有偏妥协模型中的共识转移

Olivia Cannon[2], Ty Bondurant[3], Malindi Whyte[4], 和 Arnd Scheel[2,1]

[2] *University of Minnesota, School of Mathematics, 206 Church St. S.E., Minneapolis, MN 55455, USA*
[3] *Mathematics Department, Georgia Institute of Technology, North Ave NW, Atlanta, GA 30332 USA*
[4] *Department of Mathematics, Wake Forest University, 127 Manchester Hall, Winston-Salem, NC 27109, USA*

摘要

我们研究偏置对有界信心模型中政党形成及其动力学的影响。对于弱偏置，我们量化平均意见和潜在离散度的变化，以及政党规模的缩减。对于刻画自我煽动的非线性偏置，我们证明：当偏置低于政党解散的临界阈值时，政党会在均匀意见分布的背景上呈现连贯的漂移运动。技术上，我们运用几何奇异摄动理论推导漂移速度，依靠非局部中心流形分析构造阈值附近的漂移政党，并在一个前向-后向时滞方程中实施数值延拓，以连接各渐近区域。

arXiv:2302.04214v1 [math.DS] 8 Feb 2023

1 引言

有界信任模型 [19] 在社会动力学研究中发挥了关键作用，为意见簇（亦称派系）的形成提供了一种机制。个体被赋予表示意见的数值。他们通过妥协进行互动并改变自己的意见，但只与意见足够接近的其他个体互动，即意见处于有界信任区间内的个体。该模型可以采用多种不同形式来表述——随机马尔可夫过程、确定性平均场方程、离散或连续的意见值——但其定性现象相似：意见均匀分布是不稳定稳态，波动会导致意见簇的形成，而且这些意见簇通常间隔均匀 [4, 5, 6, 17, 19, 26, 27]。

该模型主要用于研究极化机制，为此人们对其进行了许多改动，例如改变个体之间的信任区间、引入少数不愿妥协的个体（“顽固”个体），以及改变交互概率[9, 10, 11, 13, 18, 24, 29, 30, 32]。本文关注意见簇的漂移；也就是说，意见簇持续向意见谱的一端移动。尽管已有研究报告了由不对称信任导致的漂移现象，见 [19, §4.2], 但似乎很少有针对这一现象的系统性计算或分析研究。我们关注的是这种由个体的行为偏置所引发的自组织现象。我们通过在有界信任模型中加入偏置项来对其建模。我们将展示，偏置项通常会导致某个派系的平均意见发生漂移，但也可能导致个别派系瓦解（见§ 6）。因此，我们将重点研究对应于自我煽动的非线性二次偏置项，因为它既能引发持续且一致的漂移，又能避免派系扩散和瓦解。关注这种二次偏置，也源于它与群体极化这一常见社会学现象的相关性：在这一现象中，群体规模与推动其成员采纳更极端意见的力量有关 [23]。

具体而言，我们研究以下确定性平均场模型，用以描述持有意见 $n \in \mathbb{Z}$ 的主体群体 P_n 的演化，

$$\frac{dP_n}{dt} = 2P_{n+1}P_{n-1} - P_n(P_{n+2} + P_{n-2}) + \beta(P_{n+1}^2 - P_n^2), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

这里，$\beta = 0$ 对应于晶格上的确定性 Hegselmann-Krause 有界置信模型，其中群体 P_{n-1} 和 P_{n+1} 以质量作用速率相互作用，从而形成意见 P_n。我们加入了自激偏置项 $\beta(P_{n+1}^2 - P_n^2)$，可以将其理解为：个体以与具有相同意见的群体规模成正比的概率，将自己的意见值减一；“同意见主体”之间的相互作用会导致意见向极端漂移。偏置项的强度由参数 $\beta > 0$表示。

[1]作者感谢 NSF DMS-1907391 和 NSF DMS-2205663 资助项目提供的部分支持。

该模型的结果大致可以概括如下：

（i）对于超临界强偏置，$\beta > 2$，政党形成受到抑制，意见均匀分布是稳定的；（ii）对于弱偏置，漂移速度 c 在主导阶与偏置和政党质量 $c \sim \frac{2\beta m}{\pi}$ 成正比；（iii）对于亚临界偏置 $\beta \lesssim 2$，我们严格证明了在大小为 m、速度为 $c \sim 4m$的恒定背景上存在相干政党漂移；（iv）对于偏置 $0 < \beta < 2$，我们通过数值延拓找到了漂移政党，并发现支撑相干政党漂移的背景人口呈指数级小，即 $\exp(-const/\beta)$。

（i）至（iii）的结果均为解析结果。只有在（iii）所述的情形下，我们才能证明相干政党漂移的存在；而（ii）则无法排除某一派系最终扩散的可能性。我们还简要讨论了与漂移政党的稳定性和不稳定性有关的一些有趣现象。

从技术上说，（ii）的结果依赖于利用几何奇异摄动理论对慢流形上的流进行主导阶计算，而（iii）则采用了一种近期提出的新方法，用于分析非局部耦合方程中的相干结构。

提纲。在 §2 中，我们汇总有界信任模型及加入偏置项后的模型的相关信息，并讨论单方态和均匀态处的线性化。在 §3 中，我们运用几何奇异摄动理论的方法，确定 $\beta \ll 1$ 的漂移速度，即情形 (ii) 的漂移速度。§4 讨论 $\beta \nearrow 2$ 区域，即情形 (iii)，并通过非局部方法证明漂移解的存在。§5 介绍数值方法与结果，尤其是上文所述的情形 (iv)。§6 展示了数值证据，表明当方程采用其他偏置项时，系统缺乏连贯性。最后，我们简要讨论相关内容。

2 有界信任模型：平衡态、稳定性与偏置

有界信任模型

$$\frac{dP_n}{dt} = 2P_{n+1}P_{n-1} - P_n(P_{n+2} + P_{n-2}), \qquad P_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

描述意见分布 $P_n(t)$ $n \in \mathbb{Z}$ 的动力学，其中 $P_n(t)$ 表示在时间 t 持有意见 n 的局部人口规模。位于站点 $n-1$ 和 $n+1$ 的个体通过互动达成妥协，转而持有意见 n；与此同时，位于站点 n 的个体与位于 $n+2$ 和 $n-2$ 的个体妥协，并离开站点 n。距离大于 2 的个体之间不会互动。该方程显然保持质量和平均意见（或一阶矩），

$$\frac{d}{dt}\sum_n P_n = 0, \qquad \frac{d}{dt}\sum_n nP_n = 0.$$

在 $|n| \to \infty$ 处满足充分局域性等合理条件。(2.1) 的动力学在一定程度上已得到理解。共识过程会促成意见簇的形成，这些意见簇被称为派系。对于 (2.1)，这些派系可以支撑在 1 个或 2 个意见站点上，也就是说，例如，$P_0 = 1$，$P_j = 0$ 当 $j \neq 0$ 时，或 $P_0 = \alpha$、$P_1 = 1-\alpha$、$P_j = 0$ 当 $j \notin \{0,1\}$ 时。彼此之间至少隔着 2 个空站点的派系不会相互作用，因此可以据此构造出包含多个派系的平衡态。政治派系在初始瞬态过后一旦确立，通常会表现得非常稳固，尽管在现有派系之外引入个体可能会促成新派系的形成。除了这些支撑在一个或两个意见站点上的单方状态，以及与之对应、彼此充分分离的多方状态外，该方程还支持均匀意见分布的平衡态，$P_n \equiv m$ 对所有 m 均成立。有关该模型及其动力学的背景，可参见 [4] 。不过需要指出的是，许多稳定性问题尚未得到精确的数学解答，这可能是因为可能的平衡构型种类繁多且结构复杂。

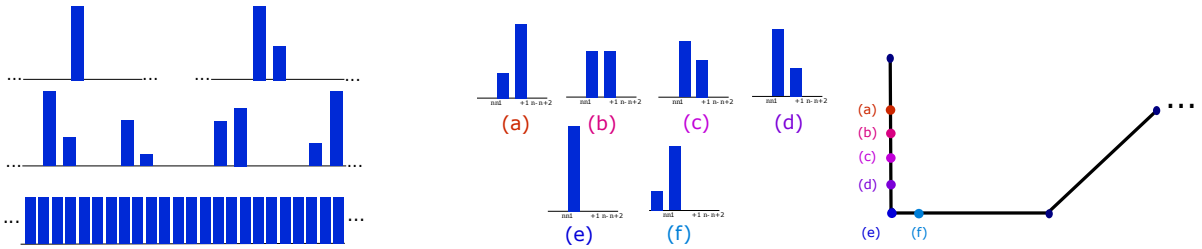


图 2.1：单个或两个站点上的单方、 多方及均匀分布平衡态（左）。单方平衡态族的相空间示意图，其角点位于单位点党处（右）。

2.1 单方态

质量为 m 的单个双站点党具有如下形式：$P^*_{\alpha,\ n} = (0,\ \ldots\ldots,\ \overset{\downarrow n}{m\alpha},\ m(1-\alpha)\ \ldots\ldots\ 0)^{\perp}$，当 $\alpha \in (0,\ 1)$。在极限 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 下，该派系仅占据一个站点。它表示在两个相邻意见站点 n 和 $n+1$ 上形成的（总体）意见共识。对于质量为 $m = 1$ 的 (2.1)，双站点平衡态和单位点平衡态 ($\alpha = 0$) 处的线性化向量场分别由以下矩阵给出：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & 2\alpha & -(1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & & \\ & & -\alpha & 2(1-\alpha) & 0 & 0 & -\alpha & & \overset{n}{\leftarrow} \\ & & 0 & -(1-\alpha) & 0 & 0 & 2\alpha & -(1-\alpha) & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 2(1-\alpha) & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\alpha) & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & \overset{\uparrow}{n} & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \overset{n}{\leftarrow} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & \overset{\uparrow}{n} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

根据缩放不变性，在质量为 m 的政党处进行线性化，所得矩阵与原矩阵相同，只相差一个因子 m。
显然，两个矩阵的核都是无限维的，其基分别由以下向量张成

$$\{e_j \mid j \neq n-2, n-1, n+2, n+3\}, \quad \text{and} \quad \{e_j \mid j \neq n-2, n+2\},$$

分别。 这里， e_n 是典范基向量，使得 $(e_n)_k = \delta_{nk}$，其中采用克罗内克-δ 记法 n.
对于双站点党，核的余维为 4，对应于派系的两个站点以及距离其 3 个或更多位置的站点。线性化的谱为 $\{0, -m\alpha, m(1-\alpha)\}$. 对于单点团块，核的余维为 2，线性化的谱为 $\{0, -m\}$。核的补空间可与意见站点 n 联系起来，这些站点会与派系的支撑相互作用；而核元素对应于不会与派系相互作用的晶格格点，原因可能是距离太远，也可能只是改变了派系的形状。

对于双站点党，与核元素 e_n 和 e_{n+1} 相对应的是一个二维的单群体平衡态族，由质量 m 和参数 α参数化；可以将该参数视为对派系平均意见的参数化。在双站点党中，核向量 e_n 对应质量变化，而核向量 e_{n+1} 和 e_{n-1} 对应派系平均意见的增加或减少。不过请注意，与状态 $(\ldots, 0, 0, \alpha, 1, \alpha, 0, 0, \ldots)^{\perp}$ 相关的方向 $e_{n+1}+e_{n-1}$ 并不对应于平衡态族的切空间。同样，支撑在两个以上站点上的核方向也不对应于平衡态族。特别是，无限维核并非只是高维平衡态族的切空间；这一事实会使之后应用奇异摄动理论略为复杂。我们指出，由于这个高维核，以及相空间中附近质量较小的聚集可能产生的相关动力学（尽管它们在意见谱中相距甚远），单党状态的稳定性在解析上相当微妙。

固定总质量后，单党状态自然构成一个单参数族 $\mathcal{F}$，可用其平均意见来参数化：在站点 n 处质量为 $1-\alpha$、在站点 $n+1$ 处质量为 α 的派系，其平均意见为 $n+\alpha$。
有偏模型中的意见漂移，在主导阶上可描述为沿着这一连续的单党状态族发生的漂移。在相空间中考察这一状态族时，会出现一个微妙之处。支撑在站点 n 和 $n+1$ 上的双位点党族，其切向量为 $e_n - e_{n+1}$。在单点团块处，这个切向量不连续；单方平衡态的连续曲线在此处形成一个拐角，示意见图 2.1。正如下文所见，沿着这个拐角发生的漂移会引入一些动力学和误差项，这些项在分析穿越跨临界分岔时也会出现。

2.2 意见的均匀分布

均匀态 $P_n \equiv m$ 也是 (2.1) 的一个平衡态。事实证明，这个平衡态是不稳定的，一个典型的研究问题是：围绕该平衡态的涨落如何演变为多党状态。为了理解这一过程，通常首先在均匀态处对 (2.1) 进行线性化，得到

$$\frac{dP_n}{dt} = m(-P_{n-2} + 2P_{n-1} - 2P_n + 2P_{n+1} - P_{n+2}).$$

对该常系数格点微分方程进行傅里叶变换后，很容易求得其解。因此，代入拟设 $P_n = e^{i\sigma n + \lambda t}$，即可得到色散关系

$$\lambda = 2m(2\cos(\sigma) - \cos(2\sigma) - 1), \qquad -\pi \leqslant \sigma < \pi;$$

另见图 2.2。时间特征值 λ 为实数，并在 $\sigma = \pm\frac{\pi}{3}$ 处达到最大值 1。
因此，线性化预测周期为 $n = 6$的扰动增长最快；这意味着，围绕常数态的白噪声涨落会演变为多方态，其党派峰值位于相距$\delta n = 6$的站点。对这一色散关系进行更精细的分支点分析后发现，不稳定态的局域扰动会演变成间距不同的政党，间距为 $\delta n = 5.311086\ldots$；见 [5]。在考察具有（强）偏置的均匀态的稳定性时，我们将回到这一分析。

2.3 偏置对平衡态的影响

回到带有自我激励偏置的模型方程，

$$\frac{dP_n}{dt} = 2P_{n+1}P_{n-1} - P_n(P_{n+2} + P_{n-2}) + \beta(P_{n+1}^2 - P_n^2), \tag{2.2}$$

我们注意到，对于 $\beta > 0$，单党状态并非平衡态。由此导致的单方沿着平衡态族 $\mathcal{F}$ 漂移，并伴随着平均意见的变化，正是本文余下大部分内容的研究对象。

另一方面，均匀态仍然是平衡态，但线性化会出现新的项。当 $\beta > 0$ 时，线性化方程

$$\frac{dP_n}{dt} = m(-P_{n-2} + 2P_{n-1} - (2+2\beta)P_n + (2+2\beta)P_{n+1} - P_{n+2})$$

具有如下色散关系

$$\lambda = m(-2\cos(2\sigma) + (4+2\beta)\cos(\sigma) - (2+2\beta) + i\beta\sin(\sigma)). \tag{2.3}$$

对于 $\beta < 2$，$\mathrm{Re}\lambda(\sigma)$ 的最大值为正，因此均匀态不稳定。然而，对于 $\beta \geq 2$，$\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$ 非正；当 $\beta > 2$ 时，特征值在原点处呈二次相切：强偏置使意见的均匀分布稳定，从而不利于形成共识！

色散关系中的谱稳定性很容易转化为例如 ℓ^2 中的线性稳定性。由于非线性中存在（离散）导数，对于以 ℓ^∞ 为度量的局部化初始条件所产生的扰动，也可以预期其具有非线性稳定性，并近似呈扩散衰减；更多详情请参见注4.1。

我们将在 §4 的分岔分析中利用稳定性的变化，说明失稳伴随着局部化相干结构的产生。

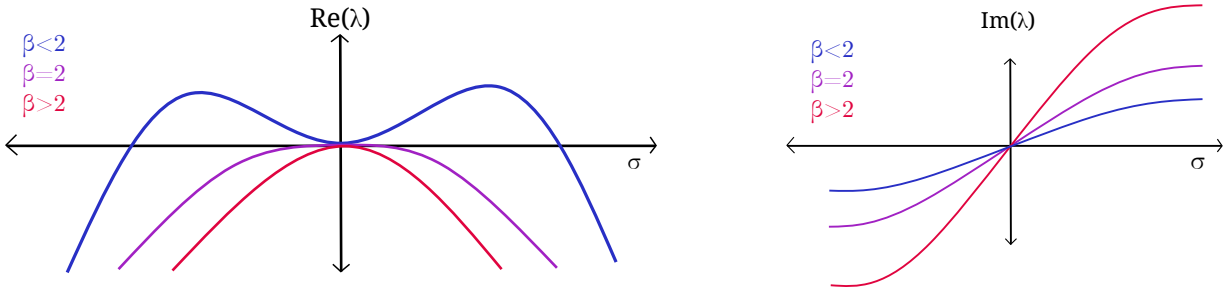


图 2.2： $\beta < 2$、 $\beta = 2$ 和 $\beta > 2$ 的线性色散关系 (2.3)。

3 小偏置区间

我们在此研究 $0 < \beta \ll 1$ 的动力学。我们运用几何奇异摄动理论（GSPT）的方法，考察有偏系统中单个派系的传播速度。我们注意到，无偏系统中平衡态族缺乏光滑性，因此无法利用现有理论进行全局慢快分解。尽管如此，我们找到了局部不变流形，并分别分析了流形不光滑点附近的系统，从而计算出小偏置下的局部传播速度。

3.1 单方平衡态附近的奇异摄动分析

我们首先证明局部不变流形的存在性。

命题 3.1（双位点中心流形）固定任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1 \in \mathbb{N}$，并令 $\delta > 0$ 任意小。则对于每个固定的双位点方平衡态质量 $m > 0$，存在一族局部不变的无限维、余维为 4 的 C^k-流形 $\mathcal{M}_\beta \subset \ell^\infty$，它们以 C^k 方式依赖于 β，使得 $\mathcal{M}_0 \supset \{P^*_{\alpha,n} \mid \alpha \in (\delta, 1-\delta)\}$ 是由支撑在站点 n 和 $n+1$ 上、远离单位点方平衡态的双位点单方平衡态组成的那部分流形族。对于任意一个双位点平衡态，流形在 $\beta = 0$ 处的切空间与该平衡态处线性化的无限维核重合。

证明。平衡态流形 $\mathcal{M}_0$（局部）不变，且其线性化具有指数二分性：稳定子空间为 4 维，中心子空间为无限维，并且投影 $\mathcal{P}^s$ 和 $\mathcal{P}^c$ 一致有界。不变流形的标准理论表明，存在与此分解相对应的光滑局部不变中心流形，例如可采用 [3, 16, 21] 中的图变换来构造。 ∎

命题 3.2（单位点中心流形）固定 $n \in \mathbb{Z}$、 $k \geqslant 1 \in \mathbb{N}$ 为任意值，并令 $\delta > 0$ 足够小。然后，对于单位点平衡态的固定质量 $m > 0$，存在一族局部不变的、无限维、余维为 2 的 C^k-流形 $\mathcal{M}'_\beta \subset \ell^\infty$；该流形族以 C^k 方式依赖于 β，使得 $\mathcal{M}'_0 \supset P^*_n \cup \{P^*_{\alpha,m} \mid m = n, \alpha \in (0, \delta)$； $m = n-1$、 $\alpha \in (1-\delta, 1)\}$，构成接近单位点平衡态 P^*_n 的双位点单方平衡态族。其在单位点平衡态处关于 $\beta = 0$ 的切空间，与该平衡态处线性化的无限维核重合。

证明。 这是无限维情形下一个标准的局部中心流形结果；例如参见 [34, 20]。该流形包含平衡态族，因为它包含所有在任意时刻都保持有界的小解。 ∎

我们强调，双站点中心流形在如下意义下是全局的：它包含两个单位点党之间平衡态线的一个紧子集；而单位点中心流形是局部的，仅定义在单位点党附近的一个小邻域内。

3.2 远离角点处的主导阶动力学

利用不变性，我们现在可以计算每个流形上的主导阶动力学以及约化流。在角点之外，对于双站点党 $P^*_{n,\ \gamma}$，我们可以通过取值 q_n 来参数化线性化的核，

q_{n+1}，以及 $p \in \ell^\infty$，$p_j = 0$（$n-2 \le j \le n+3$ 时），并将流形表示为 $P = h(q_n,\ q_{n+1},\ p,\ \beta)$，其中

$$h(P_n, P_{n+1}, p, \beta) = (\gamma + q_n)e_n + (1 - \gamma + q_{n+1})e_{n+1} + p + \mathcal{O}(\beta, |q_n|^2 + |q_{n+1}|^2, |p|^2).$$

在此参数化下，我们有

$$\begin{aligned}
\dot{q}_n &= \beta \mathcal{P}^c(G(h(q_n, q_{n+1}, p, \beta)))_n + \mathcal{O}(\beta^2, |q_n|^2 + |q_{n+1}|^2, |p|^2),\\
\dot{q}_{n+1} &= \beta \mathcal{P}^c(G(h(q_n, q_{n+1}, p, \beta)))_{n+1} + \mathcal{O}(\beta^2, |q_n|^2 + |q_{n+1}|^2, |p|^2),\\
\dot{p} &= \mathcal{O}(|p|^2, |\beta p|, \beta^2(|q_n| + |q_{n+1}|)),
\end{aligned}$$

where $G(P)_j = P_{j+1}^2 - P_j^2$，而 $\mathcal{P}^c$ 是投影到 $\ker\ Df(P^*_{\alpha,\ n})$ 上的谱投影，定义为 s

$$\mathcal{P}^c(P)_j = \begin{cases} P_j, & j < n-2, j > n+3 \\ 0, & j = n+1, n+2, n-1, n-2 \\ 3P_{n-2} + 2P_{n-1} + P_n - P_{n+2} - 2P_{n+3}, & j = n \\ -2P_{n-2} - P_{n-1} + P_{n+1} + 2P_{n+2} + 3P_{n+3}, & j = n+1 \end{cases},$$

现在对 $p = \beta q$ 进行缩放，我们可以显式得到中心流形上的主导阶结果：

$$\begin{aligned}
\dot{q}_n &= \beta(\gamma^2 + (1-\gamma)^2) + \mathcal{O}(\beta^2),\\
\dot{q}_{n+1} &= -\beta((\gamma)^2 + (1-\gamma)^2) + \mathcal{O}(\beta^2),\\
\dot{p} &= \mathcal{O}(\beta^2).
\end{aligned}$$

显然，在主导阶下，派系中的质量守恒，即 $P_n + P_{n+1} = 0$。对于由 $P_n = \alpha$，$P_{n+1} = 1 - \alpha$ 参数化的双位点党族，这给出

$$\dot{\alpha} = -\beta[\alpha^2 + (1-\alpha)^2] + \mathcal{O}(\beta^2). \tag{3.1}$$

我们在图 3.1 中将这一阶近似 (3.1) 与数值计算得到的时间平均漂移速度进行比较，也就是说，覆盖区间 $\alpha \in [0, 1]$，而非区间 $(\delta,\ (1-\delta)$，上述分析适用于后者。计算流程的细节见 §5。我们看到，对于较小的 β，此处预测的速度给出了主导阶项，但即使 β 的值适度偏小，偏差仍然很显著。我们将说明，这种偏差可归因于经过单位点党附近时所产生的项 $\beta^{3/2}$。

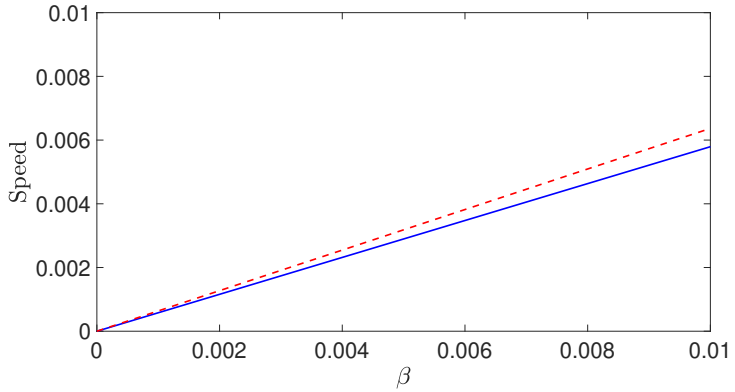


图 3.1：理论（红色）给出的主导阶平均漂移速度预测与数值计算所得漂移速度（蓝色）的比较，适用于总质量为 1 的派系。

3.3 角点动力学与跨临界分岔的慢通过

现在我们计算单点团块附近的主导阶动力学。线性化 $Df(P_n^*)$ 的核现在余维为 2，我们用以下数值参数化核的元素 $P_c\ \alpha_+,\ \alpha_-,\ \alpha_m \in \mathbb{R}$ 和 $p \in \ell^\infty$，其中

$p_j = 0$ 当 $n-2 \le j \le n+2$ 时。令

$$e_+ = (0,...,1,\overset{\downarrow n}{-1},0,...)^\perp, \qquad e_- = (0,...,0,\overset{\downarrow n}{-1},1,...)^\perp, \qquad e_m = (0,...,0,\overset{\downarrow n}{1},0,...)^\perp,$$
$$e_+^* = (0,...,0,0,\overset{\downarrow n}{0},1,2...)^\perp, \quad e_-^* = (0,...,2,1,\overset{\downarrow n}{0},0,0,...)^\perp, \quad e_m^* = (0,...,1,1,\overset{\downarrow n}{1},1,1,0...)^\perp.$$

我们将中心流形写作 $h^c = h^c(\alpha_+,\ \alpha_-,\ \alpha_m,\ p,\ \beta)$ 的图，其中

$$h^c(\alpha_+,\ \alpha_-,\alpha_m,p,\beta) = P_n^* + p + \alpha_+ e_+ + \alpha_- e_- + \alpha_m e_n + \mathcal{O}(|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 + |\alpha_m|^2 + |p|^2 + \beta^2)$$

在这些坐标下，我们有

$$\dot{P}_c = \mathcal{P}^c(f(P_n^* P_c + h^c(P_c))) + \mathcal{O}(|P_c|^3 + \beta^3),$$

其中，投影到 $\ker\ Df(P^*_{\alpha,\ n})$ 上的谱投影 $\mathcal{P}^c$ 为

$$\mathcal{P}^c v = \langle v, e_+^*\rangle e_+ + \langle v, e_-^*\rangle e_- + \langle v, e_m^*\rangle e_n + \sum_{|i|>3} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

将向量场写成关于 $\alpha_+,\ \alpha_-,\ \alpha_m,\ p,\ \beta$ 的形式，我们得到

$$f(P_n^* + P_c + h(P_c)) = \begin{pmatrix} \vdots \\ 2p_{-3}p_{-5} - p_{-4}p_{-6} \\ -p_{-3}\alpha_- - p_{-3}p_{-5} \\ -h_- + 2p_{-3}\alpha_- \\ 2h_-\alpha_-\alpha_+ - \alpha_- p_{-3} + \beta(1 + 2(\alpha_m - \alpha_- - \alpha_+)) \\ 2\alpha_+\alpha_- - (h_- + h_+) - \beta(1 + 2(\alpha_m - \alpha_- - \alpha_+)) \\ 2h_+ - \alpha_+\alpha_- - \alpha_+ p_3 \\ -h_+ + 2\alpha_+ p_3 \\ -\alpha_+ p_3 - p_3 p_5 \\ 2p_3 p_5 - p_4 p_6 \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{n}{\leftarrow} \qquad + \mathcal{O}(|P_c + \beta|^3),$$

进而得到

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_- &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_-^*\rangle &&= \ \beta - \alpha_-\alpha_+ + 3p_{-3}\alpha_- + 2\beta(\alpha_m - \alpha_+ - \alpha_-) + \mathcal{O}(3) \\
\dot{\alpha}_+ &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_+^*\rangle &&= -\alpha_-\alpha_+ + 3p_3\alpha_+ + \mathcal{O}(3) \\
\dot{\alpha}_m &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_m^*\rangle &&= \ p_3\alpha_+ + p_{-3}\alpha_- + \mathcal{O}(3) \\
\dot{p}_3 &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_3\rangle &&= -p_3\alpha_+ - p_3 p_5 + \mathcal{O}(3) \\
\dot{p}_{-3} &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_{-3}\rangle &&= -p_{-3}\alpha_- - p_{-3}p_{-5} + \mathcal{O}(3) \\
\dot{p}_4 &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_4\rangle &&= -2p_3 p_5 - p_4 p_6 + \mathcal{O}(3) \\
\dot{p}_{-4} &= \langle f(P_n^* + P_c + h^c(P_c)), e_{-4}\rangle &&= -2p_{-3}p_{-5} - p_{-4}p_{-6} + \mathcal{O}(3) \\
\dot{p}_j &= 2p_{j-1}p_{j+1} - p_j(p_{j+2}p_{j-2} + \mathcal{O}(3), \qquad |j| > 4.
\end{aligned}$$

在主导阶上，对于所有 j 和 $\alpha_m = 0$ ， $p_j = 0$ 所在的子空间是不变的，因此我们仅考虑 $\alpha_-,\ \alpha_+$ 的主导阶方程，

$$\dot{\alpha}_- = \beta - \alpha_-\alpha_+ - 2\beta(\alpha_+ + \alpha_-), \qquad \dot{\alpha}_+ = -\alpha_-\alpha_+.$$

变量替换为 $x = \alpha_- + \alpha_+$ 和 $\mu = \alpha_- - \alpha_+$ 后，可得

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}(x^2 - \mu^2) + 2\beta(1 - x), \qquad \dot{\mu} = 2\beta(1 - x).$$

在自然标度 $x \sim \mu \sim \beta^{1/2}$ 下， $-2\beta x$ 项属于高阶项。其余项恰好描述了跨临界分岔附近的慢通过，例如 [25] 中运用几何去奇异化对此进行了研究。

对单点团块附近的通过过程，可以从流 $\{x-\mu=2\delta\}$ 在 $x=-\mu=\delta$ 附近的一个截面出发，并追踪时间，直到到达 $x=\mu=\delta$ 附近的截面 $x+\mu=2\delta$。在主导阶上，这段时间由 $2\delta/\beta$ 给出；这证实了，在计算平均速度时，主导阶上可以忽略单位点平衡态附近的通过时间，例如令 $\delta\to 0$。不过，该标度确实会引入涉及 $\beta^{1/2}$ 的误差项，它们会体现为平均速度中的修正项，阶为 $\beta^{3/2}$；例如见 [25]。我们没有尝试解析推导这些修正项，但通过数值计算发现， $\beta^{3/2}$ 修正项的系数为 -.467；数值结果见图3.2，其中将质量为 1 的派系的漂移速度与理论预测值进行了比较，理论预测分别包含和不包含 $\beta^{3/2}$ 修正项。

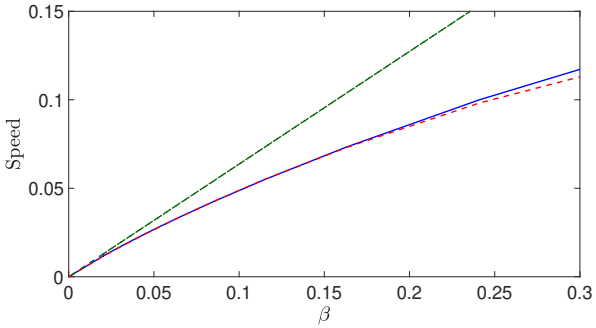


图3.2：数值计算得到的漂移速度（蓝色），与主阶近似（绿色）以及带有 $\beta^{\frac{3}{2}}$ 修正项的近似值进行比较。

4 大偏置区间

本节研究 β 增大时的动力学。数值结果表明，剖面的背景质量随之增加；当 β 趋近于 2 时，剖面的尺度相对于背景质量可以变得任意小。

我们可以看到，这与背景质量处线性化的谱所给出的启发相符。回顾均匀稳态 $u\equiv m$处线性化的色散关系：

$$-i\omega = m(-2\cos(2\sigma)+(4+2\beta)\cos(\sigma)-(2+2\beta)+2i\beta\sin(\sigma)),$$

并注意到，当且仅当 $\beta\geq 2$时，量 $-i\omega$ 的实部非正。因此，当 $\beta=2$时，均匀稳态恢复了（边际）线性稳定性，这或许可以解释行波剖面为何消失。对于 $\beta<2$，但取值充分接近时，数值结果显示，在背景态 $u\equiv m$之上存在小振幅长波剖面。本节将严格证明，当 β 充分接近 2 时，这些尖峰解存在。我们首先推导形式振幅方程，为尖峰解的存在提供启发；随后严格证明其存在，并通过非局部中心流形计算推导展开式，最后对约化系统进行Melnikov分析。

振幅方程的形式推导。 在长波长、小振幅假设下，我们为 $\beta\sim 2$ 区间推导形式振幅方程。我们将在 §4.2 中看到，严格的中心流形计算实际上与所得振幅方程一致。对于近似处理，我们遵循 [31]，选择晶格间距保持不变、而KdV方程中的空间变量经过重新缩放的区间。

假设 (2.2) 存在一个小振幅、长波长解 $P_n=m+\varepsilon^2 u(\varepsilon(n+ct)\ \varepsilon^3 t)$，其中 $c=2m\beta$ 取为常态下的群速度。为简化记号，令 $\xi\equiv n+ct$。将拟设代入 (2.2)，并归并线性项和非线性项，可得

$$\begin{aligned}\partial_t\big[u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3 t)\big] =& 2m\big[u(\varepsilon\xi-\varepsilon,\varepsilon^3 t)+u(\varepsilon\xi+\varepsilon,\varepsilon^3 t)\big]-m\big[2u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3 t)+u(\varepsilon\xi-2\varepsilon,\varepsilon^3 t)+u(\varepsilon\xi+2\varepsilon,\varepsilon^3 t)\big]\\ &+2m\beta\left[u(\varepsilon\xi+\varepsilon,\varepsilon^3 t)-u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3 t)\right]-\varepsilon^2 u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3 t)\big[u(\varepsilon\xi-2\varepsilon,\varepsilon^3 t)+u(\varepsilon\xi+2\varepsilon,\varepsilon^3 t)\big]\\ &+2\varepsilon^2 u(\varepsilon\xi-\varepsilon,\varepsilon^3 t)u(\varepsilon\xi+\varepsilon,\varepsilon^3 t)+\beta\varepsilon^2\left[u^2(\varepsilon\xi+\varepsilon,\varepsilon^3 t)-u^2(\varepsilon\xi,\varepsilon^3 t)\right].\end{aligned}\tag{4.1}$$

现在我们按第一变量展开 u，

$$u(\varepsilon\xi+k\varepsilon,\varepsilon^3t)=u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3t)+k\varepsilon\cdot\partial_1u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3t)+\frac{(k\varepsilon)^2}{2!}\cdot\partial_1^2u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3t)+\frac{(k\varepsilon)^3}{3!}\cdot\partial_1^3u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3t)+\frac{(k\varepsilon)^4}{4!}\cdot\partial_1^4u(\varepsilon\xi,\varepsilon^3t)+\mathcal{O}(\varepsilon^5),$$

对于每个 $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$，并且我们隐含地假设关于 u 具有足够的光滑性。将展开式代入 (4.1)，得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^3\partial_2u=&2m\big[\varepsilon^2\partial_1^2u+\frac{\varepsilon^4}{12}\partial_1^4u\big]-m\big[4\varepsilon^2\partial_1^2u+\frac{4}{3}\varepsilon^4\partial_1^4u\big]+2m\beta\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_1^2u+\frac{\varepsilon^3}{6}\partial_1^3u+\frac{\varepsilon^4}{24}\partial_1^4u\right]\\&-\varepsilon^2\big[2u^2+4\varepsilon^2u\partial_1^2u+\frac{4\varepsilon^4}{3}u\partial_1^4u\big]+2\varepsilon^2\Big[u^2+\varepsilon^2u\partial_1^2u-\varepsilon^2(\partial_1u)^2+\frac{\varepsilon^4}{12}u\partial_1^4u-\frac{\varepsilon^4}{3}\partial_1u\partial_1^3u+\frac{\varepsilon^4}{4}(\partial_1^2u)^2\Big]\\&+\beta\varepsilon^2\Big[2\varepsilon u\partial_1u+\varepsilon^2u\partial_1^2u+\varepsilon^2(\partial_1u)^2+\varepsilon^3\partial_1u\partial_1^2u+\frac{\varepsilon^3}{3}u\partial_1^3u+\frac{\varepsilon^4}{4}(\partial_1^2u)^2+\frac{\varepsilon^4}{12}u\partial_1^4u+\frac{\varepsilon^4}{3}\partial_1u\partial_1^3u\Big]+\mathcal{O}(\varepsilon^5).\end{aligned}$$

其中，∂_1 和 ∂_2 分别表示关于第一和第二个自变量 $\varepsilon\xi$ 和 ε^3t 的偏导数。保留从 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 到 $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ 阶的项，再除以 ε^3，得到形式振幅方程

$$\partial_2u=\frac{m(\beta-2)}{\varepsilon}\partial_1^2u+\frac{m\beta}{3}\partial_1^3u+2\beta u\partial_1u-\varepsilon\left(\frac{(14-\beta)m}{12}\partial_1^4u+(2-\beta)\partial_1\left(u\partial_1u\right)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).\tag{4.2}$$

注意，对于 $\beta=2+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$，在主导阶，(4.2) 化为 KdV方程

$$\partial_2u=\frac{2m}{3}\partial_1^3u+4u\partial_1u.\tag{4.3}$$

KdV方程存在一族由波速（或振幅）参数化的行波尖峰。在下一阶 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，当 $\beta=2-\varepsilon^2\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}>0$ 时，我们得到阻尼项 $-\varepsilon m\partial_1^4u$、四阶黏性以及负阻尼项 $-\varepsilon m\tilde{\beta}\partial_1^2u$、负黏性。下文的分析表明，该方程可在中心流形上严格推导为主导阶的常微分方程，并且在约化的中心流形方程中，对于适当的波速（或振幅），负黏性和正黏性的作用相互平衡。

注4.1（黏性伯格斯调制与稳定性）对于 $\beta>2$，经过适当的缩放后，(4.2) 在主导阶上可化为黏性伯格斯方程 $\partial_2u=\partial_1^2u+u\partial_1u$。众所周知，在这一近似下，局部化初始条件会以代数速度衰减于 L^∞，而高阶项，即含有更高次幂的项或含有更多导数的项，对小初值的长时间渐近行为无关紧要；参见 *[8]*。因此，我们推测，对于 $\beta>2$ 的取值以及 ℓ^1 中的小扰动，可以在我们的系统中证明恒定意见分布在 ℓ^∞ 下的渐近稳定性。另一方面，ℓ^∞ 扰动可能演化为持续动力学，例如黏性激波、稀疏波及其叠加；参见 *[12]*，其中基于伯格斯近似构造了此类解。

4.1 主要结果陈述

为准确陈述本节的主要结果，我们先汇总一些定义和记号。我们将一维格点上的行波定义为形如 $P_n=Q(n+ct)$ 的解，其中 $Q(\cdot)$ 表示一个固定的波形，它在晶格中传播。为求得这样的解，我们将问题改写为一个泛函微分方程：代入 $P_n=Q(n+ct)$，得到

$$0=-cQ'(\xi)+2Q(\xi-1)Q(\xi+1)-Q(\xi)\big(Q(\xi-2)+Q(\xi+2)\big)+\beta\big(Q^2(\xi+1)-Q^2(\xi)\big),\tag{4.4}$$

其中 $\xi=n+ct\in\mathbb{R}$。

进一步令 $Q(\xi)=m+q(\xi)$，则有

$$0=-cq'(\xi)+m(2q(\xi-1)+2(\beta+1)q(\xi+1)-2(\beta+1)q(\xi)-q(\xi-2)-q(\xi+2)+\mathcal{N}(q,\beta)),\tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{N}(q,\beta)=2q(\xi-1)q(\xi+1)-q(\xi)(q(\xi-2)+q(\xi+2))+\beta(q(\xi+1)^2-q(\xi)^2)$.

注意，我们可以将前向-后向时滞方程 (4.5) 改写为一个非局部方程

$$0 = -cq'(\xi) - 2m(\beta+1)q(\xi) + m\mathcal{K} * q + \mathcal{N}(q,\beta), \tag{4.6}$$

卷积核 $\mathcal{K}(\cdot) = -\delta(\cdot-2) + 2\delta(\cdot-1) + 2(\beta+1)\delta(\cdot+1) - \delta(\cdot+2)$。
现在我们可以陈述本节的主要结果：

定理 1 存在 $\beta_* > 0$，使得对于 $2-\beta_* < \beta < 2$，存在一个局部唯一的同宿解$q = q^*_\beta(\xi) = m$，它满足 (4.6)，并且具有局部唯一的波速 $c = c(\beta)$，满足 $\lim_{|\xi|\to\infty} q^*_\beta(\xi)$；因此，存在唯一的行波尖峰解 $(u^*_\beta)_n(t) = q^*_\beta(n+ct)$，满足 (2.2)。此外，我们有

$$\begin{aligned} q^*_\beta(\xi) &= m(1 + \frac{7(2-\beta)}{10})\operatorname{sech}^2(\sqrt{\frac{7(2-\beta)}{20}}\xi) + \mathcal{O}((2-\beta)^{\frac{3}{2}}) \\ c(\beta) &= m(4 - \frac{16}{15}(2-\beta)) + \mathcal{O}((2-\beta)^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

请注意，特别地，$q^*_\beta(\xi) > m$ 表示一个意见尖峰、一个传播派系，而 $c = c(\beta) > 2m\beta$ 略大于线性群速度 $2m\beta$。

证明思路如下：首先，我们证明 (4.6) 可以改写为满足 [15], 中的非局部中心流形定理的假设，从而能够进行中心流形约化。接着，我们在函数空间中计算非局部中心流形展开，并推导出约化向量场。最后，我们利用Melnikov分析证明约化方程存在同宿解，其中守恒量的存在至关重要。

~我们先证明中心流形的存在性。令 $\beta = 2-\beta$、$\tilde{c} = c - 4m$，并定义

$$\mathcal{T}_{\tilde{\beta},\tilde{c}} q = -cq' - 2m(3-\tilde{\beta})q + m\mathcal{K} * q,$$

作为 $H^1_{-\eta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上的一个算子，其中

$$\|u\|_{H^1_{-\eta}} = \|u(\cdot)e^{-\eta|\cdot|}\|_{H^1},$$

是一个允许指数增长的指数加权空间。对于充分小的 $\eta > 0$，考虑核$\mathcal{E}_0$，它最终被证明是有限维的，并选取一个闭补空间，从而定义一个投影 $\mathcal{P}_0$ 到核 $\mathcal{P}_0$上，

$$\mathcal{E}_0 = \ker \mathcal{T}_{0,0}, \qquad \mathcal{P}_0\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0.$$

命题 4.2 固定充分小的 $\eta > 0$，并考虑 $H^1_{-\eta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 和 $k < \infty$ 中的函数方程(4.6)。存在$(0、0、0)$在 $\mathcal{E}_0 \times \mathbb{R}^2$ 中的邻域 $\mathcal{U}_q \times \mathcal{U}_{(0,0)}$，以及映射 $\Psi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}_q \times \mathcal{U}_{(0,0)}、$核 $\mathcal{P}_0)$，满足 $\Psi(0、0、0) = 0$~，且 $D_q\Psi(0、0、0) = 0$，使得对所有 $(\beta,\tilde{c}) \in \mathcal{U}_{(0,0)}$，流形

$$\mathcal{M}_0^{\tilde{\beta},\tilde{c}} = \left\{ q_0 + \Psi(q_0,\tilde{\beta},\tilde{c}) : q_0 \in \mathcal{U}_q, \right\} \subset H^1_{-\eta}$$

包含式 (4.6) 的所有在 $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中足够小的有界解的集合。

证明。用算子 $\left(2m(\beta+1) + c\frac{d}{d\xi}\right)^{-1} = G_{\beta,c}*$ 对 (4.6) 进行预处理，其中

$$G_{\beta,c}(\xi) = \frac{1}{c}\exp\left(-\frac{2m(\beta+1)}{c}\xi\right)\chi_{\mathbb{R}^+}(\xi),$$

所得方程

$$\begin{aligned} 0 =& -q + (G_{\beta,c} * m\mathcal{K}) * q + G_{\beta,c} * \mathcal{N}(q,\beta) \\ =:& -q + \widetilde{\mathcal{K}}_{\beta,c} * q + \widetilde{\mathcal{N}}(q,\beta) \end{aligned} \tag{4.7}$$

其形式为 [15],，但存在一个差异——核 $\widetilde{\mathcal{K}}_{\beta、\ c}=G_{\beta、\ c}*m\mathcal{K}$ 对任意 $\eta_0>0$ 都不属于 $W^{1、}{}_{\eta_0}{}^{1}$。然而，由于 $\widetilde{\mathcal{K}}'_{\beta、}{}_{c}$ 仍然是一个 $L^1_{\eta_0}$ 函数与狄拉克δ函数的缩放平移之和，因此可以通过少量修改建立 [15] 的结果，具体如下。在 [15, 引理 3.1], 的证明中， $\mathcal{K}$ 的光滑性仅用于证明 $\sim\mathcal{D}\mathcal{T}$ （u） $=\mathcal{D}$ （$\mathcal{K}*u$） $=$ （$\mathcal{K}'+\rho\mathcal{K}+\rho\delta_0$） $*u$ 满足 [14] 的假设。这里需要指出，尽管 $\mathcal{K}_{\beta、\ c}\notin W^{1、}{}_{\eta_0}{}^{1}$，$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$仍然成立，即 $(\mathcal{K}'_{\beta、\ c}+\rho\mathcal{K}_{\beta、\ c}+\rho\delta_0)\ *u$ 满足 [14] 的假设。因此， [15, 引理 3.1] 同样成立，而 [15] 中证明的其余部分并未使用这一假设。因此，可以将参数依赖中心流形定理 [15, 定理 3] 应用于系统（4.6），从而得到该命题的结论。

■

4.2 非局部中心流形展开

已知非局部中心流形存在，我们现在运用 [15] 的方法计算函数空间中中心流形的泰勒展开，并推导约化向量场。

由于泰勒展开是定义在$\mathcal{T}_{\tilde{\beta},\tilde{c}}$的核上的映射，我们首先求出 $\ker\widetilde{\mathcal{T}_{\tilde{\beta},\tilde{c}}}$的参数化以及一个投影。线性化方程给出的色散关系，以 $\beta,\tilde{c}$表示，为

$$d(\nu,\tilde{\beta},\tilde{c})=\widehat{\mathcal{T}_{\tilde{\beta},\tilde{c}}}(\nu)=-(4m+\tilde{c})\nu-2m(3+\tilde{\beta})+2m(e^{\nu}+e^{-\nu})-2m(e^{2\nu}+e^{-2\nu})+2m(2-\tilde{\beta})e^{\nu}=0.$$

$\widetilde{\ }$注意到 d 显然是解析的，且虚轴上的根 $\nu\in i\mathbb{R}$ 先验有界。在 $\beta=\tilde{c}=0$处，我们发现不存在虚根 $\nu\neq0$。在 $\nu=0$处对 d 展开，得到

$$d(\nu,\tilde{\beta},\tilde{c})=(2m\tilde{\beta}-\tilde{c})\nu+m\tilde{\beta}\nu^2+\frac{m(2-\tilde{\beta})}{3}\nu^3-\frac{m(\tilde{\beta}+12)}{12}\nu^4+\mathcal{O}(\nu^5).$$

$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\ }$注意到 $d(0,0,0)=\partial_\nu d(0,0,0)=\partial_{\nu\nu}d(0,0,0)=0$，其中 $\partial_{\nu\nu\nu}d(0,0,0)\neq0$。此外，对所有$\ell\neq0$， $d(i\ell,0,0)\neq0$。因此， $H^1_{-\eta}$ 中$\mathcal{T}_{0,0}$ 的核 $\mathcal{E}_0$ 为

$$\mathcal{E}_0=\operatorname{span}\{1,\xi,\xi^2\},$$

并将元素 $q_0\in\mathcal{E}_0$ 写为

$$q_0(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2\in\mathcal{E}_0,\tag{4.8}$$

其中 $(A_0,\ A_1,\ A_2)\in\mathbb{R}^3$。最后，我们定义投影 $\mathcal{P}_0:\ H^3_{-\nu}(\mathbb{R})\to\mathcal{E}_0$，其定义为

$$\mathcal{P}_0(q)=q_0+q'(0)\xi+\frac{1}{2}q''(0)\xi^2,$$

注意到根据索 Sobole夫嵌入，该定义良好；并利用解实际上属于 H^k 这一事实，对 k 而言，情况与命题 4.2 的陈述相同。

约化中心流的计算分为两步：首先，利用不变性，从命题 4.2 推导出非局部中心流形 Ψ 的泰勒展开。其次，将中心流形上的流 Φ_η （由平移 $\xi\mapsto\xi+\eta$对 $H^1_{-\eta}$的作用定义）投影到核上，并在 $\eta=0$处对 η 求导，从而得到一个有限维约化向量场。需要指出的是，这一过程的大部分计算都集中在第一步，因为第二步完全由多项式求导构成。事实上，整个计算只涉及多项式，这凸显了该方法在代数上的简洁性。

将中心流形表示为 Ψ 在 $\mathcal{E}_0$ 上的图时，我们寻求如下形式的泰勒展开：

$$\Psi(A_0,A_1,A_2,\tilde{\beta},\tilde{c})=\sum_{\substack{l,r\\|l|+|r|>1}}A_0^{l_0}A_1^{l_1}A_2^{l_2}\tilde{\beta}^{r_1}\tilde{c}^{r_2}\psi_{l,r}(\xi),\tag{4.9}$$

其中 $l=(l_1,\ l_2,\ l_3)$ $r=(r_1,\ r_2)$。这里，之所以出现第二个多重指标 r ，是因为我们使用的是 [15, 定理 1] 的参数依赖版本。我们将利用不变性求解泰勒系数 $\psi_{l,\ r}$。请注意，我们使用的是未条件化方程 (4.6)，因为这样计算更直接，并且会得到相同的结果。我们将 (4.9) 代入泛函微分方程 (4.6)，注意到

$$\mathcal{T}_{\tilde{\beta},\tilde{c}}(q_0+\Psi)+\mathcal{N}(q_0+\Psi)=-\tilde{c}q_0'(\xi)-2m\tilde{\beta}\big(q_0(\xi+1)-q_0(\xi)\big)+\mathcal{N}(q_0,0)+\mathcal{T}_{0,0}(\Psi)+\mathcal{O}(3),\tag{4.10}$$

从而得到二次阶的结果

$$\begin{aligned}\sum_{|l|+|r|=2} A_0^{l_0}A_1^{l_1}A_2^{l_2}\tilde{\beta}^{r_1}\tilde{c}^{r_2}\mathcal{T}_{0,0}\big(\psi_{l_0,l_1,l_2,r_1,r_2}(\xi)\big) &= \tilde{c}q_0'(\xi)+2m\tilde{\beta}\big(q_0(\xi+1)+q_0(\xi)\big)-\mathcal{N}(q_0,0)\\ &= 4A_0A_1+4\xi A_1^2+8\xi A_0A_2+(12\xi^2+4)A_1A_2+(8\xi^3+8\xi+4)A_2^2\\ &\quad -2mA_1\tilde{\beta}-A_1\tilde{c}+(-2m-4m\xi)A_2\tilde{\beta}-2\xi A_2\tilde{c}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

于是，我们取 $\psi_{l,\ r}$ 中的多项式 $\psi_{l,\ r}=\sum_{i\geq 3}\alpha_i\xi^i$ 作为拟设，并省略 α_i 对 $l,\ r$ 的依赖关系。该拟设的依据在于，核 $\mathcal{E}_0$ 由多项式组成；更一般地说，多项式空间在卷积运算下是不变的。我们计算

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{0,0}(\alpha_3\xi^3+\alpha_4\xi^4+\alpha_5\xi^5+\alpha_6\xi^6) &= (4m)\alpha_3+(16m\xi-24m)\alpha_4+(40m\xi^2-120m\xi+4m)\alpha_5\\ &\quad +(80\xi^3-360m\xi^2+24m\xi-120m)\alpha_6,\end{aligned} \tag{4.12}$$

˜并针对 $(A_0,A_1,A_2,\beta,\widetilde{c})$ 的每个二次幂比较 (4.12) 和 (4.11) 中的系数。完成后可得，二次阶的非零泰勒系数为

$$\begin{aligned}&\psi_{1,1,0,0,0}=-\frac{1}{m}\xi^3,\quad \psi_{0,2,0,0,0}=-\frac{1}{4m}\xi^4-\frac{3}{2m}\xi^3,\quad \psi_{1,0,1,0,0}=-\frac{1}{2m}\xi^4-\frac{3}{m}\xi^3,\\ &\psi_{0,1,1,0,0}=-\frac{3}{10m}\xi^5-\frac{9}{4m}\xi^4-\frac{71}{5m}\xi^3,\quad \psi_{0,0,2,0,0}=-\frac{1}{10m}\xi^6-\frac{9}{10m}\xi^5-\frac{71}{10m}\xi^4-\frac{457}{10m}\xi^3,\\ &\psi_{0,1,0,1,0}=\frac{1}{2}\xi^3,\quad \psi_{0,1,0,0,1}=\frac{1}{4m}\xi^3,\quad \psi_{0,0,1,1,0}=\frac{1}{4}\xi^4+2\xi^3,\quad \psi_{0,0,1,0,1}=\frac{1}{8m}\xi^4+\frac{3}{4m}\xi^3.\end{aligned} \tag{4.13}$$

现在可以计算中心流形上的约化向量场。首先注意到，中心流形上的流由平移的作用定义，也就是说，在有限阶下，

$$\begin{aligned}\Phi_\eta((q_0+\Psi)(\xi)) &= (q_0+\Psi)(\xi+\eta)\\ &= q_0(\xi+\eta)+\sum A_0^{l_0}A_1^{l_1}A_2^{l_2}\tilde{\beta}^{r_1}\tilde{c}^{r_2}\psi_{l,r}(\xi+\eta),\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中 q_0,$\psi_{l,r}$ 如 (4.11)、(4.12) 所示。经 $\mathcal{P}_0$ 投影到核上后，此流变为约化流，最后在 $\eta=0$ 处求导后变为约化向量场：

$$q_0'=\frac{d}{d\eta}\mathcal{P}_0(\Phi_\eta(q_0+\Psi))\Big|_{\eta=0}. \tag{4.15}$$

为了用 (A_0,A_1,A_2) 表示 (4.15)，注意到 $(q_0+\Psi)(\xi+\eta)$ 是 $\xi+\eta$ 中多项式之和，并计算

$$\frac{d}{d\eta}\mathcal{P}_0((\xi+\eta))\big|_{\eta=0}=(1,0,0),\frac{d}{d\eta}\mathcal{P}_0((\xi+\eta)^2)\big|_{\eta=0}=(0,2,0),\frac{d}{d\eta}\mathcal{P}_0((\xi+\eta)^3)\big|_{\eta=0}=(0,0,3),$$

$$\frac{d}{d\eta}\mathcal{P}_0((\xi+\eta)^n)\big|_{\eta=0}=(0,0,0),n\neq 1,2,3.$$

然后，利用式 (4.13) 和 (4.8) 中 Ψ 和 q_0 的表达式并合并各项，可得约化向量场为

$$\begin{aligned}&\frac{dA_0}{d\eta}=A_1+\mathcal{O}(3),\\ &\frac{dA_1}{d\eta}=2A_2+\mathcal{O}(3),\\ &\frac{dA_2}{d\eta}=-\frac{3}{m}\left(A_0A_1+\frac{3}{2}A_1^2+3A_0A_2-\frac{m}{2}A_1\tilde{\beta}-\frac{1}{4}A_1\tilde{c}-2mA_2\tilde{\beta}-\frac{3}{4}A_2\tilde{c}+\frac{71}{5}A_1A_2+\frac{457}{10}A_2^2\right)+\mathcal{O}(3).\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3 约化方程解的存在性

结果表明，这个三维常微分方程在主导阶具有一个守恒量。在该守恒量的等值集内，主导阶时存在一个同宿解。为了证明该同宿解的持久性，需要防止在任意高阶扰动下沿等值集发生漂移。为此，我们证明存在一个精确 守恒量，并参照 [2] 中的思路计算其主导阶表达式。随后，在这个精确守恒量的等值集内，我们使用一种较为标准的 Melnikov 型论证，为扰动方程寻找同宿轨道。

为了推导一个守恒量，我们将 (4.4) 从 0 积分到 L, $L \in \mathbb{R}$，并化简，得到

$$\begin{aligned} 0 =& -cQ(L) + \int_{L-1}^{L} Q(y-1)Q(y+1)dy - \int_{L}^{L+1} Q(y-1)Q(y+1)dy + \beta \int_{L}^{L+1} Q^2(y)dy \\ & - \left(-cQ(0) + \int_{-1}^{0} Q(y-1)Q(y+1)dy - \int_{0}^{1} Q(y-1)Q(y+1)dy + \beta \int_{0}^{1} Q^2(y)dy \right), \end{aligned}$$

对任意 $L \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，由下式定义的 $\Phi[Q]$

$$\Phi[Q] = -cQ(0) + \int_{-1}^{0} Q(y-1)Q(y+1)dy - \int_{0}^{1} Q(y-1)Q(y+1)dy + \beta \int_{0}^{1} Q^2(y)dy, \tag{4.17}$$

在解上是平移不变的，即 $\Phi[Q] = \Phi[S_\tau Q]$，其中 S_τ 是一个平移算子。因此，我们定义 $\varphi \equiv \Phi[Q]$，作为真正守恒量或第一积分的等价形式。

接着，令 $Q(\xi) = m + A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + \Psi(A_0,\ A_1,\ A_2,\ \beta,\ \tilde{c})$ 为中心流形的一个元素，将Q 代入 (4.17)，得到

$$\begin{aligned} \varphi[Q] = (-2m^2 - m^2\tilde{\beta} - m\tilde{c}) + \frac{4m}{3}A_2 + 2A_0^2 - (2m\tilde{\beta} + \tilde{c})A_0 - \left(4m\tilde{\beta} + \frac{3}{2}\tilde{c}\right)A_1 + 6A_0A_1 + \frac{284}{15}A_0A_2 \\ + \frac{142}{15}A_1^2 - \left(\frac{187m}{15}\tilde{\beta} + \frac{22}{5}\tilde{c}\right)A_2 + \frac{457}{5}A_1A_2 + \frac{50201}{175}A_2^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \tag{4.18}$$

我们看到，存在一个局部可逆的坐标变换，使 A_2 映射为 ϕ。由于 $\frac{4m}{3} \neq 0$，我们可以利用隐函数定理对 (4.18) 关于 A_2 求解，得到

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{3}{4m}\phi + \frac{3}{4m}(2m\tilde{\beta} + \tilde{c})A_0 - \frac{3}{2m}A_0^2 - \frac{9}{2m}A_0A_1 + \frac{3}{4m}\left(4m\beta + \frac{3}{2}\tilde{c}\right)A_1 - \frac{71}{10m}A_1^2 \\ + \frac{99}{40m^2}\tilde{c}\phi + \frac{561}{80}\tilde{\beta}\phi - \frac{213}{20m^2}A_0\phi - \frac{4113}{80m^2}A_1\phi - \frac{1355427}{11200m^3}\phi^2 + \mathcal{O}(3) =: g(A_0, A_1, \phi) + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中， ϕ 重新定义为等于 $\varphi + 2m^2 + m^2\tilde{\beta} + m\tilde{c}$，因为后者也是守恒量。我们还定义 $\widetilde{A}_1 = \frac{dA_0}{d\eta} = A_1 + \mathcal{O}(3)$，并注意到，根据隐函数定理，我们可以将 A_1 表示为关于 A_1 的展开式。将坐标变换为$(A_0,\ A_1,\ \phi)$后，我们得到方程组

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{d\eta} &= \widetilde{A}_1, \\ \frac{d\widetilde{A}_1}{d\eta} &= 2g(A_0, \widetilde{A}_1, \phi) + \mathcal{O}(3), \\ \frac{d\phi}{d\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

现在进行重新缩放。令 $\tilde{c} = \tilde{\beta}mc_0$，并通过选取 $\eta = (3\tilde{\beta})^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{c_0}{2})^{\frac{1}{2}}\zeta$ 对空间变量进行重新缩放，将振幅缩放为 $A_0 = \tilde{\beta}m(1 + \frac{c_0}{2})a_0$, $\widetilde{A}_1 = \tilde{\beta}^{\frac{3}{2}}\sqrt{3m}(1 + \frac{c_0}{2})^{\frac{3}{2}}a_1$，并令 $\phi = \tilde{\beta}^2 3m^2(1 + \frac{c_0}{2})^2\widetilde{\phi}$。代入后，我们得到最终的

约化系统

$$\begin{aligned}
&\frac{da_0}{d\zeta} = a_1,\\
&\frac{da_1}{d\zeta} = \frac{1}{2}\widetilde{\phi} + a_0 - a_0^2 - \tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\left[3(1+\frac{c_0}{2})^{\frac{1}{2}}a_0a_1 - (1+\frac{c_0}{2})^{-\frac{1}{2}}(2+\frac{3c_0}{4})a_1\right] + \mathcal{O}(\tilde{\beta}),\\
&\frac{d\widetilde{\phi}}{d\zeta} = 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

我们要寻找趋于 $a_0 = 0$ 的同宿轨道，因为我们关注的是具有背景质量 m的同宿轨道。因此，我们选择 $\phi \equiv 0$ 作为第三个方程的解，从而化简为

$$0 = a_0'' - a_0 + a_0^2 - \tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\left[3(1+\frac{c_0}{2})^{\frac{1}{2}}a_0a_0' - (1+\frac{c_0}{2})^{-\frac{1}{2}}(2+\frac{3c_0}{4})a_0'\right] + \mathcal{O}(\tilde{\beta}) =: F(a_0,\tilde{\beta}), \tag{4.22}$$

其中 $' = \partial_\zeta$。注意，当 $\tilde{\beta} = 0$时，该方程有显式的同宿解 $a_*(\zeta) = \frac{3}{2}\,\mathrm{sech}^2(\frac{\zeta}{2})$。
现在，我们使用标准的Melnikov分析证明方程(4.22)存在同宿解。

引理4.3 存在 $\beta_* > 0$，使得当 $0 < \beta < \beta_*$时，(4.22) 存在趋于 $a_0 = 0$ 的同宿解，该解一致地与 $a_*(\zeta)$相差 $\mathcal{O}(\tilde{\beta}^{1/2})$。

证明. 设 $a_*(\zeta)$ 如上所述。在 $a_0 = a_*, \beta = 0$ 处对 (4.22) 线性化，得到线性算子

$$\mathcal{L}_* u = \partial_{\zeta\zeta}u + 2a_*u - u.$$

注意到 $\ker \mathcal{L}_* = \mathrm{span}\{a_*'\}$。定义到 $\ker \mathcal{L}^*$ 的投影 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{P}u = \langle a_*', u\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 L^2-内积。另请注意，$\mathcal{L}_*$ 是一个自伴算子。然后，令 $a_0 = a_* + v + \alpha a_*'$，其中$v \in (\ker \mathcal{L}_*)^\perp$，我们希望求解 $F(a_* + v + \alpha a_*', \tilde{\beta}) = 0$。不失一般性，通过选取 $\alpha = 0$，我们固定任意潜在解的一个平移，得到

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{P}F(a_* + v, \tilde{\beta})\\
0 &= (1-\mathcal{P})F(a_* + v, \tilde{\beta}).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

根据隐函数定理，由于线性化 $(1-\mathcal{P})DF(a_*,\beta) = (1-\mathcal{P})\mathcal{L}_*$作为从 $\ker \mathcal{L}^\perp$ 到 $\mathrm{Ran}\ \mathcal{L}$的算子是可逆的，因此存在一个定义在 0 的某个邻域上的光滑函数 $v = \psi(\tilde{\beta})$，使得 $(1-\mathcal{P})F(a_* + \psi(\beta)\ \beta) = 0$。将 ψ代入第一个方程，得到约化方程

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{P}F(a_* + \psi(\tilde{\beta}), \tilde{\beta})\\
&= \langle a_*', \mathcal{L}_*\psi(v)\rangle + \tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\left[3(1+\frac{c_0}{2})^{\frac{1}{2}}\langle a_*', a_*a_*'\rangle - (1+\frac{c_0}{2})^{-\frac{1}{2}}(2+\frac{3c_0}{4})\langle a_*', a_*'\rangle\right] + \mathcal{O}(\tilde{\beta}).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

注意到 $\langle a_*', \mathcal{L}_*\psi(v)\rangle = \langle \mathcal{L}_* a_*', \psi(v)\rangle = 0$，并除以 $\tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}$，得到

$$0 = 3(1+\frac{c_0}{2})\langle a_*', a_*a_*'\rangle - (2+\frac{3c_0}{4})\langle a_*', a_*'\rangle + \mathcal{O}(\tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}). \tag{4.25}$$

在 $\tilde{\beta} = 0$处，我们可以显式求出 $c_0 = \frac{4\langle a_*', a_*'\rangle}{3\langle a_*'', a_*''\rangle} - 2 = -\frac{16}{15}$。注意到 (4.25) 关于 $\delta = \tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}$是光滑的，根据隐函数定理，由于 $\frac{\partial}{\partial c_0}\mathcal{P}F = \frac{3}{4}\langle a_*'', a_*''\rangle = \frac{18}{7} \neq 0$，存在$c_0 = c_0(\delta)$，当 $|\delta| < \delta_*$时，使得 (4.25) 成立。

那么，对于 $0 < \tilde{\beta} < \tilde{\beta}_* := \delta_*^2$ 存在 (4.22) 的一个解，其速度的缩放修正 c_0 为

$$c_0(\beta) = -\frac{16}{15} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}^{\frac{1}{2}}).$$

■

综上所述，定理 1 得证，并且我们得知，对于 $\beta \lesssim 2$，系统 (4.16) 存在一个同宿解，其速度参数为

$$c(\beta) = m(4 - c_0\tilde{\beta}) + \mathcal{O}(\tilde{\beta}^{\frac{3}{2}}) = \frac{4m}{15}(7 + 4\beta) + \mathcal{O}((2-\beta)^{\frac{3}{2}}).$$

5 群体漂移：数值延拓与稳定性

我们通过数值方法研究了 $0 < \beta < 2$ 下移动群体的存在性与稳定性。数值结果连接了两个渐近分析区间 $\beta \gtrsim 0$ (§ 3) 和 $\beta \lesssim 2$ (§4)。特别是，这些结果以良好的定量吻合度验证了渐近分析和存在性结果，并展现了参数 β 中漂移的更全局图景。除了这些数值延拓研究之外，我们还初步探讨了稳定性与选择这一复杂问题：常值群体尾部中的不稳定性会增长，并导致新群体的形成。

5.1 连接各个区间——割线延拓

我们使用牛顿法求解函数方程 (4.5) 的不动点，从而计算整个范围 $0 < \beta < 2$ 内的行波剖面，

$$0 = -cq'(\xi) + m(2q(\xi-1) + 2(\beta+1)q(\xi+1) - 2(\beta+1)q(\xi) - q(\xi-2) - q(\xi+2) + \mathcal{N}(q,\beta)), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

我们将实数轴 $\xi \in \mathbb{R}$ 截断至 $\xi \in [-L/2, L/2]$，并施加（人为的）周期边界条件。随后，我们用 N 个点和网格间距 $h = L/N = 1/\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ 对 (5.1) 进行离散化，以便在网格上计算平移后的值；导数则采用四阶有限差分近似。

给定波形 q_* 处的线性化至少具有二维广义核，由平移对应的 q_*' 和质量缩放对应的 q_* 生成。因此，我们添加约束： $\int \xi q_* = 0$ 消除平移，$\int q_* = M$ 固定质量。由于缺少与质量约束相关的拉格朗日乘子，我们通过引入虚拟质量损失项 $\mu q(\xi)$ 来弥补。总之，我们求解以下系统

$$-cq'(\xi) + m\big[2q(\xi-1) + 2(\beta+1)\big(q(\xi+1) - q(\xi)\big) - q(\xi-2) - q(\xi+2) + \mathcal{N}(q,\beta)\big] + \mu q = 0, \quad \xi \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}], \quad (5.2)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \xi q(\xi) d\xi = 0, \quad (5.3)$$

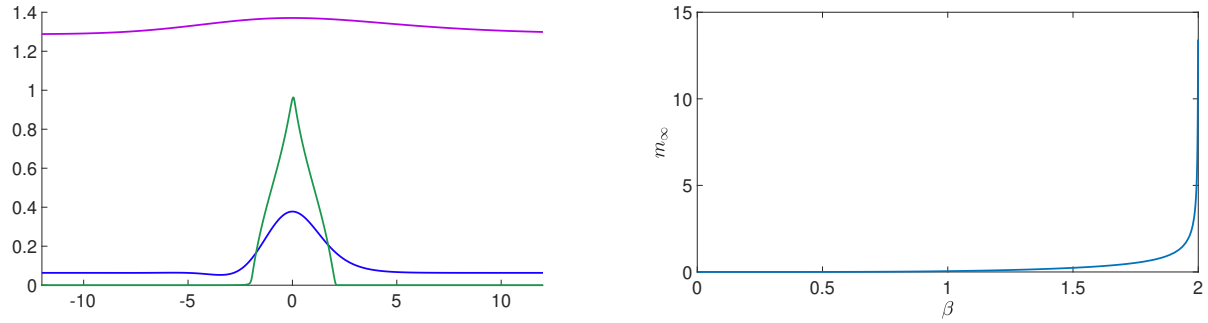
$$\int_{-L/2}^{L/2} (q(\xi) - m) d\xi = 1, \quad (5.4)$$

$$q(-L/2) = q(L/2), \quad (5.5)$$

在 ξ 中对 $N+2$ 变量进行离散化（q, c, μ），并使用牛顿法。随后，我们将参数β 作为变量，并将标准割线条件添加到系统（5.2）—（5.5）中，以便在 β中进行数值延拓。正如预期，我们始终发现 $\mu = 0$ 达到机器精度。

我们从 $\beta = 0.3$开始实施割线延拓，随着 β 变化计算剖面和速度。在小-β状态下，我们保持总质量不变；当 β 趋近于 2 时，我们保持均匀背景态的质量不变，并相应地修改（5.4）。初始区间在 x 中的宽度为 $L = 10$，包含 $N = 1030$ 个总网格点。当 $\beta \to 0$ 时，如果 q 的二阶导数在上确界范数下超过 0.03，则将网格点数量加倍，以进行自适应细化，因为剖面会在峰值和两侧形成角点。随着 $\beta \nearrow 2$，剖面变得越来越宽。当距离中心 $0.2L$ 处的意见数量超过峰值的 0.01 时，我们将区间宽度 L 和网格点数量同时加倍。我们通过减小 h 并增大 L来检查相对离散化误差和截断误差，发现误差通常为 10^{-7}量级，且始终不超过10^{-4}。

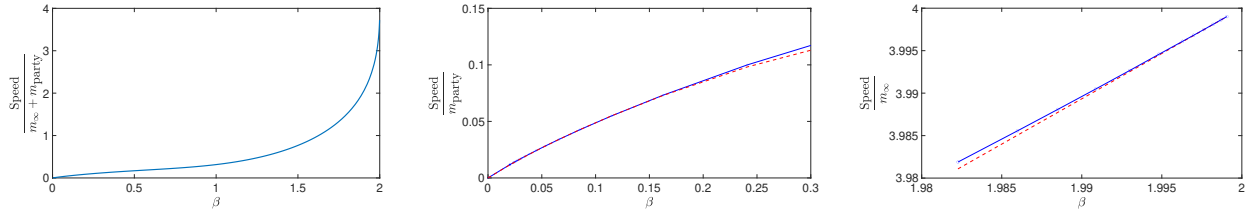
我们在下方的图 5.1a 中看到，随着 β 变化的三个波形示例。我们还在图 5.1b 中绘出了固定 $\int(q - m_\infty) = 1$时背景质量随 β 变化的关系，也就是说，固定派系相对于恒定的意见背景分布的净质量。请注意，随着 $\beta \nearrow 2$，该质量趋于无穷大。随着 $\beta \to 0$，背景质量随 $\frac{1}{\beta}$ 指数衰减，因此由于牛顿法的容差限制，难以精确计算。



(a) (b)

图 5.1：(a) $\beta = .0006$ （绿色）、 $\beta = 1.08$ （蓝色）和 $\beta = 1.92$ （紫色）的聚集体形状，净质量为 $m_{\text{party}} = 1$。(b) 绘制 β 随均匀背景质量 m_∞ 的变化，其中该背景质量用于支撑一个大小为 1 的派系。

通过割线延拓，还可以得到波形的速度 c 随 β 变化的关系。在下方的图 5.2 中，我们看到速度与 β 的关系，其中分别以总质量、政党质量和背景质量进行归一化。当 β 较小时，我们将派系的质量固定为 1 并绘制速度，同时将其与漂移速度计算所得的理论值进行比较，其中包括数值计算得到的 $\beta^{3/2}$ 修正项。随着 β 接近 2，我们固定均匀背景质量，并将速度与 §4.3 中计算出的理论值进行比较。在所有情况下，我们发现数值结果与首阶预测高度吻合。



(a) (b) (c)

图 5.2：数值计算得到的速度随 β 变化的情况：保持背景质量与政党质量之和不变 ((a))、保持政党质量不变 ((b))，以及保持背景质量不变 ((c))；(b) 和 (c) 中以红色显示理论值。

5.2 稳定性：直接模拟、对流稳定性与推动前沿

由于漂移聚集体的均匀背景态对于 $0 < \beta < 2$ 不稳定，因此漂移聚集体通常不会在严格意义上稳定。事实上，背景态的不稳定性反映在线性化的不稳定连续谱中。接下来需要确定背景态的不稳定性是否会影响传播派系；也就是说，扰动是在派系附近局部增长，还是被输运至远离派系中心的位置，在局部一致衰减的同时，其范数却不断增大。这种区别通常称为绝对不稳定性与对流不稳定性之别：前者中扰动会在局部增长，后者中扰动在与派系共同运动的参考系内局部一致衰减。

通过比较均匀态扰动的扩展速度与传播派系的速度，可以很好地回答这个问题。在大多数情形下，扩展速度可分为拉动速度或推动速度。对于拉动速度，扩展由线性方程决定；而对于推动速度，非线性会加速传播。因此，我们首先计算线性拉动扩展速度；关于无偏情形的背景与扩展，请参见 [33, 22, 5] 。事实上，正如 [5]所示，在无偏情形下，扩展是由拉动前沿以拉动线性扩展速度推动的。

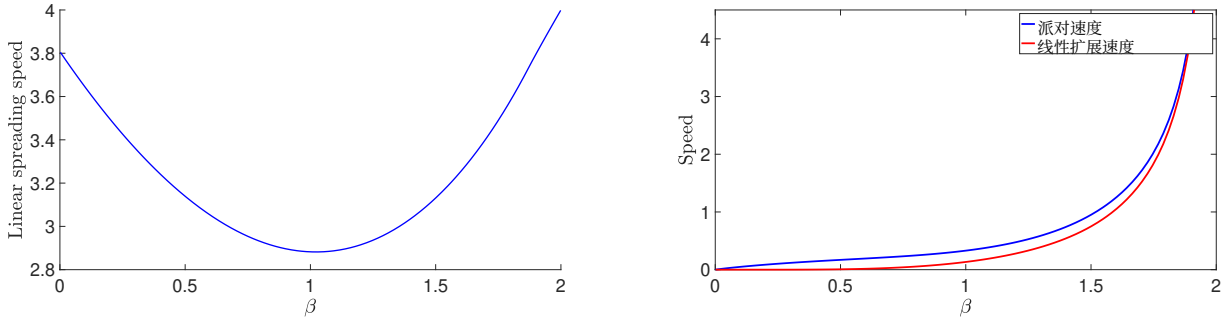
回顾均匀态下线性化方程的色散关系 $P_j \equiv m$,

$$-i\omega = m(-2\cos(2\sigma) + (4 + 2\beta)\cos(\sigma) - (2 + 2\beta) + i\beta\sin(\sigma)).$$

接着，通过鞍点分析 [33, 5], ，任意给定 β 所对应的线性传播速度为

$$v = \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{\mathrm{Im}[\omega]}{\mathrm{Im}[\sigma]}, \tag{5.6}$$

求解关于复变量 $\sigma \in \mathbb{C}$ 的第二个复方程后。图 5.3a 显示了在 $\beta \in [0, 2]$ 和 $m = 1$ 条件下的数值速度v，图 5.3b 则比较了 $m = m_\infty(\beta)$ 对应的线性扩展速度与派对速度。

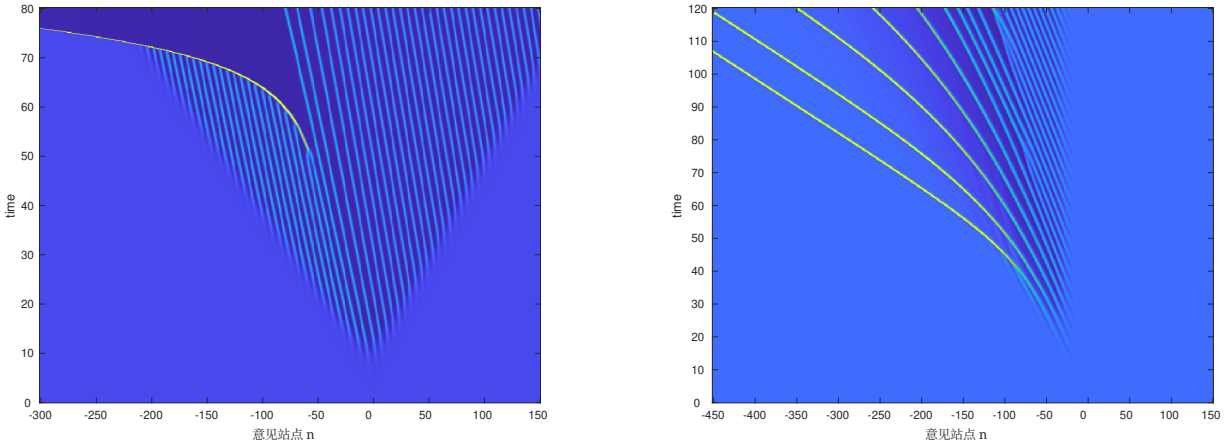


(a) (b)

图 5.3: (a) $m = 1$ 条件下 $\beta \in [0, 2]$ 的不稳定性扩展速度；(b) $m = m_\infty(\beta)$ 条件下的派对速度（蓝色）和线性扩展速度（红色），其中 $\beta \in [0, 2]$。

我们发现，对于 $\beta \in (0,2)$，不稳定性的线性扩展速度小于派系的速度，这表明该派系是线性对流不稳定的。

我们通过直接模拟探究一种非线性不稳定性的可能性，该不稳定性由类似推动波前的机制介导。在模拟中，我们确实观察到了传播速度快于线性速度的证据。为了计算不稳定性的扩展速度，我们在自适应移动坐标系中模拟（2.2），并以均匀态 $P_j \equiv 1$ 的一个微小局域扰动作为初始条件。对于所有 β，我们都观察到了尾迹中的瞬态拉动波前，随后它们逐渐让位于以高于线性速度传播的派对序列。β 的值越小，拉动波前传播的初始瞬态持续时间越长。图中通过时空图（在静止坐标系中）展示了这一效应，其初始条件是在均匀态 $m = 1$ 的 $n = 0$ 处施加局域的小扰动。第一幅图最清楚地呈现了瞬态拉动波前，$\beta = 0.35$，其中可以看到，一个大型的单一传播派对开始形成，并于 $t = 50$ 处追上拉动波前 $t = 75$。随着 β 增大，瞬态拉动波前的尾迹变窄，很快便被在其尾迹中形成的一个大型派对追上。在图 5.4 的右图中，从约 $t = 10$ 到 $t = 50$ 都可以看到拉动波前。在这幅右图中，还可以看到，在一个大型派对最初成核并追上拉动波前之后，随后会形成更多大型派对，它们以相近的速度传播，且速度均高于线性速度。较小的 β 值也会出现相同效应，只是发生在更长的时间尺度上。



Fi图 5.4: $\beta = .35$ （左）和 $\beta = 0.95$ （右）的时空图，初始不稳定性出现在 $n = 0$。

总之，我们推测，传播派对具有对流稳定性，也就是说，在较长的瞬态过程中可以被观测到。尾迹中的非线性过程最终会形成一列大小相近、彼此间隔较远、以相近速度传播的移动群体。

无论是在恒定背景上，还是在导致质量损失的零背景上，完整描述其动力学都相当复杂。这里给出的时空图显示，这些现象似乎与数值模拟和实验中观察到的可激发介质现象相似，这些现象被称为轨迹放电和反向传播 [7, 28], ，而且在数学上同样尚未得到充分理解。

6 其他偏置项的非相干性

不同的偏置机制会产生与我们迄今分析的方程（2.2）中的动力学截然不同的动力学。这里我们简要介绍由另外两种偏置形式引起的现象，即妥协过程中的偏置，以及模拟输运项的线性偏置。对于前者，传播会在单位点党处受阻；对于后者，我们发现该派系会发生扩散耗散，这与文献 [4] 中研究的带扩散有界信任模型的动力学相似。我们认为，这两种情形表明，方程（2.2）中的自我激励机制相当特殊，因为它允许派系进行相干运动。

6.1 妥协过程中的偏置

一种引入偏置的自然机制是在妥协过程中进行；也就是说，考虑如下方程：

$$\frac{dP_n}{dt} = (2-\beta)P_{n+1}P_{n-1} - (1-\beta)P_nP_{n+2} - P_nP_{n-2}), \tag{6.1}$$

其中个体以与式 (2.1) 相同的方式进行交互，但两个交互个体改变意见、转而采纳妥协意见的概率并不相同。另一种表述是在最近邻相互作用中引入偏置，并考虑如下方程：

$$\frac{dP_n}{dt} = 2P_{n+1}P_{n-1} - P_n(P_{n+2}+P_{n-2}) + \beta(P_{n+1}P_n - P_nP_{n-1}), \tag{6.2}$$

其中，最近邻相互作用使个体以 β 的概率向左移动 .

在两种情形（6.1）和（6.2）中，偏置都不会使现有政党发生持续漂移。事实上，单位点党和双位点党也是（6.1）的平衡态，而单位点党是（6.2）的平衡态。因此，在（6.1）中，政党完全不会漂移。在（6.2）中，可以仿照 §3 的分析，求得双位点党附近的漂移速度；该速度在单位点党处降为零。这一结果与直接数值模拟吻合良好，模拟发现双位点党

会演化为单位点党，而单位点党是单侧稳定的，这与鞍结平衡类似。可以将单位点党处运动受阻视为一种钉扎现象，它反映了意见空间的离散性；这与离散或非均匀介质中前沿和脉冲传播受到钉扎的现象类似，后者已有相当深入的研究 [1]。

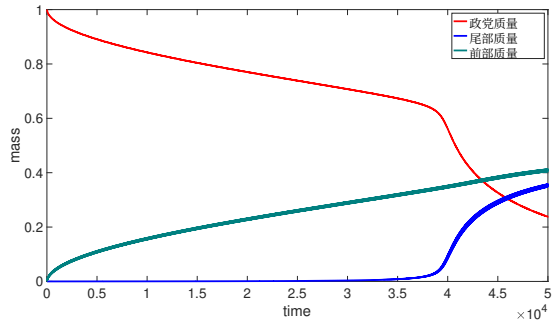
然而，我们注意到，由空间常数平衡态受到扰动而形成多个政党后，式 (6.2) 中的动力学相当复杂，确实涉及政党的移动，但其速度并非常数；这种移动同时受到偏置对单个政党的作用以及政党间相互作用的影响。

6.2 非煽动偏差

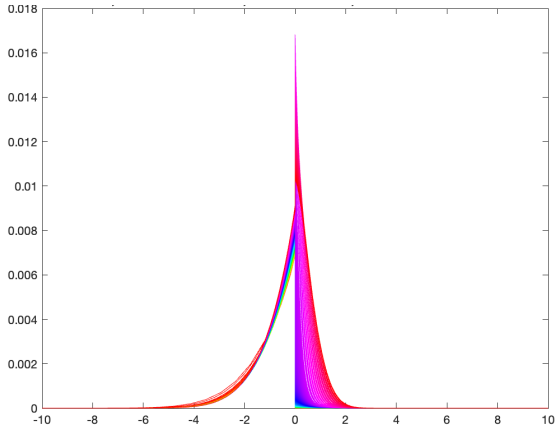
迄今考虑的所有偏置项都是二次的，用于模拟人际相互作用，并保持动力学的二次缩放不变性。可以说，最简单的偏置项是对意见朝一个方向自发改变进行建模，无需个体之间相互作用，因此可表示为形式为 $\beta(P_{n+1}-P_n)$ 的线性项，其变体包括 $\beta(P_{n+\ell}-P_n)/\ell$, $\ell=2$、3，.....。经过缩放后，该项可视为连续意见空间 $x\in\mathbb{R}$ 中位移项 $u_t=u_x$ 的空间离散化。由此得到的方程为

$$\frac{dP_n}{dt}=2P_{n+1}P_{n-1}-P_n(P_{n+2}+P_{n-2})+\beta(P_{n+\ell}-P_n)/\ell, \tag{6.3}$$

在不同初始条件下，可能会有几种不同的标度。数值结果显示，单个派系会如预期般发生漂移，其初始速度在主导阶为 β。将单侧差分 $P_{n+1}-P_n$ 展开为导数后，我们发现二阶项中存在有效扩散；这确实能在动力学中观察到，并会导致派系的质量损失，与 [4] 中的观察结果相似。下方图 6.1a 展示了派系质量随时间流失至尾部和前沿的情况，其中派系定义为峰值周围 5 个站点以内的所有意见。图 6.1b 展示了前沿的自相似形状；将水平方向按 $t^{-\frac{1}{2}}$ 缩放后，可见其与 [4] 中的剖面相仿。然而，尾部起初似乎随时间呈指数增长，随后随着派系质量不再显著而转为扩散；另见图 6.1a。质量损失的影响也可以从第 3 节的小 β 扰动分析中理解：在更高阶项中，漂移项会在距离派系 3 个或更多站点的位置产生增长。事实上，对于长程耦合 $\ell>2$，这一效应在 β 的一阶项中便会出现，质量损失也相应地更加显著。



(a) 从单点簇开始，政党、尾部和前导尾部的质量比例随时间的变化来自一个单点簇。



(b) 前导尾部和后随尾部的剖面，省略中间的派系，并以 $xt^{\frac{1}{2}}$ 为横轴进行缩放。

图 6.1：派系、尾部和领先尾部的质量比例随时间变化的图，以及尾部剖面相对于 $t^{\frac{1}{2}}x$ 的图

7 讨论

我们展示了偏置对有界信任模型影响的研究结果。大致而言，有界信任模型支持局部簇，其中包括一个单参数族，其参数大致对应簇在空间中的位置。可以预期，引入偏置会使簇发生漂移。我们在偏置较小和较大这两种极限情况下分析了这种漂移运动。值得注意的是，我们严格证明，在大偏置情形下，二次自我煽动偏置 $\beta \lesssim 2$ 可以使派系在恒定的意见背景分布上协调运动。数值结果显示，对于所有偏置值 $0 < \beta < 2$，都能观察到这种协调运动。对于较小的 β 值，恒定的意见背景分布关于该参数呈指数级小。

从技术上讲，我们使用几何奇异摄动分析推导了小偏置区间内的漂移速度，并使用非局部中心流形分析找到了 $\beta \lesssim 2$ 的相干漂移派系。后一种情形的分析可能具有独立的研究价值，展示了在近期提出的无相空间中心流形框架中进行计算的简便性。聚焦于相干漂移派系时，一个尚待解决的重要问题是，严格证明 $\beta \gtrsim 0$ 区间内解的存在性、漂移速度以及背景态的大小。

除了相干漂移派系，我们还探讨了不稳定常态附近的演化。我们发现了流体动力学中熟悉的调制方程，例如 Korteweg-deVries 方程或久保－西瓦辛斯基方程及其变体。数值模拟中观察到的动力学似乎涉及派系形成与相互作用的复杂过程。

尝试量化非相干漂移派系中的质量损失时，会出现一些有趣的问题。针对单个派系的几何奇异摄动理论预测，质量会在距离派系中心更远的站点累积；根据偏置项的不同，这种累积可能达到 β 中的高阶，甚至超越所有阶。量化这些效应将很有意义；对于二次自我煽动偏置，还可以将其与恒定背景上相干漂移派系的存在相对照，例如探究恒定背景的大小与质量损失率之间的关系。

我们指出，在偏置背景下，稳定性问题颇为微妙，这是因为恒定背景态本身不稳定，而且扰动演化的动力学十分复杂。事实上，即使不存在偏置，政党对扰动（例如小幅 ℓ^∞ ）是否稳定，似乎也尚无定论。

参考文献

[1] N. Ankney、M. Avery、T. Khain 和 A. Scheel。《钉扎与脱钉：从周期介质到混沌介质和随机介质》。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，29(1):013127，2019年。[2] B. Bakker 和 A. Scheel。《非局部耦合系统的空间哈密顿恒等式》。*Forum Math. Sigma*，6：论文编号 e22，共55页，2018年。[3] P. W. Bates、K. Lu 和 C. Zeng。《近似不变流形与尖峰态的全局动力学》。*Invent. Math.*，174(2):355–433，2008年。[4] E. Ben-Naim。《意见动力学：政党的兴衰》。《欧洲物理快报》（*EPL*），69(5):671–677，2005年3月。[5] E. Ben-Naim 和 A. Scheel。《意见动力学中的模式选择与超模式》。载于*APS*三月会议摘要，第*APS*会议摘要 2016卷，第X43.006页，2016年1月。[6] V. D. Blondel、J. M. Hendrickx 和 J. N. Tsitsiklis。《关于具有状态依赖连接性的 Krause多智能体共识模型》。《*IEEE*自动控制汇刊》，54(11):2586–2597，2009年。[7] G. Bordyugov 和 H. Engel。《耗散介质中的反常脉冲相互作用》。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，18(2):026104，2008年。[8] J. Bricmont、A. Kupiainen 和 G. Lin。《非线性抛物方程解的重整化群与渐近分析》。*Comm. Pure Appl. Math.*，47(6):893–922，1994年。

[9] T. Carletti、D. Fanelli、S. Grolli 和 A. Guarino。《如何有效开展宣传》。EPL（《欧洲物理快报》），74:222，2007年1月。[10] S. Chen、D. H. Glass 和 M. McCartney。《有界信任模型中成功意见领袖的特征》。《物理学A》，449(C):426–436，2016年。[11] M. Del Vicario、A. Scala、G. Caldarelli、H. Stanley 和 W. Quattrociocchi。《确认偏误与极化建模》。《科学报告》，7，2016年6月。[12] A. Doelman、B. Sandstede、A. Scheel 和 G. Schneider。《调制波列的动力学》。《美国数学会回忆录》，199(934):viii+105，2009年。[13] I. Douven 和 R. Hegselmann。《有界信任模型中的错误信息与虚假信息》。《人工智能》，291，2020年11月。[14] G. Faye 和 A. Scheel。《通过谱流研究非局部微分算子的弗雷德霍姆性质》。《印第安纳大学数学杂志》，63(5):1311–1348，2014年。[15] G. Faye 和 A. Scheel。《无相空间中心流形》。《美国数学会汇刊》，370(8):5843–5885，2018年。[16] N. Fenichel。《流的不变流形的持久性与光滑性》。《印第安纳大学数学杂志》，21:193–226，1971/72年。[17] S. Fortunato、V. Latora、A. Pluchino 和 A. Rapisarda。《有界信任共识模型中的向量意见动力学》。《现代物理学国际期刊C辑》，16，2005年4月。[18] W. Han、C. Huang 和 J. Yang。《具有异质有界信任和固执性的修正Hegselmann–Krause模型中的意见簇》。《物理学A》，531:121791，2019年。[19] R. Hegselmann 和 U. Krause。《意见动力学与有界信任模型：分析与模拟》。《人工社会与社会模拟杂志》，5，2002年7月。[20] D. Henry。《半线性抛物型方程的几何理论》，《数学讲义》第840卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1981年。[21] M. W. Hirsch、C. C. Pugh 和 M. Shub。《不变流形》。《数学讲义》第583卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1977年。[22] M. Holzer 和 A. Scheel。《逐点增长的判据及其在入侵过程中的作用》。《非线性科学杂志》，24(4):661–709，2014年。[23] D. J. Isenberg。《群体极化：批判性综述与元分析》。《人格与社会心理学杂志》，50(6):1141–1151，1986年。[24] J. Kertesz、A. Sirbu、F. Gianotti 和 D. Pedreschi。《算法偏见会加剧意见极化：一种有界信任模型》。载于 StatPhys 27主会议，2019年。[25] M. Krupa 和 P. Szmolyan。《跨临界与叉形奇点附近慢流形的延拓》。《非线性》，14:1473，2001年9月。[26] J. Lorenz。《有界信任下的连续意见动力学：综述》。《现代物理学国际期刊C辑》，18，2007年8月。[27] J. Lorenz。《连续意见动力学的稳定化定理》。《物理学A辑：统计力学及其应用》，355，2007年9月。[28] N. Manz 和 O. Steinbock。《可激发反应扩散系统中的传播失效、呼吸脉冲与反向传播》。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，16(3):037112，2006 年。

[29] J.-D. Mathias、S. Huet 和 G. Deffuant。有界信任模型中的固定不确定性与极端主义者：意见可能无限期持续波动。《人工社会与社会模拟杂志》，19(1):6，2016年。[30] W. Quattrociocchi、G. Caldarelli 和 A. Scala。交互网络中的意见动力学：媒体竞争与社会影响。《科学报告》，4，2014年。[31] G. Schneider 和 C. E. Wayne。流体表面上的反向传播波与费米–帕斯塔–乌拉姆模型的连续极限。载于国际微分方程会议，第*1*、*2*卷（柏林，*1999*年），第390–404页。世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，2000年。[32] D. Shen 和 Z. Sun。非对称信任水平下KH模型的有限时间收敛。载于*2009*年*IEEE*国际控制与自动化会议，第224–227页，2009年。[33] W. van Saarloos。不稳定状态中的前沿传播。《物理学报告》，386(2):29–222，2003年。[34] A. Vanderbauwhede 和 G. Iooss。无限维中的中心流形理论。载于《动力学报告》：动力系统专题，第1卷，《动力学报告：动力系统专题》（新系列），第125–163页。施普林格，柏林，1992年。