前复合后，只需验证 $\mathrm{id}_E \wedge r \wedge r = \mathrm{id}_E \wedge r \wedge r$，而这显然成立。

现在我们有一个自函子 $E \wedge (-) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和一个自然变换 $r \wedge (-) : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow E \wedge (-)$，使得 $r \wedge E \wedge (-) = E \wedge r \wedge (-)$ 可逆。这正是一个局部化所需的数据。一般而言，$E \wedge (-)$ 的本质像恰好由满足 $r \wedge Y \colon Y \to E \wedge Y$ 为同构的那些对象 Y 组成，也就是说，这些对象是 E-稳定对象。

$\mathcal{C}_E$ 的结合子和编织如 $\mathcal{C}$ 中所述。对于单位，请注意，若 $X \in \mathcal{C}_E$，则 $r \wedge \mathrm{id}_X \colon X \to E \wedge X$ 可逆；左单位定义为此态射的逆元，右单位也类似。只需验证单位方程，而在与 r 预复合后，该方程显然成立。要使局部化函子成为幺半群函子，可将 r 的副本用于这些约束。容易验证，这使得 $E \wedge (-)$ 成为幺半群函子；由方程 $r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \wedge r$ 可知它是编织的。□

2.3. 扭曲平凡编织、对偶性与幂等元。本节将证明，任何具有扭曲平凡编织的可对偶对象都会产生一个 smashing-cosmashing 局部化命题 2.3.1。正如我们将在第 2.4 节回顾的那样，这通常意味着整个范畴沿由该对象确定的方向分裂。

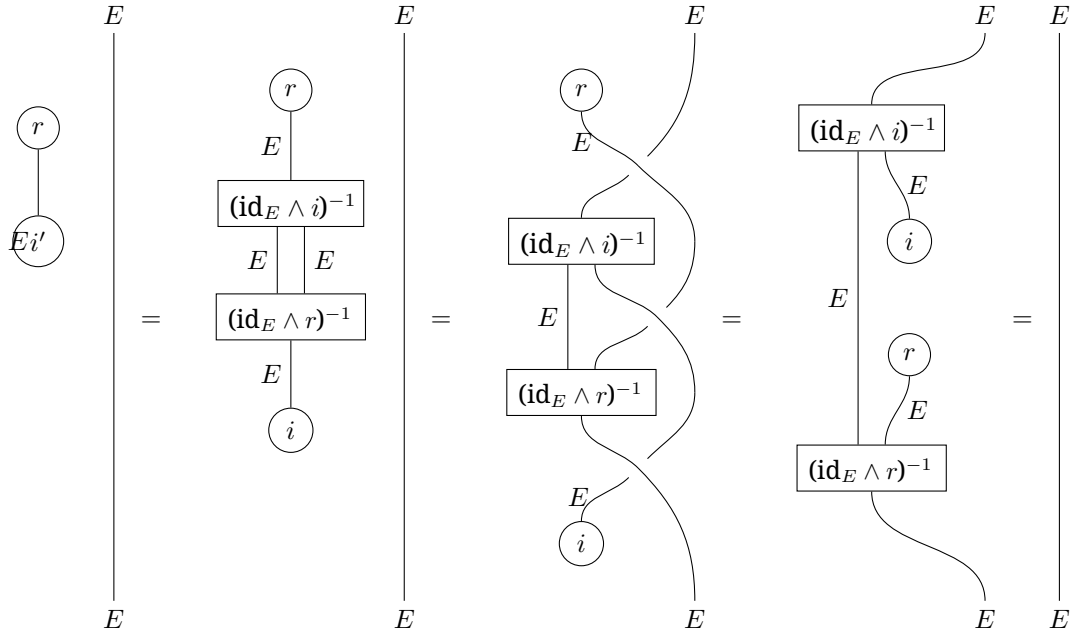
命题 2.3.1. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 为一个辫编织幺半范畴，$E \in \mathcal{C}$ 为一个对象。

(1) 若 E 是闭幂等元或开幂等元，则 E 具有平凡编织。(2) 以下条件等价：(a) E 可赋予开闭幂等元的结构。(b) E 可同时赋予闭幂等元结构和开幂等元结构。(c) E 可对偶化，且可赋予闭幂等元的结构。此外，在此情形下，E 是自对偶的。对于 E 上任意闭结构，至多存在一个与之相容的开闭结构。(3) 若 $T \in \mathcal{C}$ 具有扭曲平凡编织且可对偶化，则 $T^\vee \wedge T$ 是开闭幂等元（因此，根据 (1)，它具有平凡编织）。(4) 若 E 是闭幂等元，则对象 X 是 E-稳定的，当且仅当 X 具有 $X = E \wedge Y$ 的形式。若 $T \in \mathcal{C}$ 具有扭曲平凡编织，则 X 是 $T^\vee \wedge T$-稳定的，当且仅当 X 具有 $X = T \wedge Z$ 的形式。

证明。（1）：设 $r \colon S \to E$ 是一个闭幂等元。我们要证明 $\beta_{E,E} = \mathrm{id}_{E \wedge E}$。与同构 $r \wedge \mathrm{id}_E$ 复合后，只需证明 $r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \wedge r$。这是命题 2.2.3 的一部分。开情形是对偶的。

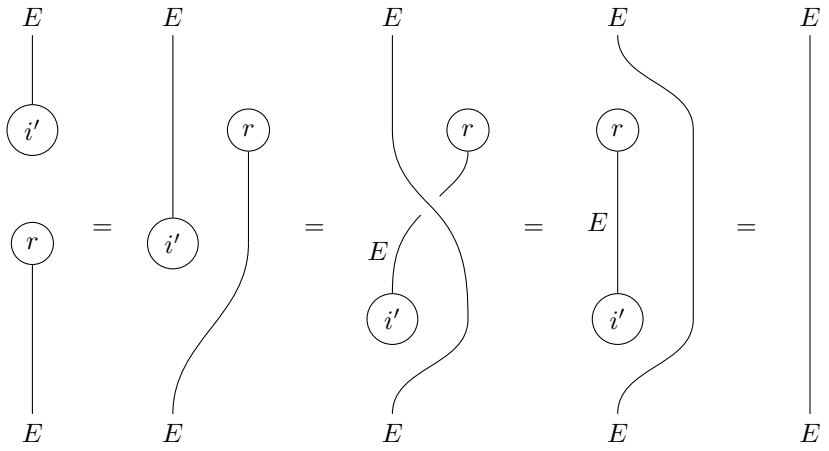
（2）：（a）$\Rightarrow$（b）：（鉴于我们将证明的其他结论，这个推论是多余的，但我们指出它是因为这是最直接的。）如果（E，r，i）是一个开闭幂等元，那么分裂方程和稳定性方程给出了 $r \wedge \mathrm{id}_E$ 和 $i \wedge \mathrm{id}_E$ 的显式逆元，因此（E，r）是一个闭幂等元，而（E，i）是一个开幂等元。

(b) $\Rightarrow$ (a)：设 (E, r) 是一个闭幂等元，(E, i) 是一个开幂等元。令 $i' = i(\mathrm{id}_E \wedge r)^{-1}(\mathrm{id}_E \wedge i)^{-1}$。接下来证明 (E, r, i') 是一个开闭幂等元，证明如下。首先验证稳定性方程 $i' r \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$。



这里，在第一个等式中，我们展开了 i' 的定义。在第二个等式中，我们使用了在 (1) 中证明的事实： E 具有平凡编织。事实上，我们三次使用了这一点，在图中引入了三个交叉。在第三个等式中，我们将这幅弦图的自由端“拉过来”。在第四个等式中，我们消去了两对逆态射，得到所需的 id_E。

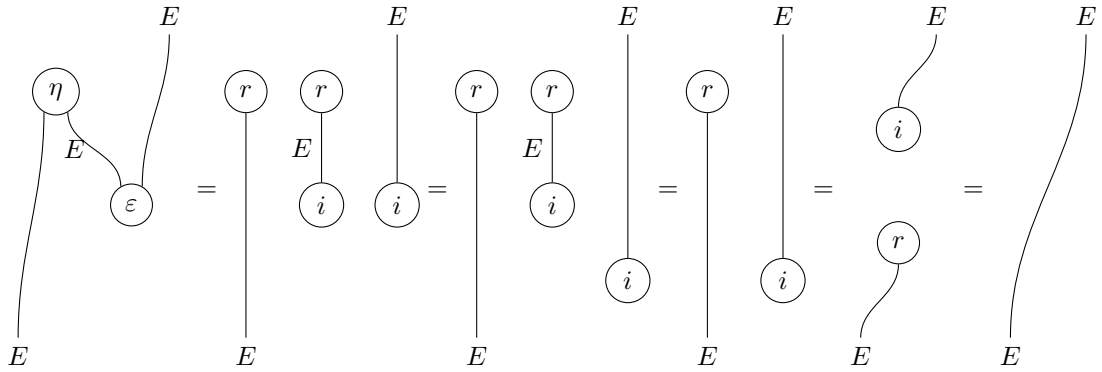
现在验证分裂方程 $ri' = \mathrm{id}_E$。



这里，在第一个等式中，我们只是将各条线滑过彼此。在第二个等式中，我们使用了 (1) 中 $\beta_{E,\,E}$ 平凡这一事实来引入一个交叉。在第三个等式中，我们滑过这个交叉；第四个等式则由我们已经证明的稳定性方程得出，最终得到所需的 id_E。请注意，这个论证并不需要我们展开

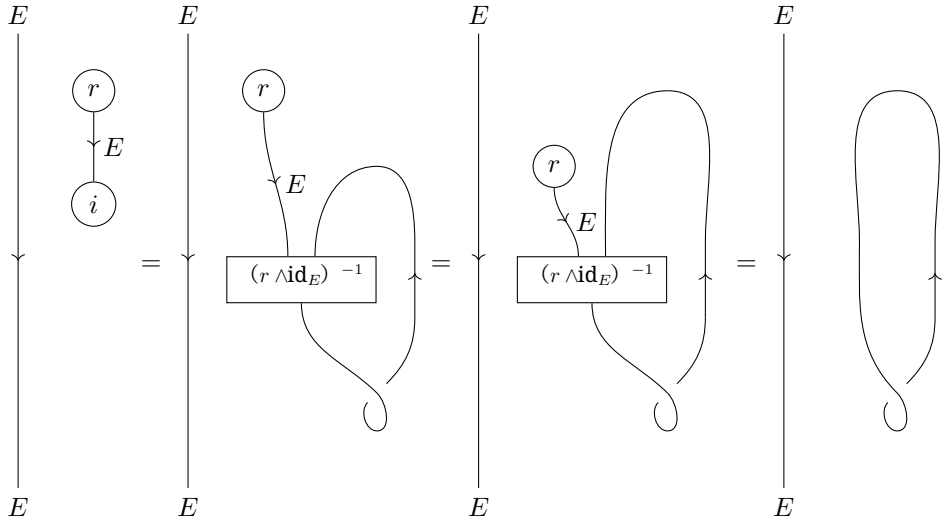
i' 的定义——因此我们实际上已经证明，分裂方程可由稳定性方程和编织的平凡性推出。

$(a) \Rightarrow (c)$：如前所述，E 是自对偶的，其单位为 $\eta = r \wedge r$，余单位为 $\varepsilon = i \wedge i$。我们验证一个三角恒等式：

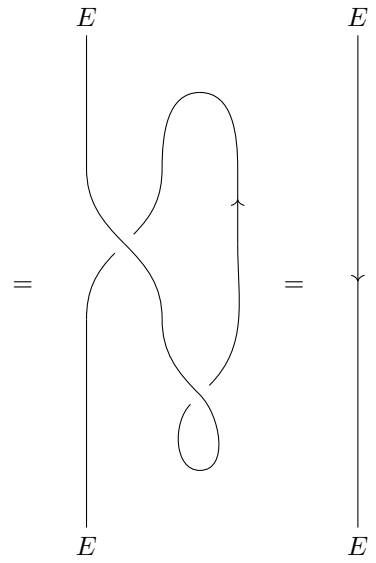


在第一个等式中，我们展开了 η 和 ε的定义。在第二个等式中，我们进行了同伦变形，为第三个等式中应用稳定性方程作准备。在第四个等式中，我们再次进行了同伦变形，为第五个等式中应用分裂方程作准备。最后得到所需的 id_E。另一个三角恒等式的证明类似。

$(c) \Rightarrow (b)$：令 $\eta\colon S \to E \wedge E^\vee$ 和 $\varepsilon\colon E^\vee \wedge E \to S$ 分别为 E 与 $E^\vee$之间对偶性的单位和余单位。定义 $i\colon E \to S$ 为 $(\mathrm{id}_E \wedge \varepsilon\beta_{E,E^\vee})((r \wedge \mathrm{id}_E)^{-1} \wedge \mathrm{id}_{E^\vee})(\mathrm{id}_E \wedge \eta)$。我们声称 (E, i) 是一个开幂等元，也就是说，$\mathrm{id}_E \wedge i$ 是一个同构。将同构 $\mathrm{id}_E \wedge r$ 作前复合，只需证明 $\mathrm{id}_E \wedge ir$ 是一个同构：

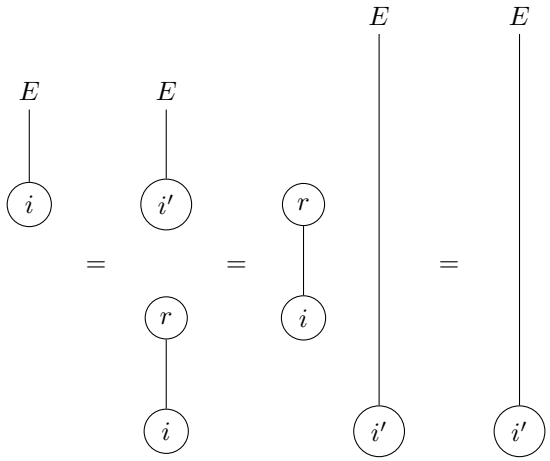


这里在第一个等式中，我们展开了 i 的定义。在第二个等式中，我们进行了同伦变形，为第三个等式做好准备，在那里我们消去逆态射。继续：



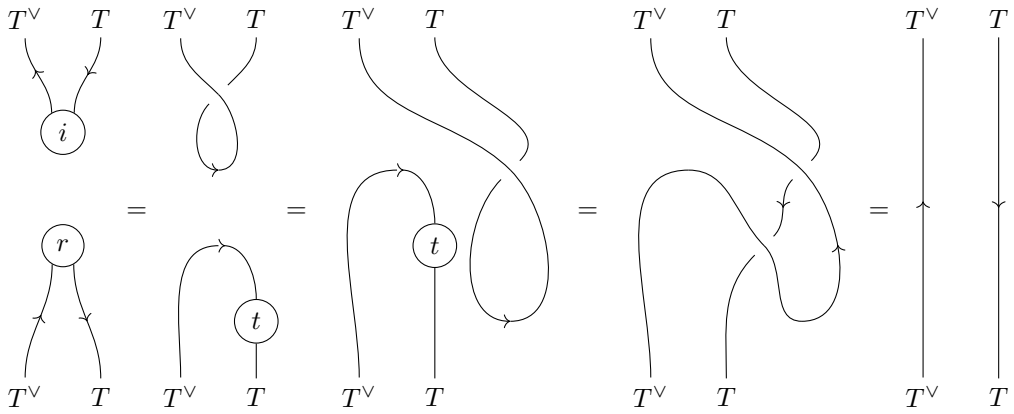
在这里的第一个等式中，我们用到了 E 具有平凡编织这一事实（因为它是一个闭幂等元，应用 (1) 即可）。在第二个等式中，我们作了同伦变形，得到 id_E，正如所需，它是一个同构。

这样就剩下（2）的最后两个结论。我们已经证明 E 是自对偶的。对于最后一个结论，假设 (E, r, i) 和 (E, r, i') 都是开闭的。那么我们计算：



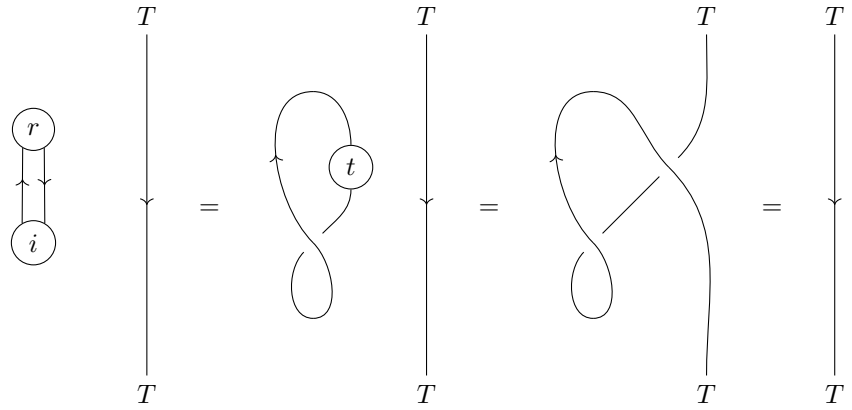
这里在第一个等式中，我们用到了分裂方程 $ri' = \mathrm{id}_E$。在第二个等式中，我们进行了同伦变形，因此在第三个等式中可以使用稳定性方程 $ir \wedge \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$。由此得到等式 $i = i'$。

(3)：令 $\eta\colon S \to T^\vee \wedge T$为 T与 $T^\vee$之间对偶性的单位，$\varepsilon\colon T \wedge T^\vee \to S$为余单位；令 $t\colon T \to T$为扭转。定义 $r\colon S \to T^\vee \wedge T$为 $(\mathrm{id}_{T^\vee} \wedge t)\eta$，并定义 $i\colon T^\vee \wedge T \to S$为 $\varepsilon\beta_{T^\vee,\,T}$。我们先验证分裂方程 $ri = \mathrm{id}_{T^\vee \wedge T}$：



在第一个等式中，我们引入了 r 和 i的定义。在第二个等式中，我们做了同伦变形，因此在第三个等式中，可以利用扭曲平凡编织的定义，将 t 替换为一个交叉。在第四个等式中，我们做了同伦变形，得到所需的 $\mathrm{id}_{T^\vee \wedge T}$。

现在我们证明，并证明 $ir \wedge \mathrm{id}_T = \mathrm{id}_T$，由此可得稳定性方程$ir \wedge \mathrm{id}_{T^\vee \wedge T} = \mathrm{id}_{T^\vee \wedge T}$。



在第一个等式中，我们引入了 r 和 i的定义。在第二个等式中，我们利用扭曲平凡编织的定义，将 t 替换为一个交叉。在第三个等式中，我们做了同伦变形，得到所需的 id_T。

（）

4 :The first 陈述是.....的一部分 f

命题 2.2.3。对于第二种情况，设 T 具有扭曲平凡编织。若 X 是 $T^\vee \wedge T$-稳定的，则根据定义，$r \wedge \mathrm{id}_X$ 是一个同构 $X \cong T^\vee \wedge T \wedge X$。反过来，由（3）的证明可得 $ri \wedge \mathrm{id}_T = \mathrm{id}_{T^\vee \wedge T \wedge T}$以及 $ir \wedge \mathrm{id}_T = \mathrm{id}_T$，因此 T是 $T^\vee \wedge T$-稳定的，从而对任意 Z，$T \wedge Z$也同样是 $T^\vee \wedge T$-稳定的。□

2.4. 互补 smashing 局部化。本节讨论具有补对象的 smashing-cosmashing 局部化（定义 2.4.1），以及它们如何导致其所处范畴的整体分裂（命题 2.4.2）。

定义 2.4.1. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个辫编织幺半范畴，具有有限双积，且这些双积在每个变量上都由 $\wedge$ 保持。若 $S = X \oplus Y$，其中 X 和 Y 是开闭幂等元，则称 X、Y 为互补开闭幂等元。

命题 2.4.2. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个编织幺半半加性范畴，且 E 是一个开闭幂等元。那么 E 是 S 的收缩。若存在 E 的补对象 S/E，则 S/E 也是一个开闭幂等元，因此 E、S/E 是互补开闭幂等元。在此情形下，对所有对象 X、Y，自然映射 $\mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(E \wedge X, E \wedge Y) \times \mathcal{C}(S/E \wedge X, S/E \wedge Y)$ 是一个双射，因此 $\mathcal{C}$ 分裂为其 E-稳定对象满子范畴与 E-挠对象满子范畴的积。特别地，一个对象是 E-稳定的，当且仅当它是 S/E-挠的，反之亦然。

证明. 对于第一个陈述，设 r、i 是使 E 成为开闭幂等元的映射，并设 s、j 是使 S/E 成为 E 的互补幂等元的映射。那么 s、j 满足分裂方程，因此我们只需验证稳定性方程，即 $\mathrm{id}_{S/E} \wedge js = \mathrm{id}_{S/E}$。只需验证 $js \wedge js = js$。我们可以写作 $js = 1 - ip$，于是必须验证 $1 \wedge 1 - ip \wedge 1 - 1 \wedge ip + ip \wedge ip = 1 - ip \wedge 1$。我们知道 $ip \wedge 1$、$1 \wedge ip$ 和 $ip \wedge ip$ 都相等，因此这成立。

我们有 $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{C}((E \wedge X \oplus S/E \wedge X, E \wedge Y \oplus S/E \wedge Y) = \mathcal{C}(E \wedge X, E \wedge Y) \times \mathcal{C}(E \wedge X, S/E \wedge Y) \times \mathcal{C}(S/E \wedge X, E \wedge Y) \times \mathcal{C}(S/E \wedge X, S/E \wedge Y)$，因此我们要证明交叉项消失。现在，由于 E 根据命题 2.3.1(2)是自对偶的，我们可以计算得到 $\mathcal{C}(E \wedge X, S/E \wedge Y) = \mathcal{C}(X, E \wedge S/E \wedge Y)$；类似地，由于 S/E 是自对偶的，我们有 $\mathcal{C}(S/E \wedge X, E \wedge Y) = \mathcal{C}(X, S/E \wedge E \wedge Y)$，所以只需证明 $E \wedge S/E = 0$。现在，$E \wedge S/E$ 将幂等元 $ir \wedge js$ 分裂，而它与 $irjs \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0$ 重合，因此确实有 $E \wedge S/E = 0$。□

3. ∞-Categorical Preliminaries

本章内容具有技术性，主要是汇集一些来自 [Lur17] 的工具，这些工具将在第 4 节和第 5 节中用于研究具有某些对偶性和余完备性性质的 ∞- 范畴。第 3.1 节回顾了 [Lur17], 中算子理论的一些基础知识，我们将在第3.3节及后续章节中用它来形式化关于对称幺半 ∞-范畴的陈述。第3.2节讨论了在 ∞-范畴语境下运用第 1 节的 1-范畴结果的几种方法。尤为值得关注的是第3.2.1节，其中利用一维配边假设，说明可以通过同伦范畴来定义对称幺半 ∞-范畴中的可对偶对象，并证明在多种语境下，存在一种为对称幺半 ∞-范畴添加对偶的泛性质方法。第3.3节讨论具有某些余极限的 ∞-范畴，尤其关注其幺半性质，正如 [Lur17]中所讨论的那样。这些性质将在第 4 节中用于构造具有各种对偶性、余完备性和正合性性质的对称幺半 ∞-范畴的泛例。

3.1. Lurie 的拟运算理论简述。

本节回顾 [Lur17] 中 Lurie 的拟运算理论的一些基础知识。这为严谨讨论对称幺半 ∞-范畴提供了一种语言。

定义 3.1.1（[Lur17]）。令 Fin 表示有限集的 1-范畴，并令 $\mathbf{Fin}_*$ 表示有限带基点集的 1-范畴。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $n_+ = \{0, 1, \ldots, n\}$表示一个基数为 $n+1$ 且基点为 0 的集合。若 $\mathbf{Fin}_*$ 中的态射 $f\colon m_+ \to n_+$ 满足 $f^{-1}(0) = \{0\}$，则称其为活跃态射；等价地说，它属于函子 $(-)_+ : \mathbf{Fin} \to \mathbf{Fin}_+$ 的像，该函子添加一个不交基点。若 $\mathbf{Fin}_*$ 中的态射 $f\colon m_+ \to n_+$ 满足对于 $i \neq 0$，$f^{-1}(i)$ 是单元素集，则称其为惰性态射；也就是说，f“只会将元素折叠到基点”。对于 $1 \leq i \leq n$，记 $\rho_i\colon m_+ \to 1_+$ 为惰性态射，它将除 i 以外的每个元素都折叠到基点。

定义 3.1.2（[Lur17]）。一个 ∞-operad $\mathcal{O}$ 由一个 ∞-范畴 $\mathcal{O}^\otimes$ 和一个函子 $p\colon \mathcal{O}^\otimes \to \mathbf{Fin}_*$组成。对于 $n_+ \in \mathbf{Fin}_*$，我们用 $\mathcal{O}^\otimes_{n_+}$ 表示 p 在 n_+处的纤维，有时也不严格地将底层 ∞-范畴 $\mathcal{O}^\otimes_{1_+}$记作 $\mathcal{O}$ 。这些数据须满足以下两个条件：

(1) 对于 $\mathbf{Fin}_*$ 中的每个惰性态射 $f\colon m_+ \to n_+$，以及 $\mathcal{O}^\otimes$上方的每个对象 X，都存在一个从 X出发的 f 的余笛卡尔提升。

特别地，沿惰性态射 $f : m_+ \to n_+$ 重索引会诱导一个函子$f_*\colon \mathcal{O}^\otimes_{m_+} \to \mathcal{O}^\otimes_{n_+}$。第二个条件是：

(2)（Segal 条件）对于每个 $m_+ \in \mathbf{Fin}_*$，函子 $(\rho_1)_*$、……、$(\rho_m)_*$ 诱导一个范畴等价 $\mathcal{O}^\otimes_{m_+} \to \prod_{i=1}^m \mathcal{O}^\otimes_{1_+}$。

∞-算子的态射 $\mathcal{O} \to \mathcal{P}$ 是一个函子 $\mathcal{O}^\otimes \to \mathcal{P}^\otimes$，它在$\mathbf{Fin}_*$ 之上，并保持惰性态射的余笛卡尔提升。

注 3.1.3. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-算子。那么，Segal 条件允许我们将任意对象 $X \in \mathcal{O}^\otimes_{n_+}$ 视为 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{1_+}$中的一个对象元组 n。

注 3.1.4. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-幺半群，且 $\mathcal{O}^\otimes$ 是一个 1-范畴。那么 $\mathcal{O}$对应于通常意义下的着色对称幺半群，也称为对称多范畴。对应关系如下。给定一个对称的

多重范畴 $\mathcal{C}$，定义 $\mathcal{O}^{\otimes} \to \mathbf{Fin}_*$ 为满足 $\mathcal{O}^{\otimes}_{n_+} = \mathcal{C}^n$的范畴，其同态集定义为 $\mathcal{O}^{\otimes}((C_1,\dots,C_m),(D_1,\dots,D_n)) := \prod_{j=1}^{n} \mathcal{C}(C_1,\dots,C_m;\ D_j)$；复合以及到 $\mathbf{Fin}_*$ 的函子按显然的方式定义。 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 称为 $\mathcal{C}$的算子范畴，且是一个 ∞-幺半群。此构造属于范畴等价的一部分。

备注 3.1.5. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-拟运算。根据算子范畴的构造，我们看到，沿惰性态射进行重索引应被视为从对象元组中遗忘某些对象的操作（即那些其索引被映射到基点的对象）。

定义 3.1.6（[Lur17]）。一个对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 由一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 以及一个函子 $p\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathbf{Fin}_*$ 构成。对于 $n_+ \in \mathbf{Fin}_*$，我们将 p 在 n_+ 处的纤维记作 $\mathcal{C}^{\otimes}_{n_+}$，有时也会滥用记号，将 $\mathcal{C}$ 写作其底层的 ∞-范畴$\mathcal{C}^{\otimes}_{1_+}$。该数据需要满足以下两个条件:

(1) p 是一个余笛卡尔纤维化。
特别地，沿任意态射 $f\colon m_+ \to n_+$ 进行重索引会诱导出一个函子f_* : $\mathcal{C}^{\otimes}_{m_+} \to \mathcal{C}^{\otimes}_{n_+}$。第二个条件是:
(2)（Segal 条件）对于每个 $m_+ \in \mathbf{Fin}_*$，函子 $(\rho_1)_*$、……、$(\rho_m)_*$ 诱导出一个范畴等价 $\mathcal{C}^{\otimes}_{m_+} \to \prod_{i=1}^{m} \mathcal{C}^{\otimes}_{1_+}$。
对称幺半 ∞-范畴之间的松对称幺半函子是底层幺半群的态射。对称幺半 ∞-范畴之间的强对称幺半函子是一个在 $\mathbf{Fin}_*$ 之上的函子，它保持所有态射的余笛卡尔提升。我们用 $\mathbf{SMC}$ 表示由对称幺半∞-范畴及强对称幺半函子构成的 ∞-范畴。

注 3.1.7。设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。那么特别地，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-算子。除了沿惰性态射重索引（对应于从一个元组中遗忘对象）之外， $\mathcal{C}^{\otimes}$ 还允许沿活性态射重索引。这些重索引函子的含义如下。沿唯一活性态射 $2_+ \to 1_+$ 重索引，对应于张量积函子 $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$。沿唯一态射 $0_+ \to 1_+$ 重索引，对应于将单位对象视为函子 $* = \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}$。沿一般的满射活性态射 $f\colon m_+ \to n_+$ 重索引，对应于将 f 的每个纤维中的所有对象张量在一起；沿一般的单射活性态射 $f\colon m_+ \to n_+$重索引，则对应于在所有不属于 f像的元组索引处插入单位的副本。沿一般活性态射 $f : m_+ \to n_+$ 重索引，是这两种操作的复合。

定理 3.1.8（[Lur17]）。对称幺半 ∞-范畴与强对称幺半函子，一方面，与 $\mathbf{Cat}_\infty$ 中的 E_∞ 运算子的代数之间存在等价关系。

定义 3.1.9。设 $\mathcal{D}$ 为一个 ∞-运算子。若零元运算可表，即若 $\mathcal{D}^{\otimes}(*,-) : \mathcal{D}^{\otimes}_{1_+} \to \mathbf{Top}$ 可表，则称 $\mathcal{D}$ 含幺，其中 $* \in \mathcal{D}^{\otimes}_{0_+}$ 是唯一的零元对象。若对每个 $D \in \mathcal{D}$，函子 $D \otimes (-) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 都有一个右伴随 $F(D,-) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，则称 $\mathcal{D}$ 指数闭。于是， $F(D,D')$ 称为 D、 $D' \in \mathcal{D}$ 的内同态。

设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，且 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是一个满子运算子。若 $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D} \Rightarrow C \otimes D \in \mathcal{D}$，其中 $\otimes$ 取自 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\otimes$-理想。更

一般地，若 $D, D' \in \mathcal{D} \Rightarrow D \otimes D' \in \mathcal{D}$，则称 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 中对 $\otimes$ 闭合。若 $\mathcal{C}$ 指数闭，且内同态为 F，则若对所有 $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$，都有 $F(C, D) \in \mathcal{D}$，称 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是一个指数理想；若对所有 $D, D' \in \mathcal{D}$，都有 $F(D, D') \in \mathcal{D}$，则称其对指数运算闭合。

引理 3.1.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个指数闭的对称幺半 ∞-范畴，且 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是一个满子运算子。假设 $\mathcal{D}$ 对指数运算封闭，并且在 $\mathcal{C}$中对 $\otimes$封闭，且 $\mathcal{D}$ 含幺。则 $\mathcal{D}$ 是一个对称幺半∞-范畴，并且包含映射 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个保持 $\otimes$的松幺半函子。

证明。由于 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是一个满子运算子，函子 $\mathcal{D}^{\otimes} \to \mathbf{Fin}_*$ 是一个等化纤维化。只需验证，对于 $\mathbf{Fin}_*$中的所有态射，都存在余笛卡尔提升。由于余笛卡尔态射在复合下封闭，只需分别证明 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbf{Fin}_*$ 中的惰性态射、活跃满射和单射上都有余笛卡尔提升。由于 $\mathcal{D}$ 是一个运算子，在惰性态射上的余笛卡尔提升存在（并且由于 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 是满子运算子包含映射，它们的计算方式与 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中相同）。由于 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 对 $\otimes$封闭，$\mathbf{Fin}_*$ 的活跃满射态射上的余笛卡尔提升也存在，其计算方式与 $\mathcal{C}^{\otimes}$中相同。由于余笛卡尔态射在复合下封闭，接下来只需给出单射映射 $i_{m+1}\colon m_+ \to (m+1)_+$ 的余笛卡尔提升；该映射漏掉了 $m+1$，对每个 $m \in \mathbb{N}$均如此。令 $I \in \mathcal{C}, J \in \mathcal{D}$ 分别为相应的单位元，并令F为 $\mathcal{C}$中的指数对象。我们声称， $D_1, \ldots, D_m$ 沿 i_{m+1} 的余笛卡尔提升由 $D_1, \ldots, D_m, J$ 给出。也就是说，对于 $f\colon m+1 \to n$，我们声称映射 $\mathcal{D}_f^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m, J;\ \vec{D}') \to \mathcal{D}_{fi_{m+1}}^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m;\ \vec{D}')$ 是一个同构。根据 Segal 条件，只需考虑 $n = 1$ 且 f 为活跃的情形。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_f^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m, J; D') &= \mathcal{C}_f^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m, J; D') \\
&= \mathcal{C}(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m \otimes J, D') \\
&= \mathcal{C}(J, F(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D')) \\
&= \mathcal{D}(J, F(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D')) \\
&= \mathcal{D}_0^{\otimes}(*; F(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D')) \\
&= \mathcal{C}_0^{\otimes}(*; F(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D')) \\
&= \mathcal{C}(I, F(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D')) \\
&= \mathcal{C}(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m \otimes I, D') \\
&= \mathcal{C}(D_1 \otimes \cdots \otimes D_m, D') \\
&= \mathcal{C}_{fi_{m+1}}^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m; D') \\
&= \mathcal{D}_{fi_{m+1}}^{\otimes}(D_1, \ldots, D_m; D')
\end{aligned}$$

正如所需。这里， $*$ 表示$\mathcal{C}_{0_+}^{\otimes} = \mathcal{D}_{0_+}^{\otimes}$ 的唯一对象，而 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbf{Fin}_*$中 $0_+ \to 1_+$ 的唯一态射。在此论证中，我们用到了 $\mathcal{D}^{\otimes} \subseteq \mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个全子范畴、 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \mathbf{Fin}_*$存在余笛卡尔提升、 $\mathcal{C}$具有指数闭性、 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 的全忠实性，以及 $\mathcal{D}$ 在 $\otimes$和取指数对象下封闭这一事实、 J的泛性质、 $\mathcal{D}^{\otimes} \to \mathcal{C}^{\otimes}$的全忠实性、 $\mathcal{C}$的含幺性、 $\mathcal{C}$的指数闭性、 $\mathcal{C}$的含幺性、$D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$的定义，以及再次用到 $\mathcal{D}^{\otimes} \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 的全忠实性。□

定义 3.1.11. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴， $\mathcal{D}$ 是一个全子范畴。若函子$L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是包含映射$i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 的左伴随，并且 Li 自然等价于 $\mathcal{D}$上的恒等函子，则称其为局部化函子。复合函子 $iL\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 也可称为局部化函子。 L-局部态射是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，其在 L 下的像是一个等价。一个从 $\mathcal{C}$ 出发的 L-局部函子是指将 L-局部态射映为等价的函子；这些函子构成 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 的全子范畴 $\mathrm{Fun}_{L\text{-loc}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$。

设 $\mathcal{O}$ 为一个 ∞-范畴， $\mathcal{C} \to \mathcal{O}$ 为覆盖 $\mathcal{O}$ 的一个范畴，且 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 中覆盖 $\mathcal{O}$ 的一个全子范畴。伴随函子 $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : i$ 称为覆盖 $\mathcal{O}$ 的局部化，若它是一个局部化，且 L、i 覆盖 $\mathcal{O}$。我们不要求伴随 $L \dashv i$ 的单位和余单位是垂直的。我们可以称自函子 iL 为覆盖 $\mathcal{O}$ 的局部化函子，而从 $\mathcal{C}$ 出发、覆盖 $\mathcal{O}$ 的 L-局部函子，是覆盖 $\mathcal{O}$ 且 L-局部的函子；这些函子构成 $\mathrm{Fun}_{L\text{-loc},\ \mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 中的一个全子范畴，该范畴是 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$。

设 $\mathcal{O}$ 为一个 ∞-范畴， $\mathcal{C} \to \mathcal{O}$ 为一个余笛卡尔纤维化，且 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 中覆盖 $\mathcal{O}$ 的一个全子范畴，并且它在 $\mathcal{O}$ 上是余笛卡尔的。我们不要求包含映射 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 保持余笛卡尔边。函子 $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 称为覆盖 $\mathcal{O}$ 的余笛卡尔局部化函子，若它是局部化函子、覆盖 $\mathcal{O}$，且保持余笛卡尔边。我们可以称 iL 为覆盖 $\mathcal{O}$ 的余笛卡尔局部化函子。覆盖 $\mathcal{O}$ 的 L-局部余笛卡尔函子，是一个 L-局部且在 $\mathcal{O}$ 上余笛卡尔的函子；这些函子构成 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{L\text{-loc}\ ,\ \mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 中的一个全子范畴，该范畴是 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$。

当 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-幺半群时，回顾一下， $\mathcal{O}$ 上的余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 称为 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴。在这种情况下，我们相应地将 $\mathcal{O}$ 上的余笛卡尔局部化函子称为 $\mathcal{O}$-幺半局部化，并将 $\mathcal{O}$ 上的余笛卡尔局部化函子称为 L-局部 $\mathcal{O}$-幺半函子；它们张成 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{L\ \mathcal{O}}$, $(\mathcal{C},\mathcal{E})$，这是 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 的一个全子范畴。

注 3.1.12. 对称幺半 ∞-范畴的概念可还原为 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴，其中 $\mathcal{O}^{\otimes} = \mathrm{Fin}_*$ 是 E_∞-幺半群。

命题 3.1.13. (1) 若 $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个局部化函子，则它具有以下泛性质。对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，与 L 复合会在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 和 $\mathrm{Fun}_{L\text{-}loc}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 之间诱导一个等价，其逆元由限制到 $\mathcal{D}$ 给出。(2) 若 $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : i$ 是 $\mathcal{O}$ 上的局部化函子，则它具有以下泛性质。对于任意位于 $\mathcal{O}$ 上的 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，与 L 复合会在 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 和 $\mathrm{Fun}_{L\text{-}loc,\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 之间诱导一个等价，其逆元由限制到 $\mathcal{D}$ 给出。(3) 若 $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{O}$ 上的余笛卡尔局部化函子，则它具有以下泛性质。对于任意在 $\mathcal{O}$ 上余笛卡尔的 ∞-范畴 $\mathcal{E}$，与 L 复合会在 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 和 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{cocart}}_{L\ \mathcal{O}}$, $(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 之间诱导一个等价，其逆元由限制到 $\mathcal{D}$ 给出。特别地， $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 这一 $\mathcal{O}$-幺半局部化函子会在 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 和 $\mathrm{Fun}_{L,\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 之间诱导一个等价，其逆元由限制到 $\mathcal{D}$ 给出。

证明。(1) 是 [Lur09a，命题 5.2.7.12]。( ) f

2 ollows from (1)

注意到由于 L 和包含映射 $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$都在 $\mathcal{O}$之上，先与它们复合仍会保留在 $\mathcal{O}$之上的性质。

(3) 由 (2) 得出，只需验证以下结论。设 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是一个在 $\mathcal{O}$之上的函子。我们必须证明，若 $FL\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 保余笛卡尔态射，则 F 也保余笛卡尔态射。（由于我们并未假设 i 保余笛卡尔态射，因此不能直接由 $F \simeq FLi$这一事实得出结论。）为此，只需证明 $\mathcal{D}$中的任意余笛卡尔态射都同构于 $\mathcal{C}$中某个余笛卡尔态射的像。这很容易：设 f 是 $\mathcal{O}$中的一个态射，设 $D \in \mathcal{D}$ 位于 f的定义域之上，并设 f_*^D是从 D出发、对应于 f 的一个余笛卡尔提升。设 f_*^{iD}是从 $iD \in \mathcal{C}$出发、对应于 f 的一个余笛卡尔提升。我们有一个分解 $if_*^D = \overline{if_*^D} f_*^{iD}$，其中 $\overline{if_*^D}$ 是垂直态射。应用 L，得到$Lif_*^D = L\overline{if_*^D} Lf_*^{iD}$，其中 $L\overline{if_*^D}$是垂直态射。现在，Lif_*^D同构于 f_*^D，因而是余笛卡尔态射；而 Lf_*^{iD}是余笛卡尔态射，因为 L 保余笛卡尔态射。因此，垂直分解 $L\overline{if_*^D}$必定是一个同构。所以 f_*^D同构于 Lif_*^D，后者又同构于 Lf_*^{iD}；而 Lf_*^{iD}是 L下某个余笛卡尔态射的像。证毕。□

引理 3.1.14. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。那么 S 自然地（事实上，唯一地）是 $\mathcal{C}$ 中的一个 E_∞- 代数，并且作为这样的代数，它是 $\mathcal{C}$ 中 E_∞- 代数的 ∞- 范畴的始对象。

证明。参见 [Lur17，推论 3.2.1.9]。 □

3.2. 同伦范畴中检测到的结构。本节讨论了某些 ∞-范畴的性质，这些性质可以通过转到同伦范畴来检测。值得注意的是，在第3.2.1节中，利用一维协边界假设证明，在多种情形下，都可以将对偶自由地添加到对称幺半 ∞-范畴的对象中。此外，在第 3.2.3 节中，由具有扭曲平凡编织的可对偶对象（第 2.3 节和第 2.4 节）产生的范畴整体分裂，被提升到了 ∞-范畴的情形。

3.2.1. 配边假设。本小节中，我们使用一维配边假设，来说明可以将对称幺半∞-范畴中的可对偶化对象定义为其在同伦范畴中的像是可对偶的对象。此外，我们还借助一维配边假设验证伴随函子定理的假设，并由此得出，在许多情形下，可以自由地为对称幺半 ∞-范畴中的所有对象添加对偶（推论 3.2.2）。

令 SMD 表示 SMC 的全子-∞-范畴，其对象由具有对偶的小型对称幺半 ∞-范畴构成。我们希望证明包含映射 SMD $\to$ SMC，以及范畴具有各种余极限时的相应变体，都有左伴随。只要利用一维配边假设的一种形式，这一点并不难证明。

定理 3.2.1. *[[Lur09b, Har12]]* 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。那么， $\mathcal{C}$ 的同伦范畴具有对偶，当且仅当 $\mathcal{C}$ 与包含映射 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{iso}} \to \mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$ 右正交；该包含映射将有限集与双射构成的对称幺半范畴（关于不交并）映入带框架的一维配边的对称幺半 ∞-范畴。此外，对象 $C \in \mathcal{C}$ 可对偶化，当且仅当将 C 分类的对称幺半函子 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{iso}} \to \mathcal{C}$ 延拓为函子 $\mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}} \to \mathcal{C}$；在这种情况下，该延拓在可缩的选择空间意义下唯一。

推论 3.2.2. 包含映射 SMD $\to$SMC 有一个左伴随 $\mathbb{D}$，它将 SMD 展示为 SMC 的局部化。若 $\mathcal{K}\to$SMC 是从一个可呈示∞-范畴出发的右伴随函子，则 SMD $\times_{\mathsf{SMC}}\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ 有一个左伴随，它将 SMD $\times_{\mathsf{SMC}}\mathcal{K}$ 展示为 $\mathcal{K}$的局部化。

证明。第二个陈述由第一个陈述推出，因为可呈示范畴及右伴随函子的极限，与底层范畴的极限一样计算。

第一个陈述成立，因为根据定理 3.2.1，SMD 被刻画为一小组（事实上是一个单元素集）态射 $\{\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}}\to\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}}\}$ 的右正交全子范畴，因此是可呈示 ∞-范畴 SMC 的一个可及局部化。□

推论 3.2.3。若 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，且 $S\subseteq\mathcal{C}$ 是一组对象，则存在一个泛对称幺半 ∞-范畴 $\mathbb{D}_S\mathcal{C}$，它接收一个来自 $\mathcal{C}$ 的对称幺半函子，并将 S 的对象映至可对偶化对象。若 $\mathcal{K}$ 是一个余完备 ∞-范畴，且存在函子 $U:\mathcal{K}\to$ SMC，并且 $P\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}}$、$P\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}}\in\mathcal{K}$ 是满足 $\mathcal{K}(P\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}},-)\cong\mathsf{SMC}(\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}},U-)$ 和 $\mathcal{K}(P\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}},-)\cong\mathsf{SMC}(\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}},U-)$ 的对象，则对于任意 $K\in\mathcal{K}$ 和 $S\subseteq UK$，同样存在 $\mathcal{K}$ 的一个泛对象 $\mathbb{D}_S^{\mathcal{K}}K$，其具有态射 $f\colon K\to\mathbb{D}_S^{\mathcal{K}}K$，使得 $Uf\colon U\mathcal{K}\to U(\mathbb{D}_C^{\mathcal{K}}K)$ 将每个 $C\in S$ 映至一个可对偶对象。

证明。对于第一个断言，$\mathbb{D}_C\mathcal{C}$ 由 SMC 中的一个推出计算得到：$\mathbb{D}_C\mathcal{C}=\mathcal{C}\cup_{\amalg_{s\in S}\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}}}\amalg_{s\in S}\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$，其中 $\amalg_{s\in S}$ 表示 SMC 中的一个余积。（注意，SMC 中的推出通过 Cat_∞中的棒构造计算。）同样，对于第二个断言，我们有 $\mathbb{D}_S^{\mathcal{K}}K=K\cup_{\amalg_{s\in S}P\mathsf{Fin}^{\mathrm{iso}}}\amalg_{s\in S}P\mathsf{Bord}_1^{\mathrm{fr}}$。（同样，如果$\mathcal{K}$ 是某个对称幺半∞-范畴 $\mathcal{L}$ 中交换代数对象的一个 ∞-范畴，那么 $\mathcal{K}$ 中的推出通过 $\mathcal{L}$中的棒构造计算。）□

3.2.2. 某些极限与余极限。本小节中，我们讨论一些非常基本的极限与余极限构造，它们可以在同伦范畴中检测到。

引理 3.2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有 K-余极限的 ∞-范畴，其中 K 是离散的。那么，同伦范畴 ho$\mathcal{C}$ 具有 K-余极限，且典范函子 $\mathcal{C}\to$ ho$\mathcal{C}$保留它们。

证明。由 $\pi_0:\mathsf{Top}\to\mathsf{Set}$ 与积可交换这一事实可得。□

推论 3.2.5。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有始对象和终对象的 ∞-范畴。当且仅当 ho$\mathcal{C}$ 是带基点的时，$\mathcal{C}$ 是带基点的。

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积和有限余积的带基点 ∞-范畴。当且仅当 ho$\mathcal{C}$ 是半加性的时，$\mathcal{C}$ 是半加性的。

设 $\mathcal{C}$ 是一个半加性 ∞-范畴。当且仅当 ho$\mathcal{C}$ 是加性的时，$\mathcal{C}$ 是加性的。

证明。对于第一个陈述，由引理 3.2.4 及其对偶可知，ho$\mathcal{C}$ 具有始对象和终对象，而 $\mathcal{C}\to$ho$\mathcal{C}$ 保持始对象和终对象。从后者到前者的映射在 $\mathcal{C}$ 中是同构，当且仅当它在 ho$\mathcal{C}$ 中是同构，这就验证了该结论。

第二个陈述的证明类似，使用由有基点结构给出的典范映射 $A\amalg B\to A\times B$。

第三个陈述的证明也类似，使用映射 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}:A\oplus A\to A\oplus A$。□

引理 3.2.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带基点的 ∞-范畴，并设 $i\colon E \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的一个分裂单态射。若 i 有余纤维 $q\colon S \to S/E$，则 q 是同伦范畴 ho$\mathcal{C}$中i的余核。

证明。余纤维序列 $E \to S \to S/E$ 对任意 $D \in \mathcal{C}$ 都诱导出纤维序列 $\mathcal{C}(E,D) \leftarrow \mathcal{C}(S,D) \leftarrow \mathcal{C}(S/E,D)$。由于 $E \to S$ 分裂，诱导的同伦群长正合序列中特别包含短正合列 $\pi_0\mathcal{C}(E,D) \leftarrow \pi_0\mathcal{C}(S,D) \leftarrow \pi_0\mathcal{C}(S/E,D)$，也就是说，$E \to S \to S/E$ 在 ho$\mathcal{C}$ 中是一个余纤维序列，如所需。□

推论 3.2.7。设 $\mathcal{C}$ 是一个带基点的 ∞-范畴，并假设 $X \overset{r}{\underset{i}{\leftrightarrows}} Z$ 是一个i收缩。若 $\mathcal{C}$ 是半加性的，且 X 是一个群对象，那么 i 的任意余纤维（或 p 的任意纤维）都是 X 的补对象。

证明。这由引理 3.2.6 和引理 1.5.7 得出。□

L引理 3 .2.6(1) 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴 . 那么单位对象是自对偶的。(2) 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴。那么任何 $\otimes$-可逆对象都是可对偶化的（其对偶由其逆元给出）。(3) 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半带基点的 ∞-范畴。那么零对象是可对偶化的。(4) 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半半加性 ∞- 范畴。那么可对偶化对象在直和下封闭。(5) 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半稳定 ∞-范畴。那么 $\mathcal{C}$ 中的可对偶化对象在有限极限和有限余极限下封闭。(6) 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有分裂幂等元的对称幺半 ∞- 范畴。那么 $\mathcal{C}$ 中的可对偶化对象在收缩下封闭。

证明。(1) 显然。(2) 是范畴间任一等价都可以提升为伴随等价这一事实的一个实例。对于 (3)，若 $(X, X^\vee, \eta, \varepsilon)$ 和 $(X', X'^\vee, \eta', \varepsilon')$ 是对偶数据，则写作 $(X \oplus X') \wedge (X^\vee \oplus X'^\vee) = (X \wedge X^\vee) \oplus (X \wedge X'^\vee) \oplus (X' \wedge X^\vee) \oplus (X' \wedge X'^\vee)$ 和 $(X^\vee \oplus X'^\vee) \wedge (X \oplus X') = (X^\vee \wedge X) \oplus (X^\vee \wedge X') \oplus (X'^\vee \wedge X) \oplus (X'^\vee \wedge X')$，那么 $(X \oplus X', X^\vee \oplus X'^\vee, [\eta, 0, 0, \eta'], [\varepsilon, 0, 0, \varepsilon'])$ 是一组对偶数据。

对于 (4)，根据 (3)，只需证明可对偶化对象在余纤维和降悬下封闭。后者由张量积下的封闭性以及 $\Sigma^{-1}S = (\Sigma S)^\vee$ 是可对偶化的这一事实推出。对于前者，给定一个余纤维序列$X \to Y \to Z$，其中 X、Y 是可对偶化的，我们得到一个纤维序列 $X^\vee \leftarrow Y^\vee \leftarrow F$，并断言 F 是 Z 的对偶。对于任意 A、$B \in \mathcal{C}$，有 $\mathcal{C}(Z \otimes A, B) = \mathcal{C}(Y \otimes A, B) \times_{\mathcal{C}(X \otimes A, B)} \{0\} = \mathcal{C}(A, Y^\vee \otimes B) \times_{\mathcal{C}(A, X^\vee \otimes B)} \{0\} = \mathcal{C}(A, F \otimes B)$。也就是说，我们有一个伴随 $Z \otimes (-) \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}\colon F \otimes (-)$，由米田引理可知，$F$ 在 $\mathbb{B}\mathcal{C}$ 中是 Z 的右伴随，也就是说 $F = Z^\vee$，证毕。

对于 (5)，假设 A 有一个对偶 $A^\vee$。假设 B 是 A 的一个收缩，将幂等元 $e\colon A \to A$ 分裂。于是存在一个对偶幂等元 $e^\vee\colon A^\vee \to A^\vee$，而该幂等元的一个分裂 $B^\vee$ 为 B 提供了一个对偶。□

3.2.3. 函子性分裂。本小节讨论如何利用第 1 节和第 3.2.2 节的观察，从具有扭曲平凡编织的可对偶对象的存在性出发，得到整个 ∞-范畴的分裂。

命题 3.2.9. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴，其中 $n \geq 2$。假设 E 是一个开闭幂等元。那么

(1) $\mathcal{C}_E$ 的全子范畴中的 E-稳定对象具有典范的 E_n-幺半群结构，且局部化函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_E$ 是一个 E_n-幺半群局部化。(2) 若 $\mathcal{C}$ 具有形状为 I 、且由 $\wedge$ 在每个变量中保持的（余）极限，则 $\mathcal{C}_E$也如此。此外，函子 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}_E$ 保持这些余极限，并且幺半群函子 E_n $\mathcal{C}_E \to \mathcal{D}$ 保持 I-（余）极限，当且仅当 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_E \to \mathcal{D}$ 如此。(3) 若 E 具有补对象 S/E，则局部化函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_E \times \mathcal{C}_{S/E}$是一个 E_n-幺半群等价。

证明。对于 (1)，根据 [Lur17，命题 2.2.1.9]，，只需证明 E-局部等价在张量化下保持稳定。这显然成立：若 $E \wedge f$ 和 $E \wedge g$ 是等价，则 $E \wedge (f \wedge g) = (E \wedge f) \wedge (E \wedge g)$ 是一个等价。

对于 (2)，注意到 $\mathcal{C}_E$ 在 $\mathcal{C}$ 中对 I-(余)极限封闭。事实上，若我们有一个 I-图表，其位于 $\mathcal{C}_E$ 中，且其（余）极限在 $\mathcal{C}$中，那么我们可以将余极限图表与 E作 smash 积；根据假设，这会得到一个新的（余）极限图表。原图表的底与新图表自然同构，因此新旧（余）极限也通过自然映射同构，即该（余）极限位于 $\mathcal{C}_E$中。因此，i 保持并反映 I-(余)极限。此外，iL （由与 E作 smash 积给出）也保持 I-(余)极限。由此可得，L 保持 I-余极限。由于 i 和 L 保持 I-(余)极限，(2) 得证。

对于 (3)，该函子是若干 E_n-幺半群函子的积，因此也是 E_n-幺半群的。它是等价这一点可在同伦范畴层面验证，并由命题 2.4.2 得出。□

定理 3.2.10. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-单体 ∞-范畴，其中 $n \geq 2$。

(1) 若 E 是一个开闭幂等元，则 E_n-单体局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_E$ 是在 $\wedge$ 下使 E 可逆的泛 E_n-单体函子。(2) 若 T 具有扭曲平凡编织且有一个对偶 $T^\vee$，则 E_n-单体局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{T^\vee \wedge T}$ 是在 $\wedge$ 下使 T 可逆的泛 E_n-单体函子。(3) 假设 $\mathcal{C}$ 有有限双积，且这些双积在每个变量上都由 $\wedge$ 保持。若 E 是一个开闭幂等元，其补对象为 S/E，则 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{S/E}$ 是保持有限双积并将 E 映为 0 的泛 E_n-单体函子。

证明。对于 (1)， E 显然在 $\mathcal{C}_E$ 中是 $\wedge$-可逆的——事实上它就是幺半群单位。根据 E_n-单体局部化的泛性质，只需验证：一个 E_n-单体函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $\wedge$ 下使 E 可逆，当且仅当它将 E-局部态射映为等价。现在，F 在 $\wedge$ 下使 E 可逆，当且仅当它将展示 E 为自对偶的单位和余单位映为同构。这个单位和余单位正是典范映射 $E \to S$ 和 $S \to E$，所以它们被映为可逆，当且仅当 F 将 $E \to S$ 映为同构。但是，由于 F 是 E_n-单体的，这当且仅当 F 对每个 X 都将 $E \wedge X \to X$ 映为同构，也就是说，将 E-局部态射映为等价，正如所需。

对于（2）， T在 $\mathcal{C}_{T^\vee \wedge T}$中当然是 $\wedge$-可逆的，其逆元为 $T^\vee$——也就是说，$T^\vee \wedge T$是幺半群单位。函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $\wedge$ 下反演 T，当且仅当它将 T的对偶数据映射为等价；当且仅当它将 $T^\vee \wedge T$的闭开性数据映射为等价；当且仅当（根据（1））它经由 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{T^\vee \wedge T}$分解。

对于（3），只需验证 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 反演 S/E，当且仅当它将 E 映射到 0。这源于以下事实：在双积 $Z = X \oplus Y$ 中，我们有 $X = 0$，当且仅当 $Y \to Z$ 是同构。□

3.3. 具有某些余极限的 ∞-范畴。本节中，我们回顾 [Lur17] 关于具有某些余极限的 ∞-范畴的一些材料，并着眼于其幺半性质。我们也开始考察这类范畴的某些子范畴，先从带基点情形入手。这项研究将在第 4 节继续。

引理 3.3.1. 设 $\mathcal{K}$ 是一类小型 ∞-范畴，且 $\mathcal{C}$ 是一个小型 ∞-范畴。设 $\mathcal{R}$ 是一组余锥，其所依图表的形状如 $\mathcal{K}$ 所示。那么存在一个 ∞-范畴 $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$，它具有所有形状属于 $\mathcal{K}$ 的余极限；以及一个函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$，它将 $\mathcal{R}$ 中的余锥映为余极限余锥，并且在具有这些性质的对象中具有普遍性。

此外，$\mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 可按如下方式构造。令 $\mathrm{Psh}(\mathcal{C})$ 表示 ∞ 上预层的 ∞-范畴，令 $S \subseteq \mathrm{MorPsh}(\mathcal{C})$ 表示对每个 $R\colon K^{\triangleright} \to \mathcal{C} \in \mathcal{R}$，形如 $\varinjlim_{k\in K} R(k) \to R(\infty)$ 的态射所成的集合，并令 $L : \mathrm{Psh}(\mathcal{C}) \to S^{-1}\mathrm{Psh}(\mathcal{C})$ 为局部化函子。则 $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 是 $L(\mathcal{C}) \subseteq S^{-1}\mathrm{Psh}(\mathcal{C})$ 在 $\mathcal{K}$-形余极限下的闭包。

证明。这是 [Lur09a，命题 5.3.6.2]。具体描述见证明。□

记号 3.3.2。我们将 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}) := \mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 记作 $\mathcal{K}$ 所有小余极限的类。我们将 $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(\mathcal{C}) := \mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 记作 $\mathcal{R}$ 余锥的空类。因此，$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathrm{Psh}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{K}$ 是所有小余极限的类，而 $\mathcal{R}$ 是余锥的空类。

定义 3.3.3。设 $\mathcal{K}$ 为小范畴的一个类。令 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 为具有 $\mathcal{K}$-指标余极限的 ∞-范畴所成的对称幺半 ∞-范畴，其中对称幺半结构取自 [Lur17，推论 4.8.1.4]。

注 3.3.4。根据 [Lur17，记号 4.8.1.2]，$\mathrm{Cat}^{\otimes}_{\mathcal{K}}$ 中从 $\mathcal{C}_1$、…、$\mathcal{C}_n$ 到 $\mathcal{D}$ 的态射是一个函子 $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$，它分别保持每个变量中的 $\mathcal{K}$-指标余极限。特别地，当 $n = 0$时，零元态射 $* \to \mathcal{D}$ պարզապես是 $\mathcal{D}$中的一个对象。

根据 [Lur17，命题 4.8.1.3]，，$\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 中的张量积可以通过令 $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{D} = \mathcal{P}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}\boxtimes\mathcal{K}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ 来构造，其中 $\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{K}$ 是 [Lur17，记号 4.8.1.7] 中所描述的图表的集合。也就是说，$\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{K}$ 包含形如 $(C_k, D)_{k\in K}$（对于 $K \in \mathcal{K}$）且顶点为 $(\varinjlim_{k\in K} C_k, D)$ 的图表，以及形如 $(C, D_k)_{k\in K}$（对于 $K \in \mathcal{K}$）且顶点为 $(C, \varinjlim_{k\in K} D_k)$ 的图表。正如引理 3.3.1 中所回顾的，[Lur09a，命题 5.3.6.2] 的证明表明，这意味着 $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{D}$ 是 $(\mathcal{K}\boxtimes\mathcal{K})^{-1}\mathrm{Psh}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ 的最小全子范畴，其中包含像 $L(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$（其中 $L : \mathrm{Psh}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \to (\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{K})^{-1}\mathrm{Psh}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ 是局部化函子），并且在 $\mathcal{K}$ 形余极限下封闭。

记号 3.3.5. 对于 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, \mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$，我们令 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n; \mathcal{D})$ 表示由函子 $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ 组成的 ∞-范畴，这些函子分别在每个变量中保持 $\mathcal{K}$-余极限，因此，多重同态空间 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n; \mathcal{D})$ 是 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n; \mathcal{D})$ 的底层 ∞-群胚。

注 3.3.6. 如 [Lur17, 4.8.1.6]，所述，注记 3.3.5 的构造 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{K}}$ 将对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 展示为指数闭的对称幺半 ∞-范畴。

注记 3.3.7. $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 中的 E_∞-代数对象与具有 $\mathcal{K}$-指标余极限且 $\otimes$ 在其上分配的对称幺半 ∞-范畴之间存在等价。更一般地，具有 $\mathcal{K}$-余极限且 $\otimes$ 在其上分配的 E_n-幺半 ∞-范畴，与 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 中的 E_n-代数对象之间存在等价。参见 [Lur17, 4.8.1.9]。

定义 3.3.8. 设 $\mathcal{K}$ 是一个小型 ∞-范畴类，其中包含空范畴，因此任意 $\mathcal{K}$-余完备范畴 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 都有一个始对象。令 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K},\,*} \subset \mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 表示 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 的全子幺半簇，它由那些带基点的 $\mathcal{K}$-余完备范畴组成（即始对象为零对象的范畴）。

注记 3.3.9. 如注记 3.3.7 所述，$\mathrm{Cat}_{*,\,\mathcal{K}}$ 中的 E_∞-代数对象与带基点的对称幺半 ∞-范畴之间存在等价，这些范畴具有 $\mathcal{K}$-指标的余极限，并且 $\otimes$ 对这些余极限具有分配性。

引理 3.3.10. 设 $\mathcal{K}$ 是一个小型 ∞-范畴类，其中包含空范畴。则，一个对象上的自由带基点 $\mathcal{K}$-余完备 ∞-范畴由 $\mathrm{Top}_*^{\mathcal{K}}$ 给出；Top_* 是包含 S^0 且在 $\mathcal{K}$-余极限下闭合的最小全子范畴。也就是说，对于任意 $\mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_{*,\,\mathcal{K}}$，在 S^0 处的求值确定了范畴 $\mathrm{Cat}_{*,\,\mathcal{K}}(\mathrm{Top}_*^{\mathcal{K}}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}^{\sim}$ 的一个范畴等价。

注记 3.3.11. 在下面的证明中，我们大量使用 [Lur09a, 第 4.4 节。5],Lurie 在本书出版后已对该节进行了重写。下面证明中的参考文献所指的是 [Lur09a] 当前版本中的定理编号，该版本可从 Lurie 的网站 https://www.math.ias.edu/~lurie/ 免费获取。

引理 3.3.10 的证明。按照 [Lur09a, 定义 4.4.5，2], 令 Idem^+ 表示分裂幂等元漫步范畴，它是一个 1-范畴，具有一个始对象 Y 以及另一个对象 X，其中 Y 是一个收缩。我们将使用 [Lur09a, 命题 4.4.5，6],它指出，作为一个 ∞-范畴，Idem^+ 由对象 Y、X，两个态射 $i\colon Y \to X$ 和 $r\colon X \to Y$，以及同伦 $ri \simeq \mathrm{id}_Y$ 自由生成。让我们考察 ∞-范畴 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+)$，其中 $\mathcal{R}$ 是空图表上顶点为 Y 的余锥。展开定义可知，$\mathcal{P}(\mathrm{Idem}^+)$ 是带有一个收缩 $\underline{Y}$的空间 $\underline{X}$ 所成的∞-范畴，而 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathrm{Idem}^+) \subset \mathcal{P}(\mathrm{Idem}^+)$ 是其中 $\underline{Y}$可缩的全子范畴。因此，我们有一个典范等价$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathrm{Idem}^+) \simeq \mathrm{Top}_{*\circ}$ 在此识别下，局部化 $\mathcal{P}(\mathrm{Idem}^+) \to \mathrm{Top}_*$ 将在 X 处的可表对象映至 S^0，并将 Y映至 0。因此，$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+) \subset \mathrm{Top}_*$ 可识别为 $\mathrm{Top}_*^{\mathcal{K}}$。

由 $\mathrm{Top}_*^{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+)$ 的泛性质可知，对 S^0 求值确定了一个范畴等价 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+)\ \mathcal{D}) \to \mathrm{Cat}^{\{\emptyset\}}(\mathrm{Idem}^+, \mathcal{D})$，对任意 $\mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 都成立。也就是说，$\mathcal{K}$-余连续函子 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+) \to \mathcal{D}$ 与保持始对象的函子 $\mathrm{Idem}^+ \to \mathcal{D}$ 相对应。根据 [Lur09a，命题 4.4.5.6],，这意味着对 X 求值确定了一个函子 $\mathrm{Cat}^{\{\emptyset\}}(\mathrm{Idem}^+, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}^{\sim}$，其在 $D \in \mathcal{D}$ 上的纤维是这样一个空间：其点由一个态射$0 \to D$、一个态射 $D \to 0$，以及这两个态射的复合与 id_0 之间的同伦组成，其中 $0 \in \mathcal{D}$ 是始对象。若 $\mathcal{D}$ 带基点，则此空间是可缩的，因此函子 $\mathrm{Cat}^{\{\emptyset\}}(\mathrm{Idem}^+, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ 是一个等价。由此可知，函子 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}}(\mathrm{Idem}^+)\ \mathcal{D}) \to \mathcal{D}^{\sim}$ 是一个等价。

只需注意到 $\mathrm{Top}_*^{\mathcal{K}}$ 本身是带基点的，证明即告完成。 □

引理 3.3.12. 设 $\mathcal{K}$ 是一个小 ∞-范畴的集合，其中包含空范畴。那么 $\mathsf{Cat}_{*,\ \mathcal{K}}$ 是一个带基点的 ∞-范畴；其零对象是终端范畴 $[0]$。

证明。唯一的函子 $\mathcal{C} \to [0]$ 如 Cat_∞ 中所述。唯一的函子 $[0] \to \mathcal{C}$ 选出始对象。由于 $\mathcal{C}$ 的始对象没有自同构，此函子没有自同构。它保持 $\mathcal{K}$-余极限。□

引理 3.3.13。设 $\mathcal{K}$ 是一个小 ∞-范畴的集合，其中包含空范畴。满子运算子 $\mathsf{Cat}_{*,\mathcal{K}} \subset \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$ 是一个 $\otimes$-理想和指数理想，并且是含幺的。单位是引理 3.3.10 中的 ∞-范畴 $\mathsf{Top}_*^{\mathcal{K}}$。

证明。对于任意 $\mathcal{C} \in \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$，函子 $\mathcal{C} \otimes (-)$ 和 $\mathsf{Fun}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}, -)$ 在 $\mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$ 通过其指数闭结构对自身的自然富化下具有 2-函子性。此外，这些函子保持 $\mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$的零对象，即终端范畴$[0]$。 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 是带基点的，当且仅当唯一函子 $\mathcal{D} \to [0]$ 具有彼此同构的左伴随与右伴随。此外，若 $\mathcal{D} \in \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$，则所涉及的所有函子都保持 $\mathcal{K}$-余极限。由于伴随被任意 2-函子保持，因此 $\mathcal{C} \otimes (-)$ 和 $\mathsf{Fun}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}, -)$ 保持带基点的 ∞-范畴，即 $\mathsf{Cat}_{*,\mathcal{K}}$ 是一个 $\otimes$-理想和指数理想。

$\mathsf{Cat}_{*,\ \mathcal{K}}$ 含幺性由引理 3.3.10 得出。 □

推论 3.3.14. 设 $\mathcal{K}$ 是一个小 ∞-范畴的集合，其中包含空范畴。满子运算子 $\mathsf{Cat}_{*,\ \mathcal{K}} \subset \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$ 是对称幺半的，且包含函子是松对称幺半的，并保留 $\otimes$。单位是引理 3.3.10 中的 ∞-范畴 $\mathsf{Top}_*^{\mathcal{K}}$。

证明。这由引理 3.3.13 和引理 3.1.10 得出。 □

注 3.3.15（无穷视角）。设 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ 是小型 ∞-范畴类之间的包含映射。根据 [Lur17，注 4.8.1.8]，，函子 $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}'} : \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}} \to \mathsf{Cat}_{\mathcal{K}'}$ 是遗忘函子的左伴随，并且 $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}'}$ 是强对称幺半的。正如 [Lur17，命题 4.8.1.10 和推论 4.8.1.14]，中所指出的，特别地，若 $\mathcal{C}$ 是一个具有相容有限余极限的对称幺半 ∞-范畴，则 $\mathsf{Ind}(\mathcal{C})$ 在 Day 卷积下也是对称幺半的，并具有如下泛性质：当 $\mathcal{D}$ 是可呈示对称幺半 ∞-范畴时，$\mathsf{Fun}^{\otimes,L}(\mathsf{Ind}(\mathcal{C})\ \mathcal{D}) = \mathsf{Fun}^{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$。此外，若 $\mathcal{K}$ 是一个可呈示对称幺半 ∞-范畴，且 $T \in \mathcal{K}$ 是具有扭曲平凡编织的可对偶化对象，那么在定理 3.2.10 的函子性分裂中，因子 $\mathcal{K}_{T \wedge T^\vee}$ 和 $\mathcal{K}/T$ 是可呈示对称幺半的，投射到它们上的局部化函子是对称幺半左伴随。

4. Symmetric Monoidal ∞-Categories with Duals and CertainColimits

本节将第 1 节中的核心思想与第3节中的基础设施结合起来，以研究某些由对称幺半范畴组成的 ∞-范畴的结构；这些对称幺半范畴具有对偶和某些余极限。在第 4.1 节中，我们将讨论这样一个事实：任何具有对偶和某些余极限的对称幺半 ∞-范畴，都可以分裂为若干由不同性质刻画的子范畴的积。例如，一个因子是稳定的，另一个是加性 1-范畴，等等。所有这些分裂都源自某些具有扭曲平凡编织的对象；这些对象的存在性由具备适当余极限这一条件所保证。这些分裂也具有函子性，因此，任意适当地保持余极限的对称幺半函子，只要它作用于这类 ∞-范畴之间，就会保持这些分裂；于是所有这类 ∞-范畴构成的 ∞-范畴本身也按这些因子分裂。在第 4.2 节中，我们通过计算具有对偶和 $\mathcal{K}$-余极限的自由对称幺半 ∞-范畴，初步探讨其中一些因子，其中 $\mathcal{K}$ 取不同值。

4.1. 典范分裂。在本小节中，我们确定两个具有扭曲平凡编织的典范对象；在满足适当余完备条件的任意对称幺半∞-范畴中，这两个对象都必然存在。第一个对象（第 4.1.1 节）在具有足够余纤维的半加性情形下余表征类群元素。第二个对象（第 4.1.2 节）是单位的悬挂，它存在于具有悬挂的带基点情形中。在这两种情况下，第 3.2.3 节的理论告诉我们，若这些对象还可对偶化，就能得到整个 ∞-范畴的一个分裂。这些分裂分别在相应的小节中加以刻画，其相互作用则在第 4.1.3 节中讨论。

4.1.1. 类群／反类群分裂。在本小节中，我们描述一个对象，它在具有余纤维的半加性对称幺半 ∞-范畴中余表征同态空间的类群元素。我们讨论该对象可对偶化时，根据第 3.2.3 节得到的分裂。

引理 4.1.1. 设 (X, μ, η) 是一个同伦交换、同伦结合的 H-空间。令 $i : X^{\mathrm{gp}} \to X$ 表示 X 的类群部分的包含映射，即 X 中在乘法 μ 下有逆元的连通分支的不交并。注意，在映射 μ 的限制下，X^{gp} 是一个类群的 H-空间。令 $-1 : X^{\mathrm{gp}} \to X^{\mathrm{gp}}$ 是一个映射，将每个点映到其在 μ 下的同伦逆元。则下列交换方块是一个同伦拉回：

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{(i,i(-1))} & X \times X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ * & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

证明. 我们分几个步骤来证明。

步骤 1：首先注意到，根据注记 1.5.4，当 X 离散时，引理成立。现在令 F 为 μ 的纤维，则我们有一个自然映射 $X^{\mathrm{gp}} \to F$。

步骤 2：由于 μ 被 $\mathrm{id}_X \times \eta$（或被 $\eta \times \mathrm{id}_X$）分裂，因此对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有短正合列 $\pi_n(F) \to \pi_n(X \times X) \to \pi_n(X)$。当 $n = 0$ 时，根据步骤 1，这表明 $\pi_0(F) = \pi_0(X)^{\mathrm{gp}}$。由于 $\pi_0(X)^{\mathrm{gp}} = \pi_0(X)^{\mathrm{gp}}$，这说明比较映射 $\pi_0(X^{\mathrm{gp}}) \to \pi_0(F)$ 是一个双射。

步骤 3：对于 $n \geq 1$，我们将短正合列 $\pi_n(F) \to \pi_n(X \times X) \to \pi_n(X)$ 与短正合列 $\pi_0(\Omega^n F) \to \pi_0(\Omega^n X \times \Omega^n X) \to \pi_0(\Omega^n X)$ 对应起来。根据步骤 2，映射 $\pi_0((\Omega^n X)^{\mathrm{gp}}) \to \pi_0(\Omega^n F)$ 是一个双射。由于 $\Omega^n(X^{\mathrm{gp}}) = \Omega^n X = (\Omega^n X)^{\mathrm{gp}}$，我们得到 $\pi_n(X^{\mathrm{gp}}) = \pi_0(\Omega^n(X^{\mathrm{gp}})) \to \pi_0(\Omega^n F) = \pi_n(F)$ 是一个双射。因此，根据怀特海定理，$X^{\mathrm{gp}} \to F$ 在单位元的连通分支上限制为一个等价。

步骤 4：F 继承了作为此类映射之纤维的交换、结合 H-空间结构，而映射 $X^{\mathrm{gp}} \to F$ 是 H-空间之间的映射。由于 X^{gp}是类群的，且 $X^{\mathrm{gp}} \to F$ 是 π_0-满射的，F 也是类群的。因此，由于$X^{\mathrm{gp}} \to F$ 在单位元的连通分支上是等价（步骤 3），且是一个 π_0-双射（步骤 1），可知 $X^{\mathrm{gp}} \to F$ 是等价。□

定义 4.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个半加性 ∞-范畴。记 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp}} \subseteq \mathcal{C}$ 为由满足以下条件的对象 C 构成的全子范畴：对于所有$D \in \mathcal{C}$，E_∞-空间 $\mathcal{C}(C, D)$ 都是类群的。若 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{gp}}$，则称 $\mathcal{C}$ 是加性的。若 $\mathcal{C}$ 有余纤维，则对于 $C \in \mathcal{C}$，令C_{gp} 为对角映射 $\Delta : C \to C \oplus C$的余纤维。

将 $\mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}} \subseteq \mathcal{C}$ 记作满足以下条件的对象的全子范畴：对于所有 $D \in \mathcal{C}$，$\mathcal{C}(C, D)$ 没有非零类群元素。若 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$，则称 $\mathcal{C}$ 是反半加性的。

推论 4.1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有余纤维的半加性 ∞-范畴，并设 $C \in \mathcal{C}$。则复合映射 $r_C : C \xrightarrow{(\mathrm{id}_C,\ 0)} C \oplus C \to C_{\mathrm{gp}}$ 诱导出的映射可通过包含映射 $\mathcal{C}(C, D)^{\mathrm{gp}} \to \mathcal{C}(C, D)$ 规范地分解，并且诱导映射 $r_C^* : \mathcal{C}(C_{\mathrm{gp}}, D) \to \mathcal{C}(C, D)^{\mathrm{gp}}$ 是一个等价。

证明。余纤维序列 $C \xrightarrow{\Delta} C \oplus C \to C_{\mathrm{gp}}$ 诱导出纤维序列 $\mathcal{C}(C, D) \xleftarrow{\mu} \mathcal{C}(C, D) \times \mathcal{C}(C, D) \leftarrow \mathcal{C}(C_{\mathrm{gp}}, D)$，其中 μ 是 $\mathcal{C}(C, D)$ 上的加法。因此结论由引理 4.1.1 得出。□

定理 4.1.4. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴，具有双积和余纤维，且 $\wedge$ 在其中分配。那么，推论 4.1.3 的复合映射 $r = r_S : S \xrightarrow{(\mathrm{id}_S, 0)} S \oplus S \to S_{\mathrm{gp}}$ 是一个闭幂等元。S_{gp}-稳定对象恰好是 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp}}$ 的对象，而 S_{gp}-挠对象恰好是 $\mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$ 的对象。

证明. 注意，对任意 $C \in \mathcal{C}$，余纤维序列 $C \to C \oplus C \to C_{\mathrm{gp}}$ 可识别为余纤维序列 $C \wedge S \to C \wedge (S \oplus S) \to C \wedge S_{\mathrm{gp}}$。由推论 4.1.3 可得 $\mathcal{C}(S_{\mathrm{gp}} \wedge C, D) = \mathcal{C}(C, D)^{\mathrm{gp}}$。特别地，$\mathcal{C}(S_{\mathrm{gp}} \wedge S_{\mathrm{gp}}, D) = \mathcal{C}(S_{\mathrm{gp}}, D)^{\mathrm{gp}} = (\mathcal{C}(S, D)^{\mathrm{gp}})^{\mathrm{gp}} = \mathcal{C}(S, D)^{\mathrm{gp}} = \mathcal{C}(S_{\mathrm{gp}}, D)$。因此，根据米田引理，$S_{\mathrm{gp}} \to S_{\mathrm{gp}} \wedge S_{\mathrm{gp}}$ 是一个同构，即 $S \to S_{\mathrm{gp}}$ 是一个闭幂等元。推论 4.1.3 中的等价 $\mathcal{C}(S_{\mathrm{gp}} \wedge C, D) = \mathcal{C}(C, D)^{\mathrm{gp}}$ 也给出了对 S_{gp}-稳定对象和 S_{gp} 挠对象的描述。□

推论 4.1.5. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个具有双积和余纤维的 E_n-幺半 ∞-范畴，且 $\wedge$ 在其中分配。假设对角映射 $\Delta: S \to S \oplus S$ 的余纤维 S_{gp} 可对偶化。那么 S_{gp} 是一个开闭幂等元，其补对象为 $S_{\neg\mathrm{gp}}$。诱导函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp}} \times \mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$ 是一个等价。

证明。由定理 4.1.4 和命题 2.3.1(2)，S_{gp} 是一个开闭幂等元。由于 S_{gp} 是一个余群对象（定理 4.1.4），由推论 3.2.7 可知，$E \to S$ 的余纤维 S/E 是一个互补开闭幂等元。因此，等价$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp}} \times \mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$ 由定理 4.1.4 和命题 3.2.9(3)得出。□

推论 4.1.6. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个带有双积和余纤维的 E_n-幺半 ∞-范畴 ($n \geq 2$)，且 $\wedge$ 在其上分配。假设对角映射 $\Delta\colon S \to S \oplus S$ 的余纤维 S_{gp} 是可对偶化的。那么，局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp}}$ 是到一个加性的 E_n-幺半∞-范畴的普适E_n-幺半、保持双积和余纤维的函子；该范畴带有双积和余纤维，且 $\wedge$在其上分配。局部化$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$ 是到一个反加性的 E_n-幺半 ∞-范畴的普适 E_n-幺半、保持双积和余纤维的函子；该范畴带有双积和余纤维，且$\wedge$ 在其上分配。

证明。此结论源 自推论 4.1.5 和定理 3 .2.10。 □

4.1.2. 稳定／平凡悬挂分解。在本小节中，我们讨论单位对象的悬挂。当此对象可对偶化时，它会（通过第 3.2.3 节）诱导出 ∞-范畴的一个分解，分为稳定部分和具有对偶刻画的部分：所有对象的悬挂都是平凡的。

定义 4.1.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带基点的 ∞-范畴，具有悬挂 Σ （即，对每个 $C \in \mathcal{C}$ ，对象 $\Sigma C = 0 \cup_C 0$ 都存在）。若悬挂函子 $\Sigma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是范畴等价，则称 $\mathcal{C}$ 弱稳定；若此外 $\mathcal{C}$ 具有有限余极限（等价地， $\mathcal{C}$ 具有有限极限），则称其稳定。若悬挂函子 Σ 恒等于 0，则称 $\mathcal{C}$ 具有平凡悬挂。

注 4.1.8. 回顾例 1.5.6，由于 $S^1 \in \mathrm{Top}_*$ 是一个余群对象，因此在具有悬挂和有限余积的 ∞-范畴中，任何悬挂对象都是余群对象。因此，如果 $\mathcal{C}$ 是一个弱稳定的半加性∞-范畴，那么 $\mathcal{C}$ 是加性的。

注 4.1.9. 在加性的 ∞-范畴中，两个映射 f、g 的余等化子可计算为 $f - g$ 的余纤维。因此，加性的 ∞-范畴具有有限余极限，当且仅当它具有余纤维。弱稳定的 ∞-范畴稳定，当且仅当它具有有限余积和余纤维；这又当且仅当它具有有限余极限。

命题 4.1.10. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴（$n \geq 2$），具有有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在其中分配。假设单位 ΣS 的悬挂具有对偶 $\Sigma^{-1}S$。那么 $S_{\mathrm{stab}} := \Sigma S \wedge \Sigma^{-1} S$ 是一个开闭幂等元，并具有补对象 $S_{\Sigma-\mathrm{triv}}$。

证明。由于 ΣS 具有扭曲平凡编织（例 2.1.5），根据命题 2.3.1(3)， S_{stab} 是一个开闭幂等元。由于 S_{stab} 是一个悬挂对象，它是一个余群对象（注 4.1.8）。因此，根据推论 3.2.7， $S_{\Sigma-\mathrm{triv}}$ 是一个互补开闭幂等元。□

定义 4.1.11. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴（$n \geq 2$），具有有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在其上分配。记 $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}} = \mathcal{C}_{S_{\mathrm{stab}}}$ 和 $\mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}} = \mathcal{C}_{S_{\Sigma-\mathrm{triv}}}$。

定理 4.1.12. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴（$n \geq 2$），它具有有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在这些余积和余纤维上分配。假设单位 ΣS 的悬挂有一个对偶 $\Sigma^{-1}S$。那么典范函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{stab}} \times \mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$是一个等价。局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$ 是到一个 E_n-幺半稳定 ∞-范畴的泛 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子。局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$ 是到一个 E_n-幺半 ∞-范畴的泛 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子；该范畴具有平凡悬挂以及有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在这些余积和余纤维上分配。

证明。等价 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{stab}} \times \mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$ 由命题 4.1.10 和命题 3.2.9(3) 得出。根据注 4.1.8, $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$ 是稳定的。任意将 ΣS 映到 $\wedge$-可逆对象 ΣS （它具有幺半逆元 $\Sigma^{-1}S$）的、到一个 E_n-幺半稳定 ∞-范畴（$\mathcal{D}, \wedge S$）的 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子 F，因此根据定理 3.2.10(1)， F 唯一地经由 $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$分解。由于 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$ 是一个积投影，诱导函子 $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}} \to \mathcal{D}$ 保持 F 所保持的任意余极限。这就确立了 $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$的泛性质。同理，任意将 ΣS 映到 0 的、到一个 E_n-幺半 ∞-范畴（$\mathcal{D}, \wedge S$）的 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子 F，其中该范畴具有平凡悬挂以及有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在这些余积和余纤维上分配，因此根据定理 3.2.10(3)， F 唯一地经由 $\mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$分解；与前面一样，对相应余极限的保持性自动成立。这就确立了 $\mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$的泛性质。□

4.1.3. 三重分裂。本小节将描述前两个小节中的分裂之间的相互作用，从而得到任何具有对偶、有限余积和余纤维的对称幺半 ∞-范畴的三重分裂。

命题 4.1.13. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-单体 ∞-范畴（$n \geq 2$），具有有限双积和余纤维，且 $\wedge$ 在其上分配。假设 ΣS 和对角映射 $S \to S \oplus S$ 的余纤维 S_{gp} 都具有对偶。那么，推论 4.1.5 和命题 4.1.10 中的 E_n-单体局部化函子合并为一个范畴等价

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{stab}} \times \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\Sigma-\mathrm{triv}} \times \mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$$

这里， E_n-局部化函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}} = \mathcal{C}_{\mathrm{gp}} \cap \mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$ 是到一个具有平凡悬挂和余纤维、且 $\wedge$ 在其上分配的 E_n-单体加性 ∞-范畴的万有E_n-单体函子。

证明。如注 4.1.8 所述，任何弱稳定的 ∞-范畴都是加性的。因此，开闭幂等元 S_{stab} 细化开闭幂等元 S_{gp}，对偶地，开闭幂等元 $S_{\neg\mathrm{gp}}$ 细化开闭幂等元 $S_{\Sigma-\mathrm{triv}}$。此外，由于$n \geq 2$，两个闭幂等元结构 $S \to S_{\mathrm{gp}} \to S_{\mathrm{gp}} \wedge S_{\Sigma-\mathrm{triv}}$ 和 $S \to S_{\Sigma-\mathrm{triv}} \to S_{\Sigma-\mathrm{triv}} \wedge S_{\mathrm{gp}}$ 相同，也就是说，局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp}}$ 和 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\Sigma-\mathrm{triv}}$可交换。结论得证。□

我们已经探讨了 $\mathcal{C}_{\mathrm{stab}}$ 和 $\mathcal{C}_{\neg\mathrm{gp}}$的一些性质。$\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 的以下性质可能会令人意外:

命题 4.1.14。设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半 ∞-范畴（$n \geq 2$），具有有限双积和余纤维，且 $\wedge$ 在其上分配。假设 ΣS 和 S_{gp}具有对偶。那么局部化函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$ 是到一个 E_n-幺半加性 1-范畴的普遍 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子，该范畴具有余纤维，且 $\wedge$在其上分配。

证明。我们首先必须证明 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$ 是一个 1-范畴，也就是说，其同态空间是离散的。对于任意 $C, D \in \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$，有 $\pi_n \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}(C, D) = \pi_0 \mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}(\Sigma^n C, D)$，其中基点是零态射。由于悬挂是平凡的，因此 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}(C, D)$ 在零态射处的连通分支是可缩的。此外，$\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}(C, D)$ 是一个类群的 H-空间，因为 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$ 是加性的。因此，它的所有连通分支都同伦等价，从而 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}(C, D)$ 是离散的。

显然，$\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$ 是加性的，并且具有 $\wedge$ 在其上分配的余纤维。反过来，若 $\mathcal{D}$ 是一个 E_n-幺半加性 1-范畴，具有 $\wedge$在其上分配的余纤维，则 $\mathcal{D}$ 的悬挂是平凡的。因此，若 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 E_n-幺半、保持有限余积和余纤维的函子，则它将 ΣS 映至 0，并将 $S \to S_{\mathrm{gp}}$映至一个同构，因此由定理 3.2.10，它唯一地分解经过 $\mathcal{C}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$ 。它自动保持 F 所保持的任何余极限。□

具有适当对偶的加性 1-范畴允许进一步的一些分裂：

命题 4.1.15. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个 E_n-幺半半加性 1-范畴，具有余纤维，且 $\wedge$ 在其上分配。设 $m \in \mathbb{N}$ 是一个数。那么映射 $m\colon S \to S$ 的余纤维 S/m（即恒等映射的 m 重和）是一个闭幂等元。对于所有 $C, D \in \mathcal{C}$，都有 $\mathcal{C}(C \wedge S/m, D) = \mathcal{C}(C, D)[m]$（其中 $A[m]$ 表示 A 的 m-挠子群），因此 S/m-局部对象是满足对所有 $D \in \mathcal{C}$，$m = 0$ 在 $\mathcal{C}(C, D)$ 中的那些对象 $C \in \mathcal{C}$ ；而 S/m-挠对象是对所有 $D \in \mathcal{C}$ 满足 $\mathcal{C}(C, D)[m] = 0$ 的那些对象 $C \in \mathcal{C}$ 。

警告 4.1.16。命题 4.1.15 在一般的 ∞-范畴中是错误的，即使m 是素数。例如，在谱中，S/m是模-m Moore 谱，并且$S/m \not\simeq S/m \wedge S/m$。

命题 4.1.15 的证明。余纤维序列 $C \xrightarrow{m} C \to C \wedge S/m$ 诱导出纤维序列 $\mathcal{C}(C, D) \xleftarrow{m} \mathcal{C}(C, D) \leftarrow \mathcal{C}(C \wedge S/m, D)$，对任意 $D \in \mathcal{D}$ 都成立。由于 $\mathcal{C}$ 是一个 1-范畴，这恰好说明 $\mathcal{C}(C \wedge S/m, D) = \mathcal{C}(C, D)[m]$。因此$\mathcal{C}(S/m \wedge S/m, D) = \mathcal{C}(S/m, D)[m] = (\mathcal{C}(S, D)[m])[m] = \mathcal{C}(S, D)[m] = \mathcal{C}(S/m, D)$；由 Yoneda，$S/m$ 是一个闭幂等元，其余部分随之得证。□

定义 4.1.17. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加性 1-范畴，且 $m \in \mathbb{Z}$。如果自同态 $m\colon C \to C$（即恒等式的 m 重和）是零态射，我们称 $C \in \mathcal{C}$ 的特征整除 m 。我们用 $\mathcal{C}/m \subseteq \mathcal{C}$ 表示由特征整除 m 的对象构成的全子范畴。如果 $\mathcal{C} = \mathcal{C}/m$，即所有同态群的特征都整除 m，我们称 $\mathcal{C}$ 的特征整除 m 。

如果 $m\colon C \to C$ 是一个单态射，我们称 C 是 m-挠自由的；如果 $m\colon C \to C$ 是一个满射，我们称 C 是余-m-挠自由的。我们用 $\mathcal{C}(m) \subseteq \mathcal{C}$ 表示由余-m-挠自由的对象构成的全子范畴。如果 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(m)$，即所有同态群都是 m-挠自由的，我们称 $\mathcal{C}$ 是 m-挠自由的。

注 4.1.18。记号 $\mathcal{C}(m)$或许会造成误解：m 不必可逆地作用于 $\mathcal{C}(m)$，只需作用时没有挠即可。

注 4.1.19。读者或许会认为，类比阿贝尔群范畴，应将余-m-挠自由对象称为“m-可除对象”。我们没有采用这一术语，因为我们认为它在当前情境中并无助益。对我们而言，余-m-挠自由对象 C 的重要之处在于，$\mathrm{Hom}(C, D)$总是一个 m-挠自由阿贝尔群，因此最好在名称中保留“挠自由”一词。事实上，我们很少会用到 m-挠自由对象，引入它们只是为了作为余-m-挠自由对象的陪衬。

推论 4.1.20. 设 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ 是一个具有余纤维的 E_n-幺半半加性 1-范畴，且 $\wedge$ 在其中分配。设 $m \in \mathbb{N}$ 是一个数，并假设 S/m 有对偶。则 S/m 是一个开闭幂等元，其补对象为 $S(m)$。诱导函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/m \times \mathcal{C}(m)$ 是一个等价。局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/m$ 是到一个加性 1-范畴的通用 E_n-幺半、半加性、余纤维保持函子

其特征整除 m，并具有余纤维，且 $\wedge$ 在其中分配。局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}(m)$ 是到一个具有余纤维的加性 1-范畴的通用 E_n-幺半、半加性、余纤维保持函子，$\wedge$ 在其中分配，且该范畴无 m-挠。

推论 4.1.20 的证明。由命题 2.3.1(2)可知，S/m 是开闭的。由于 $\mathcal{C}$ 是加性的，S/m 是余群对象，因此根据推论 3.2.7 和命题 2.4.2，它有一个补对象。因此，由定理 3.2.10 可得等价 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/m \times \mathcal{C}(m)$。

我们已经看到，$\mathcal{C}/m$ 的特征为 m。若 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 E_n-幺半、半加性、余纤维保持函子，其目标是特征整除 m 、且 $\wedge$ 能在其余纤维上分配的加性 1-范畴，那么 F 会将 $S \to S/m$ 映为一个同构。因此，根据定理 3.2.10，F 唯一地经由 $\mathcal{C}/m$ 分解，且余极限保持是自动成立的。同样，我们已经看到，$\mathcal{C}(m)$是 m-挠无的。若 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 E_n- 幺半、半加性、余纤维保持函子，其目标是一个加性 1- 范畴，其中 $\wedge$ 能在余纤维上分配，且该范畴是 m-挠无的，那么 F 会将 S/m 映为 0。因此，根据定理 3.2.10，F 经由 $\mathcal{C}(m)$分解，且余极限保持是自动成立的。□

注 4.1.21. 在推论 4.1.20 的设定中，只要存在，随 m 变化的局部化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/m$ 彼此兼容。特别地，若$m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$是素因数分解，那么只要$S/p_1$、……、$S/p_r$ 都具有对偶，就有 $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}/p_1 \times \cdots \times \mathcal{C}/p_r$。

4.2 初始对象。本节开始初步研究具有对偶以及由第 4.1.3 节的分类所启发的各种有限余极限的对称幺半 ∞-范畴。我们的目标将在第 4.2.4 节实现，即计算具有对偶、有限余积和余纤维的对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴的始对象。为此，我们依次考察第 4.1.3 节中的各个因子。

定义 4.2.1. 令 $\mathsf{SMC}_{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 表示对称幺半∞-范畴的 ∞-范畴，其中具有有限余积和余纤维，且 $\wedge$ 在其上分配。令

$$\mathsf{SMD}_{\amalg,\mathsf{cof}} = \mathsf{SMD} \times_{\mathsf{SMC}} \mathsf{SMC}_{\amalg,\mathsf{cof}}$$

表示具有有限余积、余纤维和对偶的对称幺半 ∞-范畴的全子范畴。令 $\mathsf{SMD}_{\mathrm{stab}} \subset \mathsf{SMD}_{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 表示具有对偶的对称幺半稳定 ∞-范畴的全子范畴。令 $\mathsf{SMD}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathsf{cof}} \subset \mathsf{SMD}_{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 表示具有对偶和余纤维的对称幺半加性 1-范畴的全子范畴。对于每个素数 p，令 $\mathsf{SMD}_{p,\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathsf{cof}} \subset \mathsf{SMD}_{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 表示特征整除 p且具有对偶和余纤维的对称幺半加性 1-范畴的全子范畴。令 $\mathsf{SMD}_{\neg\mathrm{gp},\ \amalg,\ \mathsf{cof}} \subset \mathsf{SMD}_{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 表示具有对偶和余纤维的对称幺半反加性 ∞-范畴的全子范畴。

4.2.1. 稳定情形。本小节中，我们计算具有对偶、有限余积和余纤维且额外稳定的对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴的始对象。不出所料，它是有限谱的 ∞-范畴，其对称幺半结构由楔积给出。

定义 4.2.2. 令 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 为对称幺半 ∞-范畴 $\mathsf{Cat}_{\mathcal{K}}$ （见定义 3.3.3），其中 $\mathcal{K}$ 为有限范畴的集合。也就是说，$\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是具有有限余极限的 ∞-范畴所构成的对称幺半 ∞-范畴。令 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{stab}} \subset \mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 为 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 的满子运算子，其对象为稳定的 ∞-范畴。

引理 4.2.3. 设 $\mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}}$ 为稳定的 ∞-范畴。那么，在球面 $\mathbb{S} \in \mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 处求值确定了范畴 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}}(\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}^{\sim}$ 的一个等价。

证明。由推论 3.3.14，$\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$是由一个对象生成的自由带基点右正合 ∞-范畴。斯潘尼尔–怀特黑德构造告诉我们，$\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}} = \varinjlim(\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\Sigma} \dots)$。设 $\mathcal{D}$ 是一个稳定 ∞-范畴，且 $F\colon \mathrm{Top}_* \to \mathcal{D}$ 是将对象 $D \in \mathcal{D}$分类的右正合函子。由于 F 与悬挂交换，而悬挂在 $\mathcal{D}$上可逆，因此很容易得出，沿$\Sigma^\infty : \mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \to \mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 延拓 F 的空间是可缩的。由于 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 是稳定的，结论得证。□

定理 4.2.4。满子运算子 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}} \subset \mathrm{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是一个 $\otimes$-理想和指数理想，并且是含幺的，其单位为有限谱的 ∞-范畴 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 。

证明。证明将遵循引理 3.3.13 的证明思路。我们首先证明 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}} \subset \mathrm{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是一个 $\otimes$- 理想。设 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}}$ 且 $\mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_{\mathrm{rex}}$；我们将证明 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 中的张量积 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 是稳定的。由于悬挂函子 $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个等价，由 $(-) \otimes \mathcal{D}$ 的函子性可知，$\Sigma \otimes \mathcal{D} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 是一个等价。但这恰好就是 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 上的悬挂函子。这是因为 $0 \otimes \mathcal{D} = 0$，其中 0 是取值于始对象的常值函子；并且对于任意函子 F、G、H，有 $(F \cup_G H) \otimes \mathcal{D} = (F \otimes \mathcal{D}) \cup_{G \otimes \mathcal{D}} (H \otimes \mathcal{D})$。

含幺性由引理 4.2.3 得出。 □

推论 4.2.5。满子运算子 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{stab}} \subset \mathrm{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是对称幺半的，其单位为 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$。包含函子是松对称幺半的，并保留 $\otimes$。

证明。此结论由定理 4.2.4 和引理 3.1.10 得出。 □

命题 4.2.6。$\mathrm{SMC}_{\mathrm{stab}}$ 的始对象是由有限谱构成的对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$，它也是 $\mathrm{SMD}_{\mathrm{stab}}$ 的始对象。

证明。根据引理 3.1.14，第一条陈述由定理 4.2.4 得出。因此，对于第二条陈述，只需注意到 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 中所有对象都有对偶。Spanier-Whitehead 对偶性 [DP80]，保证了这一点；它归结为注意到 $\mathbb{S} \in \mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ （显然）是可对偶化的，并且 $\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 是稳定的，且由 $\mathbb{S}$ 在有限余极限和降悬下生成，因此结论由引理 3.2.8 得出。□

4.2.2. 反加性情形。本小节中，我们计算具有对偶、有限余积和余纤维，并且在第 4.1.1 节的意义下还是反加性的对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴中的始对象。结果表明，它是有限集的跨度所构成的 (2, 1)-范畴，其对称幺半结构由笛卡尔积给出。

定义 4.2.7. 令 $\mathrm{Cat}_{\amalg}$ 为对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ （见定义 3.3.3），其中 $\mathcal{K}$ 是有限离散范畴这一集合。也就是说，$\mathrm{Cat}_{\amalg}$ 是具有有限余积的 ∞-范畴所构成的对称幺半范畴。令 $\mathrm{Cat}_{\oplus} \subset \mathrm{Cat}_{\amalg}$ 为 $\mathrm{Cat}_{\amalg}$ 的全子范畴，其对象是半加性的 ∞-范畴。

引理 4.2.8. 设 $\mathcal{K}$ 是一个小 ∞-范畴的集合，其中包含有限离散范畴。那么 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 是半加性的；其双积由笛卡尔积给出。

证明. 根据引理 3.3.12，$\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 由终端范畴 $[0]$成为带基点的。暂且假设 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 是小的。那么根据抽象胡说，$\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 有有限余积。因此，根据推论 3.2.5，只需验证同伦范畴 $\mathrm{hoCat}_{\mathcal{K}}$ 是半加性的。这是显然的：$\mathrm{hoCat}_{\mathcal{K}}$ 中的每个对象 $\mathcal{C} \in$ 都有一个由有限余积给出的交换幺半群结构，并且每个态射都是幺半群态射，因为 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 中的态射保留有限余积。

如果 $\mathcal{K}$ 不是小的，则将其写成有向并 $\mathcal{K} = \cup_i \mathcal{K}_i$ ，其中每个 $\mathcal{K}_i$ 都是小的。由上述结果可知，每个 $\mathrm{Cat}^{\mathcal{K}_i}$ 都是半加性的，并且包含映射 $\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}_i} \to \mathrm{Cat}^{\mathcal{K}_j}$ 保留半加性结构。因此，$\mathrm{Cat}_{\mathcal{K}}$ 也是半加性的。□

定理 4.2.9. 满子运算子 $\mathrm{Cat}_{\oplus} \subset \mathrm{Cat}_{\amalg}$ 是一个 $\otimes$-理想和指数理想。它也是含幺的，其单位为 Span(Fin)。

证明. 证明将遵循引理 3.3.13 和定理 4.2.4 的证明思路。若 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_{\amalg}$，则 $\mathcal{C} \otimes_{\amalg} (-)$ 和 $\mathrm{Fun}_{\amalg}(\mathcal{C}, -)$ 都具有 2- 函子性，并保留零对象和双积。若 $\mathcal{D}$ 是半加性的，则对角映射 $\mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{D}$有一个左伴随和一个右伴随，且二者重合；这些函子属于 $\mathrm{Cat}_{\amalg}$。这些伴随由 $\mathcal{C} \otimes_{\amalg} (-)$ 和 $\mathrm{Fun}_{\amalg}(\mathcal{C}, -)$ 保持，因此 $\mathcal{C} \otimes_{\amalg} \mathcal{D}$ 和 $\mathrm{Fun}_{\amalg}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是半加性的。因此，$\mathrm{Cat}_{\oplus}$ 是一个 $\otimes$-理想和指数理想。

含幺性由 [Gla15，定理 A.1]推出。 □

推论 4.2.10。满子运算子 $\mathrm{Cat}_{\oplus} \subset \mathrm{Cat}_{\amalg}$ 是带单位 Span(Fin) 的对称幺半范畴。包含函子是松对称幺半的，并保持 $\otimes$。

证明。这由定理 4.2.9 和引理 3.1.10 得出。 □

推论 4.2.11。对称幺半 (2, 1)-范畴 Span(Fin) 是对称幺半半加性 ∞-范畴的范畴中的始对象。

证明。根据引理 3.1.14，这由定理 4.2.9 得出。 □

推论 4.2.12。对称幺半 (2, 1)-范畴 Span(Fin) 是 $\mathrm{SMD}^{\neg \mathrm{gp},\ \amalg,\ \mathrm{cof}}$中的始对象。

证明。由推论 4.2.11，只需验证 Span(Fin) 具有对偶和余纤维、是反加性的，并且对于任意取值于具有对偶和余纤维的反加性对称幺半 ∞-范畴的对称幺半函子，余纤维都被保留。事实上，Span(Fin) 中的余积是不交并。由于每个对象都是单位的有限个副本的不交并，由引理 3.2.8 可知，每个对象都是可对偶化的（事实上还是自对偶的）。由于同态空间中的和由不交并给出，Span(Fin) 显然是反加性的，尤其具有平凡悬挂。

我们来计算 Span(Fin) 中的余纤维。Span(Fin) 中的任意态射都可以分解为一个 Fin 中的反向态射，后接一个 Fin 中的正向态射。我们还可以将反向箭头分解为一个双射与映射$1 \leftarrow 0$ 的余积，后接一个双射与映射 $1 \leftarrow n$ 和 $n \geq 2$的余积。前者的余纤维是悬挂，因而为零。根据反可加性，后者的余纤维同样为零（$1 \leftarrow 2$ 的余纤维为零正是反可加性的定义）。因此，反向映射的余纤维为零，并且任何到反可加 ∞-范畴的半加性函子都会保留这个余纤维。正向映射可以分解为一个双射与映射 $n \to 1$ 的余积，后接一个双射与映射 $0 \to 1$的余积。映射 $0 \to 1$ 的余纤维是 1，且会被所有函子保留。由此可知，包含映射的余纤维

$i_0 : 1 \to 2$ 是 **1**，且会被所有半加性函子保留（相关态射$2 \to 1$ 是反向映射 $i_1 : 2 \leftarrow 1$）。由于 i_0 是映射 $2 \to 1$的截面，且恒等态射的余纤维是 **0**，根据推出方块的粘合性质可知，沿正向映射 $2 \to 1$ 对 $i_1 : 2 \leftarrow 1$ 取推出所得为 **0**，并且所有半加性函子都会保留这个推出。又由于根据悬挂的平凡性，$1 \to 0$ 的余纤维为 **0**，因此由推出方块的粘合性质可知，$2 \to 1$ 的余纤维为 **0**，并且任何到具有平凡悬挂的半加性 ∞-范畴的半加性函子都会保留这个余纤维。既然我们已经算出映射 $0 \to 1$ 的余纤维为 **0**，并且发现所有半加性函子都会保留这个余纤维，那么 **Span(Fin)** 中任意态射的余纤维都存在，且任何到反可加 ∞-范畴的半加性函子都会保留它，如所求。□

4.2.3. 加性 1-范畴的情形。本小节中，我们计算具有对偶、有限积和余纤维且同时具有加性的对称幺半 ∞-范畴在 ∞-范畴中的初始对象。结果表明，它是由素域上的有限维向量空间范畴构成的一种颇为奇特的受限积。

定义 4.2.13. 令 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\ \oplus} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 为具有有限余极限的半加性 ∞-范畴的全子幺半簇。令 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\ \mathrm{add}} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\ \mathrm{add}}$ 为具有有限余极限的加性 ∞-范畴的满子运算子。令 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\ \mathrm{add},\ \Sigma-\mathrm{triv}} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\ \mathrm{add}}$ 为具有有限余极限且悬挂平凡的加性 ∞-范畴的全子范畴（即由命题 4.1.14 可知，是具有有限余极限的加性 1-范畴）。

命题 4.2.14。子运算子 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\oplus} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是一个 $\otimes$-理想。

证明。证明与定理 4.2.9 相同。 □

命题 4.2.15。子运算子 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add}} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\oplus}$ 是一个 $\otimes$-理想。

证明。设 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add}}$ 和 $\mathcal{D} \in \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex},\oplus}$。则 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} = \mathcal{P}^{\mathrm{rex}}_{\mathrm{rex}\boxtimes\mathrm{rex}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$。可表 $L(C, D)$ 的局部化是一个余群对象，因为 C 是一个余群对象，并且 $L(0, D) = 0, L(C \oplus C, D) = L(C, D) \oplus L(C, D)$。余群对象在直和下封闭，因此只需验证余群对象在余纤维下封闭。这是因为在半加性范畴中，一个对象 X 是余群对象，当且仅当映射 $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_X & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_X \end{pmatrix} : X \oplus X \to X \oplus X$ 是同构（注记 1.5.2）。此映射关于所有映射都是自然的，因此若$X \to Y \to Z$ 是一个余纤维序列，且此映射对 X 和Y都是同构，那么它对 Z也是同构。□

命题 4.2.16. 子运算子 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}} \subset \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add}}$ 是一个 $\otimes$-理想。

证明。设 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 和 $\mathcal{D} \in \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add}}$；我们要证明 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 具有平凡悬挂。但这可由以下事实推出：$(-) \otimes \mathcal{D}$ 是一个 2-函子，并且在局部与零对象及有限余极限交换（因此也与悬挂交换）。□

定义 4.2.17. 令 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv},\mathrm{split}}$ 为如下的 ∞-运算子。一个对象是一个对象 $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$，对每个素数 p，配备映射 $X \to X/p$的一个截面，该截面在 $X \in \mathcal{C}$中自然。其同伦空间 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv},\mathrm{split}}(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n; \mathcal{D})$ 是 $\mathbf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n; \mathcal{D})$ 的子群胚，由如下函子 $\mathcal{C}_1 \times$ 组成：

$\cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ 它们分别在每个变量中都与这些自然分裂交换。复合如同在 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add}\ \Sigma\text{−triv}}$ 中一样。

定义 4.2.18。加性 1-范畴 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 定义如下。一个对象 (V, F)由一个无限元组 $(V_2, V_3, V_5, \dots)$、一族有限维$\mathbb{F}_p$-向量空间（每个素数 p对应一个）、一个有限生成自由阿贝尔群F，以及同构 $F/p \cong V_p$ 组成，其中除有限多个素数外均有定义。一个态射$f\colon (V, F) \to (W, G)$由一组 $\mathbb{F}_p$-线性态射 $f_p\colon V_p \to W_p$（每个素数 p 对应一个）和一个群同态 $f_0\colon F \to G$ 组成，并满足：除有限多个素数 p 外，在典范识别 $V_p = F/p$ 和 $W_p = G/p$下有 $f_p = f_0/p$。复合和 $\otimes$ 以显然的“逐分量”方式定义。

记号 4.2.19。范畴 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 配备了一个典范对象，记作 S，它对应于自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}$，并在每个素数 p处取模 p约化。对于一个素数 p，我们将 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中对应于素数 p 处的 $\mathbb{Z}/p$、而在所有其他素数处取 0 的对象记作 S/p。对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们将 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中自由部分为 $\mathbb{Z}$、在所有不整除 m的 ℓ 处取其标准对象，而在所有整除 m的 p 处于素数 p 对应的分量为 0 的对象记作 $S(m)$。注意，每个对象都典范地具有形式 $(S/p_1)^{\oplus e_1} \oplus \cdots \oplus (S/p_r)^{\oplus e_r} \oplus S(p_1 \cdots p_r)^{\oplus f}$；并且若 p与 m互素，则存在典范同构 $S(m) \cong S(p) \oplus S(mp)$。

引理 4.2.20. 范畴 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 以典范方式具有 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ }\Sigma\text{−triv, split}}$中对象的结构。

证明. 显然，$(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 是一个加性 1-范畴。

我们来证明 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 有余纤维。注意，对于 $p \neq \ell$，$\mathrm{Hom}(S/p, S/\ell) = 0$；$\mathrm{Hom}(S/p, S/p) = \mathbb{Z}/p$；$\mathrm{Hom}(S/p, S(p)) = \mathrm{Hom}(S(p)\ S/p) = 0$；而 $\mathrm{Hom}(S(m)\ S(m))$ 包含一个 $\mathbb{Z}$ 的副本，它对应于这样一些映射：对于每个 $\ell \nmid m$，它们都是某个固定映射模 ℓ 的约化。因此，根据记号 4.2.19 中提到的双积分解以及悬挂的平凡性，只需构造映射 $\phi : (S/p)^{\oplus e} \to (S/p)^{\oplus e'}$ 和 $\psi\colon S(m)^{\oplus f} \to S(m)^{\oplus f'}$ 的余纤维，其中 ψ 是在所有不整除 m 的素数处对某个整映射取约化所得的映射。对于前一种情形，余纤维按 $\mathsf{Vect}^{\mathbb{F}_p}$ 中的方式计算；这显然可行，因为若 $(S/p)^{\oplus e'} \to X$ 是 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中的一个态射，它必定经过包含映射 $X/p \to X$ 分解。对于后一种情形，令 Q 为对应映射 $\psi\colon \mathbb{Z}^f \to \mathbb{Z}^{f'}$ 在阿贝尔群范畴中的余核。令 $T \subseteq Q$ 为挠子群，$F = Q/T$ 为无挠商群。令 $\overline{Q}$ 为 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中的对象，其在 p 处的分量为 Q/p（当 $p \nmid m$ 时），当 $p \mid m$ 时为 0；自由部分为 F。为了证明 $\overline{Q}$ 是 ψ 的余核，先考虑映射 $\theta\colon S(m)^{\oplus f'} \to S/p$。那么 θ 必须消去 $S(mp)^{\oplus f'}$。若 $p \mid m$，这意味着 $\theta = 0$，因此 $\theta\psi = 0$，且 θ 经由零映射唯一地通过 Q 分解。否则，θ 经由 $S(m)^{\oplus f'} \to (S/p)^{\oplus f'}$ 分解。因此，$\theta\psi = 0$ 当且仅当 $\theta(\psi/p) = 0$，也当且仅当 θ 唯一地通过 Q/p 分解。由于任何经过 $\overline{Q}$ 的分解都必须消去 $\overline{Q}(p)$，这说明经过 $\overline{Q}$ 的分解是唯一的。接下来，考虑映射 $\theta\colon S(m)^{\oplus f'} \to S(mn)$，其中 n 是 Q 的挠指数。那么，$\theta\psi = 0$ 当且仅当 θ 唯一地通过 F 分解。由此得到经过 $\overline{Q}$ 的唯一分解。

最后，我们来构造分裂。当 $p = \ell$ 时， $S/\ell \to (S/\ell)/p$ 的分裂为恒等映射；当 $p \neq \ell$ 时，则为零映射。当 $p \mid m$ 时， $S(m) \to S(m)/p$ 的分裂为零映射；当 $p \nmid m$ 时，则为典范包含映射 $S/p \to S(m) = S/p \oplus S(mp)$。我们通过取直和来扩展这些定义。在此过程中，必须检查这些定义是否与关系 $S(m) = S/p \oplus S(mp)$（当 $p \nmid m$ 时）相容。它们是相容的。现在检查这些分裂映射是否自然。它们是自然的。□

命题 4.2.21. 在 $S \in (\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 处求值确定了范畴 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}}((\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}, \mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}^{\sim}$ 与任意 $\mathcal{D} \in \mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}}$ 之间的一个等价。

证明。设 $D \in \mathcal{D}$，并设 $F\colon (\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add,\Sigma-triv,split}}$ 中的一个态射，且 $F(S) = D$。那么 id_S 必须映到 id_D，而 id_S 的整数倍必须映到 id_D 的相应整数倍。 F 必须将 S/p 映到 D/p，并将 $S(p)$ 映到典范分裂 $D/p \to D$ 的余核，记作 $D(p)$。注意，对于 $\ell \neq p$，$(D/p)/\ell = 0$。因此，定义各个 $D(p)$ 的幂等元彼此交换（当 $p \neq \ell$ 时，它们的积为 0），由此可知，对任意整数 m， $S(m)$ 都映到 $p \mid m$ 对应的各个 $D(p)$ 的交；我们将此对象记为 $D(m)$。由于 F 与直和交换，其在对象上的作用现在已完全确定。只有当 $p = \ell$ 时，才存在非零态射 $S/p \to S/\ell$；此时它是态射 $S \to S$ 模 p 的约化，因此它在 $\mathcal{D}$ 中的像也已确定。当 $p \nmid m$ 时，不存在非零态射 $S/p \to S(m)$ 或 $S(m) \to S/p$。任何作为态射 $S \to S$ 的约化的态射 $S(m) \to S(m)$，其在 $\mathcal{D}$ 中的像也同样已确定。现在，$(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中的任意态射都是迄今所考虑的态射的若干直和之和，因此由可加性，它在 $\mathcal{D}$ 中的像也就确定了。

因此，如果这样的 F 存在，它就是唯一的。我们来验证这样的 F 确实存在。我们已经看到，必须有 $F((S/p_1)^{\oplus e_1} \oplus \cdots \oplus (S/p_r)^{\oplus e_r} \oplus S(p_1 \cdots p_r)^{\oplus f} = (D/p_1)^{\oplus e_1} \oplus \cdots \oplus (D/p_r)^{\oplus e_r} \oplus D(p_1 \cdots p_r)^{\oplus f}$。这在对象上定义良好，因为 $D(m) = D(pm) \oplus D/p$ 对 $p \nmid m$ 成立。要证明 F 在态射上定义良好，我们首先必须验证 $\mathcal{D}(D/p, D/p)$ 是 p-挠的。根据 D/p 的泛性质，确实如此。我们还必须验证，对于 $p \nmid m$，$D(m)$ 上的恒等态射与 D/p 上的恒等态射和 $D(mp)$ 上的恒等态射之和一致，事实确实如此。显然， F 与同态集上的加法相容。证明 F 具有函子性很直接。显然， F 与对象 $X \to X/p$ 上的典范分裂相容——例如，当 $X = S$ 时，根据定义即有此性质。F 与有限余积相容，因此只需验证 F 与余纤维相容。由引理 4.2.20 中给出的描述可知，这一点显然成立。□

定理 4.2.22。 ∞-算子 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，且包含映射 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}} \to \mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv}}$ 在等价意义下保持二元张量积。单位对象为 $(\prod_p \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{f.d.}})_{\mathrm{ev.const.}}$。

证明。我们在命题 4.2.21 中已经看到，单位是可表的。因此，只需证明张量积是可表的，并且结合约束是同构。

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}}$，并令 $U\mathcal{C}, U\mathcal{D}$ 为 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv}}$ 中的底层对象。我们首先证明 $U\mathcal{C} \otimes U\mathcal{D}$ 存在分裂，使其成为 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,\ add,\ \Sigma-triv,\ split}}$ 的一个对象。事实上， $\mathcal{E} \in$ 上这类分裂的数据

$\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 等价于对每个素数 p 给出分裂数据 $\mathcal{E} = \mathcal{E}/p \times \mathcal{E}(p)$，其中 $\mathcal{E}/p$ 的同伦空间具有 p- 挠性质，而 $\mathcal{E}(p)$ 满足如下性质：对于任意 $E \in \mathcal{E}$，自同态 $p : E \to E$ 都是满射。此外，$\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 上的张量积，因此 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 上的张量积，在每个变量上分别保有限积（在 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 中，有限积也是有限余积，因此在 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 中亦然）：一种理解方式是，范畴 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 是半加性的，其同态空间上的加法运算为 $\oplus$；由于 $\otimes$ 在每个变量上分别保持这一加法，它必定分别保持 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex}}$ 中对象的直和。因此，若 $\mathcal{C} = \mathcal{C}/p \oplus \mathcal{C}(p)$ 且 $\mathcal{D} = \mathcal{D}/p \oplus \mathcal{D}(p)$，则 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} = (\mathcal{C}/p \otimes \mathcal{D}/p) \oplus (\mathcal{C}/p \otimes \mathcal{D}(p)) \oplus (\mathcal{C}(p) \otimes \mathcal{D}/p) \oplus (\mathcal{C}(p) \otimes \mathcal{D}(p))$。中间两项满足 $p = 0$，且 p 在每个对象上都是满射，因此它们消失。剩下第一项，它满足 $p = 0$ 在每个对象上成立；以及最后一项，它满足 p 在每个对象上都是满射。也就是说，我们得到了所需的分裂。

此外，从这一描述可以看出，如果 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 分别在每个变量中保持这些分裂，那么诱导函子 $\overline{F}\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 也会保持指定的分裂。因此，$\mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv},\mathrm{split}} \subset \mathsf{Cat}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv}}$ 在二元张量积下封闭。□

推论 4.2.23. $\mathsf{SMC}_{\mathrm{rex,add},\Sigma-\mathrm{triv},\mathrm{split}}$ 的始对象是 $(\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}\circ}$

证明。对称幺半范畴的单位带有其唯一的 E_∞ 结构，始终是 E_∞-代数范畴的始对象。□

命题 4.2.24. $\mathsf{SMD}_{\mathrm{gp},\Sigma-\mathrm{triv},\mathsf{cof}}$ 的始对象是 $(\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}\circ}$

证明。存在一个全忠实遗忘函子 $\mathsf{SMD}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathsf{cof}} \to \mathsf{SMC}_{\mathrm{rex},\ \mathrm{add},\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathrm{split}}$，其中的分裂来自 S/p 的开闭幂等结构。因此，为了验证 $(\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}}$ 是 $\mathsf{SMD}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathsf{cof}}$ 的初始对象，根据推论 4.2.23，只需验证 $(\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}}$ 中的对象都有对偶。但显然每个对象都是自对偶的。□

4.2.4. 总而言之。在本小节中，我们将第 4.2 节其余部分中的初始对象取积，从而描述 ∞-范畴中由具有对偶、有限余积和余纤维的对称幺半 ∞-范畴构成的初始对象。

定理 4.2.25。$\mathsf{SMD}^{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 的始对象是 $\mathsf{Spt}^{\mathrm{fin}} \times (\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}} \times \mathsf{Span(Fin)}_\circ$

证明。由命题 4.1.13，SMD $\mathcal{I}^{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 的始对象分解为 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathrm{stab}} \times \mathcal{I}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}} \times \mathcal{I}_{\neg\mathrm{gp}\circ}$ 此外，局部化函子 $\mathcal{I} \to \mathcal{I}_{\mathrm{stab}}$, $\mathcal{I} \to \mathcal{I}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}}$,$\mathcal{I} \to \mathcal{I}_{\neg\mathrm{gp}}$ 分别将其陪域呈现为 $\mathsf{SMD}_{\mathrm{stab}}$、$\mathsf{SMD}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv},\ \mathsf{cof}}$以及 $\mathsf{SMD}_{\neg\mathrm{gp},\ \mathsf{cof}}$ 的始对象。因此，这可由命题 4.2.6、命题 4.2.24 和推论 4.2.12 得出。□

定理 4.2.26。SMD $\mathcal{I}^{\mathrm{rex}}$ 的始对象是 $\mathsf{Spt}^{\mathrm{fin}} \times (\prod_p \mathsf{Vect}^{\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{ev.const.}} \times \mathcal{I}_{\neg\mathrm{gp}\circ}$

证明。我们有 $\mathsf{SMD}^{\mathrm{rex}}_{\mathrm{stab}} = \mathsf{SMD}^{\amalg,\ \mathsf{cof}}$ 稳定 以及 $\mathsf{SMD}^{\mathrm{rex}}_{\mathrm{gp},\ \Sigma-\mathrm{triv}} = \mathsf{SMD}^{\amalg,\ \mathsf{cof}\ \mathrm{gp}\ \Sigma-\mathrm{triv}\circ}$。因此，这两个因子与定理 4.2.25 中的因子一致。最后一个因子不会恰好是 $\mathsf{Span(Fin)}_\circ$。□

注记 4.2.27。我们并不确切知道范畴 $\mathcal{I}_{\neg\mathrm{gp}}$ 是什么。不过，$\mathcal{I}_{\neg\mathrm{gp}}$ 根据定理 4.2.25 接收一个来自 Span(Fin) 的函子。

5. Application to Equivariant Homotopy Theory

在本章中，我们将上述结果应用于证明推论 5.1.5，该推论给出了等变稳定同伦论的一个新泛性质。我们还在推论 5.1.6 中给出了若干进一步的、实质上等价的泛性质。这个泛性质有多种表述方式；Charles Rezk 曾以初步形式提出这一性质（[Rez17]）。

5.1. 等变同伦论。设 G 是一个紧李群，并令 $G\mathbf{Top}$ 为由 G-空间构成的 ∞-范畴，将其视为关于笛卡尔积的对称幺半范畴。令 $G\mathbf{Top}^{\mathrm{fin}} \subset G\mathbf{Top}$ 为由具有有限多个胞腔的 G-空间构成的全对称幺半子范畴。我们还有带基点的版本 $G\mathbf{Top}_*$、$G\mathbf{Top}_*^{\mathrm{fin}}$，将其视为关于楔积的对称幺半范畴。这些范畴应与 Borel G-空间的 ∞-范畴 $\mathbf{Top}^{BG}$、$\mathbf{Top}_*^{BG}$（分别为带基点和不带基点）相区别。另考虑由真正的 G-谱构成的对称幺半 ∞-范畴 $G\mathbf{Spt}$，以及有限真正 G-谱构成的全子范畴 $G\mathbf{Spt}^{\mathrm{fin}}$。

令 $\mathbf{SMC}_{\mathrm{rex}}$ 表示具有有限余极限的对称幺半 ∞范畴所构成的 ∞-范畴。令 $\mathbf{SMC}_{*,\ \mathrm{rex}}$ 表示具有有限余极限的带基点对称幺半∞范畴所构成的 ∞-范畴。令 $\mathbf{SMD}_{\mathrm{rex}}$ 表示具有有限余极限且对象存在对偶的对称幺半 ∞范畴所构成的 ∞-范畴。令 $\mathbb{D}_{\mathrm{rex}} : \mathbf{SMC}_{\mathrm{rex}} \to \mathbf{SMD}_{\mathrm{rex}}$ 表示包含映射的左伴随，并令 $\mathbb{D}_{\mathrm{rex}} : \mathbf{SMC}_{*,\ \mathrm{rex}} \to \mathbf{SMD}_{\mathrm{rex}}$ 也表示该包含映射的左伴随。此外，令 $\mathbf{SMP}$ 表示可呈示对称幺半 ∞范畴及左伴随对称幺半函子所构成的∞-范畴。

继续之前，我们先回顾一些关于等变同伦论的基本事实：

引理 5.1.1. 设 G 是一个紧李群，$H \subseteq G$ 是一个闭子群。那么，从 H-空间到 G-空间的归纳法会将有限 H-CW 复形映为有限G-CW 复形。

证明。归纳法将 H-轨道映射为 G-轨道，因此只需对胞腔进行归纳即可，因为归纳法保持同伦余极限。□

引理 5.1.2。任意紧 G-流形 M 都是与有限G-CW 复形 G同伦等价的。特别地，如果 S^V 是一个 G-表示球，那么它与有限 G-CW 复形 G同伦等价。

证明。我们将对 d 的维数 M进行归纳，以证明该定理。根据[Was69，推论 4. 11], ，在 M上存在一个等变 Morse 函数，该函数通过有限滤过 $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$分解 M。我们有 $M_{i+1} = M_i \cup_{S(V)} D(v)$，其中 V是 G-轨道 G/H上的一个等变丛，而其相应的球面丛和圆盘丛分别为 $S(V) \subset D(V)$。当然，$D(V)$与轨道 G/H G同伦等价，而根据定义，该轨道是有限胞腔的。 $D(V)$的维数至多为 d M的维数，因此 $S(V)$的维数严格更小。根据归纳法， $S(V)$也是有限胞腔的。因此，对 i 进行归纳，我们得到 M 是有限胞腔的，证毕。□

引理 5.1.3。真正有限 ∞-谱的对称幺半 G范畴 ^{fin} Spt G具有所有对偶。同样，有限支配 ∞-谱的对称幺半 G范畴 $^{\mathrm{f.d.}}$ Spt G也具有所有对偶。

证明。第二个陈述由第一个陈述推出，因为可对偶对象在收缩下封闭（引理 3.2.8）。对于第一个陈述，我们可以通过归纳假设它对所有真闭子群 $H \subset G$都成立。依照 [GM95，定理 4.10，定理 4.17], 可由 Wirthm¨uller 同构得到，轨道 G/H_+ 的对偶由从 $S^{-L(H)}$ 诱导上来给出，其中$L(H)$ 是 G/H的恒等元处的切空间。根据引理 5.1.2， $S^{L(H)}$ 是一个有限 H-谱。若 $H = G$，则 $L(H) = 0$，而 $S^{L(H)} = S^0$ 显然是一个有限H-谱。否则， $S^{-L(H)} = (S^{L(H)})^\vee$ 根据对 G的子群进行的归纳，是一个 H-谱。因此，根据引理 5.1.1，（G/H）$_+$ 的对偶是一个有限G-谱。由于 $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 按定义由轨道通过有限余极限和降悬生成，因此由引理 3.2.8可知， $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 具有所有对偶。□

我们在例 2.1.6 中指出，对于任意 G-表示 V，其单点紧化 S^V 在 $G\mathsf{Top}_*$ 中具有扭曲平凡编织。令 $S \subset G\mathsf{Top}$ 表示有限维 G-表示球的集合。对于每个 $S^V \in S$，定理 3.2.10 告诉我们， ∞-范畴 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*$ 分解为 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_* = \mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[{S^V}^{-1}] \times \mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*/S^V$，其中在第一个因子中 S^V是 $\wedge$-可逆的，而在另一个因子中它是平凡的。

我们当前的目标是证明第二个因子消失，即

定理 5.1.4. 设 G 是一个紧李群，令 $S \subset G\mathsf{Top}$ 表示有限维 G-表示球的集合，并设 $S^V \in S$。那么 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}[(S^1)^{-1}]/S^V = 0$。

定理 5.1.4 的证明推迟到下一节，即第 5.2 节。与此同时，我们先暂停一下，推导出本论文的一个重要结果：

推论 5.1.5. 设 G 为一个紧李群，并令 $S \subset G\mathsf{Top}_*$ 表示有限维表示球的集合。那么 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}] = G\mathrm{Spt}$。也就是说， $G\mathrm{Spt}$ 是以$G\mathsf{Top}_*$ 为底、使表示球成为可对偶化对象的自由可呈示对称幺半稳定 ∞-范畴。

证明. 设 V 为一个有限维 G-表示。由定理 5.1.4，

$$\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}]/S^V = 0$$

由乘积分解可知，这意味着

$$\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}] = \mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}, (S^V)^{-1}]$$

即， S^V 在 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}]$ 中可逆。现在， $G\mathrm{Spt}$ 是通过将所有表示球 S^V 取逆而自由地从 $G\mathsf{Top}_*$ 得到的（参见 [CMNN20 的定理 A.2]（当 G 有限时），以及 [GM20 的推论 C.7]（一般情形）；这两种情形下的结果均由 [Rob15] 的结果推得）。由此泛性质，我们得到一个对称幺半左伴随函子 $G\mathrm{Spt} \to \mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}]$。可呈示对称幺半 ∞ 范畴 $G\mathrm{Spt}$ 是稳定的，并且根据引理 5.1.3，表示球在 $G\mathrm{Spt}$ 中是可对偶化的，因此由 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*$ 的泛性质，我们也得到一个反方向的函子。按任一顺序复合这两个函子，并在前面复合从 $G\mathsf{Top}_*$ 出发的典范函子后，所得复合函子看起来就是恒等函子；因此，根据泛性质，这个复合函子实际上就是恒等函子。由此，我们得到 $G\mathsf{Top}_*$ 上的对称幺半等价： $G\mathrm{Spt}$ 与 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}]$ 等价，如所声称。□

我们可以由推论 5.1.5 推得若干相关的泛性质：

推论 5.1.6. 设 G 是一个紧李群。设 $\Sigma_G^\infty\colon G\mathrm{Top}_* \to G\mathrm{Spt}$ 表示等变悬挂函子。则

(1) 函子 Σ_G^∞ 是从 $G\mathrm{Top}_*$ 到一个可呈示对称幺半稳定 ∞-范畴的普遍可呈对称幺半函子，并将每个表示球映为可对偶化对象。(2) 函子Σ_G^∞ 是从 $G\mathrm{Top}_*$ 到一个可呈示对称幺半稳定 ∞-范畴的普遍可呈对称幺半函子，并将 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 中的每个对象映为可对偶化对象。(3) 函子 Σ_G^∞ 是从 $G\mathrm{Top}_*$ 到一个可呈示稳定对称幺半 ∞-范畴的普遍可呈对称幺半函子，并将 $G\mathrm{Top}_*$ 中的每个紧对象映为可对偶化对象。(4) 函子 Σ_G^∞ 是从 $G\mathrm{Top}_*$ 到一个紧生成、稳定对称幺半∞-范畴的普遍紧生成对称幺半函子，其中所有紧对象都有对偶。

现在令 $\Sigma^{\infty,}{}_G^{\mathrm{fin}}\colon G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \to G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 表示 Σ_G^∞ 到有限 G-空间/有限 G-谱的限制/余限制。

(5) 函子 $\Sigma^{\infty,}{}_G^{\mathrm{fin}}$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 到某个稳定对称幺半 ∞-范畴的普遍右正合对称幺半函子，并将每个表示球送到一个可对偶对象。(6) 函子 $\Sigma^{\infty,}{}_G^{\mathrm{fin}}$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 到某个稳定对称幺半 ∞- 范畴的普遍右正合对称幺半函子，并将每个对象送到一个可对偶对象。(7) 函子 $\Sigma^{\infty,}{}_G^{\mathrm{fin}}$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}$ 到某个所有对象均可对偶化的稳定对称幺半 ∞-范畴的普遍右正合对称幺半函子。

最后，令 $\Sigma^{\infty,\mathrm{f.d.}}_G\colon G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{f.d.}} \to G\mathrm{Spt}^{\mathrm{f.d.}}$ 表示对 Σ_G^∞ 到有限支配的 G-空间／有限支配的 G-谱的限制／余限制。

(8) 函子 $\Sigma^{\infty,\mathrm{f.d.}}_G$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{f.d.}}$ 出发的普遍右正合对称幺半函子，映至一个右正合、幂等完备的稳定 ∞-范畴，并将每个表示球映为可对偶对象。(9) 函子 $\Sigma^{\infty,\mathrm{f.d.}}_G$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{f.d.}}$ 出发的普遍右正合对称幺半函子，映至一个右正合、幂等完备的稳定对称幺半 ∞-范畴，并将每个对象映为可对偶对象。(10) 函子 $\Sigma^{\infty,\mathrm{f.d.}}_G$ 是从 $G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{f.d.}}$ 出发的普遍右正合对称幺半函子，映至一个所有对象均可对偶化的右正合、幂等完备的稳定对称幺半 ∞-范畴。

证明。第 1 项即为推论 5.1.5 的陈述。第 2 项随即成立，因为每个有限的 G-谱都是可对偶化的（引理 5.1.3）；同样，第 3 项也成立，因为每个有限支配的 G-谱都是可对偶化的（同样依据引理 5.1.3）。现在回顾一下：如果一个对称幺半左伴随函子保持紧对象（或等价地，其右伴随保持滤过余极限），则称其为紧生成的，且它定义在紧生成的对称幺半 ∞-范畴之间。因此，对于第 4 项，只需验证 $G\mathrm{Spt}$ 对所有紧对象都具有对偶（这正是引理 5.1.3 的内容），函子 Σ_G^∞ 保持紧对象（确实如此），并且如果 $\mathcal{K}$ 是任意一个具有紧对象对偶的紧生成对称幺半 ∞-范畴

，并且如果 $F\colon G\mathrm{Top}_* \to \mathcal{K}$ 是一个紧生成的˜对称幺半函子，那么由第 3 项诱导的函子 $F\colon G\mathrm{Spt} \to \mathcal{K}$ 也保持紧对象。最后这一点成立，是因为紧对象 $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{f.d.}} \subset G\mathrm{Spt}$ 包含于（事实上，等于） $\Sigma^{\infty,\ \mathrm{f.d.}}_G$ 的像在幂等元分裂下的闭包中；根据假设， $\tilde{F}$ 将 $\Sigma^{\infty,\ \mathrm{f.d.}}_G$ 的像中的对象映射为可对偶对象，而可对偶对象在收缩下封闭（引理 3.2.8），所以结论成立。

对于条目 5，设 $F\colon G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}} \to \mathcal{C}$ 是到某个稳定对称幺半 ∞-范畴的右正合对称幺半函子，并将每个表示球映为可对偶化对象。我们不妨假设 $\mathcal{C}$ 是小的。由此可导出一个对称幺半左伴随 $\mathrm{Ind}(F)\colon G\mathrm{Top}_* \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$，它仍将每个表示球映为可对偶化对象。因此，根据条目 1，我们得到本质上唯一的延拓 $\mathrm{Ind}(F)\colon G\mathrm{Spt} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$。限制函子 $\tilde{F}\colon G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 是右正合对称幺半函子。此外，$G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 中的每个对象都属于 $\Sigma^{\infty}_G{}^{\text{的像},\ \mathrm{fin}}$，因此也包含于 $\mathcal{C}$ 中。于是，$\tilde{F}$ 可余限制为 F 的一个延拓 $\bar{F}\colon G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}} \to \mathcal{C}$。我们有 $\mathrm{Ind}(\bar{F}) = \mathrm{Ind}(F)$；˜由于 Ind 是全忠实函子， F 的本质唯一性由 $\mathrm{Ind}(F)$ 的本质唯一性推出。对于条目 6，论证类似，只需用条目 2 代替条目 1。条目 7 成立，这是因为 $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 中的每个对象实际上都是可对偶化的（引理 5.1.3）。

条目 8 由条目 5 得出，因为 $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{f.d.}}$ 是 $G\mathrm{Spt}^{\mathrm{fin}}$ 的幂等完备化。类似地，条目 9 由条目 6 得出，条目 10 由条目 7 得出。□

注 5.1.7. 通过 Ind 函子给出的等价（称为 ∞-范畴的 Gabriel-Ulmer 对偶），条目 8 至 10 也可以用紧生成对称幺半 ∞-范畴来表述为等价的命题。例如，在 Gabriel-Ulmer 对偶下，与条目 10 等价的命题是条目 4；另外两个等价命题我们没有明确记录。

5.2. 定理 5.1.4 的证明。本节致力于证明定理 5.1.4。证明采用对轨道范畴 $\mathcal{O}_G$ 的结构进行归纳的方法。更确切地说，定义 5.2.3 将表示球 S^I 与闭子群 $H \subseteq G$ 的共轭类格中的每个区间 I 相关联。假设存在一个对称幺半左伴随 $F\colon G\mathrm{Top}_* \to \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}$ 稳定、可呈示对称幺半且具有紧单位，并且对于某个表示球 V，有 $F(S^V) = 0$。从这一假设出发，首先通过几何论证证明（引理 5.2.9），若 $I = \overline{\{H\}}$ 是一个“单元素集”区间，则 $F(S^{\overline{\{H\}}}) = 0$。接下来，定理 5.2.10 对区间 I 的大小进行归纳，证明对于任意区间 I，都有 $F(S^I) = 0$（这一步用到了假设 $\mathcal{C}$ 具有紧单位——这是一个微妙之处）。取 $I = G$，则有 $F(S^0) = 0$，从而推出 $\mathcal{C} = 0$。最后一步中，我们去掉 $\mathcal{C}$ 具有紧单位这一假设，并由 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathrm{Top}_*[(S^1)^{-1}]/S^V$ 的定义性泛性质推出定理 5.1.4。

该论证需要在 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathrm{Top}_*[(S^1)^{-1}]/S^V$ 的无限型设定与 $\mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathrm{Top}_*^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}]/S^V$ 的有限型设定之间周旋。定理 5.2.10 的主要论证是在带有紧性假设的无限型设定中进行的。一方面，为了利用某个无限余极限（引理 5.2.8），无限型设定是必要的；另一方面，

如上所述，在定理 5.2.10[7] 的归纳论证中，紧性是必要的。幸运的是，这里涉及的泛性质相当稳健（参见推论 5.1.6），因此可以相当容易地在这两种设定之间来回转换。

引理 5.2.1（解扭引理）。对于任意 $X \in G\mathbf{Top}_*$，存在一个 G-同胚，介于带有对角作用的 $G_+ \wedge X$ 与在 G_+ 上作用的 $G_+ \wedge X$ 之间（忽略 X 上的原作用）。

证明。定义映射 $\phi\colon G\times X \to G\times X$，使得 $(g,x) \mapsto (g,gx)$。这是一个从左作用 $\cdot^l$ 到对角作用 $\cdot^d$ 的等变映射： $\phi(h\cdot^l(g,x)) = \phi((hg,x)) = (hg,hgx)$，而 $h\cdot^d\phi(g,x)) = h\cdot^d(g,gx) = (hg,hgx)$。反过来，定义 $\psi(g,x) = (g,g^{-1}x)$。于是 ϕ 和 ψ 互为逆元（因此 ψ 也是等变的）。此外，这些映射可以下降：我们有 $G_+ \wedge X = G\times X/G\times *$，并且 $\phi(g,*) = (g,g*) = (g,*)$，而 $\psi(g,*) = (g,g^{-1}*) = (g,*)$。□

引理 5.2.2. 对任意 $H \subseteq G$ 以及任意有限维 G-表示 V，$(S^V)^H$ 的底空间是一个球面。

证明. 表示 V 中的 H-不动点 V^H 构成一个线性子空间。因此，$(S^V)^H = S^{V^H}$ 是一个球面。□

定义 5.2.3. 回顾一下，我们固定了一个紧李群 G。上闭集是 G的子群共轭类格中的上闭集合。下闭集是 G的子群共轭类格中的下闭集合，即某个上闭集的补集。区间是一个上闭集与一个下闭集的交。若 S 是 G 的闭子群偏序集的子集，则用 $\overline{S}$ 表示 S 在 G 中的共轭闭包。特别地，若 $H \subseteq G$ 是一个闭子群，则 $\overline{\{H\}}$ 表示单元素集 $\{H\}$ 的共轭闭包，而 $\overline{\downarrow H}$ 表示与某个 H 的子群共轭的子群所构成的集合。

对于任意区间 I，定义 S^I 为如下带基点的 G-空间，并将其视为轨道范畴上的预层：对于 $H \in I$，我们有 $(S^I)^H = S^0$；对于$H \notin I$，我们有 $(S^I)^H = 0$。S^0之间的所有过渡映射都是恒等映射，其余过渡映射则都为零，这是必然的。

引理 5.2.4. 对于任意区间 I，我们有 $S^I \wedge S^I = S^I$，且这是典范的。更一般地，对于任意区间 I、J，我们有 $S^I \wedge S^J = S^{I\cap J}$，且这是典范的。

引理 5.2.5. 若 D 是下闭集，且 U 是其补上集，则存在自然的余纤维序列 $S^D \to S^0 \to S^U$。

引理 5.2.6. 对于单元素集 $\overline{\{H\}}$ 的任意共轭闭包，由形如 $X = S^{\overline{\{H\}}} \wedge Y$ 的对象组成的全子范畴，恰由满足以下条件的带基点预层 X 构成：它们将除 G/H 以外的所有轨道映至 $\mathcal{O}_G$ 上的 0（等价地，带基点的 G-空间 X 满足：对于不与 H 共轭的 K，X^K 都是可缩的）。该范畴与带基点 Borel W-空间的 ∞-范畴 $\mathbf{Top}_*^W$ 幺半群范畴等价，其中 $W = W_G(H) = N_G(H)/H$ 是 G 中 H 的 Weyl 群。

该范畴称为集中在H处的带基点 G-空间范畴。

[7]事实上，如果 G 是有限的，那么无需紧致性假设，该论证也成立。

证明。由 Elmendorf 定理， $G\mathrm{Top}_*$ 等价于轨道范畴 $\mathcal{O}_G$上的 Top_*-值预层范畴；该等价将一个 G-空间 X 映为函子 $G/H \mapsto X^H$。楔积在此预层范畴中逐层计算。因此，与$S^{\overline{\{H\}}}$ 作楔积会消去 K 不与 H共轭时的 K-不动点，而当 $K = H$时则保持不变，从而验证了第一条陈述。由此可知，集中在 H 处的带基点 G-空间范畴，等价于轨道 G/H上的轨道范畴全子范畴上的带基点预层范畴。回想一下，作为一个 G-空间， G/H 的每个自同态都是自同构，其自同构群为 Weyl 群 $W = W_G(H) = N_G(H)/H$。因此，这个全子范畴是一个连通的 ∞-群胚，等价于一个只有一个对象的 ∞-群胚 BW，其自同构群为 W。由于 BW上的预层自然地可识别为 Borel W-空间，第二条陈述得证。□

引理 5.2.7. 在引理 5.2.6 的等价下， $S^{\overline{\{H\}}}\wedge(G/H)_+$ 对应于 $W_+ \in \mathrm{Top}_*^W$。此外， $S^{\overline{\{H\}}}$ 对应于 S^0，且该等价当然保持悬挂。

证明。从 H-集中的空间到 W-空间的等价函子由取 H-不动点给出。事实上，$(G/H)_+$ 的 H-不动点是 W_+，而 $S^{\overline{\{H\}}}$ 的 H-不动点是 S^0。最后一个陈述对任意等价都成立。□

引理 5.2.8. 对任意紧李群 W，Borel 空间 $W \in \mathrm{Top}^{BW}$ 具有 W 的自由作用，其同伦轨道是终对象 pt $\in \mathrm{Top}^{BW}$。因此， $W_+ \in \mathrm{Top}_*^W$具有一个 W-作用，其带基点同伦轨道为 $S^0 \in \mathrm{Top}_*^W$。

证明。第二个结论由第一个结论推出，因为函子 $(-)_+ : \mathrm{Top}^{BW} \to \mathrm{Top}_*^W$（它添加一个不相交的基点）保余极限。若我们的 W-空间是左 W-空间，那么所讨论的作用来自 W 在自身上的右作用。由于 pt $\in \mathrm{Top}^{BW}$ 是终对象，因此存在映射 $W_{hW} \to$ pt。由于我们处于 Borel 情形，要证明这是一个等价，只需在底空间上检验。此外，“底空间”函子 $\mathrm{Top}^{BW} \to \mathrm{Top}$ 保余极限，因此我们可以在底空间层面计算映射 $W_{hW} \to$ pt。由于 W在 W 上的作用是自由的，其同伦轨道就是它的轨道，即 pt。因此，映射 $W_{hW} \to$pt 是一个等价，正如所声称的那样。□

引理 5.2.9. 设 $F\colon G\mathrm{Top}_* \to \mathcal{C}$ 是到稳定的、可呈示对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的对称幺半左伴随。设 V 是一个有限维 G-表示，并假设 $F(S^V) = 0$。那么，对于任意单元素集 $\overline{\{H\}}$ 的共轭闭包， $F(S^{\overline{\{H\}}}) = 0$。

证明。我们有 $F(S^{\overline{\{H\}}} \wedge S^V \wedge (G/H)_+) = 0$，并且在引理 5.2.6 给出的等价下，空间 $S^{\overline{\{H\}}} \wedge S^V \wedge (G/H)_+$ 根据引理 5.2.7 对应于一个形如 $S^{V^H} \wedge W_+$ 的带基点Borel$W$- 空间。根据解扭引理（引理 5.2.1 ），进而有 $S^{V^H} \wedge W_+ \simeq S^n \wedge W_+$，其中 S^n 具有平凡作用（且 $n = \dim(V^H)$）。再次根据引理 5.2.7，我们有 $F(S^{\overline{\{H\}}} \wedge S^n \wedge (G/H)_+) = 0$。现在， F 与悬挂可交换，且 $\mathcal{C}$ 是稳定的，因此可得 $F(S^{\overline{\{H\}}} \wedge (G/H)_+) = 0$。再次使用引理 5.2.7，引理 5.2.8 告诉我们，$S^{\overline{\{H\}}} \wedge (G/H)_+$ 上存在一个 W-作用，其同伦轨道为 $S^{\overline{\{H\}}}$。

由于 F 保持同伦轨道（事实上，它保持所有余极限），因此可得 $F(S^{\overline{\{H\}}}) = 0$。□

定理 5.2.10. 设 G 是一个紧李群。设 $F\colon G\mathsf{Top}_* \to \mathcal{C}$ 是一个对称幺半左伴随，指向一个具有紧单位的稳定可呈示对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$。设 V 是一个有限维 G-表示，并假设 $F(S^V) = 0$。则 $\mathcal{C} = 0$。

证明。称 $G\mathsf{Top}_*$ 中的一个映射为局部映射，如果它经 F 映为等价。令 $\mathcal{U}$ 为所有满足 $S^0 \to S^U$ 是局部映射的上集 U 的集合。则 $\mathcal{U}$ 向下闭。事实上，若 $U \subseteq U'$ 且 $S^0 \to S^U$ 是局部映射，那么由于此映射可分解为经过 $S^0 \to S^{U'}$，我们有 $F(S^0)$ 是 $F(S^{U'})$ 的一个收缩。因此，我们有 $F(S^{(U')^c}) = 0$，故 $S^0 \to S^{U'}$ 是局部映射，从而 $U' \in \mathcal{U}$。此外，$\mathcal{U}$ 在余有向交下封闭。因为 $S^{\cap_i U_i} = \varinjlim_i S^{U_i}$，并且若映射 $S^0 \to S^{U_i}$ 是局部映射，那么从 S^0 到余极限的映射也如此，因为泛函 F 保持余极限。

由于 $\mathcal{U}$ 非空（包含顶元，因为 $S^0 \to S^0$ 是局部的），根据上一段，它满足佐恩引理的对偶假设。因此，设 U 是 $\mathcal{U}$的一个极小元。于是 U 本身对余有向交封闭（注意，对于任意拓扑群 G，其闭子群的共轭类格 G 具有余有向交）。否则，若假设并非如此，则有$H = \cap_i H_i$，其中 $H_i \in U$、 $H \notin U$，于是 $U = \cup_i (U \setminus \overline{\downarrow H_i})$，从而 $S^U = \varinjlim_i S^{U\setminus\overline{\downarrow H_i}}$。由于 $S^0 \to S^U$ 是局部的，且根据假设， $F(S^0)$ （$\mathcal{C}$的单位）是紧的，因此可得 $F(S^0)$是某个 $F(S^{U\setminus\overline{\downarrow H_i}})$ 的收缩。于是如前所述，我们看到 $F(S^{(U\setminus\downarrow H_i)^c}) = 0$，因此 $S^0 \to S^{U\setminus\overline{\downarrow H_i}}$是局部的，这与 U的极小性矛盾。

反设 U 非空。那么由前一段可知，佐恩引理的对偶假设成立，且 U 有一个极小元 H。于是$S^{\overline{\downarrow H}} \to S^{\overline{\downarrow H}} \wedge S^U$是局部的。但根据引理 5.2.9， $F(S^{\overline{\downarrow H}} \wedge S^U) = F(S^{\overline{\{H\}}}) = 0$。因此 $F(S^{\overline{\downarrow H}}) = 0$，所以根据引理 5.2.5， $S^0 \to S^{(G\setminus\overline{\downarrow H})}$是局部的。因此$S^0 = S^0 \wedge S^0 \to S^U \wedge S^{(G\setminus\overline{\downarrow H})} = S^{U\setminus\overline{\{H\}}}$ 是局部的，这与U的极小性矛盾。

因此 U 必为空，所以实际上 $S^0 \to S^\emptyset = 0$ 是局部的，即 $F(S^0) = 0$。但 F 是强单体的，特别地， $F(S^0)$是 $\mathcal{C}$的单位对象。因此$\mathcal{C} = 0$。□

注记 5.2.11. 本节开头将定理 5.2.10 的证明描述为对区间 I 的结构进行归纳，但在实际证明中，这种归纳是通过佐恩引理来表述的，因此内容稍显晦涩。当 G 为有限集时， G 上只有有限多个上集，而且显然 G 中的任意上集 U 都有一个极小元 H。因此，在这种情况下，可以避免两次使用佐恩引理，改为对偏序集 G 中的上集 U 直接进行归纳。

定理 5.1.4 的证明。在定理 5.2.10 中，我们可以取 $\mathcal{C} = \mathrm{Ind}(\mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathsf{Top}_*^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}]/S^V)$，并令 F 由 $G\mathsf{Top}_*$ 上的恒等函子诱导，从而得出

$$\mathrm{Ind}(\mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathsf{Top}_*^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}]/S^V) = 0$$

由此可得 $\mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathsf{Top}_*^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}]/S^V = 0$。现在令 $F'\colon \mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathsf{Top}_*^{\mathrm{fin}}[(S^1)^{-1}]/S^V \to \mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathsf{Top}_*[(S^1)^{-1}]/S^V$ 由包含映射 $\mathbb{D}_S^{\mathrm{rex}} G\mathsf{Top}_*^{\mathrm{fin}} \subset G\mathsf{Top}_*$普遍诱导而成。

由于此函子是对称幺半的，且其定义域为 0，因此陪域 $\mathbb{D}_S^{\mathsf{SMP}} G\mathbf{Top}_*[(S^1)^{-1}]/S^V = 0$ 正如所需。□

References

[Ada95] J. F. Adams. *Stable Homotopy and Generalised Homology*. 芝加哥大学出版社，1995年2月。[BD06] M. Boyarchenko 和 V. Drinfeld。幺半范畴中的幂等元。 *preprint*，2006年。[CMNN20] Dustin Clausen、Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。通过群作用，色代数 k 理论中的下降与消失。 *arXiv preprint arXiv:2011.08233*，2020年。[DP80] Albrecht Dold 和 Dieter Puppe。对偶性、迹与转移。载于 *Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (Warsaw, 1978)* 81 102 ，页码 –。PWN，华沙，1980年。[Gla15] Saul Glasman。分层范畴、几何不动点与广义 Arone-Ching 定理。 *arXiv preprint arXiv:1507.01976*，2015年。[GM95] John PC Greenlees 和 J Peter May。等变稳定同伦论。 *Handbook of algebraic topology* 277 323, 1995 ，：。[GM20] David Gepner 和 Lennart Meier。关于等变拓扑模形式。 *arXiv preprint arXiv:2004.10254* 2020 ，。[GS16] Richard Garner 和 Daniel Sch ¨ appi。余积何时是双积。载于，卷，页码 –。剑桥大学出版社，2016年。[Har12] Yonatan Harpaz。维数 1 *arXiv preprint* 中的配边假设。，。[*arXiv:1210.0229* 2012 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 161, 47 51 Hou08] Robin Houston。紧闭范畴中的有限积是双积。 *Journal of Pure and Applied Algebra* 212 2 394 400, 2008 ，( )：–。[Hov01] Mark Hovey。一般模型范畴中的谱与对称谱。 *Journal of Pure and Applied Algebra* 165 1 63 127, 2001 ，( )：–。[Lur09a] J acob Lurie。 *Higher topos theory*。普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur09b] Jacob Lurie。拓扑场论的分类。 *Current developments in mathematics* 2008 129 ，：–280，2009年。[Lur17] Jacob Lurie。高阶代数。 *Preprint available at*，，。[MS76] D. McDuff 和 G. Segal。同调纤维化与“群完备化”定理。*Inventiones mathematicae*，31(3):279–284，1976年10月。[Nik17] Thomas Nikolaus。通过环谱的局部化证明群完备化定理。未发表论文，可在 Nikolaus 的网站上获取，网址为https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/Group_completion.pd f

（访问日期：2023-02-08），2017 年。[Rez17] Charles Rezk。在线评论。MathOverflow https://chat.stackexchange.com/transcript/9417?m=35699742#35699742 上的同伦论聊天室，2017 年 2 月。[Rob15] 马尔科·罗巴洛。从动机到非交换动机的桥梁：K理论。 *Advances in Mathematics*，269：399–550，2015 年。[Voe98] 弗拉基米尔·沃沃茨基。 $\mathbb{A}^1$ -同伦论。载于《》，第 Extra Volume I 卷，页码 – 柏林，。《数学文献》。[Was69] 阿瑟·G·瓦瑟曼。等变微分拓扑。 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 579 604, 1998 *Topology*，8(2)：127–150，1969 年 4 月。