arXiv:2302.04213v1 [math.LO] 8 Feb 2023

关于计算哥德尔数的复杂性

Vasco Brattka[1], [2⋆]

[1] 德国联邦国防军慕尼黑大学计算机科学学院¨，德国慕尼黑¨[2] 开普敦大学数学与应用数学系，南非 Vasco.Brattka@cca-net.de

摘要：给定一个自然数的可计算序列，寻找一个能够生成该序列的程序的哥德尔数，是一项自然的任务。很容易看出，这个问题既不连续，也不可计算。在算法学习理论中，这个问题已从多个角度得到了深入研究，其中一个研究问题是：对于哪些序列，该问题至少是极限可学习的。本文研究所有可计算序列上的这一问题，并对其 Weihrauch 复杂度进行分类。为此，我们可以采用多种方法，其中包括学习理论中已知的合并技术。作为分类的基准，我们采用自然数上的闭选择与紧选择问题及其跳跃，并指出这些问题对应于归纳与有界性原理，正如逆向数学中 Kirby-Paris 层级所揭示的那样。我们分别给出了拓扑分类和可计算性理论分类，并揭示了两者之间的一些显著差异。

1 引言

给定一个自然数序列，例如

$$1, 2, 3, ...$$

猜测这个序列将如何继续，是一种广为人知的游戏。最初可能会猜测它是所有正自然数组成的序列，但当后续内容

$$1, 2, 3, 5, 7, ...$$

出现时，就不得不重新考虑这个猜测。新的猜测可能是：它由所有奇数以及 2 组成，但当我们看到

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...,$$

那么，它看起来更像是由素数和 1 组成的序列。即使给定序列是可计算的，也很容易看出，一般而言，既不存在连续的方法，也不存在可计算的方法能使猜测最终收敛。问题

⋆ Vasco Brattka 得到了南非国家研究基金会的资助。

这类问题已在算法学习理论中得到广泛研究 [30,36]。近来，人们也测试了利用人工智能方法为给定序列确定程序 [22]。在算法学习理论中，众所周知且很容易看出，例如，如果将范围限制在原始递归序列，那么就存在一种算法，能使猜测最终收敛。这里的关键问题是，能否判定一个猜测（即生成该序列的 G¨odel 数）是否表示一个全序列；如果事先将所有内容都限制为原始递归序列的 G¨odel 编码，则总是如此。然而，对于一般的 G¨odel 数，全定义性是算术层次中的一个 Π_2^0–问题，因此需要诸如 $\emptyset''$ 这样的预言机。事实上，Gold 证明了以下结果 [23]。

定理1（Gold 1967年）。全可计算序列不是极限可学习的。

这意味着，不存在一种通用算法，能够根据作为输入给定的全可计算序列，生成一个收敛到正确哥德尔数的哥德尔数序列。

我们将这个问题形式化如下：我们要研究的哥德尔问题 G：可以定义为

$$\mathsf{G} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}, p \mapsto \{i \in \mathbb{N} : \varphi_i = p\},$$

其中，定义域 dom(G) 由所有可计算序列构成，而 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$表示可计算序列集合 $\mathcal{P}$的一种标准哥德尔编号。简言之，我们也可以将 G 定义为 φ^{-1} 在全可计算序列上的限制。如果我们要把 G 看作一个复杂度有待分类的定理，那么该定理的陈述就是每个全可计算函数都有一个哥德尔数，即，

$$(\forall \text{ computable } p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(\exists i \in \mathbb{N})\ \varphi_i = p.$$

也就是说，该定理指出，φ 是满射，因此是 $\mathcal{P}$的一个编号。这个定理看起来非常简单，似乎不需要特别强大的资源。不过，我们将看到它具有一些奇特的性质。

我们还可以从另一个角度提出问题：程序 i 携带了哪些有用的附加信息，而序列 p 本身无法提供？Hoyrup 和 Rojas [26] 研究过这个问题，他们的答案可以简要概括如下：

口号2（Hoyrup 和 Rojas 2017年）与程序所表示的自然数序列相比，程序所携带的唯一有用附加信息，就是该序列柯尔莫哥洛夫复杂度的一个上界。

我们的目标之一是研究，这一口号在何种意义上可以转化为关于 G¨odel 问题的 Weihrauch 复杂度的定理。为此

我们引入若干其他相关问题。在我们的研究中，柯尔莫哥洛夫复杂度是函数 $\mathsf{K} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}$，其定义域满足 dom(K) =dom(G)，定义如下：

$$\mathsf{K} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, p \mapsto \min \mathsf{G}(p)$$

对所有 $p \in$ dom(K) 都成立。Hoyrup 和 Rojas 的研究也促使我们考察 G 的以下变体

$$\mathsf{G}_{\geq} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}, (p, m) \mapsto \mathsf{G}(p)$$

其定义域 dom(G≥) := $\{(p, m) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} : m \geq \mathsf{K}(p)\}$。也就是说，$\mathsf{G}_{\geq}$ 是这样一个哥德尔问题：它将柯尔莫哥洛夫复杂度的一个上界作为额外输入信息。请注意，根据这个定义，输出无需满足输入上界 m。还可以考虑另一个函数

$$\mathsf{K}_{\geq} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}, p \mapsto \{m \in \mathbb{N} : m \geq \mathsf{K}(p)\}$$

它只给出输入序列的柯尔莫哥洛夫复杂度上界，同样有 dom(K≥) :=dom(G)。

就 Weihrauch 复杂度而言，这些问题之间存在以下显而易见的关系，图 1 中的示意图也展示了这一点。

引理 3. $\mathsf{G}_{\geq} \sqcup \mathsf{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{G} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}$，且 $\mathsf{G} = \mathsf{G}_{\geq} \circ (\mathrm{id}, \mathsf{K}_{\geq})$。

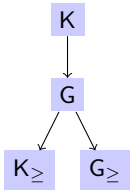

图 1. 哥德尔问题及其相关问题。

显然，柯尔莫哥洛夫复杂度 K 可以计算 G，而 G 也可以计算 G≥以及 K≥。这里的 $\sqcup$ 表示关于 Weihrauch 可约性 [12]的上确界。Weihrauch 可约性的精确定义将在第 2 节给出。

我们的目标是对上述问题的 Weihrauch 复杂度及其拓扑对应问题进行分类。我们将借助这些问题来衡量这种复杂度

$$\mathsf{K}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}''_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}''_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \ldots$$

所谓的紧选择问题 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}$ 和自然数上的所谓闭选择问题 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 在 Weihrauch 复杂度 [12] 中发挥着重要作用。

正如作者和 Rakotoniaina [17, §7] 所指出的，它们可以被视为 Kirby-Paris 层级在 Weihrauch 复杂度中的类比

$$\mathsf{B}\Sigma^0_1 \leftarrow \mathsf{I}\Sigma^0_1 \leftarrow \mathsf{B}\Sigma^0_2 \leftarrow \mathsf{I}\Sigma^0_2 \leftarrow \mathsf{B}\Sigma^0_3 \leftarrow \mathsf{I}\Sigma^0_3 \leftarrow \ldots$$

逆向数学中已知的有界性和归纳原理 [31,25,19,24] ，在下文中我们将这一层级简称为（Weihrauch 版本的）Kirby-Paris 层级。我们将在第 3 节介绍它们。利用该节给出的结果，我们将在结论（见第 7 节）中论证，它们为逆向数学中已知的归纳问题和有界性问题 [31]提供了自然的对应物。第 4 节将对 G¨odel 问题及其变体的拓扑Weihrauch度进行分类。我们还将探讨在 $\emptyset'$、 $\emptyset''$、.....中，哪个预言机最适合用于验证我们的分类。第 5 节将对这些问题的可计算性理论 Weihrauch度进行分类，结果发现它与前者有显著差异。第 6 节将讨论 G 的闭包性质，这有助于我们对这些Weihrauch度的下界作出一些判断。

2 Weihrauch 复杂度

本节将介绍 Weihrauch 复杂度的一些基本定义。更详细的综述见 [12]。回顾一下，表示空间（X, δ）是由集合 X 和表示 $\delta :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$构成的，其中表示即一个可能是部分的满射映射 δ。若 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ 是表示空间（X, δ_X）与（Y, δ_Y）之间的多值部分映射，那么，如果对所有 $p \in \mathrm{dom}(f\delta_X)$ 都有 $\delta_Y F(p) \in f\delta_X(p)$，则称 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ 为f的实现器。我们用 $F \vdash f$表示 F是f 的实现器这一事实。我们将带有实现器的多值映射视为问题。

定义 4（问题）。表示空间之间的一个多值映射 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ ，若带有实现器，则称为问题。

现在我们可以定义 Weihrauch 复杂度及其若干变体了。我们用 $\mathrm{id} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示 Baire空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上的恒等映射，用 $\langle . \rangle$ 表示 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上的一个标准配对函数。我们还用尖括号表示可数组元函数、 $\mathbb{N}$ 上的 Cantor组元函数，以及 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$对应的配对函数。

定义 5（Weihrauch 复杂度）。设 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$和 $g :\subseteq Z \rightrightarrows W$是两个多值函数。

1. 如果存在可计算的$H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得当 $G \vdash g$时 $H\langle \mathrm{id}\ GK\rangle \vdash f$，则称 f Weihrauch可归约于 g，记作 $f \leq_{\mathrm{W}} g$。2. 如果存在可计算的 $H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得当 $G \vdash g$时 $HGK \vdash f$，则称 f 强Weihrauch可归约于 g，记作 $f \leq_{\mathrm{sW}} g$。

我们用 $\leq^p{}_{\mathrm{W}}$ 和 $\leq^p{}_{\mathrm{sW}}$ 表示这些可约性的相对化版本，其中 H、 K 只需相对于 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$可计算。类似地，如果 H、 K 只需连续，我们就用 $\leq^*_{\mathrm{W}}$ 和 $\leq^*_{\mathrm{sW}}$ 表示。

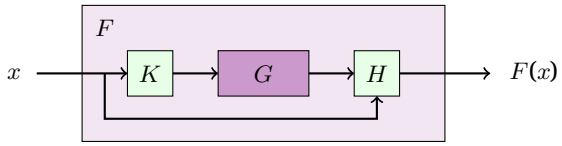

图 2. Weihrauch 可约性。

图 2 中的示意图说明了 $\leq_{\mathrm{W}}$ 及其相对化版本的情况。

我们使用通常的记号 $\equiv_{\mathrm{W}}$ 和 $\equiv_{\mathrm{sW}}$ 表示相应的等价关系，相对化版本也类似。由 $\leq_{\mathrm{W}}$ 诱导的分配格通常称为 Weihrauch 格。

根据和f^*,$\widehat{f}^{\diamond}$ 分别表示问题上的有限并行化、并行化和菱形运算。这些定义可见 [12], ，但菱形运算除外；该运算由 Neumann 和 Pauly [27] 引入。根据 Westrick 的结果 [34] （见下文），f^* 可视为对并行积 $f \times f$ 的闭包，而 $f^{\diamond}$ 可视为对复合积 $f \star f$ 的闭包。同样， $\times$ 和 $\star$ 的定义可见 [12]。对我们的目的而言，只需提及如下刻画:

$$f \star g \equiv_{\mathrm{W}} \max\nolimits_{\leq_{\mathrm{W}}}\{f_0 \circ g_0 : f_0 \leq_{\mathrm{W}} f \text{ and } g_0 \leq_{\mathrm{W}} g\},$$

该结果已在 [16, 推论 3.7] 中证明。同样，根据 Westrick 的定理 [34, 定理 1] ，每个满足 $\mathsf{id} \leq_{\mathrm{W}} f$ 的问题 f 都满足

$$f^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} \min\nolimits_{\leq_{\mathrm{W}}}\{g : f \leq_{\mathrm{W}} g \star g \leq_{\mathrm{W}} g\},$$

也就是说， $f^{\diamond}$ 为我们给出了高于 f 且在复合积下封闭的最小 Weihrauch 度。我们还需要问题的一阶版本$f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ 根据 [20, 定理 2.2] ，它可以刻画为

$$^1 f \equiv_{\mathrm{W}} \max\nolimits_{\leq_{\mathrm{W}}}\{g : g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N} \text{ and } g \leq_{\mathrm{W}} f\}.$$

一阶部分 $^1 f$ 刻画了值域为 $\mathbb{N}$ 且低于 f的最强问题。这一概念最近由 Dzhafarov、Solomon 和 Yokoyama [20] 引入，Valenti [33] 以及 Valenti 和 Sold`a [32]也对其进行了研究 .

最后，我们还需要问题的跳跃 f' ，这一概念在 [11]中引入。对于问题 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$，跳跃 $f' :\subseteq X' \rightrightarrows Y$从集合论角度看与 f是同一个问题，但输入集合 X 的表示发生了变化。如果δ 是 X的表示，那么 $\delta' := \delta \circ \lim$ 就是 X'的表示。 f 的第 n次跳跃记作 $f^{(n)}$。更多细节可参见 [12]。

我们以定义若干后续将用到的问题来结束本节。用 $\mathsf{Tr} \subseteq \{0,1\}^*$ 表示二叉树的集合，用 $[T]$ 表示 $T \in \mathsf{Tr}$ 的无限路径集合。用 $\widehat{n} = nnn... \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示取值为 $n \in \mathbb{N}$ 的常数序列。

问题 LPO 和 LLPO 在构造性数学语境中分别被 Bishop [1] 称为全知原理的有限形式和较弱的全知原理有限形式。

定义 6（一些问题）。我们定义以下问题。

1 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ $p = 1 \iff p = \widehat{0}$. LPO：，LPO( )：。LLPO：，
2 $\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \{0,1\}$ $i \in$ $\langle p_0\ p_1\rangle$
LLPO，：$\iff p_i \neq \widehat{0}$，其中 dom(LLPO) $= \{\langle p_0, p_1\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \langle p_0, p_1\rangle \neq \widehat{0}\}$。3. $\lim_{\mathbb{N}}$：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, p \mapsto \lim_{n\to\infty} p(n)$（自然数上的极限）4. B：$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}$，$p \mapsto \{m \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})\ p(n) \leq m\}$（有界性问题）5. inf：$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, p \mapsto \min$ $C_{\mathbb{N}}(p)$（最小数问题）6. min：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, p \mapsto \min$ range(p)（最小值问题）7. $CL_{\mathbb{N}}$：$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}, p \mapsto \{n \in \mathbb{N} : \ n\ \ p\}$ 的聚点（聚点问题）8. $BWT_{\mathbb{N}}$ 是 $CL_{\mathbb{N}}$ 在有界序列上的限制（博尔查诺-魏尔斯特拉斯）9. $\lim\inf_{\mathbb{N}}$：$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, p \mapsto \min CL_{\mathbb{N}}(p)$（下极限问题）10. WKL：$\subseteq \mathrm{Tr} \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}, T \mapsto [T]$（弱柯尼希引理）

所有定义都以其自然定义域为准，即 $\lim_{\mathbb{N}}$ 定义在收敛序列上，B 定义在有界序列上，$CL_{\mathbb{N}}$ 定义在具有聚点的序列上，等等。

3 自然数上的闭选择与紧选择

现在我们要介绍基准问题：自然数上的闭选择和自然数上的紧致选择。选择问题已经被研究了一段时间，并且已针对比自然数更一般的空间作了统一定义（更多信息请参见 [8,6,11,12] ）。就我们的目的而言，只需在 $\mathbb{N}$上定义这些选择问题即可。

定义 7（闭选择与紧选择）。我们将自然数上的闭选择 $C_{\mathbb{N}}$ 和紧致选择 $K_{\mathbb{N}}$ 定义如下：

1. $C_{\mathbb{N}} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}, p \mapsto \{n \in \mathbb{N} : (\forall k)\ p(k) \neq n\}$，其中 dom($C_{\mathbb{N}}$) $= \{p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :$ range(p) $\subsetneq \mathbb{N}\}$,*2* m $\forall k$。$K_{\mathbb{N}}$：$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}, (p,) \mapsto \{n \leq m : ( )\ p(k) \neq n\}$，其中 dom($K_{\mathbb{N}}$) $= \{(p, m) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} :$ range(p) $\subsetneq \{0, ..., m\}\}$。

因此，$C_{\mathbb{N}}$ 的任务是找出一个没有被输入序列枚举的自然数。紧致选择 $K_{\mathbb{N}}$ 的任务本质上相同，只不过只考虑低于某个额外给定上界 m 的数 $n \leq m$。

以下结果由 Valenti [33, 第 98 页、命题 4.48、推论 4.50]，以及 Sold`a 和 Valenti [32, 的命题 7.1、定理 7.2、推论 7.6]证明。每项中的第一个等价关系有一个独立证明，出自 Dzhafarov、Solomon 和 Yokoyama [20, 的定理 4.1 和 4.2]。我们没有找到（2）中第二个等价关系的明确表述，因此这很可能是新的；我们补充了一个证明，利用 Sold´a 和 Valenti 的方法很容易推出。注意，根据命题 10.9], $C_2^* \equiv_{\mathrm{sW}}$、$\mathrm{LLPO}^* \equiv_{\mathrm{sW}}$ 和 $K_{\mathbb{N}}$ 之间的关系为 [11, 。

定理 8（闭选择与紧选择）。对于所有 $n \in \mathbb{N}$:

1. $^1(\lim^{(n)}) \equiv_{\mathrm{sW}} C_{\mathbb{N}}^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} (\mathrm{LPO}^{(n)})^\diamond$,

2. ^{1}(弱柯尼希引理$^{(n)}$) $\equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}}$(LLPO$^{(n)}$)$^\diamond$。

证明。现在只需证明第二项中的第二个等价关系。由 [33, 定理 4.40、推论 4.44] 和定理 8 可得，因为它们蕴含

$$\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} {}^1(\mathsf{WKL}^{(n)}) \equiv_{\mathrm{W}} {}^1(\widehat{\mathsf{LLPO}^{(n)}}) \equiv_{\mathrm{W}} (\mathsf{LLPO}^{(n)})^\diamond,$$

由于 LLPO$^{(n)}$ 由 [10, 命题 4.19、6.3]证明为完备，$\widehat{\mathsf{LLPO}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 弱柯尼希引理由[9, 定理 8 得出。2] 并行化与跳跃可交换，由 [11, 命题 5.7 (3)]得出。这蕴含 $(\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)})^\diamond \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)}$。□

值得针对 $n = 1$ 定理 8 表述一个特例。

推论 9（闭选择与紧选择）。我们得到：

1. LPO$^\diamond \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} {}^1$极限，2.
LLPO$^\diamond \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} {}^1$弱柯尼希引理。

Neumann 和 Pauly [27, 命题 10] 最先证明了关于 LPO 的这一结论，而这一结论以及关于 LLPO 的结论也收录于 Valenti 和 Sold`a [32, 命题 7.1、定理 7.2]的工作中。我们直接得到以下复合下的闭包性质。

推论 10（复合封闭性）。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们得到：

1. $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$,
2. $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)} \star \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)}$.

关于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，这已由作者、H¨olzl 和 Kuyper 于 2017 年未发表的工作，以及 [32, 定理 7.2], 所知；但关于 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}$.[3]，似乎尚无此结论。

在 [17, 命题 7.2] 中，已证明闭选择与紧选择及其跳跃按以下方式线性排序。

事实 11 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)} <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} <_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n+1)}$，对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。

总而言之，闭选择与紧选择的这些性质足以说明，可以将它们及其跳跃用作基准问题，以对 G¨odel 问题 G 及其变体的复杂度进行分类；这些问题全都是一阶问题。

我们以对一些选择问题的进一步刻画来结束本节。除了关于下极限的刻画之外，其余大多都是众所周知的。

命题 12（最小数问题、最小值、下极限）。

1. $\mathsf{K}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ LLPO$^* <_{\mathrm{sW}}$ 最小值 $\equiv_{\mathrm{sW}}$ LPO$^* <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 极限$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 下确界 $\equiv_{\mathrm{W}}$
B，2. $\mathsf{K}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{BWT}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{sW}}$ 最小值$' <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{CL}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 下极限 $\equiv_{\mathrm{sW}}$ 下确界$'$。

[3] 事实上，推论 10 表明， [10, 命题 8.13] 是错误的，因为 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}$ 确实并不完备。

证明。$\mathsf{K}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{LLPO}^*$ 已在 [11, 命题 10.9]中得到证明。$\mathsf{LPO}^* \equiv_{\mathrm{sW}} \min$ 在 [12, 命题 11.7.22]中提出。我们得到 $\mathsf{LPO}^* \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{LLPO}^*$，因为我们有 $\widehat{\ } \mathsf{LLPO}^* \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{WKL}$，但 $\mathsf{LPO} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{WKL}$，因为 $\mathsf{LPO} \equiv_{\mathrm{sW}} \lim \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{WKL}$。严格归约 $\mathsf{LPO}^* <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 已在 [6, 命题 3.5，例 3.12]中得到证明。关于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \lim_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \inf$，见 [12, 定理 11.7.13]。这里，等价关系 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \inf$ 最初见于 [17, 命题 7.1]。等价关系 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{B}$ 很容易看出，且已在实质上由 [8, 命题 3.3]证明。等价关系 $\mathsf{K}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{BWT}_{\mathbb{N}}$和 $\mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{CL}_{\mathbb{N}}$ 出自 [11, 推论 9.10 和 11.10]，而 $\mathsf{K}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{sW}} \min' <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$ 中的分离由 [15, 定理 11], 推出，因为不涉及跳跃的分离已经是拓扑分离。等价关系 $\mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \inf'$成立，因为跳跃关于 $\equiv_{\mathrm{sW}}$具有单调性。最后还需证明 $\mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \lim \inf$。这由前述等价关系以及 [14, 命题 3.6], 推出；该命题指出，inf 中输入空间的跳跃（它通过补集的枚举来表示闭集）等价于将闭集表示为某个序列的聚点集合。得出结论时，也可以用 $\mathsf{LPO}^* \equiv_{\mathrm{sW}} \min$ 代替 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \inf$

$$\lim \inf_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{sW}} \lim_{\mathbb{N}} \circ \widehat{\min} \leq_{\mathrm{sW}} \lim_{\mathbb{N}} \circ \lim \equiv_{\mathrm{sW}} \lim'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}.$$

这里的第一个归约可由以下事实得出：点 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 可以转化为序列 $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$，使得 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中恰好包含那些在 p 中至少出现 n 次的数。于是，$\min(p_n)$ 收敛到最小聚点。下界由 $\mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{CL}_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{sW}}$ 下极限$_{\mathbb{N}}$ 得出。□

我们强调以下事实。

事实 13 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{B} <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。

分离性由 [12, 命题 11.6。18] 得出。

4 拓扑分类

本节旨在从拓扑角度对 G,K,$\mathsf{G}_{\geq}$ 和 $\mathsf{K}_{\geq}$ 进行分类。分类本身相当简单，我们得到以下结果。

定理 14（拓扑度）。$\mathsf{B} \equiv^*_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}_{\geq} \equiv^*_{\mathrm{W}} \mathsf{G} \equiv^*_{\mathrm{sW}} \mathsf{K} \equiv^*_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$且 $\mathsf{G}_{\geq}$ 连续。

该论述通过图3中的示意图加以说明，图中使用了我们的基准问题 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。我们省略简单的证明，因为很快就会证明一个更强的结果。

等价关系 $\mathsf{K}_{\geq} \equiv^*_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$ 和 $\mathsf{G}_{\geq} \equiv^*_{\mathrm{W}} \mathsf{id}$ 可视为 Hoyrup 和 Rojas 这句口号的形式化版本。

由于连续性是相对于某个预言机的可计算性，因此问题在于，在这些跳跃 $\emptyset^{(n)}$ 中，是否存在一个最简单的跳跃，可以取代 $*$ 使定理 14 的陈述成立。我们回顾一下，集合 $\mathrm{TOT} := \{i \in \mathbb{N} : \varphi_i \text{ 全定义}\}$ 是算术层次中的一个 Π^0_2–完备集合 [29,

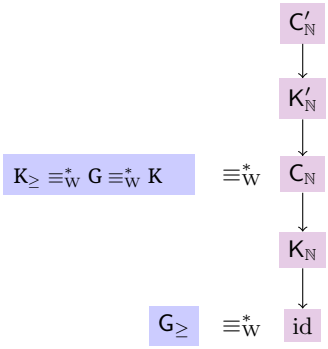

图 3. 拓扑 Weihrauch 格中的 G¨odel 问题。

命题 X.9.6] 因此 $\mathsf{TOT} \leq_{\mathrm{T}} \emptyset''$。由此很容易得出，$\emptyset''$ 足以取代 $*$，因为由哥德尔数 G¨表示的函数具有全定义性，这是一个有用的性质，可用于给出定理 14 的简单证明。

有些出人意料的是，只需再多费一点功夫，我们就能证明，实际上用停机问题 $\emptyset'$ 代替 $*$ 同样能验证定理 14。我们从证明以下等价关系开始。上界很容易得到；而要证明下界，关键思路是使用（某种变体的）随机自然数集。

定理 15（以停机问题为预言机）。$\mathsf{B} \equiv^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}_{\geq} \equiv^{\emptyset'}_{\mathrm{wG}} \mathsf{G} \equiv^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathsf{K} \equiv^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。

证明。根据命题 12，我们知道 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 极限$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{B}$。由引理 3 可得 $\mathsf{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{G} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}$。

我们可以如下证明 $\mathsf{K} \leq^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}}$ 极限$_{\mathbb{N}}$。给定一个可计算序列 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们依次遍历所有 G¨odel 数，1，2，.....。对于 i，我们逐一检查每个 $n = 0$，1，2，.....，判断 $n \in \mathrm{dom}(\varphi_i)$ 是否成立（借助停机问题），以及 $\varphi_i(n) = p(n)$ 是否成立。若成立，就将 i 写入输出 q，然后继续处理下一个 n。若其中一项检验未通过，则继续处理下一个 i。当达到满足$\varphi_i = p$ 的最小 i 时，这个过程便停止继续处理下一个 i。从此以后，只有 i 会被写入输出，也就是说，q 最终会恒定为值 i。因此，极限$_{\mathbb{N}}(q) = i$，如所求。同样的构造也证明了 $\mathsf{K}_{\geq} \leq^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathsf{B}$。

对于另一个方向，我们使用随机自然数集合的以下一个轻微推广：

$$R := \{\langle k, n\rangle \in \mathbb{N} : \min\{i \in \mathbb{N} : \varphi_i(k) = n\} \geq n\}.$$

对于每个固定的 $k \in \mathbb{N}$，都有无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\langle k, n\rangle \in R$。对于$k = 0$，这就是 Kolmogorov 的结果：存在无穷多个随机自然数 [28, （命题 III.2.12]）。对于其他每个固定的 k，都可以用类似的方法证明。此外，容易看出 R 是余可枚举的，因此 $R \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$。

我们证明 $\mathrm{B} \leq^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathrm{K}\geq$。给定一个有界序列 $q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们可以假设它是单调递增的。目标是找到一个可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得每个 $b \in \mathrm{K}\geq(p)$ 都是 q 的上界。因此，借助停机问题，我们开始搜索某个 $n \geq q(0)$，使得 $\langle 0, n\rangle \in R$。接着我们设定$p(0) := n$，并继续归纳构造。给定某个 $k \in \mathbb{N}$，以及 $p(0), \ldots, p(k)$，我们检查 $q(k+1) > q(k)$ 是否成立。若成立，则搜索某个 $n \geq q(k+1)$，使得 $\langle k+1, n\rangle \in R$，并设定 $p(k+1) = n$。否则，我们选择 $p(k+1) = p(k)$。由于序列 q 有界且单调，因此最终会保持常数；于是 p 也最终保持常数，从而是可计算的。根据构造可知，每个 $b \in \mathrm{K}\geq(p)$ 都是 q 的上界。

为了证明 $\lim_{\mathbb{N}} \leq^{\emptyset'}_{\mathrm{sW}} \mathrm{G}$，我们对这个想法稍作改进。给定一个收敛序列 $q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。现在的目标是找到一个可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于每个 $i \in \mathrm{G}(p)$，$\varphi_i(i) = \lim q$。我们从寻找一个满足 $\langle 0、 n\rangle \in R$ 的 $n > 0$ 开始，并令 $p(0) := n$，$p(1) := q(0)$。接着进行归纳构造。给定某个 $k \in \mathbb{N}$ 的情形下的 $p(0), \ldots, p(2k+1)$，我们检查 $q(k+1) \neq q(k)$ 是否成立。如果成立，就寻找某个满足 $\langle 2k+2、 n\rangle \in R$ 的 $n > 2k+2$，并令 $p(2k+2) := n$，且 $p(2k+3) := q(k+1)$。否则，我们令 $p(2k+2) := p(2k+3) := q(k+1)$。由于 q 收敛，序列 p 也收敛，并且与 q 有相同的极限。根据构造，每个 $i \in G(p)$ 都足够大，使得 $p(i) = \lim p = \lim q$，因此我们得到 $\varphi_i(i) = p(i) = \lim q$。□

仔细检查证明可以发现，预言机 p 仅用于输入端，也就是说，用于根据定义 5 计算预处理操作 K。我们暂时将这种 Weihrauch 归约记为 $\leq^{0,p}_{\mathrm{sW}}$。在 [15, 定理 11] 中，我们证明了 $f' \leq^{p}_{\mathrm{W}} g' \Longrightarrow f \leq^{p'}_{\mathrm{W}} g$。仅在输入端使用预言机$p$，可得出以下更具对称性的结果；该结果实质上建立在 [13,3]中提出的极限控制技术之上。

命题 16（跳跃与预言机）。对于所有问题 f、g 和 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们有：$f \leq^{0,}_{p'\,\mathrm{sW}} g \iff f' \leq^{0}_{,p\,\mathrm{sW}} g'$。

证明。不失一般性，我们可以假设 f、g 的类型为 f、$g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，因此有 $f' \equiv_{\mathrm{sW}} f \circ$极限和 $g' \equiv_{\mathrm{sW}} g \circ$极限。

令 $f \leq^{0}_{\mathrm{sW}} g$通过函数 H、$K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ 成立，其中 H 是可计算的，且 K 相对于 p'是可计算的。于是 $H \circ g \circ K \sqsubseteq f$。由于 K 相对于 p'是可计算的，函数 $K \circ \lim$ 相对于 p 是极限可计算的，因此存在函数 $K_0 :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，它根据 [3,定理 2.18] 相对于 p 是可计算的，使得 $K \circ \lim = \lim \circ K_0$。我们得到

$$H \circ g \circ \lim \circ K_0 = H \circ g \circ K \circ \lim \sqsubseteq f \circ \lim,$$

这意味着 $f' \equiv_{\mathrm{sW}} f \circ \lim \leq^{0,}_{p\,\mathrm{sW}} g \circ \lim \equiv_{\mathrm{sW}} g'$。

现在设 $f \circ \lim \equiv_{\mathrm{sW}} f' \leq^{0,}_{p\,\mathrm{sW}} g' \equiv_{\mathrm{sW}} g \circ \lim$ 通过函数 $H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$成立，其中 H 是可计算的，且 K 相对于 p是可计算的。于是 $H \circ g \circ \lim \circ K \sqsubseteq f \circ \lim$。根据 [3, 定理 3.7]，存在一个 $K_0 :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，它相对于 p' 是可计算的，满足 $K_0 \sqsubseteq \lim \circ K \circ \lim^{-1}$，因此，由于 lim 是满射，

$$H \circ g \circ K_0 \sqsubseteq H \circ g \circ \lim \circ K \circ \lim^{-1} \sqsubseteq f$$

可得，这意味着 $f \leq^{0,\ p'\ \mathrm{sW}}\ g$。 □

由命题 16，我们得到定理 15 的如下推论。

推论 17（跳跃）。$\mathsf{B}^{(n)} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}^{(n)}_{\geq}$ 和 $\mathsf{G}^{(n)} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}^{(n)} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}^{(n)}_{\mathbb{N}}$，对于 $n \geq 1$。

下一个证明的思路受到合并技术的启发，这种技术被 [36] 归功于 Wiehagen [35]。

命题 18。$\mathsf{G}_{\geq}$ 可相对于停机问题计算。

证明。我们要证明，给定输入 $\langle p,\ m\rangle \in \mathrm{dom}(\mathsf{G}_{\geq})$，借助停机问题 $\emptyset'$，我们可以计算出一个 G¨odel 编码 i，满足 $\varphi_i = p$。

我们考虑定义在偏可计算函数集合 $\mathcal{P}$ 上的如下关系 $\approx$ $f,\ g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f \approx g : \iff (\forall n \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g))\ f(n) = g(n).$$

在这种情况下，我们称 f 和 g 相容。需要强调的是，$\approx$ 具有自反性和对称性，但不具有传递性，因此 $\approx$ 不是等价关系。[4]容易看出，集合 $C := \{\langle i, j\rangle \in \mathbb{N} : \varphi_i \approx \varphi_j\}$（相容函数的编码）是余可计算可枚举的，因此 $C \leq_{\mathrm{T}} \emptyset'$。现在我们考虑以下这些集合$i \leq m$，并称它们为口袋:

$$P_i := \{j \leq m : \varphi_i \approx \varphi_j\}.$$

也就是说，我们收集口袋P_i中与 φ_i 相容的函数的所有编码 $j \leq m$。借助 C，我们可以将所有这些口袋计算为有限集。如果对于所有 $j_0, j_1 \in P_i$，$\varphi_{j_0} \approx \varphi_{j_1}$ 成立，我们就称口袋 P_i 为相容。借助 C，我们可以判定口袋 P_i 是否相容。在口袋 P_0,..., P_m 中，我们删除所有不相容的口袋，以及同一口袋的所有重复项。这样就得到一个列表 P_{i_0}, ..., P_{i_k}，其中的口袋两两不同，并且各自都相容。

现在我们断言，这个列表中没有任何一个口袋是另一个口袋的子集。为导出矛盾，不失一般性，假设 $P_{i_0} \subseteq P_{i_1}$。由于这些口袋并不相同，这意味着 $P_{i_0} \subsetneq P_{i_1}$。于是存在某个$j \in P_{i_1} \setminus P_{i_0}$。由于 $i_0 \in P_{i_0} \subseteq P_{i_1}$与 P_{i_1} 相容，我们有 $\varphi_{i_0} \approx \varphi_j$，这意味着 $j \in P_{i_0}$。这就产生了矛盾，并证明了该断言。

现在我们断言，在这些口袋 P_{i_0}、.....、 P_{i_k} 中

1. 恰有一个口袋至少包含一个满足 $\varphi_j = p$ 的编码 j，且该口袋中的所有其他编码 j 都满足 $\varphi_j \approx p$；2. 所有其他口袋都至少包含一个满足 $\varphi_j \not\approx p$ 的 j。

[4] 例如，处处无定义函数与任何其他部分可计算函数都相容，但并非所有部分可计算函数彼此相容，这便说明了这一点。

根据假设，存在某个满足 $\varphi_i = p$ 的 $i \leq m$，因此我们可以考虑口袋 P_i。由于 φ_i 是全定义的，口袋 P_i 与其相容，因此显然满足 (1)。现在设 $P_{i'}$ 是 $P_{i_0}, ..., P_{i_k}$ 中一个满足 $P_{i'} \neq P_i$ 的口袋。由于这些口袋之间没有重复出现，这等价于说，$P_{i'}$ 是任何其他满足 $i' \in \{i_0, ..., i_k\} \setminus \{i\}$ 的口袋。假设所有 $j \in P_{i'}$ 都满足 $\varphi_j \approx p$。那么 $p = \varphi_i$ 意味着 $j \in P_i$，进而意味着 $P_{i'} \subseteq P_i$，这与前面的断言矛盾。由此证明了 (2)。

现在，如果对于所有 $j \in P_i$，$p \approx \varphi_j$，我们就称口袋 P_i 与 p 相容。条件 (1) 和 (2) 保证，在 $P_{i_0}, ..., P_{i_k}$ 中恰好有一个口袋与 p 相容，而且这个口袋还包含 p 的一个 G¨odel 数。现在，我们可以寻找 p 的一个前缀，以便识别出 $P_{i_0}, ..., P_{i_k}$ 中所有与 p 不相容的口袋。为此，我们只需在相应的口袋中找到一个 $n \in \mathbb{N}$ 和 j，使得 $n \in \mathrm{dom}(\varphi_j)$ 且 $\varphi_j(n) \neq p(n)$。经过有限次搜索，我们便能找出所有与 p 不相容的口袋；此时只剩下一个口袋 P_i，它必然与 p 相容。

根据这个口袋的指标 $i \in \{i_0, ..., i_k\}$，我们可以计算出 p 的一个 G¨odel 数 $r(i)$，也就是说，它满足 $\varphi_{r(i)} = p$，具体如下：对于每个输入 $n \in \mathbb{N}$，我们搜索某个 $j \in P_i$，使得 $n \in \mathrm{dom}(\varphi_j)$，并将 $\varphi_j(n)$ 作为结果输出。这样的值 j 必然存在，因为 P_i 包含 p 的 G¨odel 数；对于任意满足 $n \in \mathrm{dom}(\varphi_j)$ 的 $j \in P_i$，我们都得到 $\varphi_j(n) = p(n)$，因为 P_i 与 p 相容。

因此，$r(i) \in \mathsf{G}_{\geq}\langle p, m\rangle$。 □

我们注意到，$r(i) \leq m$ 并非必需，而且可能不成立。

5 可计算性理论分类

现在我们想要探究 G¨odel 问题及其变体的非相对化 Weihrauch 度。结果表明，在这种情况下情形大不相同，而且 G、K 和 K≥ 都不与 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 在可计算意义下 Weihrauch 等价。由于目前尚无其他自然的问题候选项，能在拓扑意义下等价于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$、但在可计算意义下不等价，因此我们对分类所能期望的最好结果，就是根据 Kirby-Paris 层级的 Weihrauch 版本，得到尽可能紧的上界

$$\mathsf{K}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}''_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}''_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} \dots$$

。我们先来看一些正面结果。对于 G≥ 的上界，我们再次使用合并技术。

命题 19（上界）。我们得到

1. $\mathsf{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{G} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}' \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$,
2. $\mathsf{G}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{LPO}^* <_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$.

证明。（1）由引理 3 和推论 17 得出。$\mathsf{K} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$ 也可以直接利用 $\mathsf{C}'_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}}$ 下极限$_{\mathbb{N}}$ 轻松证明，根据命题 12，有：

只需反复枚举所有 G¨odel 数，只要它们能够验证输入中越来越长的部分即可。无限次出现的那些数就是正确的数。

(2) 我们使用 $\mathrm{LPO}^* \equiv_{\mathrm{sW}} \min$，并证明 $\mathrm{G}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \min$。给定一个输入$\langle p, k\rangle$ 、一个可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{K}(p) \leq k$。目标是找到 $p = \varphi_j$ 的一个 G¨odel 编码 j。我们使用编码 $d :\subseteq 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$，其中 $d(A) := \sum_{i \in A} 2^{-i}$，用于有限集 $A \subseteq \mathbb{N}$。其思路是确定这样一列递缩序列 $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$，其中的集合收敛到集合 A。作为输出，我们生成一列 $(d(A_j))_{j \in \mathbb{N}}$，其中包含集合 A_j 的编码。我们从 $A_0 := \{0, ..., k\}$ 开始，每当发现某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi_i(m)$ 收敛，但 $\varphi_i(m) \neq p(m)$ 时，就从 A_j 中移除 $i \leq k$。在这种情况下，$A_{j+1} := A_j \setminus \{i\}$。如果一段时间内找不到合适的 m，那么我们就令 $A_{j+1} := A_j$。这两种情况下，我们都会将 $d(A_j)$ 写入输出。显然，极限 $A := \lim_{j \to \infty} A_j$ 存在，并且 $d(A) = \min_{j \in \mathbb{N}}(d(A_j))$。集合 A 由不超过 k 、属于 p 的潜在部分限制的所有 G¨odel 编码构成。其中还包括全函数 p 本身的一个 G¨odel 编码，这由界 k 保证。我们可以从 $d(A)$ 计算出 p 的一个 G¨odel 编码 j。G¨odel 编码 j 属于这样一台机器：给定输入$n \in \mathbb{N}$，我们找到 $\varphi_i(n)$ 中第一个存在的、对应于 $i \in A$ 的值，并将其写入输出。□

结果 $\mathrm{G}_{\geq} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{C}_{\mathbb{N}}$ 基本上包含在 [21] 中，也曾用于 [26]。我们的改进是将上界降低到 LPO^*。图 4 中的示意图展示了这一情况。

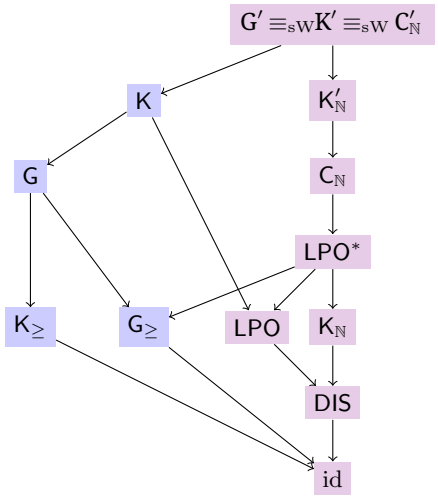

图4. Weihrauch格中的 G¨odel 问题。

接下来，我们想证明命题 19 给出的上界是最小的，至少对于我们的基准问题 $\mathrm{K}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{sW}} \mathrm{C}_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{sW}} \mathrm{K}'_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{sW}} \mathrm{C}'_{\mathbb{N}}$ 而言。

这些问题属于 Kirby-Paris 层级。为此，我们使用有限扩展构造。

命题 20（上界的最优性）。我们得到

1. $\mathrm{K}_{\geq} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{K}'_{\mathbb{N}}$,
2. $\mathrm{G}_{\geq} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_{\mathbb{N}}$.

证明。(1) 假设 $\mathrm{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{K}'_{\mathbb{N}}$ 成立。由命题 12 可知，这意味着 $\mathrm{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{BWT}_{\mathbb{N}}$。因此，存在可计算的 $H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得每当 G 是 $\mathrm{BWT}_{\mathbb{N}}$的实现器时，$H\langle \mathrm{id}\ GK\rangle$就是 $\mathrm{K}_{\geq}$ 的实现器。我们从常数零输入 $p_0 = 000...$ 开始，并使用 H, K 的机器来构造一个可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得 $H\langle p, GK(p)\rangle$ 不是 p的 G¨odel 数的上界。为导出矛盾，假设情况并非如此。令k_n 为在$K(p_0)|_n$中被枚举次数最多的最小数。如果 n 足够大，那么 k_n 会在 $K(p_0)$中无限次出现。令m_0 为 K 和 H 的可计算联合连续模，其含义是：只要 k_n 在 $K(p_0)$中无限次出现，长度为 $m_0(n)$ 的 p_0 前缀就足以产生长度为n 的输出 $K(p_0)$，并且还能产生输出 $j := H\langle p_0, k_n\rangle$。我们可以假设 m 严格单调递增。那么，数 $i \leq j$ 中必有一个是 p_0的 G¨odel 数。因此，我们可以搜索一对满足 $n_0 > 0$ 的 $n_0, i_0 \in \mathbb{N}$，使得 $j_0 := H\langle p_0, k_{n_0}\rangle$ 且$\varphi_{i_0}(m_0(n_0))$存在，并且满足 $i_0 \leq j_0$。如果找到了这样的一对 n_0, i_0，那么我们令 $p_1 := p_0(0)....p_0(m_0(n_0) - 1)(1 \dot{-} \varphi_{i_0}(m_0(n_0)))000....$ 接着，我们以归纳方式继续此算法，使用 p_1，并以类似方式搜索某个 $n_1 > n_0$ 和$i_1 \leq j_1$，然后令 $p_2 := p_1(0)....p_1(m_1(n_1) - 1)(1 \dot{-} \varphi_{i_1}(m_1(n_1)))000....$ 此处我们假设 $m_1 \geq m_0$ 逐点成立。实际上，我们甚至可以将搜索限制在满足 $i_1 \neq i_0$的i_1，因为根据构造，i_0 不可能是 p_1 的 G¨odel 编码。此算法确定了一个序列 (p_k)，该序列收敛到某个可计算的 p，因为算法说明了如何计算 p，而且我们可以假设相应的 i_k 两两不同。由于 p 是可计算的，序列 $K(p)$ 必须有界，并且存在某个长度 n，使得在 $K(p)|_k = K(p_k)|_k$ 中出现次数最多的任何数，只要满足 $k \geq n$，就会在 $K(p)$中无限次出现。因此，所有满足 $k \geq n$的 $j_k = H\langle p_k, k_{n_k}\rangle = H\langle p, k_{n_k}\rangle$都是 p的 G¨odel 数的上界。然而，由于满足 $k \geq n$ 的不同 k_{n_k} 只有有限多个，因此 j_k也只能有有限多个；这与满足 $k \geq n$的两两不同的 $i_k \leq j_k$有无限多个这一事实矛盾。

(2) 假设 $\mathrm{G}_{\geq} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_{\mathbb{N}}$。那么存在可计算函数 $H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得只要 G 是 $\mathrm{K}_{\mathbb{N}}$ 的实现器，$H\langle \mathrm{id}\ GK\rangle$ 就是 $\mathrm{G}_{\geq}$ 的实现器。我们构造一个可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，并给出其 Kolmogorov 复杂度的某个上界 $k \in \mathbb{N}$，使得该归约对输入 $\langle p, k\rangle$ 不起作用。令 $p_0 := 0$ 且 k_0，使得 $\mathrm{K}(p_0) \leq k_0$。那么 $K\langle p_0, k_0\rangle$ 是一个有限集合$A_0 := \{a_1, ..., a_m\}$ 的名称，它由负信息以及 A_0 中最大元素的上界给出。于是，对于 $j = 1, ..., m$，$i_j := H\langle\langle p_0, k_0\rangle, a_j\rangle$ 必须是 p 的 G¨odel 数。我们计算 $K\langle p_0, k_0\rangle$，直到得到一个 A_0 的候选项 $B_0 = \{a_1, ..., a_m\}$（满足 $A_0 \subseteq B_0$），然后计算 $i_j = H\langle\langle p_0, k_0\rangle, a_j\rangle$，用于

在假设我们的候选项正确的前提下，$j = 1, ..., m$。由 K的连续性可知，H 的某个长度为 $n_0 \in \mathbb{N}$ 的有限前缀 $p|_{n_0}$ 足以提供一个足够好的候选项 B_0，用于 A_0，从而我们可以计算所有相应的数值 $i_1, ..., i_m$。现在，我们同时尝试对 $j = 1, ..., m$求值 $\varphi_{i_j}(n_0 + j)$；由于作为 A_0候选项的 B_0仍大于真实的 A_0，对某些 i_j的求值可能会失败。因此，我们继续通过求值 $K\langle p_0, k_0\rangle$，同时为 A_0 寻找一个更好的候选项 B_0。如果在某个阶段，检查了比n_0更长的 p 前缀后，我们发现用于 A_0 的候选项 B_0 比之前更小，那么我们就用修订后的数值 n_0, m，重新开始对 $j = 1, ..., m$ 的$\varphi_{i_j}(n_0 + j)$求值。在某个阶段，由于 K的连续性，我们用于 A_0 的候选项 B_0 足够小，使得所有这些值 $i_1, ..., i_m$ 以及$\varphi_{i_j}(n_0 + j)$都可用，于是我们设立

$$p_1 := 0^{n_0+1}(1 \dot{-} \varphi_{i_1}(n_0 + 1))...(1 \dot{-} \varphi_{i_m}(n_0 + m))\widehat{0}$$

并计算出满足 $k_1 > k_0$的 p_1 的哥德尔数 k_1。用 w 表示 p_1 中长度为 $n_0 + 1 + m$ 的前缀。显然，所有数字 $i_1, ..., i_m$ 都不可能是 p_1的哥德尔编码。现在我们考虑由 $K(p_1, k_1)$ 命名的集合 $A_1 = \{a_1, ..., a_m\}$，并用 $\langle p_1, k_1\rangle$ 替代 $\langle p_0, k_0\rangle$，归纳地继续这一构造；同时确保相应的数字 $n_1 \in \mathbb{N}$（即必须对 p_1 求值的长度）满足 $n_1 > n_0 + 1 + m$。在这种情况下，我们设

$$p_2 := w0^{n_1-n_0-m}(1 \dot{-} \varphi_{i_1}(n_1 + 1))...(1 \dot{-} \varphi_{i_m}(n_1 + m))\widehat{0}.$$

这样，我们得到一个收敛到可计算的 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的序列 $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$，因为我们的算法展示了如何计算其极限。我们还得到一个无界的哥德尔数序列 $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$，以及由 $K\langle p_j, k_j\rangle$ 命名的相应有限集序列 $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$；此外，还得到一个有限集序列 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$，其中包含我们为 A_j 选出的最终候选项 $B_j \supseteq A_j$。这些数字中必有一个 $k := k_j$ 满足 $\mathsf{K}(p) \leq k$，现在我们考虑输入 $\langle p, k\rangle$。那么 $K\langle p, k\rangle$ 是有限集合 $A \subseteq B_j$ 的一个名称。但根据构造，所有有限多个数字 $i \in B := H\langle\langle p_j, k_j\rangle, B_j\rangle$ 都不是 p_{j+1} 的哥德尔编码；同样，子集 $H\langle\langle p, k\rangle, A\rangle \subseteq B$ 也不包含任何 p 的哥德尔编码。这意味着，对于满足 $\mathsf{K}(p) \leq k$ 的可计算输入 $\langle p, k\rangle$，该归约失效。□

根据定理 8，^{1}弱柯尼希引理$^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)}$ 且 ^{1}极限$^{(n)} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$，我们得到以下关于弱柯尼希引理和极限的推论。

推论 21（弱柯尼希引理与极限）。我们得到

1. $\mathsf{K}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{G} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K} \leq_{\mathrm{sW}}$ 极限′，但 $\mathsf{K}_{\geq} \not\leq_{\mathrm{W}}$ 弱柯尼希引理′；2. $\mathsf{G}_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}}$ 极限，但 $\mathsf{G}_{\geq} \not\leq_{\mathrm{W}}$ 弱柯尼希引理。

更粗略地说，我们可以对 G¨odel 问题及其相关问题的博雷尔复杂性作出结论。我们回顾一下，根据 [2, 第 9], 节的结果，我们有如下结论。

事实 22（博雷尔可测性）对于每个问题 $n \in \mathbb{N}$，我们都有

1. $f \leq_{\mathrm{W}}$ 极限$^{(n)} \iff f$是有效 $\mathbf{\Sigma^0_{n+2}}$可测的，2. $f \leq_{\mathrm{sW}}$极限$^{(n)} \iff f$是 $\mathbf{\Sigma^0_{n+2}}$可测的。

由此得到以下结论。

推论23（博雷尔复杂度）。我们得到

1. G、K 和 K$_{\geq}$ 都是有效 $\mathbf{\Sigma^0_3}$博雷尔可测的，并且在拓扑意义上是 $\mathbf{\Sigma^0_2}$博雷尔可测的，但并非有效可测。2. G$_{\geq}$ 是有效 $\mathbf{\Sigma^0_2}$博雷尔可测且连续的，但不可计算。

事实上，关于 G¨欧德尔问题及其相关问题的可测性，还能得到更精细的结论（参见 [12, 定理 11.9.3]）。不过，这些留给读者。

最后，我们仍想区分 K$_{\geq}$ 与 G$_{\geq}$ 和 G。我们用 $|_{\mathrm{W}}$ 表示相对于 $\leq_{\mathrm{W}}$的不可比较性。

命题24。G$_{\geq}|_{\mathrm{W}}$K$_{\geq}$ 且K$_{\geq} <_{\mathrm{W}}$ G。

证明。由于G$_{\geq}$ 是连续的，而K$_{\geq}$ 不是，因此K$_{\geq} \not\leq_{\mathrm{W}}$ G$_{\geq}$ 成立。现在反设G$_{\geq} \leq_{\mathrm{W}}$ K$_{\geq}$。于是存在可计算的 $H, K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得只要 G 是K$_{\geq}$的实现器，$H\langle \mathrm{id}\ GK\rangle$ 就是G$_{\geq}$ 的实现器。由于 K 是可计算的，存在全定义可计算的 $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有 $i, n \in \mathbb{N}$，都有 $K(\varphi_i)(n) = \varphi_{r(i)}(n)$。更准确地说，此处应使用一个关于 K 的机器，使得即使 $\varphi_i \notin \mathrm{dom}(K)$，前缀 $K(\varphi_i)(0)\ldots, K(\varphi_i)(n)$也可能有定义。给定一个输入$(p, m) \in \mathrm{dom}$(G$_{\geq}$)，显然 $j :=\max\{r(0)\ldots, r(m)\}$ 是G¨odel码的一个上界，其中该码对应于 $K(p)$，因为 m 是 p的G¨odel码的一个上界。因此，$H\langle p, j\rangle$ 是 p的G¨odel码。但这意味着G$_{\geq} \leq_{\mathrm{sW}}$ id，因为 H 是可计算的。这与命题 20 矛盾。

由于 G$_{\geq} \leq_{\mathrm{W}}$ G 且 K$_{\geq} \leq_{\mathrm{W}}$ G，因此若 G $\leq_{\mathrm{W}}$ K$_{\geq}$，就会推出 G$_{\geq} \leq_{\mathrm{W}}$ K$_{\geq}$，而这正是我们刚刚否证的结论。因此 K$_{\geq} <_{\mathrm{W}}$ G。□

因此，图 4 中的图示是完备的，即除了图中所示的归约（以及由自反性和传递性所推出的归约）之外，不存在其他指向我们 Kirby-Paris 层级中这些问题的 Weihrauch 归约。

命题24还表明，Hoyrup 和 Rojas 的那句口号在可计算性理论意义上并不成立。事实上，从这个意义上说，哥德尔数所携带的关于其所表示序列的信息，严格多于其柯尔莫哥洛夫复杂度的一个上界。

6 闭包性质与下界

到目前为止，我们已经给出了 G¨odel 问题的上界，并证明这些上界相对于 Weihrauch 版本的 Kirby-Parishierarchy 是最优的。现在，我们想要给出 G 的一些闭包性质，其中有些性质将用于在某种意义上给出最优下界。用 $f|_{\mathrm{c}}$ 表示问题 f 在所有可计算实例上的限制。

定理 25（闭包性质）。我们得到如下结论：

$\mathsf{G}|_{\mathrm{c}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{G} <^*_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$，2. $(\mathsf{G} \star \mathsf{G})|_{\mathrm{c}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{G}$，3. $\mathsf{G}^* \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{G}$。

证明。（1）给定一个可计算序列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们可以计算 $p :\!= \langle p_0, p_1, p_2, \ldots\rangle$，并且对于任意 $i \in \mathsf{G}(p)$，即满足 $\varphi_i = p$ 的情形，我们可以计算某个 $\succ r(i,n)$，使得 $\varphi_{r(i,n)} = p_n$。因此，$\mathsf{G}|_{\mathrm{c}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{G}$。利用定理 14，我们还得到

$$\mathsf{G} \equiv^*_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} <^*_{\mathrm{W}} \lim \equiv^*_{\mathrm{W}} \widehat{\mathsf{C}_{\mathbb{N}}} \equiv^*_{\mathrm{W}} \widehat{\mathsf{G}}.$$

（2）显然，$\mathsf{G} \leq_{\mathrm{sW}} (\mathsf{G}\star\mathsf{G})|_{\mathrm{c}}$。对于反向归约，我们使用柱面化定理 [16, 引理 3.10]，它保证存在一个可计算的 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得

$$\mathsf{G} \star \mathsf{G} \equiv_{\mathrm{sW}} \langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle \circ F \circ \langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle.$$

我们将证明 $(\langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle \circ F \circ \langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle)|_{\mathrm{c}} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{G}|_{\mathrm{c}}$，由（1）可知这已足够。我们使用投影函数 $\pi_i \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \langle p_1, p_2\rangle \mapsto p_i$，适用于 $i \in \{1, 2\}$。现在的一个难点是，对于非全函数的 G¨odel 数 $i \in \mathbb{N}$，值 $F\langle p, i\rangle$ 既不一定存在，也不一定可计算。不过，不失一般性，我们可以假设 $\langle p, i\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ 当且仅当 i 是某个全函数的指标。我们只需在 F 的算法内部依次计算 $\varphi_i(n)$，其中 $n = 0$ 为 1、2、.....；并且仅当前一个值存在时，才令 $F\langle p, i\rangle(n)$ 有定义。

$F\langle p, i\rangle$ 对某些 i无定义，这就是我们要使用 F 的一个修改版本 F_0 的原因，其定义如下：给定 p, i，我们尝试依次计算 $F\langle p, i\rangle(n)$，其中 $n = 0$取 1、2、.....。如果对所有 $k = 0, ..., n$都能找到值 $F\langle p, i\rangle(k)$，那么我们就将 $F\langle p, i\rangle(n)+1$ 复制到输出中。我们确保当且仅当 n 为偶数时，输出落在偶数位置。只要我们尚未找到这样的数 $F\langle p, i\rangle(k)$，就只将 0 复制到输出中。由构造可知：

(a) $F_0 \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是全定义且可计算的；(b) $\pi_j F_0\langle p, i\rangle - 1 = \pi_j F\langle p, i\rangle$，如果 φ_i 是全定义的，

对所有 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $j \in \{1, 2\}$ 和 $i \in \mathbb{N}$均成立。给定可计算的 $\langle p, q\rangle$ 作为输入后，我们现在可以考虑

$$i \in \mathsf{G}\langle q, \pi_2 F_0\langle p, 0\rangle, \pi_2 F_0\langle p, 1\rangle, \pi_2 F_0\langle p, 2\rangle, ...\rangle$$

并且从 i 我们可以计算出 $r(i) \in \mathsf{G}(q)$，$s(i) \in \mathsf{G}\pi_2 F_0\langle p, r(i)\rangle$ 以及 $t(i)$，其中有 $\varphi_{t(i)} = \varphi_{s(i)} - 1 = \pi_2 F\langle p, r(i)\rangle$。我们还可以计算 $p_0 :\!= \pi_1 F_0\langle p, r(i)\rangle - 1 = \pi_1 F\langle p, r(i)\rangle$。然后

$$\langle p_0, t(i)\rangle \in (\langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle \circ F \circ \langle \mathrm{id} \times \mathsf{G}\rangle)|_{\mathrm{c}}\langle p, q\rangle.$$

这描述了所需的归约。

（3）给定任意有限个可计算的 p_1、.....、$p_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们可以从 $\mathsf{G}(\langle n, \langle p_1, ..., p_n\rangle\rangle)$ 中任意一个哥德尔数，统一地关于 n 计算出各个 p_1、.....、p_n 的哥德尔数。这是 utm-和 SMN 定理的推论。□

我们注意到，上述算法并不能直接说明 $\mathsf{G} \star \mathsf{G} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$，因为对于不可计算的 p，全定义 φ_i 的值 $\pi_2 F_0\langle p、\ i\rangle$ 可能是不可计算的，尽管 $\pi_2 F\langle p、\ i\rangle$ 必然是可计算的。这是因为 $\pi_2 F_0\langle p、\ i\rangle$ 中哑符号零的模式可能取决于不可计算的 p。这是将 F 转换为全定义 F_0所付出的代价。这引出了以下开放问题。

问题 26。$\mathsf{G} \star \mathsf{G} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$ 吗?

当然，$\mathsf{G} \star \mathsf{G} \equiv^*_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$ 成立，但问题在于这是否在可计算意义上成立。

G¨odel 问题 G 的并行化性质有一个令人惊讶的结果：G 是一个自然的例子，说明某个问题可以有效不连续，却并非可计算地不连续。这类例子曾在 [5, 命题 19], 中构造出来，但迄今为止还没有已知的自然例子。直观地说，若给定一个连续函数 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，它可能是 f 的实现器，那么如果能连续地确定某个输入，使得 F 无法实现 f，我们就称问题 f 有效不连续。类似地，在可计算不连续的情形下，输入是以可计算的方式找到的。更精确的定义见 [5] 。不连续性问题

$$\mathsf{DIS} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, p \mapsto \{q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mathsf{U}(p) \neq q\}$$

已在 [5], 中定义，其中 $\mathsf{U} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个标准的可计算通用函数。我们在这里不会以任何技术方式使用不连续性问题，因此其定义与下文无关。我们有 $\mathsf{DIS} <_{\mathrm{sW}} \mathsf{LPO} <_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，并且在 [5, 定理 17] 中，我们已证明以下结论对每个问题 f 都成立。

事实27（有效不连续性）我们得到:

1. f 是有效不连续的 $\iff \mathsf{DIS} \leq^*_{\mathrm{sW}} f$，2. f 是可计算不连续的 $\iff \mathsf{DIS} \leq_{\mathrm{sW}} f$。

在 [4, 定理 5.4] 中，我们已经证明 $\mathsf{DIS} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{NON}$，其中

$$\mathsf{NON} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, p \mapsto \{q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : q \not\leq_{\mathrm{T}} p\}.$$

因此，我们得到以下推论。

推论28（有效不连续性）。$\mathsf{DIS} \leq^*_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}\geq$，但 $\mathsf{DIS} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$。也就是说，G 和 K≥ 是有效不连续的，但并非可计算不连续。

证明。定理 14 蕴含 $\mathsf{DIS} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv^*_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}\geq$。假设 $\mathsf{DIS} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$。则 $\widehat{\mathsf{NON}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{DIS} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$ 随之成立。但根据命题25，这将意味着 $\mathsf{NON}|_{\mathrm{c}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{G}|_{\mathrm{c}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{G}$，这显然是错误的，因为 G 没有不可计算输出。□

从某种明确的意义上说，DIS 是最弱的自然不连续问题 [4]。DIS 不能计算归约到 G，这意味着 G 的一致计算能力极其有限。除平凡的下界 id 之外，我们不知道 G 的其他标准下界（与之相关的下界，例如 K≥,G≥，除外）。Kolmogorov 复杂度 K 的情况则截然不同，我们有如下简单结果。

命题 29（柯尔莫哥洛夫复杂度的下界）。$\mathrm{LPO} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}^{\frown}$和 $\lim <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}$。

证明。很容易看出 $\mathrm{LPO}|_{\mathrm{c}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathrm{LPO}$：为了证明 $\mathrm{LPO} \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{LPO}|_{\mathrm{c}}$，只需将零序列映射为零序列，并将任意具有前缀 0^n1 的序列 $^\frown$ 映射为 0^n1。因此，对于第一次归约的正向部分，只需证明 $\mathrm{LPO}|_{\mathrm{c}} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}$。常数零序列在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中有一个特定的最小 G¨odel 数 i。给定 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们只需考察 $\mathsf{K}(p)$，即可得到

$$p = \widehat{0} \iff \mathsf{K}(p) = i.$$

$^\frown$因此，$\mathrm{LPO}|_{\mathrm{c}} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}$ 成立，由此可推出 $\lim \equiv_{\mathrm{sW}} \mathrm{LPO} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{K}$。然而，这两个陈述中的魏劳赫等价都不可能成立。前一种情况下，$\mathrm{LPO} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{K}$ 与 $\mathsf{K} \equiv_{\mathrm{W}}^{*} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$矛盾，而根据定理 14，后者成立。后一种情况下，$\lim \equiv_{\mathrm{W}} {}^\frown\mathsf{K}$ 不可能成立，因为 $\lim \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{WKL}'$，但根据推论 21，$\mathsf{K} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{WKL}'$。□

由于 $\mathrm{DIS} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{LPO}$，我们已明确区分了 G¨odel 问题 G 和柯尔莫哥洛夫复杂度 K。G¨odel 问题 G 也与其有界对应问题 $\mathsf{G}_{\geq}$ 区分开来，因为后者是连续的，而前者不是。

推论 30（G¨odel 与柯尔莫哥洛夫）。$\mathsf{G}_{\geq} <_{\mathrm{W}} \mathsf{G} <_{\mathrm{W}} \mathsf{K}$。

7 结论

我们已经看到，G¨odel 问题及其变体在拓扑 Weihrauch 格中有自然的分类。事实证明，停机问题是验证这些分类的最优预言机。对于 Weihrauch 可约性的可计算性理论版本，情况则更为复杂。我们针对用于对复杂度进行分类的 Kirby-Paris 层级的 Weihrauch 版本，确立了一个最优上界。我们还讨论了闭包性质和下界。

现在，我们仍想论证，为何闭选择与紧选择问题在这些用途下构成自然的度，以及为何它们是 Kirby-Paris 层级的合理代表。我们提出一个相当一般且较为宽泛的论题，指出 Weihrauch 度若要成为逆向数学中公理系统的合理对应物，就应满足一个必要条件。

论题 31 Weihrauch 度 d 若要被视为逆向数学中公理系统 A的对应物，必须满足一个必要条件：d 与将 A 恰当地解释为一个问题所得的对象 Weihrauch 等价，并且 d 在复合下封闭，即 $d \star d \equiv_{\mathrm{W}} d$。

之所以要求复合封闭性，是因为这对应于演绎封闭性，而在逆向数学中，演绎封闭性是无需额外代价的。我们声称，表 5 中所示的问题满足这些要求

Weihrauch 复杂度	逆向数学
$\mathsf{C}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$	ATR_0
$\lim^{\diamond}$	ACA_0
WKL	WKL_0^*
$\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$	$\mathsf{I}\Sigma^0_{n+1}$
$\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)}$	$\mathsf{B}\Sigma^0_{n+1}$
id	RCA_0^*

图 5. 与逆向数学公理系统相对应的 Weihrauch 度。

作者与 Rakotoniaina 注意到，闭选择与紧选择问题对应于归纳原理和有界性原理 [17]，这一点本质上基于命题 12 中陈述的等价关系。Davis、Hirschfeldt、Hirst、Pardo、Pauly 和 Yokoyama 在 [18, 定理 6–9]中也提出了可替代的归纳原理候选项。他们研究了两个组合原理 ERT 和 ECT，并证明在 RCA_0, 中，ERT 等价于 $\mathsf{I}\Sigma^0_1$，ECT 等价于 $\mathsf{I}\Sigma^0_2$；而 $\mathsf{ERT} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{LPO}^*$，$\mathsf{ECT} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$。然而，如果按照论题 31，要求复合封闭性，那么我们便得到：

命题32. $\mathsf{ERT}^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}^*)^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathsf{ECT}^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} (\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}})^{\diamond} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$。

因此，我们又回到了分别被视为 $\mathsf{I}\Sigma^0_1$ 和 $\mathsf{I}\Sigma^0_2$对应物的那些类。这里，第一个等价关系 $(\mathsf{LPO}^*)^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 由定理 8 得出。第二个等价关系 $(\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}})^{\diamond} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$ 也是由后一个定理得出的，此外还需考虑以下引理。

引理33. $\mathsf{LPO}' \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}} \star \mathsf{TC}_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$。

证明。第二个归约是 [10, 推论 8.9] 和推论 10 的结果。第一个归约可如下看出。我们可以将 LPO' 视为这样一个任务：判断输入 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是否包含无穷多个零 [10,引理 4.23]。如果我们在长度为 n 的 p前缀中找到一个零，就输出 $A_n = \{n+1, n+2, ...\}$。如果我们在长度为$m > n$的前缀中找到下一个零，就将输出修改为 A_m。因此，最终输出 A 要么为空（这意味着输入包含无穷多个零），要么为 $A = A_n$，其中某个 n 使得 $i \in A$ 蕴含 $i \geq n+1$，这意味着在位置 n之后，p 中不再出现零。无论哪种情况，$\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}(A)$ 的输出都是某个数 i。由于 $\mathsf{LPO} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$，我们可以使用第二个 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 副本来判断序列 $p(i+1)$ $p(i+2)$ $p(i+3)$ ... 是否包含零。如果包含零，那么 p 包含无穷多个零；如果不包含，那么 p 只包含有限多个零。这就证明了 $\mathsf{LPO}' \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}} \star \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$。□

根据定理 8，$(\mathsf{LPO}')^{\diamond} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$，我们得到以下推论。

推论 34。$\mathsf{TC}^{\diamond}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbb{N}}$。

这一切证实，$\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$ 以及 $\mathsf{K}_{\mathbb{N}}^{(n)}$ 分别是 $\mathrm{I}\Sigma_{n+1}^0$ 和 $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}^0$的合理对应对象。因此，我们对 G¨odel 问题及其变体的分类，是以适当的基准尺度为依据进行的。

参考文献

1. Bishop, E.：《构造性分析基础》。麦格劳-希尔，纽约（1967年）5 2. Brattka, V.：有效博雷尔可测性与函数的可归约性。《数理逻辑季刊》51(1)，19–44（2005年），http://dx.doi.org/10 200310125 15 3 1002. /malq. . Brattka, V.：图灵跳与极限之间的伽罗瓦连接。《计算机科学中的逻辑方法》14(3:13)，1–37（2018年8月），https://lmcs.episciences.org/4794 10 4. Brattka, V.：暂存并行化五边形。《计算机科学中的逻辑方法》17(4)，20:1–20:29（2021年），https://doi.org/10.46298/lmcs-17(4:20)2021 18 5. Brattka, V.：不连续性问题。《符号逻辑杂志》（2022年），https://doi.org/10 18 6 1017 2021 106, . /jsl. . 电子版已发表。Brattka, V., de Brecht, M., Pauly, A.：闭选择与一致低基定理。《纯粹与应用逻辑年刊》163，986–1008（2012年），http://dx.doi.org/10 020 6, 8 7 1016 2011 12 . /j.apal. . . . Brattka, V., Cettolo, A., Gherardi, G., Marcone, A., Schr¨oder, M.：补遗：“博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理是弱 K″onig 引理的跳跃”。《纯粹与应用逻辑年刊》168(8)，1605–1608（2017年），http://dx.doi.org/10 004 8 8 1016 2017 04 . /j.apal. . . . Brattka, V., Gherardi, G.：计算分析中的有效选择与有界性原理。《符号逻辑通报》17(1)，73–117（2011年），http://dx.doi.org/10.2178/bsl/1294186663 6, 8 9. Brattka, V., Gherardi, G.：Weihrauch度、全知原理与弱可计算性。《符号逻辑杂志》76(1)，143–176（2011年），http://dx.doi.org/10.2178/jsl/1294170993 7 10. Brattka, V., Gherardi, G.：选择的完备化。《纯粹与应用逻辑年刊》172 102914 7, 20 11 3 102914 2021 10 1016 2020 ( )，( )，https://doi.org/ . /j.apal. . . Brattka, V., Gherardi, G., Marcone, A.：博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理是弱 K″onig 引理的跳跃。《纯粹与应用逻辑年刊》163，623–655（2012年 006 5, 6, 7, 8 12 10 1016 2011 10），http://dx.doi.org/ . /j.apal. . . . Brattka, V., Gherardi, G., Pauly, A.：计算分析中的Weihrauch复杂度。载于：Brattka, V., Hertling, P.（编）《分析中的可计算性与复杂性手册》，第367–417页。《可计算性理论与应用》，施普林格，查姆（ 2021 10 1007 978 3 030 59234 9_11 3 4 5 6 8 16 ），https://doi.org/ . / - - - - , , , , , . Brattka, V., Hendtlass, M., Kreuzer, A.P.：可计算性理论的一致计算内容。《计算系统理论》61(4)，1376–1426（2017年），http://dx.doi.org/10 1 10 14 1007 00224 017 9798 . /s - - - . Brattka, V., Hendtlass, M., Kreuzer, A.P.：贝尔纲定理的一致计算内容。《圣母大学形式逻辑杂志》59(4)，605–636（2018年），https://projecteuclid.org/euclid.ndjfl/1539396028 8

15. Brattka, V., H¨olzl, R., Kuyper, R.：蒙特卡罗可计算性。载于：Vollmer, H., Vall´ee, B.（编）第34届计算机科学理论方面研讨会（STACS 2017）。莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs），第66卷，第17:1–17:14页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，达格施图尔，德国（2017 7016 8, 10 16 2017），http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/ / . Brattka, V., Pauly, A.：Weihrauch度的代数结构。《计算机科学中的逻辑方法》14(4:4)，1–36（2018年），https://lmcs.episciences.org/4918 5, 17 17. Brattka, V., Rakotoniaina, T.：拉姆齐定理的一致计算内容。《符号逻辑杂志》82(4)，1278–1316（2017年），http://dx.doi.org/10 43 4, 7, 8, 20 18 1017 2017 . /jsl. . . Davis, C., Hirschfeldt, D.R., Hirst, J., Pardo, J., Pauly, A., Yokoyama, K.：等价于弱归纳的组合原理。《可计算性》9(3-4)，219–229（2020年 180244 20 19 10 3233），https://doi.org/ . /com- . Dzhafarov, D.D., Mummert, C.：《逆向数学》。《可计算性理论与应用》，施普林格（2022年），https://doi.org/10.1007/978-3-031-11367-3 4 20. Dzhafarov, D.D., Solomon, R., Yokoyama, K.：Weihrauch度中问题的一阶部分。arXiv 2301.12733（2023年），https://arxiv.org/abs/2301 12733 5, 6 21 . . Freivald, R.V., Wiehagen, R.：利用附加信息进行归纳推理。《电子信息处理与控制论》

15 4 179 185 1979 13

22 ´ 2301 11479 2023

( )，– ( )。Gauthier, T., Olˇsak, M., Urban, J.：异类编码。arXiv . ( )，https://arxiv.org/abs/2301 11479 2 23 . . Gold, E.M.：极限语言识别。《信息与控制》10(5)， 447 474 1967 ´ ´ 10 1016 0019 9958 67 91165 5 2 – ( )，

24 ´ https://doi.org/ . /S - ( ) - . Hajek, P., Pudlak, P.：《一阶算术的元数学》。《数理逻辑展望》，施普林格出版社，柏林（1993年），http://dx.doi.org/10 3 4 25 1007 978 3 662 22156 . / - - - - . Hirschfeldt, D.R.：《剖析真理：组合原理的可计算性与逆向数学》，讲义系列，新加坡国立大学数学科学研究所，第28卷。世界科学出版社，新加坡（2015年 9208 4 26 10 1142），http://www.worldscientific.com/worldscibooks/ . / . Hoyrup, M., Rojas, C.：程序携带的关于其计算对象的信息。《计算系统理论》61(4)，1214–1236（2017年），http://dx.doi.org/10 9 2, 13 27 1007 00224 016 9726 . /s - - - . Neumann, E., Pauly, A.：代数计算模型的拓扑视角。《复杂性杂志》44（补充C），1–22（2018年），http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0885064X17300766 5, 7 28. Odifreddi, P.：《经典递归论》，《逻辑与数学基础研究》，第125卷 9 29 1989 . 北荷兰出版社，阿姆斯特丹（）。Odifreddi, P.：《经典递归论——第二卷》，《逻辑与数学基础研究》，第143卷 9 30 1999 . 北荷兰出版社，阿姆斯特丹（）。Osherson, D.N., Stob, M., Weinstein, S.：《学习系统：认知科学家与计算机科学家的学习理论导论》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥（1990年 2 31）。Simpson, S.G.：《二阶算术的子系统》。《逻辑展望》，剑桥大学出版社，

2 2009 4 版。（）。Solda, G., Valenti, M.：

32 ` 问题一阶部分的代数性质。arXiv 2203.16298（2022年），https://arxiv.org/abs/2203.16298 5, 6, 7

33. Valenti, M.：《可计算性、拓扑学与分析之旅》。博士论文，乌迪内大学（）。Westrick, L.：关于菱形算子的一则注记。《可计算性》第10卷第2期，107–110（2021年 200295 5 35 10 3233），https://doi.org/ /COM- 。Wiehagen, R.：算法识别理论。博士论文B，柏林洪堡大学（）。Zeugmann, T., Zilles, S.：递归函数学习：综述。《理论计算机科学》第397卷第1–3期，4–56（2008年），https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.02.021 2, 11