arXiv:2302.04254v3 [math.DS] 4 Sep 2024

无限视界周期洛伦兹气体流的强混合

Fran¸coise P`ene * Dalia Terhesiu †

2024年9月5日

摘要

我们证明了 $\mathbb{Z}^d$-周期无限视界洛伦兹气体流对具有紧支撑的连续观测量满足强混合。这类自然观测量的一个关键特点是，其支撑集可以包含具有无限自由飞行的点。处理这类函数是一项重大挑战，在有限视界情形中也没有与之对应的情况。上述函数类的混合结果通过以下新结果得到：1）对具有紧支撑、由距最近碰撞时间有界的构型组成的连续观测量，证明其满足混合；2）一个紧性型结果，可用于控制具有长自由飞行的构型。为证明1），我们建立了无限视界西奈台球流的混合局部极限定理，此前这是一个悬而未决的问题。据我们所知，我们用于证明紧性结果的方法在现有文献中没有先例。

1 引言与主要结果

我们关注 $\mathbb{Z}^d$ 周期洛伦兹气体（$d \in \{1, 2\}$）连续时间动力系统的混合性质。该模型由洛伦兹于 [20] 提出，用来描述低导电金属中电子的扩散。它描述了一个质点以单位速度在平面 $\mathcal{D}_2 := \mathbb{R}^2$（当 $d = 2$ 时）或管状空间 $\mathcal{D}_1 := \mathbb{R} \times \mathbb{T}$（当 $d = 1$ 时；按惯例记 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为一维环面）中运动的行为。质点在一个 $\mathbb{Z}^d$ 周期、局部有限的凸障碍物构型之间运动，这些障碍物的闭包互不相交，且边界 $\mathcal{C}^3$（具有非零曲率）；质点与障碍物发生弹性碰撞（碰撞前角度与碰撞后角度相等）。我们用 Ω_d 表示可能位置的集合，也就是 $\mathcal{D}_d$ 中不在障碍物内部的位置所组成的集合。

*布雷斯特大学，布雷斯特大学，LMBA，法国国家科学研究中心 UMR 6205，Le Gorgeu 大道 6 号，29238 布雷斯特邮政信箱，法国

†数学研究所，莱顿大学，Niels Bohrweg 1，2333 CA 莱顿，荷兰

$\widetilde{\text{构型集合为集合}}\ \mathcal{M}$，其中包含位置与单位速度组成的二元组$(q,\vec{v}) \in \Omega_d \times \mathbb{S}^1$；在碰撞时刻，将碰撞前向量与碰撞后向量视为相同$\widetilde{\text{（严格来说，}}\ \mathcal{M}$ 是 $\Omega_d \times \mathbb{S}^1$ 关于识别碰撞前后向量的等价关系所得到的商空间）。洛伦兹气体流（Φ_t）$_t$ 将一个构型$(q,\vec{v})$（对应于时刻 0 的位置与速度二元组）映射为构型$\Phi_t(q,\vec{v}) = (q_t,\vec{v}_t)$，该构型对应于某个粒子在时刻 t 的位置与速度二元组；该粒子在时刻 0 位于位置 q，速度为 $\vec{v}$。此流$(\Phi_t)_t$ 保持 $\Omega_d \times \mathbb{S}^1$ 上的无限勒贝格测度 $\widetilde{\nu}$；该测度经过归一化，使得若 $d=2$，则 $\widetilde{\nu}(\Omega_2 \cap [0,1[^2) \times \mathbb{S}^1) = 1$；若 $d=1$，则 $\widetilde{\nu}(\Omega_1 \cap ([0,1[\times\mathbb{T})) \times \mathbb{S}^1) = 1$。自然也可以考虑$\widetilde{\text{碰撞时刻的动力学。}}$该动力系统的空间 M 是满足 $q \in \partial\,\Omega_d$ 的构型$(q,\vec{v}) \in \mathcal{M}$ 的集合。碰撞映射 $T\colon M \to M$ 将碰撞时刻的构型映射为下一碰撞时刻的构型，称为洛伦兹气体映射；它保持一个无限测度 $\widetilde{\mu}$，该测度$\widetilde{\text{相对于勒贝格测度绝对连续。记}}\ W_t\colon \mathcal{M} \to \mathcal{D}_d$ 为对应于截至时刻 t 的位移的映射：

$$\forall (q,\vec{v}) \in \widetilde{\mathcal{M}},\quad \Phi_t(q,\vec{v}) = (q_t,\vec{v}_t) \quad\Rightarrow\quad \widetilde{W}_t(q,\vec{v}) = q_t - q\,.$$

$\widetilde{\text{若}}\ d=1$ 我们将 W_t' 设为：$\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$ 表示 W_t的第一坐标。若 $d=2$ W_t 取值于$\widetilde{\mathbb{R}^2}$，则我们只需令 $W_t' = W_t$。在这两种情况下，W_t'都是 W_t 在 $\mathbb{R}^d$上的自然投影$\widetilde{\text{。}}$

当每条轨迹最终都会触及至少一个障碍物时，我们称之为有限视界洛伦兹气体。在有限视界的情况下，由 [6, 7] 可知，W_t 满足标准中心极限定理，即当 $t \to +\infty$ 时，$(\widetilde{W}_t'/\sqrt{t})_t$ 在分布意义下强收敛[1], 至一个均值为零的高斯随机变量，其非退化方差矩阵由一个无穷级数给出。

当存在至少一条永不触及障碍物的轨迹时，我们称之为无限视界洛伦兹气体。本文重点讨论“完全维数”的无限视界情形，即至少存在 d 条互不平行且无界、不会触及任何障碍物的轨迹。此时，根据 Sz´asz 和 Varj´u 的结果（详见第 2.3 小节，尤其是命题 2.5），由 [34] 可知[2]

$$\frac{\widetilde{W}_t'}{\sqrt{t\log t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma)\,,\quad \text{as } t \to +\infty\,, \tag{1.1}$$

其中，Σ是一个 d维正定对称矩阵，此外，它还可以用一个关于障碍物配置的显式公式表示（已在第 6 节开头回顾）。

[1]本文中的分布的强收敛是指相对于任意关于勒贝格测度绝对连续的概率测度的依分布收敛。[2] 记号 $\Longrightarrow \mathcal{N}(0,C)$ 表示分布的强收敛至分布为 $\mathcal{N}(0,C)$ 的高斯随机变量，即其均值为零、方差矩阵为 C。

这里我们关注强混合这一问题。回顾一下，若一个无限ˆ ˆ保测系统$(X, T, \hat{}\mu)$存在一个序列 $\widehat{a}_n \to \infty$ 和一类可积函数 f, g，使得

$$\widehat{a}_n \int_{\hat{M}} f.g \circ \hat{T}^n \, d\hat{\mu} \to \int_{\hat{M}} f \, d\hat{\mu} \int_{\hat{M}} g \, d\hat{\mu} \,, \tag{1.2}$$

如 $n \to +\infty$。序列 $\widehat{a}_n$ 给出了 $\int_{\hat{}M} f.g \circ \hat{}T^n \, d\hat{}\mu$ 收敛到 0 的速度。此类收敛速率最早是在 [35] 中针对一类非常受限的、保持无限测度的间歇映射得到的。随后，[23] 和 [17] 将这一结果推广到了更广泛的此类映射。对于无限测度框架下的其他混合概念（如局部—整体混合和整体—整体混合），[19] 首次对其进行了介绍（另见 [13, 15] 及其中的参考文献）。

~ ~在离散时间洛伦兹气体的框架下（M、T、$\widetilde{\mu}$），有限视界和无限视界情形中，(1.2) 意义下的混合性质都已得到充分理解，且它直接源自关于单元变化的混合局部极限定理（MLLT）（例如参见 [27, 第 3] 节）。对于有限视界情形，关键的局部极限定理可参见 [33]（该结果可推广为多元局部极限定理，从而推出混合性质），任意阶展开则可参见 [28]。对于难得多的无限视界情形，局部极限定理可参见 [34]（它同样可推出多元局部极限定理及混合性质），误差项则可参见 [29]。在有限视界的离散时间框架下，已有大量极限定理。对于无限视界的离散时间洛伦兹气体，也已有一些结果（特别是 [34, 9]，以及近期的 [29]）。

连续时间洛伦兹气体流的混合（ ~ $\mathcal{M}, (\Phi_t)_t, \nu$) 则面临着更大的挑战。即使在有限视界洛伦兹气体流的设定下，直到 [12] 的工作问世，意义下的混合（1.2）一直悬而未决；而最近，[15]中已得到了任意阶的展开。严格来说，文献 [12] 研究的是有限视界下西奈台球流的混合局部极限定理（MLLT），但正如 [15], 所示，意义下的混合（1.2）与 MLLT 等价。关于具有有界屋顶函数的悬挂流的群扩张之 MLLT，已有一些相关但较弱的结果；这些结果并不直接适用于西奈台球，详见 [2]。

关于无限视界洛伦兹气体流的混合，目前尚无任何已知结果。本文解决这一开放问题，并证明

定理 1.1 对任意连续紧支撑函数 $f, g \colon \Omega_d \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f.g \circ \Phi_t \, d\widetilde{\nu} \sim \frac{\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f \, d\widetilde{\nu} \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g \, d\widetilde{\nu}}{(2\pi t \log t \det(\Sigma))^{\frac{d}{2}}} \,, \quad as \; t \to +\infty \,, \tag{1.3}$$

其中，Σ 是出现在（1.1）中的方差矩阵。

定理 1.1 给出了具有支撑集的可观测量的混合性质，该支撑集可能包含具有无限自由飞行的构型。在具有无限视界的洛伦兹气体流的设定中，这类可观测量是自然的。定理 1.1 可以改写为

模糊收敛的形式（见推论 2.3 后的注释）。证明定理 1.1 所使用的主要要素——这些本身就是新颖且重要的结果——包括

1. 对可观测量 f、g 的强混合，其支撑集与某个碰撞时刻一致地“接近”（命题 2.2 的推论 2.3），即 f、g 的支撑集与最近碰撞时刻之间的时间间隔有界（无论是在过去还是未来）。这一混合结果是具有无限视界的 Sinai双曲台球流的多元局部极限定理的直接推论。本多元局部极限定理、命题 2.2 及其变体定理 2.6 是首批主要结果，并通过针对Sinai双曲台球映射的单元变化函数和飞行时间的两个联合局部极限结果共同建立：a) 联合多维局部极限定理，引理 3.4；b) 联合局部大偏差，引理 3.5。

2. 一个紧性类型的结果，即定理 5.1，它允许 f、g 在 $\mathcal{M}$ 中具有任意紧的 $\widetilde{\ }$ 支撑集。特别地，f、g 的支撑集可以包含永远不会撞到障碍物的粒子构型。第 5 节中给出的定理 5.1 的证明，利用了对自由飞行可能类型的极其精细的分解，以及带有良好误差项的针对Sinai双曲台球映射的联合多维局部极限定理（如引理 3.2 和推论 3.3），并结合一系列精细的新估计（包括大偏差估计）。我们强调，带误差项的联合多维局部极限定理（不仅是上项中提到的联合多维局部极限定理，而且其误差项甚至比 [29] 中非联合多元局部极限定理所得的误差项更精确），以及其他若干新的技术性估计，都是定理 5.1 证明所必需的组成部分。

我们以对各种结果的简要总结以及对本文结构的概述，结束引言部分。

在第 2 节中，我们介绍大部分所需的记号，并陈述关于西奈台球流的多元局部极限定理：关于单元变化函数的命题 2.2，以及关于飞行函数的定理 2.6。在第 2 节中，我们还记录了命题 2.2 的一个推论，即推论 2.3。该推论证明了以下情形下连续观测量的混合性：其紧支撑由这样一些构型组成，这些构型在有界时间内到达最近的碰撞；简言之，这说明了对于支撑在某一区域上的连续观测量，如果自由飞行（过去或未来的）是一致有界的，则这些观测量具有混合性。

在第 3 节中，我们针对西奈台球映射，陈述由单元变化函数与飞行时间构成的二元组的联合极限结果（联合中心极限定理、带误差项的联合多维局部极限定理、联合局部极限定理）。利用这些关键技术要素的陈述，我们在第 4 节和第 5 节中证明定理 2.6 和定理 1.1。

第 3 节中陈述的关键技术结果的证明见第 6、7 节以及附录A。联合局部极限定理（引理 3.5）只需稍作修改对 [22], 中得到的单元变化函数的局部极限定理证明即可推出；而本文得到的其他所有技术结果，即第 3 节中陈述的带误差项的联合中心极限定理和联合多维局部极限定理，都是新的，需要付出大量努力并提出重要的新思路。

我们在第 5 节陈述并证明紧性结果定理 5.1。在第 5 节开头，我们利用定理 5.1 的陈述完成定理 1.1 的证明。定理 5.1 的作用和新颖性已在上文第 2 点中概述。最后提及，在第 5 节中，作为若干技术引理的副产品，我们得到一个大偏差结果，即命题 5.2，该结果本身也具有独立的研究价值。

记号 我们交替使用“大 O”记号和 $\ll$ 记号，写作 $b_n = \mathcal{O}(c_n)$ 或$b_n \ll c_n$，若存在常数 $C > 0$、$n_0 \geq 1$，使得对所有 $n \geq n_0$都有 $b_n \leq Cc_n$。照例，$b_n = o(c_n)$ 表示存在 ε_n，使得对所有足够大的 n，都有$b_n = c_n\varepsilon_n$，且 $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$；$b_n \sim c_n$ 表示 $b_n = c_n + o(c_n)$。除非另有说明，给定 $x \in \mathbb{R}^d$，我们令 $|x|$ 表示 x的通常欧几里得范数。本文中，当 $d = 1$时，我们将 $\mathbb{Z}^1$（分别将 $\mathbb{R}^1$）与 $\mathbb{Z} \times \{0\}$（分别与$\mathbb{R} \times \{0\}$）视为同一对象。特别地，对于任意 $(q, z) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}$，记号 $q + z$表示 $q + (z, 0)$。

2 西奈台球流的多元局部极限定理与 $\mathbb{Z}^d$-扩展流的混合

2.1 记号与前人结果

设 $d \in \{1, 2\}$。 $\mathbb{Z}^d$周期洛伦兹气体的区域 Ω $\mathcal{D}_d \setminus \bigcup_{i=1}^{I} \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{O}_i + \ell$ $\mathcal{O}_1 \ \ldots \ \mathcal{O}_I$ $_d$ = 定义为

Ω : ( ), 其中 , , 是一个非空有限的凸开集族，其边界 $\mathcal{C}^3$ 具有非零曲率，且障碍物 $\mathcal{O}_i + \ell$ 的闭包两两不相交。我们回顾一下，我们关注的是全维无限视界，因此在全文中假设双曲台球区域 Ω_d 的内部至少包含 d 条无界走廊（由无界平行直线构成），且它们的方向彼此不平行。

Sinai双曲台球

$\widetilde{\ }$对系统（$\mathcal{M}, (\Phi_t)_t$）按 $\mathbb{Z}^d$ （位置）取商，得到西奈台球流（$\mathcal{M}, (\phi_t)_t$）（见 [32]），它描述了质点在 $\Omega := \Omega_d/\mathbb{Z}^d = \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{I} \overline{\mathcal{O}_i}$ 中以单位速度运动，并在 $\partial\Omega$ 处发生弹性反射的过程（其中 $\overline{\mathcal{O}_i}$ 是 $\mathcal{O}_i$ 经典范投影 $p_d : \mathcal{D}_d \to \mathbb{T}^2$后的像）。流（$\phi_t$）$_t$ 保持 $\mathcal{M} = (\Omega \times \mathbb{S}^1) / \equiv$ 上的概率测度 ν，该测度与勒贝格测度成正比，其中 $\equiv$ 是将碰撞前向量与碰撞后向量等同起来的等价关系。以 $\partial\Omega \times \mathbb{S}^1$ 为庞加莱截面的 ϕ_t 的庞加莱映射是西奈台球映射（M, T, μ），其中二维相空间 $M = \{(q, \vec{v}) \in \mathcal{M} : q \in \partial\Omega\}$（位置在 $\partial\Omega$ 中，速度为单位碰撞后速度向量）与 $\partial\Omega \times (-\pi/2, \pi/2)$ 相对应（这里我们用碰撞后速度向量与 $\partial\Omega$ 的法线所成的角度来表示该向量）。此映射 T 将一个碰撞后向量映射为与下一次碰撞对应的碰撞后向量。此映射保持

概率测度 μ，其在点 $(q,\varphi) \in \partial\Omega \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$处的密度为 $\cos\varphi/(2|\partial\Omega|)$。连续两次碰撞之间的飞行时间是 $(\phi_t)_t$ 到 M 的回归时间，记作 $\tau\colon M \to \mathbb{R}_+$。采用此记号，可作如下对应

$$T(x) = (\phi_\tau)(x) = \phi_{\tau(x)}(x)\,.$$

我们设定 $\tau_n := \sum_{k=0}^{n-1} \tau \circ T^k$，并采用通常约定 $\tau_0 := 0$。对于任意 $x \in \mathcal{M}$，我们设 $N_t(x) \in \mathbb{N}_0$ 表示从构型 x开始，在时间区间 $(0,t]$ 内的碰撞次数。我们注意到，对于 $x \in M$，该量满足

$$\tau_{N_t(x)}(x) \le t < \tau_{N_t(x)+1}(x)\,. \tag{2.1}$$

此外，对于所有 $x \in M$ 以及所有 $u \in [0,\tau(x))$ 和任意 $t \in [0,+\infty)$，$N_t(\phi_u(x)) = N_{t+u}(x)$。采用这些记号，Sinai双曲台球流 $(\mathcal{M},(\phi_t)_t,\nu)$ 同构于$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$悬挂流 $(\mathcal{M},(\phi_t)_t,\widehat{\nu})$，其定义为

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{M}} &= \{(x,u) \in M \times [0,+\infty) : 0 \le u < \tau(x)\} \\
\widehat{\phi}_s(x,u) &= (T^{N_{s+u}(x)}(x), s+u-\tau_{N_{s+u}(x)}(x)) \\
\widehat{\nu} &= (\mu \times \mathrm{Leb})/\mu(\tau), \quad \text{where } \mu(\tau) := \int_M \tau\, d\mu\,,
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$通过同构 $(x,u) \in \mathcal{M} \mapsto \phi_u(x) \in \mathcal{M}$（该映射是单射，其像是 $\mathcal{M}$ 中不属于无限自由飞行的构型集合）。

$\mathbb{Z}^d$扩张与单元变化函数

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$回顾一下，$\mathbb{Z}^d$-周期洛伦兹气体映射 $(M,T,\widetilde{\mu})$ 可以表示为西奈台球映射 (M,T,μ) 的$\mathbb{Z}^d$扩张，其中单元变化函数 κ 定义如下。对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}^d$，我们称集合 $\mathcal{C}_\ell$ 为 ℓ-胞腔，它由满足$q \in \bigcup_{i=1}^I (\partial O_i + \ell)$ 的构型 $(q,v) \in \widetilde{M}$ 组成。由于模型具有 $\mathbb{Z}^d$-周期性，存在 $\kappa\colon M \to \mathbb{Z}^d$，称为单元变化函数，使得

$$\widetilde{x} = (q,\vec{v}) \in \mathcal{C}_\ell \quad \Rightarrow \quad \widetilde{T}(x) \in \mathcal{C}_{\ell+\kappa(p_d(q),\vec{v})}\,. \tag{2.2}$$

$\widetilde{\ }$注意，对于任意 $\widetilde{x} \in M$ $x = q\ \vec{v}\ \ell \in M \times \mathbb{Z}^d$ [3]，$\widetilde{x} = p_{d\,0}^{-1}\, q\ + \ell\ \vec{v}$ $p_{d\,0}$ p_d $\bigcup_{i=1}^I \partial\mathcal{O}_i$ $\vec{v}$ 存在唯一的 $((\,,)\,)$ 使得 $(,(\,)\,,)$，其中 $,$表示对 的限制（ 是 $\widetilde{x}$ 的速度，将 $\widetilde{q}$ 设为 $\widetilde{x}$ 的位置，(q,ℓ) 满足 $q = p_d(\widetilde{q})$ 和 $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_\ell$）。公式 (2.2) 可以改写为

$$\forall((q,\vec{v}),\ell) \in M\times\mathbb{Z}^d,\ T(q,\vec{v}) = (q',\vec{v}') \ \Rightarrow\ \widetilde{T}(p_{d,0}^{-1}(q)+\ell,\vec{v}) = \left(p_{d,0}^{-1}(q') + \ell + \kappa(q,\vec{v})\ \ \vec{v}'\right)\,. \tag{2.3}$$

[3]回顾一下，若 $d=1$，我们将 $\mathbb{Z}^1$ 与 $\mathbb{Z}\times\{0\}$视为相同，这意味着对于任意 $q' \in \mathcal{D}_1$ 和任意 $\ell \in \mathbb{Z}^1$，记号 $q'+\ell$ 表示 $q'+\ (\ell,0)$。

$\widetilde{\ }$这就通过将 (M,T,μ) 作 κ 的 $\mathbb{Z}^d$-扩张，确定了 $(M,T,\widetilde{\mu})$：$M\to\mathbb{Z}^d$。直接的经典归纳法保证，对于任意 $((q,\vec{v})\ \ell)\in M\times\mathbb{Z}^d$ 以及任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$T^n(q,\vec{v})=(q_n',\vec{v}_n')\ \Rightarrow\ \widetilde{T}^n(p_{d,0}^{-1}(q)+\ell,\vec{v})=\left(p_{d,0}^{-1}(q_n')+\ell+\kappa_n(q,\vec{v}),\vec{v}_n'\right)\,, \tag{2.4}$$

其中我们令 $\kappa_n:=\sum_{j=0}^{n-1}\kappa\circ T^j$。

2.2 将洛伦兹气体视为悬挂流时的混合

$\widetilde{\ }$我们将关键地利用上一节确立的事实：$(\mathcal{M},(\Phi_t)_t,\widetilde{\nu})\widetilde{\ }$可以表示为由 $(x,\ell)\mapsto\tau(x)$ 在 $(M,T,\widetilde{\mu})$ 上生成的悬挂流，而后者本身$\widetilde{\ }$可以表示为 (M,T,μ) 经 κ 的 $\mathbb{Z}^d$ 扩张。因此，我们可以将 $\mathcal{M}$表示为 $\widehat{\mathcal{M}}\times\mathbb{Z}^d$。在这一部分，我们陈述一个关于 κ_n的混合局部极限定理，并说明如何利用它，轻松推导出函数 f,g 情形下的定理 1.1：这些函数的支撑集距一次碰撞的时间有界，即紧支撑于 $\widehat{\mathcal{M}}\times\mathbb{Z}^d$。如第 5 节所详述，这些函数构成的类远比定理 1.1 中的函数类受限。为了陈述这些结果，我们将引入两类$\widetilde{\ }$集合 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{F}$），它们分别对应于 $\mathcal{M}$（分别为 $\mathcal{M}$）中构型的可测集$\widetilde{\ }$：这些构型的上一次碰撞发生在 M 的某个固定子集（分别为 M 的某个固定$\widetilde{\ }$胞腔）内，且碰撞发生时间位于某个固定的有界时间区间内。

定义 2.1 令 $\mathcal{F}$ 为由以下形式的 $\mathcal{M}$ 的可测子集 A 构成的类：$A=\curvearrowright\qquad\qquad\curvearrowright\phi_I(A_0)=\{\phi_u(x)\ \ x\in A_0,u\in I\}$，这些子集在 $\mathcal{M}$ 中由 $A_0\times I\subset\mathcal{M}$ 表示（这意味着 $I\subset[0,\inf_{A_0}\tau)$），其中 $A_0\subset M$ 是满足 $\mu(\partial A_0)=0$ 的可测集合，且 I 为有界区间。

令 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 为与 $A_0\times I\times\{\ell\}\subset\widehat{\mathcal{M}}\times\mathbb{Z}^d$ 对应的 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 的子集所构成的集合，其中 $\phi_I(A_0)\in\mathcal{F}$ 且 $\ell\in\mathbb{Z}^d$，也就是说，这些集合具有以下形式：

$$\left\{\Phi_u(p_{d,0}^{-1}(q)+\ell,\vec{v})\ :\ (q,\vec{v})\in A_0,u\in I\right\}\ \text{ with }\phi_I(A_0)\in\mathcal{F},\ \ell\in\mathbb{Z}^d\,.$$

现在我们陈述一个定义在 $\mathcal{M}$ 上的多元局部极限定理，其中 κ_{N_t} 由下式给出：

$$\forall(x,u)\in\widehat{\mathcal{M}},\ \forall t\in[0,+\infty),\quad \kappa_{N_t}(\phi_u(x)):=\kappa_{N_t(\phi_u(x))}(x)=\kappa_{N_{t+u}(x)}(x)\,.$$

观测量 κ_{N_t} 将被理解为时间区间 $(0,t]$ 内的单元变化。

命题 2.2 令 A、$B\in\mathcal{F}$，并令 K 为 $\mathcal{D}_d$ 的有界子集，且满足 $Leb(\partial K)=0$。则

$$\forall\ell\in\mathbb{Z}^d,\quad (t\log t)^{\frac{d}{2}}\nu\left(A\cap\{\phi_t\in B,\,\kappa_{N_t}=\ell\}\right)\sim\widetilde{g}_d\,(0)\,\nu(A)\nu(B)\,, \tag{2.5}$$

其中 $t\to\infty$，$\widetilde{g}_d$是 (1.1) 中出现的 d 维高斯分布 $\mathcal{N}(0,\Sigma)$ 的密度。

这一结果包含在命题 4.1 中陈述的一个更一般的多元局部极限定理中（应用时取 $w_t = \ell$、 $w = 0$、 $K = \{0\}$）。命题 2.2 的一个直接推论是定理 1.1 针对扩展悬挂 $\widehat{\mathcal{M}} \times \mathbb{Z}^d$ 中紧支撑观测量的以下弱化版本；特别是，这些函数的支撑集只包含那些在有限时间内曾经或将要撞上障碍物的构型。

推论 2.3 令 $n \in \mathbb{N}$，设定

$$E_{\pm n} = \left\{ \Phi_{\pm u}(q + \ell, \vec{v}) \in \widetilde{\mathcal{M}} \,:\, q \in \bigcup_{i=1}^{I} \partial O_i,\ u \in [0, n],\ \ell \in \mathbb{Z}^d,\ |\ell| \le |n| \right\},$$

于是，对于任意 f、g： $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$，它们是 μ-几乎处处连续的函数，且其支撑集分别包含于 E_{-n} 和 E_n，

$$\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f.g \circ \Phi_t \, d\widetilde{\nu} \sim \frac{\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f \, d\widetilde{\nu} \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g \, d\widetilde{\nu}}{(2\pi t \log t \det(\Sigma))^{\frac{d}{2}}}, \tag{2.6}$$

当 $t \to +\infty$ 时。

证明 令 A、B 为属于 $\mathcal{F}$ 的两个集合，分别对应于 $\widehat{\mathcal{M}} \times \mathbb{Z}^d$ 中的 $A_0 \times I \times \{\ell_0\}$ 和 $B_0 \times J \times \{\ell_0'\}$。我们注意到

$$\widetilde{\nu}\left(A \cap \Phi_{-t}(B)\right) = \nu(\phi_I(A_0) \cap \{\phi_t \in \phi_J(B_0),\, \kappa_{N_t} = \ell_0' - \ell_0\}).$$

因此，由 (2.5) 可得

$$(t \log t)^{\frac{d}{2}} \widetilde{\nu}\left(A \cap \Phi_{-t}(B)\right) \sim \widetilde{g}_d(0) \nu(\phi_I(A_0)) \nu(\phi_J(A_0)) = \widetilde{g}_d(0) \widetilde{\nu}(A) \widetilde{\nu}(B).$$

这一结果可直接推广到属于 $\mathcal{F}$ 的任意有限个集合 A、$B \subset \mathcal{M}$ 的并，由此可知，集合族 $(E_n)_{n \ge 1}$ 满足 [18] 中定义的 Krickeberg 混合。由 [18, 第 2] 节（另见 [24, 第 9] 节，其中给出了针对悬挂流的 Krickeberg 论证）可知，对于任意 f、g，只要它们支撑在某个 E_n 中且 μ-几乎处处连续，(2.6) 就成立。为结束推论 2.3 的证明，我们注意到，由于 Φ 可逆，若 f 支撑在 E_{-n} 中，则 $f \circ \Phi_{-n}$ 支撑在 E_n 上，最后由下列公式得出结论

$$\int_{\widehat{\mathcal{M}}} f.g \circ \Phi_t \, d\widetilde{\nu} = \int_{\widehat{\mathcal{M}}} f \circ \Phi_{-n}.g \circ \Phi_{t-n} \, d\widetilde{\nu},$$

因为 $(t-n)\log(t-n) \sim t\log t$。 ∎

推论 2.3 中的混合结果可以用 μ_t 到 $\mu \otimes \mu$ 这一族的稀疏收敛来重新表述，其中 μ_t 是定义在 $(\widehat{\mathcal{M}})^2$ 上的测度，定义为 $\mu_t(A' \times B') = \mu(A' \cap \Phi_{-t} B')$，其中 A'，$B' \in \mathcal{F}$（这可由 Portmanteau 定理推出，例如见 [30]）；定理 1.1 也同样适用。

备注 2.4 我们指出，推论 2.3 这类混合结果此前已在 [36] 中针对 $\mathbb{Z}$-扩展的 Gibbs-Markov 半流得到了，其中顶函数和位移函数属于非标准中心极限定理的吸引域。[36] 中的证明方法截然不同；特别是，它并未通过基映射的多元局部极限定理来完成。

2.3 无限视界 Sinai 流的多元局部极限定理

本节陈述 Sinai 台球流的自然余循环的多元局部极限定理，该余循环对应于位移。

自由飞行

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$由于 $\mathbb{Z}^d$-周期性，自由飞行 $V\colon M \to \mathcal{D}_d$ 由下式定义

$$\forall (q,\vec{v}) \in \widetilde{M},\quad \widetilde{T}(q,\vec{v}) = (\widetilde{q},\vec{v}_1) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{V}(q,\vec{v}) = \widetilde{q} - q \tag{2.7}$$

取模 $\mathbb{Z}^d$ 后进入商空间，即存在 $V\colon M \to \mathcal{D}_d$ 使得

$$\widetilde{V}(q,\vec{v}) = V\left(p_d(q),\vec{v}\right). \tag{2.8}$$

当 $d=2$ 时，该量与飞行时间 τ 满足以下恒等式

$$\text{if } d=2\,, \quad \tau = |V|\,. \tag{2.9}$$

下面证明自由飞行 V 与单元变化 κ上同调等价。由 (2.3)、(2.7) 和 (2.8) 可知，对所有 $x=(q,\vec{v}) \in M$，若 $T(q,\vec{v}) = (q',\vec{v}')$，则

$$\begin{aligned} V(x) &= \widetilde{V}\left(p_{d,0}^{-1}(q),\vec{v}\right) \\ &= p_{d,0}^{-1}(q') + \kappa(q,\vec{v}) - p_{d,0}^{-1}(q) = \kappa(x) + H_0(T(x)) - H_0(x)\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $H_0(q,\vec{v}) = p_{d\,0}^{-1}\,,(q)$。按照第1节中 $\widetilde{W}_t$ 的做法，若 $d=1$ 我们将 V' 设为：$\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 的第一坐标，且若 $d=2$, V取值于 $\mathbb{R}^2$，则只需令$V'=V$。以下非标准中心极限定理在 [34] 中针对 V'得到了证明:

$$a_n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} V' \circ T^j \implies \mathcal{N}(0,\Sigma_0)\,, \tag{2.11}$$

其中 $a_n = \sqrt{n\log n}$，并且 $\Sigma_0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是一个正定对称的 d 维矩阵（精确公式见 (6.3) 和 (6.4)）。[34] 的一个重要组成部分是 V 属于非标准中心极限定理的吸引域；也就是说，存在 $c>0$ 使得

$$\mu(|V|>t) \sim ct^{-2}\,. \tag{2.12}$$

位移函数 W_t

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$我们已在第1节中定义了位移函数 $W_t:\ \mathcal{M}\to\mathcal{D}_d$ 和 $\sim$ $\sim W'_t:\ \mathcal{M}\to\mathbb{R}^d$，即它在 $\mathbb{R}^d$上的投影。由于模型具有 $\mathbb{Z}^d$-周期性，这两个位移函数都取值于模 $\mathbb{Z}^d$的商空间，即存在 $W_t:\ \mathcal{M}\to\mathcal{D}_d$ 和$W'_t:\ \mathcal{M}\to\mathbb{R}^d$ 使得

$$\forall(q,\vec{v})\in\widetilde{\mathcal{M}},\quad \widetilde{W}_t(q,\vec{v})=W_t(p_d(q),\vec{v})\quad\text{and}\quad \widetilde{W}'_t(q,\vec{v})=W'_t(p_d(q),\vec{v})\,.$$

注意，W_t 是一个余循环:

$$\forall x\in\mathcal{M},\ \forall t,s\geq 0,\quad W_{t+s}(x)=W_s(x)+W_t(\phi_s(x)) \tag{2.13}$$

并且

$$\forall x=(q,\vec{v})\in M,\quad V(x)=W_\tau(x):=W_{\tau(x)}(x)\,. \tag{2.14}$$

因此，(2.11) 中所述的关于 V' 的非标准中心极限定理，结合关系式 (2.14) 以及将极限定理从诱导映射提升到原系统（映射或流）的经典方案 [21, 16]，推出了关于W'_t 的非标准中心极限定理。这就得到以下结果，其中我们使用记号 $a_t:=\sqrt{t\log\ t}$。

命题 2.5（中心极限定理 [34]）当 $t\to+\infty$ 时，$a_t^{-1}W'_t\implies\mathcal{N}(0,\Sigma)$，其中 $\Sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$,$\Sigma=\Sigma_0/\mu(\tau)^{1/2}$，且 Σ_0 如 (2.11) 中所述。

Let $v_0:\ \mathcal{M}\to\mathbb{S}^1$ 是速度映射，定义为 $v_0(q,\vec{v})=\vec{v}$。注意 th at

$$\text{if } d=2,\quad W_t:=\int_0^t v_0\circ\phi_s\,ds\,. \tag{2.15}$$

若 $d=1$，则 W_t 是遍历积分 $\int_0^t v_0\circ\phi_s\,ds$在 $\mathcal{D}_1$ 中的等价类（即，W_t 是典范投影）。

位移函数的多元局部极限定理

我们来说明，由于 (2.14)，关于 $V-\kappa$ 的余边界方程 (2.10) 可导出一个涉及 W的类似方程。我们考虑函数 $H_1:\ \mathcal{M}\to\mathcal{D}_d$，它将 $\mathbf{x}\in\mathcal{M}$ 映射到其代表元在 $\mathcal{D}_d$ 中的位置，且该代表元的前一次碰撞发生在 $\mathcal{C}_0$，即

$$\forall((q,\vec{v}),u)\in\widehat{\mathcal{M}},\quad H_1(\phi_u(q,\vec{v}))=\mathfrak{p}\left(\Phi_u\left(p_{d,0}^{-1}(q),\vec{v}\right)\right)=p_{d,0}^{-1}(q)+W_u(q,\vec{v})\,, \tag{2.16}$$

$\widetilde{\quad}$其中 $\mathfrak{p}$: $\mathcal{M}\to\Omega_d$ 是自然投影。换言之，若 $d=2$，则

$$H_1(\phi_u(q,\vec{v}))=H_0(q,\vec{v})+W_u(q,\vec{v})=p_{d,0}^{-1}(q)+u\vec{v}\,; \tag{2.17}$$

如果 $d=1$, $H_1(\phi_u(q,\vec{v}))$ 是 $p_{d\,0}^{-1}{}_{,}(q)+u\vec{v}$ 在 $\mathcal{D}_1$ 中的类。回想一下，我们将 $N_t:\ \mathcal{M}\to\mathbb{N}_0$设为时间区间 $(0,t]$ 内的碰撞次数（特别参见 (2.1)）。上述定义的函数 H_1 满足以下重要性质:

$$\forall(x=(q,\vec{v}),u)\in\widehat{\mathcal{M}}\,,\quad W_t(\phi_u(x))=\kappa_{N_{t+u}(x)}(x)+H_1(\phi_t(\phi_u(x)))-H_1(\phi_u(x))\,. \tag{2.18}$$

事实上，令 $N := N_{t+u}(x)$，我们注意到

$$\phi_t(\phi_u(x)) = \phi_{u'}(q', \vec{w}), \quad \text{with } u' := u+t-\tau_N(x),\ (q', \vec{w}) := T^N(x) = \phi_{\tau_N}(x)\,, \tag{2.19}$$

且（T^N（x） u'）属于 $\widehat{\mathcal{M}}$。因此，由（2.13）和（2.14）可得

$$\begin{aligned} W_t(\phi_u(x)) &= W_{t+u}(x) - W_u(x) = W_{u'}(\phi_{\tau_N}(x)) + W_{\tau_N}(x) - W_u(x) \\ &= W_{u'}(T^N(x)) + W_{\tau_N}(x) - W_u(x) \\ &= W_{u'}(T^N(x)) + V_N(x) - W_u(x)\,. \end{aligned}$$

最后，利用（2.10）和（2.17），我们得到

$$\begin{aligned} W_t(\phi_u(x)) &= W_{u'}(T^N(x)) + \kappa_N(x) + H_0(T^N(x)) - H_0(x) - W_u(x) \\ &= H_1(\phi_t(\phi_u(x))) + \kappa_N(x) - H_1(\phi_u(x))\,, \end{aligned}$$

如前所述。

回忆一下，$a_t = \sqrt{t \log t}$。

定理 2.6（位移函数的多元局部极限定理）设 A、$B \in \mathcal{F}$，并设 K 是 $\mathcal{D}_d$ 的有界子集，且 $Leb(\partial K) = 0$。设 $w \in \mathbb{R}^d$，并设 $w_t \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\lim_{t\to+\infty} w_t/a_t = w$。则[4]

$$\begin{aligned} &a_t^d \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, W_t \in w_t + K\}\right) \\ &\quad \sim \widetilde{g}_d(w) \int_{A\times B} \#((K + w_t + H_1(\mathbf{x}) - H_1(\mathbf{y})) \cap \mathbb{Z}^d)\, d\nu(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{y})\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

当 $t \to \infty$ 时，其中 $\widetilde{g}_d$ 是命题 2.5 中出现的 d 维高斯分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ 的密度，而 H_1 是在（2.16）中定义的函数。

定理 2.6 的证明见第 4 节，它将作为一个类似结果（命题 4.1）的推论给出；该结果针对 κ_{N_t} 而非 W_t。

3 带误差项的联合局部极限定理陈述及台球映射的联合局部极限定理

设 $d \in \{0, 1, 2\}$。本节陈述一些主要技术结果，这些结果将在定理 2.6（西奈流的混合局部极限定理）和定理 1.1（洛伦兹气体的混合）的证明中用到，其中包括证明关键紧性型结果定理 5.1（见第 5 节）所需的结果。我们关注以下一对变量的联合多元局部极限定理和局部局部极限定理

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}^{(d)} := (\kappa, \widetilde{\tau}) : M \to \mathcal{D}_d \times \mathbb{R}\,, \quad \text{with } \widetilde{\tau} := \tau - \mu(\tau)\,, \quad \text{if } d \in \{1, 2\}$$

[4]同样，在这个公式中，如果 $d = 1$，记号 $w_t + K$ 表示 $(w_t, 0) + K$，而 $\mathbb{Z}^d$ 表示 $\mathbb{Z} \times \{0\}$。

或对于

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}^{(0)} := \widetilde{\tau}, \quad \text{if } d = 0\,.$$

注意，$\int_M \widehat{\Psi}\, d\mu = 0$。当 $d \in \{1, 2\}$ 时，我们的联合极限结果与这样一个事实有关：$(\kappa \circ T^k, \widetilde{\tau} \circ T^k)_k$ 的和满足具有非标准归一化a_n^{-1}的中心极限定理。特别是，正如下面子引理 6.1 的证明中所阐明的，向量 $\widehat{\Psi}$ 使得 $\mu(|\widehat{\Psi}| > t) \sim ct^{-2}$。和往常一样，我们记作 $\widehat{\Psi}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{\Psi} \circ T^j$，类似地记作$\succ V_n$、$\tau_n$、$\widetilde{\tau}_n$。我们先从 Ψ_n 的一个具有非标准缩放的非退化中心极限定理开始。

引理 3.1（台球映射的联合中心极限定理） $a_n^{-1}\widehat{\Psi}_n \implies \mathcal{N}(0, \Sigma_{d+1})$，当 $n \to \infty$ 时，其中 $\Sigma_{d+1} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ 是正定的（显式公式见 (6.5)）。

该结果在第 6 节中通过改写 V_n 为二维胞腔变化与一个 Lipschitz 函数之和，调整$\widehat{\ }$在 [34] 中建立的中心极限定理的 [3], 证明而得到。

我们的进一步误差项的多元局部极限定理。记 Λ_{d+1} 为 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 上的 Haar 测度，它由 $\mathbb{Z}^d$ 上的计数测度与 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度的乘积给出。

引理 3.2（台球映射的联合多元局部极限定理）设 $p > 2$ 和 $R > 0$。取$\mathfrak{a}_n$ 使得 $\mathfrak{a}_n^2 = 2n \log(\mathfrak{a}_n) \sim n \log n = a_n^2$。假设 G、H：$M \to \mathbb{R}$ 是两个有界的动态 Hölder 连续函数，并且 h：$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可积，且具有紧支集的 Lipschitz 傅里叶变换 $\widehat{h}$：$\mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$。存在 $a_0 > 0$（其仅取决于 p 以及 G 和 H的 Hölder 指数），使得对所有$k_n < n/4$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mu\left[G.h(\widehat{\Psi}_n - L).H \circ T^n\right] \\
&\quad = \mathfrak{a}_n^{-d-1}\mathbb{E}_\mu[H]\,\mathbb{E}_\mu[G]\left(g_{d+1}\left(\frac{L}{\mathfrak{a}_n}\right)\int_{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}} h\, d\Lambda_{d+1} + \mathcal{O}\left((\log n)^{-1} + \frac{k_n}{n}\right)\right) \\
&\qquad + \mathcal{O}\left(e^{-a_0 k_n}\|G\|_{Holder}\|H\|_{Holder} + a_n^{-d-2}(k_n\|G\|_{L^1}\|H\|_{L^p} + \|H\|_{L^1}\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)})\right),
\end{aligned}$$

关于 $L \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$、上述的 (n, k_n) 以及满足 $\operatorname{supp}(\widehat{h}) \subset B(0, R)\widehat{\ }$和 $\|h\|_{Lipschitz} \le R$ 的 h，以上结论均一致成立，其中 g_{d+1} 是引理 3.1 中 $(d+1)$ 维高斯分布的密度。

这一结果在第 7 节中证明。其证明思路沿用了 [29, 定理 2.2] 中建立的多元局部极限定理的证明思路，但至少有两个主要区别。首先，这里需要得到联合多维局部极限定理，这与 [29, 定理 2.2]不同，后者是针对单元变化函数、带有误差项的多元局部极限定理。第 6 节总结了处理联合多维局部极限定理（含误差）所需的新方法。其次，[29] 中得到的误差项对于当前目的而言不够精确。为了建立

引理 3.2，我们需要在整个证明过程中更加仔细地处理误差项，这需要全新的估计，而这些估计都在第 7 节中得到。

引理 3.2 的一个推论是

推论 3.3 在引理 3.2 的假设下，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\left[G.h(\widehat{\Psi}_n - L).H\circ T^n\right] - \mathbb{E}_\mu[G]\mathbb{E}_\mu[H]\mathbb{E}_\mu[h(\widehat{\Psi}_n - L)]\\ &\quad = \mathcal{O}\left(e^{-a_0 k_n}\|G\|_{Holder}\|H\|_{Holder} + a_n^{-d-2}(k_n\|G\|_{L^1}\|H\|_{L^p} + \|H\|_{L^1}\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)})\right).\end{aligned}$$

证明 我们注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\left[G.h(\widehat{\Psi}_n - L).H\circ T^n\right] - \mathbb{E}_\mu[G]\mathbb{E}_\mu[H]\mathbb{E}_\mu\left[h(\widehat{\Psi}_n - L)\right]\\ &\quad = \mathbb{E}_\mu[(G-\mathbb{E}_\mu[G]).h(\widehat{\Psi}_n - L).H\circ T^n])] + \mathbb{E}_\mu[G]\,\mathbb{E}_\mu[h(\widehat{\Psi}_n - L).(H-\mathbb{E}_\mu[H])\circ T^n])],\end{aligned}$$

并将引理 3.2 应用于上述等式右端的两项，因为 $\|\Psi_{2k_n}\|_{L^1(\mu)} = \mathcal{O}(k_n)$，函数 Ψ 可积。 ∎

下面的多元局部极限定理将由引理 3.2 推出（见第 7 节）。

引理 3.4 设 A_0、$B_0 \subset M$ 是满足 $\mu(\partial A_0) = \mu(\partial B_0) = 0$ 的可测集。设 $K \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 是满足 $\Lambda_{d+1}(\partial K) = 0$ （在 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 中的边界）的有界集。那么，对于任意 $L > 0$,

$$a_n^{d+1}\mu\left(A_0 \cap T^{-n}(B_0) \cap \{\widehat{\Psi}_n(x) \in z + K\}\right) - g_{d+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)\mu(A_0)\mu(B_0)\Lambda_{d+1}(K) \quad (3.1)$$

当 $n \to +\infty$ 时，$|z| \le La_n$ 关于 $z \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 一致收敛于 0。

我们需要的联合局部极限定理如下:

引理 3.5（台球映射的联合局部极限定理）设 $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 为一个开球。则

$$\mu(\widehat{\Psi}_n \in z + U) \ll \frac{n}{a_n^{d+1}}\frac{\log(2+|z|)}{1+|z|^2} \quad (3.2)$$

关于 $n \ge 1$ 和 $z \in \mathbb{R}^{d+1}$ 一致。

这一结果的证明见附录 A.4 节，基本上是对 [22] 的证明所作的显而易见的改编，额外的难点在于 Ψ_n、τ_n 是非格点值。正如引言中已经提到的，这是本文中唯一不需要任何创新之处的结果，只需谨慎地进行直接改编即可。

4 Sinai 流的多元局部极限定理证明（命题 2.2 和定理 2.6）

在本节中，我们假设 $d = 1$ 或 $d = 2$。本节将通过陈述并证明以下结果来完成定理 2.6 的证明（暂且假设第 3 节所述结果成立）。

命题 4.1 设 A、$B \in \mathcal{F}$。设 K 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界子集，设 $w \in \mathbb{R}^d$ 和 $w_t \in \mathbb{R}^d$ 满足 li $\mathrm{m}_{t\to+\infty} w_t/a_t = w$。则

$$a_t^d \, \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} \in w_t + K\}\right) \sim \widetilde{g}_d\,(w)\, \nu(A)\nu(B)\#((K + w_t) \cap \mathbb{Z}^d)\,, \qquad (4.1)$$

其中，$\widetilde{g}_d$ 是命题 2.5 中高斯极限的密度，并采用以下自然约定

$$\forall (x,u) \in \widehat{\mathcal{M}}, \quad (\kappa_{N_t})(\phi_u(x)) := \kappa_{N_{t+u}(x)}(x)\,.$$

利用命题 4.1，我们完成

定理 2.6 的证明 我们首先回顾一下，需要证明

$$a_t^d \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, W_t \in w_t + K\}\right) \sim \widetilde{g}_d\,(w)\, \mathcal{I}(A \times B, w_t)\,, \qquad (4.2)$$

其中，K 使得 $Leb(\partial K) = 0$，其中 H_1 如（2.16）中所述，并且我们令 t

$$\mathcal{I}(A \times B, w_t) := \int_{A\times B} \#((K + w_t + H_1(\mathbf{x}) - H_1(\mathbf{y})) \cap \mathbb{Z}^d)\, d\nu(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{y})\,.$$

对于任意正整数 m，我们将 A （分别将 B）划分为有限个直径至多为 $1/m$ 的原子 $A_{k,\ m} \in \mathcal{F}$ 并考虑集合 $B_{k,\ m} \in \mathcal{F}$

$$K^-_{i,j,m} := \left\{z \in \mathbb{R}^d \,:\, \forall (x,y) \in A_{i,m} \times B_{j,m},\ z + H_1(y) - H_1(x) \in K\right\}$$

and

$$K^+_{i,j,m} := \left\{z \in \mathbb{R}^d \,:\, \exists (x,y) \in A_{i,m} \times B_{j,m},\ z + H_1(y) - H_1(x) \in K\right\}\,.$$

注意，H_1 在（x，u）中是利普希茨连续的，并且在 A 和 B上有界。由（2.18）可得

$$\begin{aligned}
&\nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, W_t \in w_t + K\}\right) \\
&\quad = \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} + H_1 \circ \phi_t - H_1 \in w_t + K\right) \\
&\quad \le \sum_{i,j} \nu\left(A_{i,m} \cap \{\phi_t \in B_{j,m},\, \kappa_{N_t} \in w_t + K^+_{i,j,m}\}\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

类似地,

$$\nu\left(A\cap\{\phi_t\in B,\, W_t\in w_t+K\}\right)\geq\sum_{i,j}\nu\left(A_{i,m}\cap\{\phi_t\in B_{j,m},\,\kappa_{N_t}\in w_t+K^-_{i,j,m}\}\right)\,. \tag{4.4}$$

根据命题 4.1,

$$\begin{aligned}&\nu\left(A_{i,m}\cap\{\phi_t\in B_{j,m},\,\kappa_{N_t}\in w_t+K^{\pm}_{i,j,m}\}\right)\\&\quad\sim a_t^{-d}\widetilde{g}_d(w)\#((w_t+K^{\pm}_{i,j,m})\cap\mathbb{Z}^d)\nu(A_{i,m})\nu(B_{j,m})\,.\end{aligned} \tag{4.5}$$

此外,

$$\#((w_t+K^-_{i,j,m})\cap\mathbb{Z}^d)\nu(A_{i,m})\nu(B_{j,m})\leq\mathcal{I}(A_{i,m}\times B_{j,m},w_t) \tag{4.6}$$

$$\mathcal{I}(A_{i,m}\times B_{j,m},w_t)\leq\#((w_t+K^+_{i,j,m})\cap\mathbb{Z}^d)\nu(A_{i,m})\nu(B_{j,m})\,. \tag{4.7}$$

设 $(x,y,z)\in\bigcup_{i,j}\left(A_{i,m}\times B_{j,m}\times\left(\mathbb{Z}^d\cap(w_t+(K^+_{i,j,m}\setminus K^-_{i,j,m}))\right)\right)$。则存在 x、$\mathrm{x}'\in A_{i,m}$ 和 y、$\mathrm{y}'\in B_{j,m}$，使得 $z-w_t+H_1(\mathrm{y})-H_1(\mathrm{x})\in K$，但 $z-w_t+H_1(\mathrm{y}')-H_1(\mathrm{x}')\notin K$。回忆一下，$H_1$ 是利普希茨的。因此，上述条件意味着 $z\in\mathbb{Z}^d$，并且 (x,y) 与 $\mathcal{E}_{w_t-z}$ 的距离小于 $1/m:=\{(\mathrm{x},\mathrm{y}):H_1(\mathrm{y})-H_1(\mathrm{x})\in w_t-z+\partial K\}$。这 z 应当是包含在以 w_t 为中心、半径为 $\sup_A|H_1|+\sup_B|H_1|+\sup_{s\in K}|s|$ 的球中的 $\mathbb{Z}^d$ 的元素之一。但是，对于每个这样的 z，该邻域 $\mathcal{E}_{w_t-z}$ 的测度满足

$$\begin{aligned}\nu^{\otimes 2}\left((\mathcal{E}_{w_t-z})^{[1/m]}\right)&\leq\sup_{|u|\leq 3\sup_{A\cup B}|H_1|+\sup_{s\in K}|s|}\nu\left(H_1^{-1}\left((u+\partial K)\right)^{[1/m]}\right)\\&\leq\sup_{|u|\leq 3\sup_{A\cup B}|H_1|+\sup_{s\in K}|s|}Leb\left(\left((u+\partial K)\right)^{[1/m]}\right)\,,\end{aligned}$$

当 $m\to+\infty$ 时收敛到 0，因为 $Leb(\partial K)=0$。由于可能的 z 数量一致有界，我们已经证明了

$$\lim_{m\to+\infty}\sup_t\sum_{i,j}\#((w_t+(K^+_{i,j,m}\setminus K^-_{i,j,m}))\cap\mathbb{Z}^d)\nu(A_{i,m})\nu(B_{j,m})=0\,. \tag{4.8}$$

所需结论 (4.2) 可由 (4.3)、(4.4)、(4.5)、(4.6)、(4.7) 和 (4.8) 得出。 ∎

4.1 命题 4.1 的证明

回忆一下，$A=\phi_I(A_0)$ 和 $B=\phi_J(B_0)$，其中 $A_0,B_0\subset M$ 满足 $\mu(\partial A_0)=\mu(\partial B_0)=0$，而 I，$J\subset\mathbb{R}$ 是两个有界区间。我们首先证明关于 $w_t\in\mathbb{Z}^d$ 和 $K=\{0\}$ 的引理。我们采用一种与 [1, 引理 4.3], 的证明（另见 [12, 定理 3.1] 和 [2, 定理 1], 的证明）颇为相似的分解方法，其中

显然的区别在于，需要弄清楚如何利用联合局部极限定理 3.4 和联合局部极限分布 3.5。

将 $\mathbf{x} = \phi_u(x)$ 写成 $(x, u) \in \mathcal{M}$，利用测度$\hat{\nu}$ 的乘积结构，并根据 N_t 取值的不同对该集合进行划分：

$$\nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} = w_t\}\right) = \frac{1}{\mu(\tau)} \sum_{n \geq 0} \int_I Q_n(t,u)\, du\,, \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_n(t,u) &:= \mu\left(A_0 \cap T^{-n} B_0 \cap \{\kappa_n = w_t,\, \widetilde{\tau}_n \in u + t - n\mu(\tau) - J\}\right) \\ &= \mu\left(A_0 \cap T^{-n}(B_0) \cap \left\{\widehat{\Psi}_n \in (w_t, t - n\mu(\tau)) + \{0\} \times J_u\right\}\right)\,, \end{aligned}$$

其中 $J_u = u - J$，回忆一下 $\Psi_n = (\kappa_n, \widetilde{\tau}_n)$。当 L 较大时，我们将该和拆分为

$$\nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} = w_t\}\right) = S_1(t,L) + S_2(t,L)\,,$$

其中

$$S_1(t,L) := \frac{1}{\mu(\tau)} \sum_{n\,:\,|n - t/\mu(\tau)| \leq L a_t} \int_I Q_n(t,u)\, du\,,$$

$$S_2(t,L) := \frac{1}{\mu(\tau)} \sum_{n\,:\,|n - t/\mu(\tau)| > L a_t} \int_I Q_n(t,u)\, du\,.$$

证明命题 4.1 所需的主要要点是

引理 4.2 (a) $\lim_{L\to\infty} \lim_{t\to\infty} a_t^d S_1(t,L) = \widetilde{g}_d(w)\nu(A)\nu(B)$,

(b) $\lim_{L\to\infty}$ 上极限$_{t\to\infty} a_t^d S_2(t,L) = 0$。

引理 4.2 的证明见下文第 4.2 段。根据引理 4.2 的陈述，我们可以完成

命题 4.1 的证明 注意，由于 (4.9)，(4.1) 对于 $w_t \in \mathbb{Z}^d$ 和 $K = \{0\}$可直接由引理 4.2 得出。接下来需要从这个特殊情形推广到一般情形。设 $w_t \in \mathbb{R}^d$，并考虑 $\mathbb{R}^d$的一个有界子集 K。那么 $(w_t + K) \cap \mathbb{Z}^d$ 至多包含 $(\mathrm{diam}(K) + 1)^2$ 个整数，我们可以将它们标记为 $w_{t,\,i}$，其中 $i = 1$，.....，$(\mathrm{diam}(K) + 1)^2$（例如，先按第一坐标排序，再按第二坐标排序；如有必要，再按此顺序补上最后一个元素的后继）。然后

$$\begin{aligned} a_t^d\, \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} \in w_t + K\}\right) &= a_t^d \sum_{i=1}^{\#((w_t+K)\cap\mathbb{Z}^d)} \nu\left(A \cap \{\phi_t \in B,\, \kappa_{N_t} = w_{t,i}\}\right) \\ &\sim \#((w_t + K) \cap \mathbb{Z}^d)\, \widetilde{g}_d(w)\nu(A)\nu(B)\,, \end{aligned}$$

对每个序列 $(w_{t,\,i})_t$，应用 (4.1) 并取 $K = \{0\}$。事实上，由于 K 是有界集，$\lim_{t\to+\infty} w_t/a_t = w$ 且 $\lim_{t\to+\infty} a_t = +\infty$，我们得到 $\lim_{t\to+\infty} w_{t,\,i}/a_t = w$ 对所有 i 均成立。 ∎

4.2 引理 4.2 的证明

我们将使用引理 3.4 和引理 3.5。

引理 4.2(a) 的证明 由引理 3.4 可得此结论。我们考虑范围$|n - t/\mu(\tau)| \le La_t$。由于$\frac{w_t}{a_n} = \frac{w_t}{a_t}\frac{a_t}{a_n} \sim \sqrt{\mu(\tau)}w$，且由于 $\frac{t-n\mu(\tau)}{a_n}$有界，由引理 3.4 可知

$$\begin{aligned} a_n^{d+1}\frac{Q_n(t,u)}{\mu(\tau)} &\sim \frac{1}{\mu(\tau)} g_{d+1}\left(\sqrt{\mu(\tau)}w, \frac{t-n\mu(\tau)}{a_n}\right)\mu(A_0)\mu(B_0)\Lambda_{d+1}(\{0\}\times J) \\ &\sim \frac{\mu(\tau)}{|I|} g_{d+1}\left(\sqrt{\mu(\tau)}w, \frac{t-n\mu(\tau)}{a_n}\right)\nu(A)\nu(B)\,, \end{aligned}$$

对满足 $|n - t/\mu(\tau)| \le La_t$ 的 n 一致成立。因此

$$a_t^d S_1(t,L) \sim \sum_{n\,:\,|n-t/\mu(\tau)|\le La_t} \frac{(\mu(\tau))^{1+\frac{d}{2}}}{a_n} g_{d+1}\left(w\sqrt{\mu(\tau)}, \frac{t-n\mu(\tau)}{a_n}\right)\nu(A)\nu(B)\,.$$

将黎曼和近似为黎曼积分，右端在 $t \to +\infty$ 趋于.....时收敛到

$$(\mu(\tau))^{\frac{d}{2}} \int_{-L\mu(\tau)^{3/2}}^{L\mu(\tau)^{3/2}} g_{d+1}\left(w\sqrt{\mu(\tau)}, z\right)\, dz\, \nu(A)\nu(B)$$

而其自身在 $L \to +\infty$ 趋于.....时收敛到 $\widetilde{g}_d(w)\nu(A)\nu(B)$，正如所述，因为 $\widetilde{g}_d(w) = (\mu(\tau))^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}} g_{d+1}(w\sqrt{\mu(\tau)}\, z)\, dz$。 ∎

关于引理 4.2(b) 的证明，注意到 $Q_n(t,u) \le Q_n(t)$，其中

$$\widetilde{Q}_n(t) = \sup_{u\in I} \mu\left(\widehat{\Psi}_n \in (w_t, t-n\mu(\tau)) + \{0\}\times J_u\right).$$

引理 4.2(b) 可直接由接下来的两个子引理得出。

子引理 4.3 对任意 $c \in (0, 1/\mu(\tau))$，$\lim_{L\to\infty} \limsup_{t\to\infty} a_t^d \sum_{n>ct \,:\, La_t<|n-t/\mu(\tau)|} \widetilde{Q}_n(t) = 0$.

证明 在这个范围内，$n \gg t$，因此 $\frac{n}{a_n^{d+1}} = n^{-\frac{d-1}{2}}(\log n)^{-\frac{d+1}{2}} \ll \frac{t}{a_t^{d+1}}$。于是，对于任意足够大的 L，利用引理 3.5 并取 $|z|_\infty = |t - n\mu(\tau)|$，我们得到

$$\sum_{n>ct:La_t<|n-t/\mu(\tau)|} \widetilde{Q}_n(t) \ll \frac{t}{a_t^{d+1}} \sum_{n>ct:La_t<|n-t/\mu(\tau)|} \frac{|\log|t-n\mu(\tau)||}{1+|t-n\mu(\tau)|^2} \ll \frac{t}{a_t^{d+1}}\frac{\log(a_t)}{La_t} \ll \frac{1}{La_t^d}\,,$$

因为 $\log u/u^2$ 有原函数 $-(1+\log u)/u$，且因为 $a_t^2 = t\log t \sim 2t\log a_t$。 ∎

~子引理 4.4 对于任意 $c \in (0, 1/\mu(\tau))$，$\lim_{L\to\infty}$ 上极限$_{t\to\infty} a_t^d \sum_{n<ct} Q_n(t) = 0$。

证明 在此范围内，$t - n\mu(\tau) \approx t \gg n$。因此，由引理 3.5 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n<ct} \widetilde{Q}_n(t) &\ll \sum_{n<ct} \frac{n}{a_n^{d+1}} \frac{1+\log t}{t^2} \\ &\ll \frac{1+\log t}{t^2} \sum_{n<ct} \frac{1}{n^{\frac{d-1}{2}} (\log n)^{\frac{d+1}{2}}} \\ &\ll \frac{1+\log t}{t^2} \frac{t^{\frac{3-d}{2}}}{(\log t)^{\frac{d+1}{2}}} \ll t^{-\frac{d+1}{2}} (\log t)^{-\frac{d-1}{2}} = o(a_t^{-d})\,.\end{aligned}$$

∎

5 洛伦兹气体混合性的证明（定理 1.1）

本节中，我们假设 $d = 1$ 或 $d = 2$。推论 2.3 给出了悬架 $\widehat{\mathcal{M}} \times \mathbb{Z}^d$中紧支撑函数的混合性。为处理定理 1.1 中的自然函数类（在流形上具有紧支撑），我们关键地依赖以下紧性型结果，这是本文最为棘手的部分。

~定理 5.1 设 $K_0 > 0$ 为固定值，并令 B_0 为所有满足以下条件的 x 的集合：$\in \mathcal{M}$ 的位置与原点的距离至多为 K_0。对于任意正整数 R_0，令 B_{R_0} 为所有属于 B_0 且在时间区间 $[0, R_0)$ 内没有发生碰撞的 ~ 构型 $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ 的集合。那么

$$\lim_{R_0\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} a_t^d \widetilde{\nu}\left(B_{R_0} \cap \Phi_{-t}(B_0)\right) = 0\,.$$

在继续证明定理 5.1 之前，我们先来看定理 1.1 如何由推论 2.3 和定理 5.1 得出。

定理 1.1 的证明 设 f 和 g 均为非负函数，且支撑集包含于B_0。我们将使用推论 2.3 及其中定义的集合 $E_{\pm n}$。注意到 $B_0 \setminus E_{-n} \subset B_n$。令$(f_n)_n$（分别令$(g_n)_n$）为一个递增的连续函数序列，其支撑集包含于 E_{-2n}（分别包含于 E_{2n}），在 E_{-n}（分别在 E_n）上与 f（分别与 g）一致，并逐点收敛到 f（分别收敛到 g）。因此，由定理 5.1 及 Φ的时间可逆性可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} \left| a_t^d \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} [f.g \circ \Phi_t - f_n.g_n \circ \Phi_t]\, d\widetilde{\nu} \right| \\ &\qquad \le \lim_{n\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} 2\|f\|_\infty \|g\|_\infty a_t^d \widetilde{\nu}\left(B_n \cap \Phi_{-t}(B_0)\right) = 0\,. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

因此，对于每个 n,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty}\left|a_t^d\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f.g\circ\Phi_t-\widetilde{g}_d(0)\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g\,d\widetilde{\nu}\right| &\le \limsup_{t\to+\infty}\left|a_t^d\int_{\widetilde{\mathcal{M}}}[f.g\circ\Phi_t-f_n.g_n\circ\Phi_t]\,d\widetilde{\nu}\right| \\
&+\limsup_{t\to+\infty}\left|a_t^d\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f_n.g_n\circ\Phi_t\,d\widetilde{\nu}-\widetilde{g}_d(0)\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f_n\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g_n\,d\widetilde{\nu}\right| \\
&+\widetilde{g}_d(0)\left|\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f_n\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g_n\,d\widetilde{\nu}-\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g\,d\widetilde{\nu}\right| \\
&\le \limsup_{t\to+\infty}\left|a_t^d\int_{\widetilde{\mathcal{M}}}[f.g\circ\Phi_t-f_n.g_n\circ\Phi_t]\,d\widetilde{\nu}\right| \\
&+\widetilde{g}_d(0)\left|\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f_n\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g_n\,d\widetilde{\nu}-\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} f\,d\widetilde{\nu}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g\,d\widetilde{\nu}\right|,
\end{aligned}$$

最后一个不等式中，我们使用了推论 2.3，并将其应用于 f_n、g_n。由于这对任意的 n 都成立，我们令 $n\to+\infty$ 取极限即可得出结论，这归功于 (5.1) 和控制收敛定理。∎

本节其余部分将用于证明定理 5.1。回顾一下，K_0 是固定的，我们需要估计 $\widetilde{\nu}(B_{R_0}\cap\Phi_{-t}(B_0))$。证明策略分为两步。第一步（对应第 5.2 小节）中，我们说明如何忽略具有首个或最后一个长自由飞行的“坏”构型（引理 5.4），以及在时间区间 $[0,t]$ 内碰撞次数很少的构型（引理 5.3 和引理 5.6）。第二步（对应第 5.3 小节）中，我们将估计属于 $B_{R_0}\cap\Phi_{-t}(B_0)$ 的“好”构型集合的概率：我们将该集合写成若干集合的并（如命题 4.1 的证明中所做，但需要额外的求和且更为复杂），这些集合的测度对应于一个可用西奈台球映射 T表示的集合的测度。

在证明定理 5.1 的过程中，我们得到了以下大偏差结果（在第 5.2 节中证明），该结果本身也很有意义。

命题 5.2 当 c_1 足够小时，

$$\mu(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}>t)\le\nu(N_t\le c_1 t)/\min\tau=\mathcal{O}(\log t/t)\,.$$

界 $\mathcal{O}(\log t/t)$ 是最优的，因为 τ 属于非标准中心极限定理的适用范围，其归一化因子为 $\sqrt{t\log t}$。此界与独立同分布情形下采用 $\sqrt{t\log t}$ 归一化的最优结果一致，参见 [5, 31]。

5.1 定理 5.1 证明所需的记号与回顾

在深入证明之前，我们先介绍一些所需的记号。回顾一下，κ 表示胞腔变化（取值于 $\mathbb{Z}^d$）。考虑$\widetilde{\kappa}$将很有用：$M\to\mathbb{Z}^2$ 表示 $\mathbb{Z}^2$-周期洛伦兹气体中的胞腔变化；因此 $\kappa=\pi_d(\widetilde{\kappa})$

其中 $\pi_2 = Id$ 和 $\pi_1 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是第一坐标上的典范投影。$\widetilde{\ }$注意，当 $d = 2$时，$\widetilde{\kappa} = \kappa_\circ$ 我们通过令$\widetilde{\ }\widetilde{\kappa}(\Phi_u(q,\vec{v})) = \widetilde{\kappa}(p_d(q)\ \vec{v})$，将 $\widetilde{\kappa}$ 的定义扩展到 $\mathcal{M}$，其中对每个 $x = (q,\vec{v}) \in M$以及每个 $u \in [0,\tau(x)$均成立。记 $N_t(\mathbf{x})$表示从$\mathbf{x} \in \mathcal{M}$出发的轨迹$\widetilde{\ }$在时间区间$(0,t]$ 内的碰撞次数。回顾一下， H_0 是在(2.10)中定义的有界余边界。在本节余下部分，我们固定 c_1 使得

$$c_1 \in (0, 1/(1000\mu(\tau))) \text{ and } 2c_1\|H_0\|_\infty < 1/100. \tag{5.2}$$

我们考虑引理 3.2 中出现的常数 a_0 。必要时适当减小其值，根据例如 [10, 定理 7.37、注 7.38]，可知存在 $C_0' > 0$，使得

$$\forall n' \in \mathbb{N}_0, \quad Cov\left(f((\widetilde{\kappa}\circ T^m)_{m\geq n'}), g((\widetilde{\kappa}\circ T^{m'})_{m'\leq 0})\right) \leq C_0'\|f\|_\infty\|g\|_\infty e^{-a_0 n'}, \tag{5.3}$$

对于任意有界可测函数 f, g，注意到 $f((\widetilde{\kappa}\circ T^m)_{m\geq 0})$ 在稳定曲线上为常数，而 $g((\widetilde{\kappa}\circ T^{m'})_{m'\leq -1})$ 在不稳定曲线上为常数，因此，这些函数分别由空间 $\mathcal{H}^-$ 和$\mathcal{H}^+$ 中的无穷范数所界，其中这些空间在 [10]中定义。

我们固定 $K > 0$ ，使得

$$C_0' e^{-a_0\lfloor K\log t\rfloor} \leq t^{-100} \tag{5.4}$$

我们回顾一下，文中已证明 [34] ，即

$$\mu(\widetilde{\kappa} = z) = \mathcal{O}(|z|^{-3}), \tag{5.5}$$

并且， $\mathbb{R}^2$ 中与$\mathcal{D}_2$ 的通道方向相对应的单位向量集合 $\mathfrak{C}$ （也就是说， $\mathbb{R}^2$ 中一条不接触任何障碍物的直线的方向）是有限的。最后，回顾一下，根据 [34, 命题 11–12、引理 16],

$$\forall V > 0, \quad \mu\left(\widetilde{\kappa} = z, \exists |j| \leq V\log(|z|+2),\ j \neq 0,\ |\widetilde{\kappa}|\circ T^j > |z|^{4/5}\right) = \mathcal{O}\left(|z|^{-3-\frac{2}{45}}\right). \tag{5.6}$$

5.2 对“坏”构型的控制

前 n 个引理允许我们忽略在时间 t 之前没有发生碰撞的轨迹。

引理 5.3 当 $t \to +\infty$ 时，以下估计成立，

$$\widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \{\widetilde{N}_t = 0\}\right) = o(a_t^{-d}).$$

证明 当 $d=2$ 时，该引理显然成立：一旦 $t>4K_0$， $N_t\geq 1$；否则，在时刻 t，轨迹与其在时刻 0 的初始位置相距不可能小于 $2K_0$。

当 $d=1$ 时，我们可以得到 $N_t=0$，因为垂直方向上可能存在很长的自由飞行，而这些飞行仍保持在有界距离内。然而，利用将 $(\mathcal{M},(\Phi_t)_t,\widetilde{\nu})$ 表示为建立在 $\mathbb{Z}$-扩张之上的悬挂流，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\{\widetilde{N}_t=0\}\right)&\leq(2K_0+1)\nu(\widetilde{N}_t=0)\\&\leq\frac{2K_0+1}{\mu(\tau)}\int_0^{+\infty}\mu(\tau>s+t)\,ds\\&\ll\int_0^{+\infty}(1+s+t)^{-2}\,ds\ll t^{-1}=o(a_t^{-1})\,,\end{aligned}$$

这里用到了 (2.12) 和 (2.9)。 ∎

下面的引理保证，我们可以忽略首段或末段自由飞行很长的轨迹。

引理 5。 4 存在一个常数 $C'>0$，使得对所有足够大的 R_0 和 t，

$$\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\{|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0\}\right)\leq C'a_t^{-d}/\log R_0\,.$$

注 5.5 注意，由于 Φ_t 保持测度 $\widetilde{\nu}$，我们同样有$\widetilde{\nu}\left(\Phi_{-t}\left(B_0\cap\{|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0\}\right)\right)\leq C'a_t^{-d}/\log R_0$。

证明 [引理 5.4] 再次利用将 $(\mathcal{M},(\Phi_t)_t,\widetilde{\nu})$ 表示为基于 $\mathbb{Z}^d$-扩张的悬挂流这一表示，我们注意到

$$\begin{aligned}&\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\{|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0\}\right)\leq(2K_0+1)^2\nu\left(|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0\right)\\&\leq\frac{(2K_0+1)^2}{\mu(\tau)}\mathbb{E}_\mu\left[\tau 1_{\{|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0\}}\right]\\&\ll\int_{a_t^d\log R_0}^{+\infty}\mu(\tau>s)\,ds+a_t^d\log R_0\mu(|\widetilde{\kappa}|>a_t^d\log R_0))\\&\ll\int_{a_t^d\log R_0}^{+\infty}s^{-2}\,ds+(a_t^d\log R_0)^{-1}\ll a_t^{-d}/\log R_0\,,\end{aligned}$$

利用 (2.12)。 ∎

下面的引理处理剩余的范围，即 $n=N_t\leq c_1t$ 其中 c_1如 (5.2) 中所述。

引理 5.6 对所有 $R_0>0$,

$$\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\Phi_{-t}(B_0)\cap\{\widetilde{N}_t\leq c_1t\}\right)=o(a_t^{-d})\,,$$

如 $t\to+\infty$。

为证明这一引理，我们将分别处理 $d=1$ 和 $d=2$的情形。以下两种情形的证明主要依赖于对相关求和进行非常精细的分解，并利用 (5.6) 和引理 3.5（联合局部极限定理）作精细估计。引理 5.6 对于 $d=1$ 的证明将用到以下中间结果。

子引理 5.7 回顾一下， K 满足（5.4）。于是

$$\widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \{\widetilde{N}_{t/100} \leq K\log t\}\right) \leq (2K_0+1)^2 \nu(N_{t/100} \leq K\log t) \ll (\log t)/t\,.$$

子引理的证明 回顾一下， B_0 的直径为 $2K_0$。第一个不等式源于以下事实： B_0 至多包含（$2K_0+1$）^{2} 个 $\mathcal{M}$的副本。下面证明第二个不等式。注意到

$$\begin{aligned}
&\nu(N_{t/100} \leq K\log t) = \frac{1}{\mu(\tau)}\mathbb{E}_\mu\left[\tau.\mathbf{1}_{\{\tau_{\lfloor K\log t\rfloor+1}\geq t/100\}}\right] \\
&\ll \mathbb{E}_\mu\left[\tau.\mathbf{1}_{\bigcup_{k=0}^{\lfloor K\log t\rfloor}\{\tau\circ T^k > t/(100(1+K\log t))\}}\right] \qquad (5.7)\\
&\ll \mathbb{E}[\tau.\mathbf{1}_{\{\tau\geq t/(100(1+K\log t))\}}] + \mathbb{E}\left[\tau.\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{\lfloor K\log t\rfloor}\{\tau<t/(100(1+K\log t)),\ \tau\circ T^k\geq t/(100(1+K\log t))\}}\right]. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

现在，按照引理 5.4的证明进行推导，由（2.12）可知，对所有$t>2$、[5]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu\left[\tau.\mathbf{1}_{\{\tau>\frac{t}{100(K\log t+1)}\}}\right] &= \int_0^{+\infty}\mu\left(\tau.\mathbf{1}_{\{\tau>\frac{t}{100(K\log t+1)}\}}>z\right)dz \\
&= \int_0^{\frac{t}{100(K\log t+1)}}\mu\left(\tau>\frac{t}{100(K\log t+1)}\right)dz + \int_{\frac{t}{100(K\log t+1)}}^{+\infty}\mu\left(\tau>z\right)dz \\
&\ll (t/\log t)^{-1}\,, \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

从而控制了（5.8）右端的第一项。对于（5.8）右端的第二项，我们区分 τ取值较小（分别为较大）的情况。令 $m:=(1+\frac{1}{45})^{-1}$。一方面，

$$\mathbb{E}_\mu\left[\tau 1_{\{\tau\leq t^m\}}.\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{\lfloor K\log t\rfloor}\{\tau\circ T^k\geq t/(100(1+K\log t))\}}\right] \ll t^m\log t(t/\log t)^{-2} = t^{m-2}(\log t)^3\,, \qquad (5.10)$$

[5]~~我们在此再次使用经典公式 $\mathbb{E}_\mu[X] = \int_0^{+\infty}\mu(X>z)\,dz$~~，该公式对任意正可测 X 均成立：$M\to[0,+\infty)$。

其中我们用到了 $\tau \le t^m$ 和 $\mu\left(\bigcup^{\lfloor K\log_{k=1}} {}^{t\rfloor}\{\tau\circ T^k \ge z\}\right) \le K\log\, t\,\mu(\tau > z)$ $\ll z^{-2}\log\, t$。另一方面，由于 $\tau - |\widetilde{\kappa}|$ 一致有界于某个常数 L_0,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mu\left[\tau 1_{\{t^m\le\tau\le t/(100(1+K\log t))\}}.\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{\lfloor K\log t\rfloor}\{\tau\circ T^k\ge t/(100(1+K\log t))\}}\right]\\
&\le \sum_{z:t^m-L_0\le|z|\le t/(100(1+K\log t))+L_0}(|z|+L_0)\mu\left(\widetilde{\kappa}=z,\quad \exists k=1,...,K\log t,\ |\widetilde{\kappa}|\circ T^k > \frac{t}{100K\log t}-L_0\right)\\
&\ll \sum_{z\in supp(\widetilde{\kappa}):\,|z|\ge t^m-L_0}(|z|+L_0)|z|^{-3-\frac{2}{45}} \ll t^{-m(1+\frac{2}{45})} = t^{m-2}\,, \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

其中我们对 $V = \frac{2K}{m}$ 应用 (5.6)（事实上，当 t 足够大时， $K\log t \le V\log(t^m - L_0 + 2)$）。因此，由于 $m-2 = -\frac{47}{46} < -1$，子引理中的最后一个界由 (5.8)、(5.9)、(5.10) 和 (5.11) 得出。 ∎

在 $d = 1$ 的情形下，引理 5.6 可由以下结果推出。

子引理 5.8

$$\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\{\widetilde{N}_t\le c_1t\}\right) \le (1+2K_0)^2\nu(N_t\le c_1t) \ll (\log t)/t\,.$$

子引理的证明 再次，第一个不等式由以下事实得出： B_0至多包含 $(2K_0+1)^2$ 个 $\mathcal{M}$ 副本。主要问题是证明最后一个上界。由于流 ϕ 保持 ν， $\nu(N_t\le c_1t) = \nu(N_t\circ\phi_{-t/2}\le c_1t)$。此外，事实 $N_t\circ\phi_{-t/2}\le c_1t$ 意味着在时间区间 $[-t/2$内至多发生 c_1t 次碰撞； $t/2]$，因此在两个时间区间 $[-t/2;0]$ 和$[0;t/2]$内至多发生 c_1t 次碰撞，这意味着 $\tau_{\lfloor c_1t\rfloor}$ 和 $\tau - \tau_{-\lfloor c_1t\rfloor}$ 都大于 $t/2$，按惯例记 $\tau_{-k} := -\sum_{m=-k}^{-1}\tau\circ T^m$ 和 $\tau_m(\phi_u(x)) := \tau_m(x)$，对所有 $(x,u)\in\widehat{\mathcal{M}}$均成立。因此

$$\nu(N_t\le c_1t) = \nu(N_t\circ\phi_{-t/2}\le c_1t) \le \nu(\tau_{\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau - \tau_{-\lfloor c_1t\rfloor} > t/2)\,, \qquad (5.12)$$

接下来我们证明这个量是 $o(a_t^{-1})$。根据引理 5.4， $\nu(\tau > a_t^2)\ll a_t^{-2}$；根据子引理 5.7， $\nu(\tau_{\lfloor K\log t\rfloor} > t/100)\ll(\log\, t)/t$，且 $\nu(\tau - \tau_{-\lfloor K\log t\rfloor} > t/100)\ll(\log t)/t$ （忽略 Φ 的时间反演对称性）。结合 (5.12)，可知

$$\nu(N_t\le c_1t) \le p_t + \mathcal{O}((\log t)/t)\,, \qquad (5.13)$$

with

$$\begin{aligned}
p_t &:= \nu\left(\tau < a_t^2, \tau_{\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau - \tau_{-\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau_{\lfloor K\log t\rfloor} < t/100, \tau - \tau_{-\lfloor K\log t\rfloor} < t/100\right)\\
&= \sum_{a'=0}^{a_t^2}\mu\left(\tau > a',\ \tau_{\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau - \tau_{-\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau_{\lfloor K\log t\rfloor} < t/100, \tau - \tau_{-\lfloor K\log t\rfloor} < t/100\right)\\
&\le \sum_{a'=0}^{a_t^2}\mu\Big(|\widetilde{\kappa}| > a' - 2\|H_0\|_\infty,\ \tau_{\lfloor c_1t\rfloor} > t/2,\\
&\qquad\qquad , \tau + \tau_{-\lfloor c_1t\rfloor} > t/2, \tau_{\lfloor K\log t\rfloor} < t/100,\ \tau - \tau_{-\lfloor K\log t\rfloor} < t/100\Big)\,,
\end{aligned}$$

其中函数 H_0 出现在 (2.10) 中（因为当 $d=2$ 时，$|V|=\tau$）。注意到

$$\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor} > \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor-\lfloor K\log t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor} = \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}-\tau_{\lfloor K\log t\rfloor}$$

并且

$$-\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} > -\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor+\lfloor K\log t\rfloor}\circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} = -\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}+\tau-\tau+\tau_{-\lfloor K\log t\rfloor}\,.$$

由此可得

$$p_t \le \sum_{a'=0}^{a_t^2\log R_0} \mu\left(|\widetilde{\kappa}|>a'-2\|H_0\|_\infty,\, \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}>49t/100, |\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}|\circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor}>49t/100\right).$$

回忆一下，对于所有的 $m\in\mathbb{Z}$, $|\widetilde{\kappa}_m|\ge\tau_m-2m\|H_0\|_\infty$，并且由于 (5.2)，$2c_1\|H_0\|_\infty < 1/100$。因此,

$$p_t \le \sum_{a'=0}^{a_t^2\log R_0} \mu\left(|\widetilde{\kappa}|>a'-2\|H_0\|_\infty,\, |\widetilde{\kappa}|_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}>48t/100, -|\widetilde{\kappa}|_{-\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor}>48t/100\right).$$

因此，结合 (5.4) 两次使用 (5.3),

$$p_t \le \sum_{a'=0}^{a_t^2\log R} \left(\mu\left(|\widetilde{\kappa}|>a'-2\|H_0\|_\infty\right)\left(\mu\left(|\widetilde{\kappa}|_{\lfloor c_1 t\rfloor}>48t/100\right)\right)^2+\mathcal{O}(t^{-100})\right). \quad (5.14)$$

由引理 3.5（取 $d=0$）且由于 τ 是 μ-可积的,

$$\begin{aligned}
\mu\left(|\widetilde{\kappa}|_{\lfloor c_1 t\rfloor}>48t/100\right) &\le \mu\left(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}>47t/100\right)\\
&\le \mu(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}>t^2)+\mu\left(47t/100<\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}<t^2\right)\\
&\ll \frac{\mathbb{E}_\mu[\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}]}{t^2}+\sum_{k=2t/5}^{t^2}\frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log(k-\lfloor c_1 t\rfloor\mu(\tau))}{1+(k-\lfloor c_1 t\rfloor\mu(\tau))^2}\\
&\ll t^{-1}+\sum_{k\ge t(2/5-c_1\mu(\tau))}\frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log t}{1+k^2}\\
&\ll \frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log t}{t}=\sqrt{\frac{\log t}{t}}\,.
\end{aligned}$$

结合（5.14）和（5.13），我们推得

$$\nu(N_t<c_1 t)\le\sum_{a'=0}^{a_t^2\log R_0}\left((a'+1)^{-2}\frac{\log t}{t}+\mathcal{O}(t^{-100})\right)+\mathcal{O}((\log t)/t)=\mathcal{O}(\log t/t)\,.$$

■

我们采用下面这条直线来快速完成

命题 5.2 的证明 我们观察到

$$\begin{aligned}\mu(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor} > t) &\le \frac{\widehat{\nu}(\{(x,u)\in\widehat{\mathcal{M}} \,:\, \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}(x) > t,\ u \le \min\tau\})}{\min\tau}\\ &\le \frac{\widehat{\nu}(\{(x,u)\in\widehat{\mathcal{M}} \,:\, N_t(x) < \lfloor c_1 t\rfloor,\ u \le \min\tau\})}{\min\tau}\\ &\le \frac{\nu(N_t \le \lfloor c_1 t\rfloor)}{\min\tau} \le \frac{\nu(N_t \le c_1 t)}{\min\tau}\,,\end{aligned}$$

并由子引理 5.8 得出结论。 ∎

我们继续讨论

引理 5.6 的证明 当 $d = 1$ 时，结果由子引理 5.8 得出，因为

$$\widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \{\widetilde{N}_t \le c_1 t\}\right) \le \widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \{\widetilde{N}_t \le c_1 t\}\right) \ll (\log t)/t = o(a_t^{-1})\,.$$

遗憾的是，当 $d = 2$ 时，这个估计还不够。在整个证明过程中，我们从现在起假设 $d = 2$。回顾一下，我们需要证明

$$\widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \{\widetilde{N}_t \le c_1 t\}\right) = o(a_t^{-2}) = o((t\log t)^{-1}) \quad (\text{assuming } d = 2)\,.$$

我们先进行一些初步计算，以便说明可以忽略在未来和过去的 $K\log\, t$ 个碰撞时刻中，出现多于一次长自由飞行（长度大于$t/(100(K\log t)^2)$）的那些构型。记

$$D_t := \{\exists k,\ell\colon\ k\neq\ell;\ |k|,|\ell| \le K\log\, t, \min(\tau\circ T^k, \tau\circ T^\ell)\ > t/(100(K\log\, t)^2)\} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$$

以及 D_t 对应于 $\mathcal{M}$中的事件。

子引理 5.9 对于所有 $\varepsilon \in (0, 1/45)$,

$$\widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t/2}(\widetilde{D}_t)\right) \le (2K_0+1)^2\nu(D_t) = o(t^{-1-\frac{1}{45}+\varepsilon}) = o(a_t^{-2})\,,\quad as\ t\to+\infty\,.$$

子引理的证明。再次如子引理 5.7 和 5.8 的证明所示，第一个不等式源于以下事实: $\mathcal{M}$ 由至多 $(2K_0+1)^2$ 个 $\mathcal{M}$副本构成，且 ϕ 保持测度 ν。剩下的就是证明最后一个估计。利用悬挂流表示，并对任意满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且充分接近 2 的$p<2<q$ 应用 H¨older 不等式，我们观察到

$$\begin{aligned}\nu(D_t) &\le 2\sum_{-K\log t\le k<\ell\le K\log t} \mathbb{E}_\mu[\tau.\mathbf{1}_{\tau\circ T^k > t/(100(K\log t)^2),\,\tau\circ T^\ell > t/(100(K\log t)^2)}]\\ &\le 2\sum_{-K\log t\le k<\ell\le K\log t} \|\tau\|_{L^p}\left(\mu(\tau\circ T^k > t/(100(K\log t)^2), \tau\circ T^\ell > t/(100(K\log t)^2))\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le 2\sum_{-K\log t\le k,\ell\le K\log t\,:\,k\neq\ell} \|\tau\|_{L^p}\left(\sum_{i\in Supp(\widetilde{\kappa}):|i|>t/(100(K\log t)^2)} \mu(\widetilde{\kappa}\circ T^k = i, |\widetilde{\kappa}|\circ T^\ell > |i|^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

最后，取足够大的 $V = 4K$ 和 t，使得 $2K \log t < V \log(2 + 100\, K^{\frac{t}{(\log t)^2}})$，再应用 (5.6)，我们得出，对于足够大的 t，

$$\nu(D_t) \ll (\log t)^2 \left(\sum_{i > t/(100(K \log t)^2)} i^{-3-\frac{2}{45}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

并且对于任意实数 $q > 2$，这个界都成立。 ∎

回到引理 5.6 的证明，并假设 $d = 2$。我们将把需要估计的量 $p_{t,\ 1} + p_{t,\ 2}$ 分解，分别讨论时刻 $t/2$ 的自由飞行大于还是小于 $t/4$ 的情形。

时刻 $t/2$ 的自由飞行大于 $t/4$ 时的估计。在这一部分，我们研究

$$p_{t,1} := \widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \{\widetilde{N}_t \le c_1 t, \tau \circ \Phi_{\frac{t}{2}} > t/4\} \right). \tag{5.15}$$

根据引理 5.4，我们可以忽略满足 $\tau \circ \Phi_{t/2} > a_t^3$ 的轨迹，因为

$$\widetilde{\nu}(B_0 \cap \{\tau \circ \Phi_{t/2} > a_t^3\}) \le (2K_0 + 1)^2 \nu\left(\tau \circ \phi_{t/2} > a_t^3\right) \ll a_t^{-3}. \tag{5.16}$$

由 (5.16) 和子引理 5.9 可得

$$p_{t,1} = \widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \left\{\widetilde{N}_t \le c_1 t\right\} \cap \Phi_{-\frac{t}{2}}\left(\left\{ \tau \in \left[\frac{t}{4}, a_t^3\right] \right\} \setminus \widetilde{D}_t \right) \right) + o(a_t^{-2}). \tag{5.17}$$

我们来研究上述公式中出现的事件。
事实是，$\tau \circ \Phi_{\frac{t}{2}} > t/4$ 并且 $\Phi_{t/2} \notin D_t$ 意味着，在时间 $t/2$ 发生的那次自由飞行之前和之后的 $K \log\, t$ 次自由飞行，其长度都小于$t/(100(K \log t)^2)$，因此

$$\tau_{\lfloor K \log t \rfloor} \circ \widetilde{T} \circ \Phi_{t/2} < t/(100(\lfloor K \log t \rfloor)) \quad \text{and} \quad |\tau_{-\lfloor K \log t \rfloor}| \circ \Phi_{t/2} < t/(100(\lfloor K \log t \rfloor)). \tag{5.18}$$

回忆一下，该构型属于 $B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0)$并满足 $\tau \circ \Phi_{t/2} > t/4$。由于$\sim N_t \le c_1 t$，且我们处于二维情形，在时间$t/2$进行的长度为 $t/4$ 的自由飞行，必须由时间区间 $[0$内进行的其他（至多$(\lfloor c_1 t \rfloor - 1)$次）自由飞行之和抵消；$t]$。因此，

$$|\tau_{-\lfloor c_1 t \rfloor}| \circ \Phi_{t/2} > t/8 \quad \text{or} \quad (\tau_{\lfloor c_1 t \rfloor} - \tau) \circ \Phi_{t/2} > t/8. \tag{5.19}$$

条件 (5.18) 和 (5.19) 结合起来意味着以下两个条件中至少有一个成立

$$|\tau_{-\lfloor c_1 t \rfloor}| \circ \widetilde{T}^{-\lfloor K \log t \rfloor} \circ \Phi_{t/2} > |\tau_{-\lfloor c_1 t \rfloor}| \circ \Phi_{t/2} - |\tau_{-\lfloor K \log t \rfloor}| \circ \Phi_{t/2} > 11t/100$$

or

$$\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ\widetilde{T}^{\lfloor K\log t\rfloor}\circ\Phi_{t/2}>(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}-\tau)\circ\Phi_{t/2}-\tau_{\lfloor K\log t\rfloor}\circ\widetilde{T}\circ\Phi_{t/2}>11t/100\,.$$

注意，上述第二个条件与上面第一个条件的区别仅在于复合了 Φ_t，并且使用了时间反演。因此，

$$\begin{aligned}p_{t,1}&\le 2\widetilde{\nu}\left(B_0\cap\left\{\tau\circ\Phi_{\frac{t}{2}}\in\left[\frac{t}{4};a_t^3\right],\ \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ\widetilde{T}^{\lfloor K\log t\rfloor}\circ\Phi_{t/2}>\frac{11t}{100}\right\}\right)+o(a_t^{-2})\\&\le 2(2K_0+1)^2\nu\left(\tau\circ\phi_{\frac{t}{2}}\in\left[\frac{t}{4};a_t^3\right],\ \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}\circ\phi_{t/2}>\frac{11t}{100}\right)+o(a_t^{-2})\end{aligned}$$

再次利用 B_0 至多由（$2K_0+1$）^{2} 个 $\mathcal{M}$副本组成这一事实。现在利用 ν的 $\phi_{t/2}$不变性，我们得到

$$\begin{aligned}p_{t,1}&\le 2(2K_0+1)^2\nu\left(\tau\in\left[\frac{t}{4};a_t^3\right],\ \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}>\frac{11t}{100}\right)+o(a_t^{-2}) &(5.20)\\&\ll o(a_t^{-2})+\sum_{a'=t/4}^{a_t^3}\mu\left(\tau>a',\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}>11t/100\right)\\&\ll o(a_t^{-2})+\sum_{a'=t/4}^{a_t^3}\mu\left(|\kappa|>a'-2\|H_0\|_\infty,|\kappa|_{\lfloor c_1 t\rfloor}\circ T^{\lfloor K\log t\rfloor}>10t/100\right)\\&\ll o(a_t^{-2})+\sum_{a'=t/4}^{a_t^3}\left(\mu\left(|\kappa|>a'-2\|H_0\|_\infty\right)\mu\left(|\kappa|_{\lfloor c_1 t\rfloor}>10t/100\right)+\mathcal{O}(t^{-100})\right)\\&\ll o(a_t^{-2})+\sum_{a'=t/4}^{a_t^3}(a')^{-2}\mu\left(|\kappa|_{\lfloor c_1 t\rfloor}>t/10\right). &(5.21)\end{aligned}$$

但是，利用引理 3.5（其中 $d=0$）以及 τ 的 μ-可积性，

$$\begin{aligned}\mu\left(|\widetilde{\kappa}|_{\lfloor c_1 t\rfloor}>t/10\right)&\le\mu\left(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}>9t/100\right)\\&\le\mu\left(\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}>t^3\right)+\mu\left(9t/100<\tau_{\lfloor c_1 t\rfloor}\le t^3\right)\\&\ll\frac{\mathbb{E}_\mu[\tau_{c_1 t}]}{t^3}+\sum_{k=9t/100}^{t^3}\frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log(k-\lfloor c_1 t\rfloor\mu(\tau))}{1+(k-\lfloor c_1 t\rfloor\mu(\tau))^2}\\&\ll t^{-2}+\sum_{k\ge t(9/100-c_1\mu(\tau))}\frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log t}{1+k^2}\\&\ll t^{-2}+\frac{t}{\sqrt{t\log t}}\frac{\log t}{t}=\sqrt{\frac{\log t}{t}}\,. &(5.22)\end{aligned}$$

结合 (5.21) 可得

$$p_{t,1} = o(a_t^{-2})\,. \tag{5.23}$$

估计时刻 $t/2$ 的自由飞行小于 $t/4$的情形。令

$$p_{t,2} := \widetilde{\nu}\left(B_0 \cap \Phi_{-t}(B_0) \cap \{\widetilde{N}_t \le c_1 t, \tau \circ \Phi_{\frac{t}{2}} \le t/4\}\right)\,.$$

再次利用以下事实： B_0 由至多 $(2K_0+1)^2$ 个 $\mathcal{M}$ 的副本组成，且 $\phi_{t/2}$保持 ν,

$$\begin{aligned} p_{t,2} &\le (2K_0+1)^2 \nu(N_t \le c_1 t, \tau \circ \phi_{t/2} \le t/4) \\ &\le (2K_0+1)^2 \nu\left(N_{t/2} \le c_1 t, N_{-t/2} \le c_1 t, \tau \le t/4\right)\,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

结合子引理 5.9 和时间反演对称性可得

$$\begin{aligned} &\nu(N_t < c_1 t, \tau \circ \phi_{t/2} \le t/4) \\ &\le o(a_t^{-2}) + \nu\left(N_{t/2} \le c_1 t, N_{-t/2} \le c_1 t, \tau \le t/4, \min(\tau_{\lfloor K\log t\rfloor} - \tau, |\tau_{-\lfloor K\log t\rfloor}|) \le t/100\right) \\ &\le o(a_t^{-2}) + 2\nu\left(N_{t/2} \le c_1 t,\ N_{-t/2} \le c_1 t,\ \tau \le t/4,\ |\tau_{-\lfloor K\log t\rfloor}| < t/100\right)\,. \end{aligned}$$

由于我们还知道

$$|\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}| \circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} = |\tau_{-\lfloor K\log t\rfloor - \lfloor c_1 t\rfloor} - \tau_{-\lfloor K\log t\rfloor}| > |\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor} - \tau| - |\tau_{-\lfloor K\log t\rfloor} - \tau| > \frac{t}{2} - \frac{t}{4} - \frac{t}{100}\,.$$

我们得到

$$\nu(N_t \le c_1 t, \tau \circ \phi_{t/2} \le t/4) \le o(a_t^{-2}) + 2\nu(N_{t/2} \le c_1 t,\ |\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}| \circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} > 24t/100, \tau \le t/4).$$

Let

$$A_{a',t'} = \{\tau \ge a' - 4\|H_0\|_\infty, \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor} - a' > 48t/100\}\,.$$

再次利用悬挂流表示，并结合关联估计 (5.3) 和 (5.4),

$$\begin{aligned} &\nu(N_t \le c_1 t, \tau \circ \phi_{t/2} \le t/4) + o(a_t^{-2}) \\ &\le \sum_{a'=0}^{\lfloor t/4\rfloor} \mu\left(\tau \ge a', \tau_{\lfloor c_1 t\rfloor} - a' \ge t/2, |\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}| \circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} > 24t/100\right) \\ &\le \sum_{a'=0}^{\lfloor t/4\rfloor} \mu\left(|\kappa| \ge a' - 2\|H_0\|_\infty, |\kappa|_{\lfloor c_1 t\rfloor} - a' \ge 49t/100, \left||\kappa|_{-\lfloor c_1 t\rfloor}\right| \circ T^{-\lfloor K\log t\rfloor} > 23t/100\right) \\ &\le \sum_{a'=0}^{\lfloor t/4\rfloor} \left(\mu\left(A_{a',t}\right)\mu\left(|\tau_{-\lfloor c_1 t\rfloor}| > 22t/100\right) + \mathcal{O}(t^{-100})\right) \\ &\le \sum_{a'=0}^{\lfloor t/4\rfloor} \mu\left(A_{a',t}\right)\sqrt{\frac{\log t}{t}}\,, \end{aligned}$$

其中最后一行用到了 (5.22)。

由前面的显示估计可得

$$\begin{aligned}\nu(N_t \le c_1 t, \tau\circ\phi_{t/2} \le t/4) &\le o(a_t^{-2}) + \nu(N_{48t/100+4\|H_0\|_\infty} \le c_1 t)\sqrt{\frac{\log t}{t}}\\ &= o(a_t^{-2})\,,\end{aligned}$$

结合 (5.24) 可知 $p_{t,\ 2} = o(a_t^{-2})$；再结合 (5.23)，便完成了 $d=2$ 情形下引理 5.6 的证明。 ∎

5.3 对“良好”构型的控制

由引理 5.6 和引理 5.4 以及注 5.5 可知，尚需研究集合中构型 $\mathbf{x} \in B_{R_0}\cap\Phi_{-t}(B_0)$ 的 $\widetilde{\nu}$-测度；这些构型在时间区间 $[0,t)$ 内至少发生 $c_1 t$ 次碰撞，且首次和末次自由飞行均小于 $a_t^d\log R$。下面的引理给出了该测度由一个和支配的结果。记 $\mathfrak{C}$ 为 $\mathcal{D}_2$ 中通道的单位方向集合。回顾一下，该集合是有限的（例如参见 [34]）。

引理 5.10 存在一个正整数 L_0、一个正实数 C_0 和一个紧集 $K'\subset\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}$，使得对所有整数 $R_0 > L_0$ 及所有 $t>0$,

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mu}\left(B_{R_0}\cap\Phi_{-t}(B_0)\cap\{\widetilde{N}_t > c_1 t,\ |\widetilde{\kappa}| \le a_t^d\log R,\ |\widetilde{\kappa}\circ\Phi_t| \le a_t^d\log R\}\right)\\ &\le C_0\sum_{\vec{w}_1,\vec{w}_2\in\mathfrak{C}}\ \sum_{n=\lfloor c_1 t\rfloor}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor}\ \sum_{a=R_0-L_0}^{\lfloor a_t^d\log R_0\rfloor}\ \sum_{b=0}^{\lfloor a_t^d\log R_0\rfloor}\mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K'))\,,\end{aligned}$$

其中我们设定

$$\begin{aligned}A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K') = \Big\{&\widehat{\Psi}_n \in (-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2), t-n\mu(\tau)-b-a)+K',\\ &|\widetilde{\kappa}\circ T^{-1}|\ge a, |\widetilde{\kappa}\circ T^n|\ge b\Big\}\ .\end{aligned}\tag{5.25}$$

~证明 设 $\mathbf{x}\in B_{R_0}\cap\Phi_{-t}(B_0)\cap\{N_t > c_1 t,\ |\widetilde{\kappa}|\le a_t^d\log R,\ |\widetilde{\kappa}\circ\Phi_t|\le a_t^d\log R\}$。我们将用 $(x,-u,\ell)\in M\times(-\infty,-R_0]\times\mathbb{Z}^d$, 其中 $u\in[0,\tau(T^{-1}(x)))$ 对 $\mathbf{x}$ 进行参数化。我们~将 $\mathbf{x}$ 写成 $\Phi_{-u}(\widetilde{x})$ 的形式，其中 $\widetilde{x}\in M$ 对应于粒子在下一个（未来）碰撞时刻的构型。该构型 $\widetilde{x}$ 属于某个胞腔$\mathcal{C}_\ell$，且 $\ell\in\mathbb{Z}^d$，因此 $\widetilde{x}$可改写为 $(p_{d\,0}^{-1}, (q)+\ell, \vec{v})$ 的形式，其中 $x=(q,\vec{v})\in M$（如第 2.1 节所述）。根据构造，$u\in[R_0,\tau(T^{-1}(x))$。我们按如下方式，用 $((T^n(x)\ s)\ \ell')\in\widehat{\mathcal{M}}\times\mathbb{Z}^d$ 对 $\Phi_t(\mathbf{x})$ 进行参数化。回想一下，N_t~是上文 (2.1) 中引入的圈数，我们将 $\Phi_t(\mathbf{x})$ 写成 $\Phi_s(T^n(\widetilde{x}))$ 的形式，其中 $n = N_t(\phi_{-u}(x)) - 1$，且 $s\in[0,\tau(T^n(x))$。由关于 $\mathbf{x}$ 的假设可知，$N_t(\phi_{-u}(x)) \ge \lfloor c_1 t\rfloor + 1$，因此 $n\ge\lfloor c_1 t\rfloor$。此外，$N_t\le 1+t/\min\tau$。因此

$$\lfloor c_1 t\rfloor \le n \le t/\min\tau\,.\tag{5.26}$$

由 (2.9) 和 (2.10) 可知，$\tau - |\widetilde{\kappa}|$ 一致有界。回想一下，$u \le \tau(T^{-1}(x))$ 且 $s \le \tau(T^n(x))$。我们通过令 u, s 取离散值来离散化，具体设为

$$a := \max(0, \lfloor u \rfloor - \|\tau - |\widetilde{\kappa}|\|_\infty) \le |\widetilde{\kappa}(T^{-1}(x))| \le a_t^d \log R_0 \,, \tag{5.27}$$

$$b := \max(0, \lfloor s \rfloor - \|\tau - |\widetilde{\kappa}|\|_\infty) \le |\widetilde{\kappa}(T^n(x))| \le a_t^d \log R_0 \,. \tag{5.28}$$

沿用前面的记号，

$$\widetilde{\tau}_n(x) = t - n\mu(\tau) - u - s = t - n\mu(\tau) - a - b + \mathcal{O}(1) \,, \tag{5.29}$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ 一致有界（且与 x 无关）。此外，存在两个廊道的单位方向 $\vec{w}_1$、$\vec{w}_2 \in \mathfrak{C}$，分别与第一次和最后一次自由飞行的方向“近乎”共线，这意味着

$$\widetilde{\kappa}(T^{-1}(x)) = |\widetilde{\kappa}(T^{-1}(x))|\vec{w}_1 + \mathcal{O}(1) \quad \text{and} \quad \widetilde{\kappa}(T^n(x)) = |\widetilde{\kappa}(T^n(x))|\vec{w}_2 + \mathcal{O}(1) \,,$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ 一致有界（且与 x 无关）。这意味着 $\ell = a\pi_d(\vec{w}_1) + \mathcal{O}(1)$，且 $\ell' = -b\pi_d(\vec{w}_2) + \mathcal{O}(1)$，其中 $\mathcal{O}(1)$ 再次一致有界（且与 x 无关）。因此，给定 $(a, b, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ 后，(ℓ, ℓ') 只有一致有界个可能取值。其次，这也意味着

$$\kappa_n + \pi_d(a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2) = \ell' - \ell + a\pi_d(\vec{w}_1) + b\pi_d(\vec{w}_2) = \mathcal{O}(1). \tag{5.30}$$

回顾 $\Psi_n = (\kappa_n, \widetilde{\tau}_n)$，由 (5.27)、(5.28)、(5.29) 和 (5.30) 可知，我们可以找到一个与 x 无关的紧集 K'，使得沿用前面的记号，

$$x \in A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, K') \,.$$

n、a、b 的界分别来自 (5.26)、(5.27)（以及 $u \ge R_0$）和 (5.28)。乘法常数 C_0 来自于：在固定 a 和 b 后，$(\ell, \ell', \lfloor u \rfloor, \lfloor s \rfloor)$ 的可能取值个数有界。引理的证明至此结束。∎

由于 $\mathfrak{C}$ 是有限的，只需固定 $\vec{w}_1$、$\vec{w}_2$，并证明

$$\lim_{R_0 \to +\infty} \limsup_{t \to +\infty} a_t^d \sum_{n=\lfloor c_1 t \rfloor}^{\lfloor t/\min\tau \rfloor} \sum_{a=R_0}^{\lfloor a_t^d \log R_0 \rfloor} \sum_{b=0}^{\lfloor a_t^d \log R_0 \rfloor} \mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, K')) = 0 \,. \tag{5.31}$$

目标结论 (5.31) 将通过下面的技术性引理来证明；其证明将对 n、a、b 上的求和进行拆分，将其划分为更小的范围。

引理 5.11 存在 $C' > 0$，使得对所有 R_0

$$\sum_{n=\lceil c_1 t \rceil}^{\lfloor t/\min\tau \rfloor} \sum_{a,b=0,\dots,\lfloor a_t^d \log(R_0) \rfloor \,:\, \max(a,b) \ge R_0} \mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, K')) \le C' a_t^{-d} R_0^{-\frac{2}{45}} + o(a_t^{-d}) \,,$$

如 $t \to +\infty$。

证明 注意到，由于保测性和时间反演，$(\widetilde{\kappa}\circ T^{-1}, \widehat{\Psi}_n, \widetilde{\kappa}\circ T^n)$ 与 $(-\kappa\circ T^n, (-\widetilde{\kappa}_n, \widetilde{\tau}_n)$ $-\widetilde{\kappa}\circ T^{-1})$ 同分布，因此

$$\mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K')) = \mu(A'_{b,a,n,t}(-\vec{w}_2,-\vec{w}_1,K''))$$

其中 $K'' = \{(\ell, r) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R} : (-\ell, r) \in K'\}$，采用记号 (5.25)。因此，至多只需将 $(a, b, \vec{w}_1, \vec{w}_2, K')$ 替换为 $(b, a, -\vec{w}_2, -\vec{w}_1, K'')$，便足以证明存在 C''_0，使得对所有 R_0，

$$\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor} \sum_{a=R_0}^{\lfloor a_t^d \log(R_0)\rfloor} \sum_{b=0}^{a} \mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K')) \le C''_0 a_t^{-d} R_0^{-\frac{2}{45}} + o(a_t^{-d}), \quad \text{as } t\to+\infty\,. \tag{5.32}$$

证明这一结论的主要依据是引理 3.2 及其推论 3.3，以及一个类似于引理 4.2 证明中所用的论证。为了利用引理 3.2，回顾 (5.25)，并注意到

$$\mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K')) \le \mathbb{E}_\mu\left[\mathbf{1}_{|\widetilde{\kappa}|\circ T^n\ge b}\mathbf{1}_{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}\ge a}.h\left(\widehat{\Psi}_n - (-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2), t-b-a-n\mu(\tau))\right)\right], \tag{5.33}$$

其中 $h:\ \mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是一个紧支撑傅里叶变换的可积函数，由 $h(y_1,...,y_{d+1}) := K''\mathbf{1}_{|y_1|,\ |y_d|\le K''(1-\cos(y_{d+1}/K''))\,y_{d+1}^2}$ 给出，其中 $K''>0$ 取适当值。回顾 (5.3) 和 (5.4)，并假设 $n > 4\lfloor K\log t\rfloor$。令 $k_n = k_t = \lfloor K\log\ t\rfloor$。由 (5.33) 和推论 3.3 可知，对于任意 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac12-\frac{1}{45}\right)$以及任意 $n=\lfloor c_1 t\rfloor,...,t/$，min τ，

$$\mu(A'_{a,b,n,t}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,K')) \ll \mu(|\widetilde{\kappa}|\ge a)\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b)\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) \tag{5.34}$$

$$+\mathcal{O}\left(t^{-100} + \log t\, a_t^{-d-2}(\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge a)\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b)^{\frac12-\varepsilon_0}\right. \tag{5.35}$$

$$\left. + a_t^{-d-2}\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b)\left\|\widehat{\Psi}_{2k_n}1_{\{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}\ge a\}}\right\|_{L^1}\right), \tag{5.36}$$

$$\text{with}\quad \widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) := \mathbb{E}_\mu\left[h\left(\widehat{\Psi}_n - (-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2), t-b-a-n\mu(\tau))\right)\right]. \tag{5.37}$$

估计（5.34）右端的项。

我们断言，仔细调整引理 4.2 的论证后，

$$\sup_{a,b}\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor}\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) = \mathcal{O}(a_t^{-d})\,, \tag{5.38}$$

这意味着

$$\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor}\sum_{b\ge0,a\ge R_0}\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge a)\mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b)\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) = \mathcal{O}(a_t^{-d}R_0^{-1})\,. \tag{5.39}$$

我们证明断言 (5.38)。固定 $L>0$。
首先，由引理 3.2 可得

$$\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) \ll a_t^{-d-1}\left(g_{d+1}\left(\frac{-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2), t-b-a-n\mu(\tau)}{a_t}\right)+(\log t)^{-1}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n\,:\,|t-b-a-n\mu(\tau)|<La_t\mu(\tau)} \widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) &\ll a_t^{-d}\int_{\mathbb{R}} g_{d+1}\left(\frac{-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2)}{a_t}, y\right)\,dy + o(a_t^{-d})\\ &\ll a_t^{-d}\|g_d\|_\infty + o(a_t^{-d}) \ll a_t^{-d}\,, \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中 $g_d := \int_{\mathbb{R}} g_{d+1}(\cdot, y)\,dy$。

其次，若 $n>c_1t$ 且 $La_t<|n-(t-b-a)/\mu(\tau)|$，那么只要 t 足够大，由引理 3.5 可得，
令 $v_{a,\,b,\,n} := (-\pi_d(a\vec{w}_1+b\vec{w}_2)\;\; t-b-a-n\mu(\tau))$，

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) &\ll \sum_{k_3\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k_3^2}\mu\left(\widehat{\Psi}_n - v_{a,b,n} = (0,0,k_3)+\mathcal{O}(1)\right)\\ &\ll \frac{t}{a_t^{d+1}}\sum_{k_3\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k_3^2}\frac{\log(2+|v_{a,b,n}+k_3|)}{(2+|v_{a,b,n}+k_3|)^2}\,. \end{aligned} \tag{5.41}$$

但是，一方面，

$$\begin{aligned}\sum_{k_3:|v_{a,b,n}+k_3|\ge|v_{a,b,n}|/2}\frac{1}{1+k_3^2}\frac{\log(2+|v_{a,b,n}+k_3|)}{(2+|v_{a,b,n}+k_3|)^2} &\ll \frac{\log(4+|v_{a,b,n}|)}{(1+|v_{a,b,n}|)^2}\sum_{k_3}\frac{1}{1+k_3^2}\\ &\ll \frac{\log(4+|v_{a,b,n}|)}{(1+|v_{a,b,n}|)^2}\,, \end{aligned} \tag{5.42}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sum_{k_3:|v_{a,b,n}+k_3|<|v_{a,b,n}|/2}\frac{1}{1+k_3^2}\frac{\log(2+|v_{a,b,n}+k_3|)}{(2+|v_{a,b,n}+k_3|)^2} &\ll \sum_{u:|u|<|v_{a,b,n}|/2}\frac{1}{1+|u-v_{a,b,n}|^2}\frac{\log(2+|u|)}{(2+|u|)^2}\\ &\ll \frac{1}{|v_{a,b,n}|^2}\sum_{u:|u|<|v_{a,b,n}|/2}\frac{\log(2+|u|)}{(2+|u|)^2} \ll \frac{1}{|v_{a,b,n}|^2}\,. \end{aligned} \tag{5.43}$$

由 (5.41)、(5.42) 和 (5.43) 可得

$$\widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) \ll \frac{\log(2+|v_{a,b,n}|)}{(1+|v_{a,b,n}|)^2}\,,$$

~当 $Q_n(t)$ 时，如子引理 (4.3) 所示。因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>c_1 t: La_t<|n-(t-b-a)/\mu(\tau)|} \widetilde{Q}^{(0)}_{n,a,b}(t) \\
&\quad \ll \frac{t}{a_t^{d+1}} \sum_{n: La_t<|n-(t-a-b)/\mu(\tau)|} \frac{|\log|n\mu(\tau)-(t-a-b)||}{1+|n\mu(\tau)-(t-a-b)|^2} \\
&\quad \ll \frac{t}{a_t^{d+1}} \frac{\log(a_t)}{La_t} \ll \frac{1}{La_t^d} \ll a_t^{-d}\,, \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

由于 $\log\, u/u^2$ 的原函数为 $-(1+\log\, u)/u$，且 $a_t^2 = t\log\, t \sim 2t\log\, a_t$。由 (5.40) 和 (5.44) 可得结论 (5.38)。

估计 (5.35) 中的各项。第一项给出

$$\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor} \sum_{a=R_0}^{\lfloor a_t^d \log R_0\rfloor} \sum_{b=0}^{a} t^{-100} \ll t^{-99} a_t^{2d} (\log R_0)^2 = o(a_t^{-d})\,. \qquad (5.45)$$

接下来需要估计 (5.35) 第二部分的贡献。注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{a\ge R_0} \mu(|\widetilde{\kappa}|\ge a) \left(\sum_{b=0}^{a} \mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b)^{\frac12-\varepsilon_0}\right) &\ll \sum_{a\ge R_0} a^{-2} \left(\sum_{b=0}^{a} (b+1)^{-1+2\varepsilon_0}\right) \\
&\ll \sum_{a\ge R_0} a^{-2+2\varepsilon_0} = R_0^{-1+2\varepsilon_0}\,,
\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_0 < \frac12$。又由于我们还知道 $t\log\, t = a_t^2$，因此得到

$$\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor} \sum_{a\ge R_0} \sum_{b=0}^{a} \log t\, a_t^{-d-2} \mu(\widetilde{\kappa}\ge a)\mu(\widetilde{\kappa}\ge b)^{\frac12-\varepsilon_0} \ll a_t^{-d} R_0^{-(1-2\varepsilon_0)}\,, \qquad (5.46)$$

其中 $1-2\varepsilon_0 > 0$。

估计 (5.36) 中的项。我们断言

$$\sum_{a\ge R_0} \left\| \widehat{\Psi}_{2k_n} 1_{\{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}\ge a\}} \right\|_{L^1} \ll R_0^{-\frac{2}{45}} \log t\,. \qquad (5.47)$$

由于我们还知道 $t\log\, t = a_t^2$ 且 $\sum_{b\ge0} \mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b) = \mathbb{E}[|\widetilde{\kappa}|] < \infty$，因此得到

$$\sum_{n=\lceil c_1 t\rceil}^{\lfloor t/\min\tau\rfloor} \sum_{a\ge R_0} \sum_{b\ge0} a_t^{-d-2} \mu(|\widetilde{\kappa}|\ge b) \left\| \widehat{\Psi}_{2k_n} 1_{\{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}\ge a\}} \right\|_{L^1} = \mathcal{O}\left(a_t^{-d} R_0^{-\frac{2}{45}}\right). \qquad (5.48)$$

现在我们证明断言 (5.47)。首先，计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\geq R_0}\left\|\widehat{\Psi}_{2k_n}1_{\{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}\geq a\}}\right\|_{L^1} &\leq \sum_{\ell=0}^{2k_n-1}\sum_{a\geq R_0}\sum_{a'\geq a}\sum_{b'\geq 1} b'\mu(|\widetilde{\kappa}|\circ T^{-1}=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\\ &\leq \sum_{\ell=1}^{2k_n}\sum_{a'\geq R_0}\sum_{a=R_0}^{a'}\sum_{b'\geq 1} b'\mu(|\widetilde{\kappa}|=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\\ &\leq \sum_{\ell=1}^{2k_n}\sum_{a'\geq R_0}\sum_{b'\geq 1} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}|=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\,,\end{aligned}$$

其中，对满足被加项非零的正实数（不一定是整数） a'、 b' 求和。

我们声称，对 n 以及 $\ell=1$、...、 $2k_n$，以下结论一致成立，

$$\sum_{a'\geq R_0}\sum_{b'\geq 1} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}|=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b') \ll R_0^{-\frac{2}{45}} \tag{5.49}$$

前面两个展示的方程给出了断言 (5.47)。

剩下需要证明断言 (5.49)。我们通过考察 a'、 b'的所有相关情况来进行证明。

情况 1：满足 $b'^{\frac{4}{5}}\leq a'\leq b'$的 a'、 b' 所作的贡献。

$$\begin{aligned}&\sum_{b'\geq 1}\sum_{a'\in[\max(R_0,(b')^{4/5});b']} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}|=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\\ &\leq \sum_{b'\geq R_0} b'\mathbb{E}_{\mu}\left[\sum_{a'\in[(b')^{4/5};b']} a'\mathbf{1}_{|\widetilde{\kappa}|=a'}\mathbf{1}_{|\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b'}\right]\\ &\leq \sum_{b'\geq R_0}|b'|^2\mu(|\widetilde{\kappa}|\geq (b')^{\frac{4}{5}}, |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\,,\end{aligned}$$

其中，在最后一个方程中我们用到了

$$\sum_{a'\in[a_-;a_+]} a'1_{\{|\widetilde{\kappa}|=a'\}}\leq a_+1_{\{|\widetilde{\kappa}|\geq a_-\}}\,. \tag{5.50}$$

因此，将 (5.6) 应用于 $V:=100/a_0$，我们得到

$$\mu(|\widetilde{\kappa}|\geq (b')^{\frac{4}{5}}, |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\ll |b'|^{-3-\frac{2}{45}}\,,$$

关于 $\ell\leq \frac{100}{\log(2+|b'|)\,a_0}$ 一致成立，并且由 (5.3) 与 (5.5) 结合可得

$$\mu(|\widetilde{\kappa}|\geq (b')^{\frac{4}{5}}, |\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')\leq \mu(|\widetilde{\kappa}|\geq (b')^{\frac{4}{5}})\mu(|\widetilde{\kappa}|\circ T^{\ell}=b')+C'e^{-a_0\ell}\ll |b'|^{-3-\frac{2}{45}}$$

关于 $\ell \geq {}^{100}\log(2+|b'|)\, a_0$ 一致成立。因此

$$\sum_{a' \in [\max(R_0,(b')^{4/5});b']} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \ll \sum_{b' \geq R_0} |b'|^2 \, |b'|^{-3-\frac{2}{45}} \tag{5.51}$$

$$\ll \sum_{b' \geq R_0} |b'|^{-1-\frac{2}{45}} \ll R_0^{-\frac{2}{45}} . \tag{5.52}$$

情形 2： a', b' 的贡献，使得 $(a')^{\frac{4}{5}} < b' < a'$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{b' \geq 1} \sum_{a' \in [\max(R_0,b');(b')^{\frac{5}{4}}]} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \\
&\leq \sum_{a' \geq R_0} \sum_{b' \in [(a')^{\frac{4}{5}};a']} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \\
&\leq \sum_{a' \geq R_0} |a'|^2 \mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} > (a')^{\frac{4}{5}}) \\
&\ll \sum_{a' \geq R_0} |a'|^2 |a'|^{-3-\frac{2}{45}} \ll \sum_{a' \geq R_0} |a'|^{-1-\frac{2}{45}} \ll R_0^{-\frac{2}{45}} ,
\end{aligned} \tag{5.53}$$

当 $\ell \leq V\log(2+|a'|)$ 时再次使用 (5.50) 和 (5.6)，并取 $V = 100/a_0$；其他情况下使用 (5.3)。

情形 3： a', b' 的贡献，使得 $a' < (b')^{\gamma} < b'$，其中某个$\gamma \in$ 属于$(0, 1)$（例如 $\gamma = \frac{4}{5}$）。

$$\begin{aligned}
&\sum_{b' \geq 1} \sum_{a' \in [R_0;(b')^{\gamma}]} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \\
&\leq \sum_{b' \geq R_0^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{a' \in [R_0;(b')^{\gamma}]} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}| = a', |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \\
&\leq \sum_{b' \geq R_0^{\frac{1}{\gamma}}} |b'|^{\gamma} b'\mu(|\widetilde{\kappa}| \geq R_0, |\widetilde{\kappa}| \circ T^{\ell} = b') \\
&\ll \sum_{b' \in Supp(|\widetilde{\kappa}|): b' \geq R_0^{\frac{1}{\gamma}}} (b')^{\gamma} |b'| \, |b'|^{-3} \ll R_0^{\frac{1}{\gamma}(-1+\gamma)} ,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

使用 (5.5)。

情形 4： a'、b' 满足 $b' < (a')^{\gamma} < a'$ 且 $\gamma \in (0, 1)$（例如 $\gamma = \frac{4}{5}$）的贡献。

$$\sum_{a'\geq R_0}\sum_{b'\in[1;(a')^\gamma]} a'b'\mu(|\widetilde{\kappa}|=a', |\widetilde{\kappa}|\circ T^\ell = b') \leq \sum_{a'\geq R_0}(a')^\gamma |a'|\mu(|\widetilde{\kappa}|=a')$$
$$\ll \sum_{a'\in Supp(|\widetilde{\kappa}|):a'\geq R_0}(a')^\gamma |a'||a'|^{-3} \ll R_0^{-1+\gamma}\,. \tag{5.55}$$

由 (5.52)、(5.53)、(5.54) 和 (5.55) 可得结论 (5.49)，从而完成 (5.47) 的证明，也就完成了 (5.48) 的证明。估计 (5.32) 以及引理则由 (5.34)、(5.39)、(5.45)、(5.46) 和 (5.48) 得出。∎

5.3.1 定理 5.1 证明的收尾

结论由引理 5.4（以及其后的评论）、引理 5.6、引理 5.10 和引理 5.11 得出。

6 联合中心极限定理的证明（引理 3.1）

设 $d\in\{0,1,2\}$。本节将说明，[3] 和 [29]中建立的论证可以调整用于研究 Ψ，而不是 κ。核心思想源于一个基本观察：$\widehat{\Psi}$ 可以写成 $\mathbb{Z}^{d+1}$中的一个向量与一个有界函数之和；该向量“表现得像” κ。$\mathbb{Z}^{d+1}$ 中的这个向量恰好是（$\kappa, |\widetilde{\kappa}| - \mathbb{E}_\mu[|\widetilde{\kappa}|]$），它与 κ一样，在良集上为常数，并且具有相似的尾部概率。特别地，Ψ 的分布属于一个非标准中心极限定理的吸引域，其归一化为 $\sqrt{n\log n}$。具体细节将在下文方程 (6.12) 附近给出。

我们将通过证明其特征函数逐点收敛，来证明 $(\widehat{\Psi}_n/\sqrt{n\log n})_n$ 依分布收敛；为此，我们使用 Young 在 [37]中构造的商塔上的傅里叶扰动算子（见 [8]），这与 Sz´asz 和 Varj´u 在 [34] 中证明 κ的中心极限定理和局部极限定理时所采用的方法相同。由 (2.10) 可得$\tau = |V| = |\widetilde{\kappa}| + \mathcal{O}(1)$，其中 $\widetilde{\kappa}\colon M\to\mathbb{Z}^2$ 是 $\mathbb{Z}^2$-周期洛伦兹气体中的单元变化（见第 5.1 小节）。

我们已经回顾了关于 $\widetilde{\kappa}$ 的若干性质。特别地，我们来回顾一下 $\widetilde{\kappa}$ 的精确尾部（在 (5.5) 中部分回顾过）。根据 [34]，再结合 [29],，存在 $L_0>0$ 和一个由 $(L,w)\in(\mathbb{Z}^d)^2$ 构成的有限集合 $\mathcal{E}$，其中 w 为素数，使得

$$|\widetilde{\kappa}|>L_0 \quad\Rightarrow\quad \exists (L,w)\in\mathcal{E},\ \exists N\in\mathbb{N}^*\ \widetilde{\kappa}=L+Nw \tag{6.1}$$

and

$$\mu(\widetilde{\kappa}=L+Nw) = c_{L,w}N^{-3}+\mathcal{O}(N^{-4}), \quad \text{as } N\to+\infty\,, \tag{6.2}$$

其中 $c_{L,\ w} > 0$。集合 $\mathcal{E}$ 对第 5 节中提到的通道集合进行参数化（其中的集合 $\mathfrak{C}$ 对应于与某个 w 成比例的单位向量集合，且存在 $L \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $(L, w) \in \mathcal{E}$）。于是，当 $d = 2$ 时，（针对西奈台球映射的）方差矩阵 Σ_0 出现在位移的中心极限定理中，该位移由 (2.11) 给出；它对应于以下二次型

$$\text{If } d = 2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \Sigma_0 t, t \rangle := \frac{1}{2} \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}} c_{L,w} \langle t, w \rangle^2 \,. \tag{6.3}$$

它不是退化的，因为当 $d = 2$ 时，我们假设至少存在两个不平行通道，因此存在两个不平行的 w、w'，使得存在 L、$L' \in \mathbb{Z}^2$，满足 (L, w)、$(L', w') \in \mathcal{E}$。

当 $d = 1$ 时，令 $\pi_1(w_1, w_2) = w_1$，Σ_0 由以下公式给出

$$\text{If } d = 1, \quad \Sigma_0 := \frac{1}{2} \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}} c_{L,w} (\pi_1(w))^2 \tag{6.4}$$

由于我们假设至少存在一条不接触任何障碍物的无界直线，因此它非零。

我们回顾一下，对于公式 (1.1) 中出现的流，其方差矩阵 Σ 由 $\Sigma = \Sigma_0/\sqrt{\mu(\tau)}$ 给出。

极限 $a_n^{-1}\widehat{\Psi}_n$ 的方差矩阵 Σ_{d+1} 将表现为由以下非常相似的公式给出：

$$\forall t \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \langle \Sigma_{d+1} t, t \rangle := \frac{1}{2} \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}} c_{L,w} \langle t, (\pi_d(w), |w|) \rangle^2 \,, \tag{6.5}$$

与第5.1节中一样，

$$\forall w \in \mathbb{Z}^2, \quad \pi_2(w) = w \quad \text{and} \quad \pi_1(w_1, w_2) = w_1 \,,$$

并约定

$$\forall (w, z) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}, \quad (\pi_0(w), |w|) = w \quad \text{and more generally} \quad (\pi_0(w), z) = z.$$

在本节中，我们固定某个（任意的） $q \in [1, 2)$，以及某个 $b_q > 2$，使得

$$\frac{1}{b_q} + \frac{1}{q} < 1 \,. \tag{6.6}$$

This 选择将决定 Young 塔上巴拿赫空间的选择 er.

6.1 通过傅里叶扰动算子表示特征函数

我们注意到

$$|\widehat{\Psi}(x)-\widehat{\Psi}(y)|\le d(x,y)+d(T(x),T(y))\,,$$

对于同一个 $M\setminus(\mathcal{S}_0\cup T^{-1}(\mathcal{S}_0))$ 连通分支中的任意 x、y，其中 $\mathcal{S}_0$ 是与 $\partial\Omega$ 相切的碰撞后向量集合。我们回顾一下，$M\setminus\bigcup_{k=-n}^{n}T^{-k}(\mathcal{S}_0)$ 的连通分支的直径为 $\mathcal{O}(\beta_1^n)$，其中 $\beta_1\in\in(0,1)$。

与 [34], 中一样，我们考虑 Young 在 [37] 中构造的塔（另见 [8]）。我们回顾 Young 塔的一些事实，并引入本文余下部分将使用的一些记号。令 $(\Delta,f_\Delta,\mu_\Delta)$ 为双曲塔，它是 (M,T,μ) 通过 π 的扩展：$\Delta\mapsto M$（其中 $\pi(x,\ell)=T^\ell(x)$），并将 $\left(\overline{\Delta},f_{\overline{\Delta}},\mu_{\overline{\Delta}}\right)$ 记为商塔（通过对 Δ 的稳定流形取商得到）。商塔可视为 $\overline{\Delta}:=\{(x,\ell)\in\Delta:\ x\in\overline{Y}\}$，其中 $\overline{Y}$ 是精心选取的集合 $Y\subset M$ 中的一条不稳定曲线；并记 $\varpi:\ \Delta\to\overline{\Delta}$ 为沿 Δ 的稳定曲线进行全纯性所对应的投影。动力系统 $(\Delta,f_\Delta,\mu_\Delta)$ 定义为

- 空间 Δ 由满足条件 $\ell<R(x)$ 的有序对 $(x,\ell)\in Y\times\mathbb{N}_0$ 组成，其中 R是到 Y的回归时间。

- 映射 f_Δ 定义为：若 $\ell<R(x)-1$，则 $f_\Delta(x,\ell)=(x,\ell+1)$；而 $f_\Delta(x,R(x)-1)=(T^{R(x)}(x),0)$。
- 概率测度 μ_Δ 定义为 $\mu_\Delta(A\times\{\ell\})=\mu_\Delta(A\cap\{R>\ell\})/\mathbb{E}_\mu[R.1_Y]$，对任意可测集合 $A\subset Y$均成立。

我们假设 R 的最大公约数（g.c.d.）为 1。由于 T 的全遍历性[6]，这一假设可以成立；但该假设并非必要，因为也可以直接处理 $g.c.d.(R)\neq 1$。不过，这一假设有助于简化本文余下部分中的证明和记号。

划分 $\mathcal{P}$ 在 Δ 上由不同层级的划分之并组成；随着沿塔向上移动，这些划分会越来越细。划分 $\mathcal{P}$ 用于在 Δ上定义分离时间 $s(\cdot,\cdot)$:

$$s(x,y):=\inf\{n\ge-1\,:\,\mathcal{P}(f_\Delta^{n+1}(x))\neq\mathcal{P}(f_\Delta^{n+1}(y))\}\,,$$

分离时间 $s(x,y)$ 满足以下性质：若 $s(x,y)\ge 0$，则 $\pi(x)$ 和 $\pi(y)$ 属于 $M\setminus(\mathcal{S}_0\cup T^{-1}(\mathcal{S}_0))$ 的同一个连通分支。特别地，若 $s(x,y)>2n$，则 $\pi(f_\Delta^n(x))$ 和 $\pi(f_\Delta^n(y))$ 属于 $M\setminus\bigcup_{k=-n}^{n}T^{-k}(\mathcal{S}_0)$ 的同一个连通分支。由于划分 $\mathcal{P}$ 的原子是稳定曲线的并集，

[6]利用 T的全遍历性构造一个具有 $g.c.d.(R)=1$ 的新塔，这一想法在 [37, 第 4] 节中提出，并在 [33] 中用于确保 κ 在 $\overline{\Delta}$上的版本具有非周期性。这种塔构造的详细内容见 [26, 附录 B]。

这个分离时间在商塔 $\overline{\Delta}$ 上有一个直接对应量 $\overline{s}(\cdot,\cdot)$。令 P 为 $\big(\overline{\Delta},f_{\overline{\Delta}},\mu_{\overline{\Delta}}\big)$ 的转移算子，即 P 定义在 $L^1(\mu_{\overline{\Delta}})$ 上如下：

$$\int_{\overline{\Delta}} H.P(G)\,d\mu_{\overline{\Delta}} = \int_{\overline{\Delta}} H\circ f_{\overline{\Delta}}.G\,d\mu_{\overline{\Delta}}\,.$$

[1]令 $\beta\in(\beta_1^{\overline{4}},1)$ 且充分接近于 1。由 [37] 和 [8] 可知，存在$\varepsilon'>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in]0,\ \varepsilon'[$, P 在巴拿赫空间 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_\varepsilon$上是拟紧的；该空间对应于形如 $e^{\varepsilon\omega}H$、满足 $H\in\mathcal{B}_0$的函数所组成的集合，其中 $\omega(x,\ell)=\ell$，并且 $\mathcal{B}_0$ 是有界函数 H 的巴拿赫空间：这些函数关于超度量 $\beta^{\overline{s}(\cdot,\cdot)}$ 是利普希茨连续的（当 $\varepsilon=0$时，空间 $\mathcal{B}_0$ 对应于空间$\mathcal{B}_\varepsilon$）。于是，空间 $\mathcal{B}$ 赋予范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$，其定义为

$$\|H\|_{\mathcal{B}} = \|e^{-\varepsilon\omega}H\|_{\mathcal{B}_0}\,. \tag{6.7}$$

回顾可知， b_q 满足（6.6）。取 ε 充分小，使得 $e^{\varepsilon\omega}\in\mathbb{L}^{b_q}(\mu_{\overline{\Delta}})$，这意味着 $\mathcal{B}$ 连续嵌入到 $\mathbb{L}^{b_q}(\mu_{\overline{\Delta}})$中，因为

$$\|H\|_{L^{b_q}} \le \|e^{\varepsilon\omega}\|_{L^{b_q}}\|e^{-\varepsilon\omega}H\|_\infty \le \|e^{\varepsilon\omega}\|_{L^{b_q}}\|H\|_{\mathcal{B}}\,. \tag{6.8}$$

（这一特定的 b_q 选择将在下文子引理 6.2 的证明中使用。）由于我们假设 $g.c.d.(R)=1$，因此 1 是 P 模为 1 的唯一（主导）特征值，且它是 P 谱中的单重孤立特征值。特别地，存在$\theta\in(0,1)$（依赖于（β，ε）），使得

$$\|P^n - \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[\cdot]1_{\overline{\Delta}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = \mathcal{O}(\theta^n)\,,\quad \text{as } n\to+\infty\,. \tag{6.9}$$

令 $t\in\mathbb{R}^{d+1}$。回想一下，根据推论 9.4],中验证的 [4, 式 (6.2)

$$\widehat{\Psi}\circ\pi = \overline{\Psi}\circ\overline{\pi} + \chi\circ f_\Delta - \chi\,, \tag{6.10}$$

其中 $\overline{\Psi}=(\overline{\kappa},\ \overline{\tau})$: $\overline{\Delta}\to\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}$，而 $\overline{\tau}$是 $\widetilde{\tau}=\tau-\mu(\tau)$在 $\overline{\Delta}$上的版本，定义如下

$$\overline{\tau} := \widetilde{\tau}\circ\pi + \sum_{n\ge1}\left(\tau\circ\pi\circ f_\Delta^n - \tau\circ\pi\circ f_\Delta^{n-1}\circ f_{\overline{\Delta}}\right)$$

并且其中 $\chi=(0,\ \chi_0)$，这里 0 是 $\mathbb{Z}^d$ 的零元，且

$$\chi_0 := \sum_{n\ge0}\left(\tau\circ\pi\circ f_\Delta^n - \tau\circ\pi\circ f_\Delta^n\circ\overline{\pi}\right)\,.$$

根据 [4, 引理 8 的证明3] （另见第 B 节）， $\overline{\tau}$ 在杨氏划分的每个原子上关于超度量 $\beta^{s(\cdot,\cdot)}$ 局部利普希茨连续，并且 $\chi:\ \Delta\to\{0\}^d\times\mathbb{R}$ 有界，且满足以下意义下的利普希茨条件：

$$\sup_{k\ge1}\sup_{x,y:s(x,y)>2k}\frac{|\chi(f_\Delta^k(x))-\chi(f_\Delta^k(y))|}{\beta^k}<\infty\,, \tag{6.11}$$

由余边界方程 (6.10) 可得

$$\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,\frac{\widehat{\Psi}_n}{a_n}\rangle}] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[e^{-i\langle\frac{t}{a_n},\chi\rangle}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\overline{\Psi}_n\rangle\circ\overline{\pi}}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\chi\circ f_\Delta^n\rangle}\right].$$

令 $\overline{K}\colon\ \overline{\Delta}\to\mathbb{Z}^2$ 为 $\overline{\Delta}$ 上 $\widetilde{\kappa}$ 的版本，即满足 $\overline{K}\circ\overline{\pi}=\widetilde{\kappa}\circ\pi$ 的函数。由 (2.10) 和 (6.10) 可知，定义如下的函数 $\Theta\colon\ \overline{\Delta}\to\mathbb{R}^{d+1}$

$$\Theta := \overline{\Psi}-\Upsilon,\quad \text{with } \Upsilon := \left(\pi_d(\overline{K}),|\overline{K}|-\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[|\overline{K}|]\right), \tag{6.12}$$

有界且满足利普希茨条件，并且 Υ 在分割元素上为常数（因为 $\overline{\kappa}=\pi_d(\overline{K})$ 对应于单元变化）。由于 $\overline{\Psi}$ 和 Υ 均值为零，$\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[\Theta]=0$。

我们定义傅里叶扰动算子 $P_t, P_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ 如下：$P_t v = P(e^{i\langle t,\overline{\Psi}\rangle}v)$ $\widetilde{P}_t v = P(e^{i\langle t,\Upsilon\rangle}v)$，其中 $t\in\mathbb{R}^{d+1}$。根据 [34]（其利用了 [37, 8]），只需增大 (6.9) 中出现的 $\theta\in(0,1)$ 的取值，便存在 $\beta_0\in(0,\pi]$、一个连续函数 $t\mapsto\lambda_t\in\mathbb{C}$ 以及两族算子 $(\Pi_t)_t$ 和 $(U_t)_t$，它们作用于 $\mathcal{B}$，使得 $t\mapsto\Pi_t\in\mathcal{L}(\mathcal{B},L^1(\overline{\Delta}))$ 连续，并且对任意 $t\in[-\beta_0,\beta_0]^{d+1}$ 和任意正整数 n,

$$P_t^n = \lambda_t^n\Pi_t + U_t^n,\quad \widetilde{P}_t^n = \widetilde{\lambda}_t^n\widetilde{\Pi}_t + \widetilde{U}_t^n, \tag{6.13}$$

$$\text{with}\qquad \sup_{t\in[-\beta_0,\beta_0]^d}\left(\|U_t^n\|_{\mathcal{B}}+\|\widetilde{U}_t^n\|_{\mathcal{B}}\right)=\mathcal{O}\left(\theta^n\right),\quad \text{as } n\to+\infty. \tag{6.14}$$

令 $k=k_n:=(\log n)^2$ 和 $F_{k,\ u}(x):=e^{i\langle u,\ \overline{\Psi}_k(\overline{\pi}(x))+\chi\circ f_\Delta^k(x)\rangle}$。由 (6.10) 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,\frac{\widehat{\Psi}_n}{a_n}\rangle}] &= \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[e^{-i\langle\frac{t}{a_n},\chi\circ f_\Delta^k\rangle}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\overline{\Psi}_n\rangle\circ\overline{\pi}\circ f_\Delta^k}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\chi\circ f_\Delta^{n+k}\rangle}\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[F_{k,-\frac{t}{a_n}}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\overline{\Psi}_n\rangle\circ\overline{\pi}}F_{k,\frac{t}{a_n}}\circ f_\Delta^n\right].\end{aligned}$$

我们用集合 $\{y\in\Delta:\ s(x,y)>2k\}$ 上的条件期望 $F_{k,\ u}(x)=\overline{F}_{k,\ u}(\overline{\pi}(x))$ 来近似 $F_{k,\ u}(x)$，其中 s 是本节前面提到的 Δ 上的分离时间。由于 $e^{i\langle u,\ \overline{\Psi}\rangle}$ 在 $\overline{\Delta}$ 上有界且为利普希茨函数，并且 $e^{i\langle t,\ \chi\rangle}$ 在 Δ 上有界且为利普希茨函数（依照 (6.11) 的意义），因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,\frac{\widehat{\Psi}_n}{a_n}\rangle}] &= \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\overline{F}_{k,-\frac{t}{an}}e^{i\langle\frac{t}{a_n},\overline{\Psi}_n\rangle}\overline{F}_{k,\frac{t}{an}}\circ f_{\overline{\Delta}}^n\right]+\mathcal{O}(\beta^k)\\ &= \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\overline{F}_{k,\frac{t}{an}}P_{\frac{t}{an}}^n(\overline{F}_{k,-\frac{t}{an}})\right]+\mathcal{O}(\beta^k)\\ &= \lambda_{t/a_n}^{n-2k}\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\overline{F}_{k,t}\Pi_{\frac{t}{an}}(P_{\frac{t}{an}}^{2k}(\overline{F}_{k,-\frac{t}{an}}))\right]+\mathcal{O}(\beta^k+\theta^{n-2k}),\end{aligned}$$

如 $n\to+\infty$。此外，$\|\overline{F}_{k,\ u}\|_\infty\le 1$ 以及 $P_{\frac{t}{an}}^{2k}(\overline{F}_{k,\ -\frac{t}{an}})$ 关于 Young 超度量 $\beta^{s(\cdot,\cdot)}$，在（k，n）上是一致利普希茨的。因此，由于 $t\mapsto\Pi_t\in\mathcal{L}(\mathcal{B},L^1(\overline{\Delta}))$ 的连续性，

$$\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,\frac{\widehat{\Psi}_n}{a_n}\rangle}] = \lambda_{\frac{t}{an}}^{n-2k}\left(\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\overline{F}_{k,\frac{t}{an}}\right]\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[P_{\frac{t}{an}}^{2k}(\overline{F}_{k,-\frac{t}{an}})\right]+o(1)\right),$$

如 $n \to +\infty$。注意，对每个 $t \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\overline{F}_{k,\frac{t}{a_n}}\right] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[e^{i\langle \frac{t}{a_n}, \overline{\Psi}_k \circ \overline{\pi} + \chi \circ f_\Delta^k\rangle}\right] = 1 + o(1) \quad \text{as } n \to +\infty\,,$$

由控制收敛定理（利用 $\lim_{k\to+\infty} \overline{\Psi}_k/k = 0 \mu_{\overline{\Delta}}$-几乎处处成立这一事实）。类似地

$$\forall t \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[P_{\frac{t}{a_n}}^{2k}(\overline{F}_{k,-\frac{t}{a_n}})\right] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[e^{i\langle \frac{t}{a_n}, \overline{\Psi}_k \circ \overline{\pi} - \chi\rangle \circ f_\Delta^k}\right] = 1 + o(1)\,, \quad \text{as } n \to +\infty\,.$$

Thus

$$\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t, \frac{\widehat{\Psi}_n}{a_n}\rangle}] = \lambda_{\frac{t}{a_n}}^{n-2k} + o(1)\,. \tag{6.15}$$

一个重要的观察是，借助这一点，我们可以将 [29] 的结果应用到当前情形，即

$$P_t - \widetilde{P}_t = P\left(\left(e^{i\langle t, \overline{\Psi}\rangle} - e^{i\langle t, \Upsilon\rangle}\right)\cdot\right) = \widetilde{P}_t\left(\left(e^{i\langle t, \Theta\rangle} - 1\right)\cdot\right)\,.$$

6.2 主导特征值及其谱投影算子的正则性

在这一部分中，我们证明，对于在（6.6）之前选取的 $q \in [1, 2)$，

$$\|\Pi_t - \Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} = \mathcal{O}(t) \quad \text{and} \quad \lambda_t = 1 - \log(1/|t|)\langle t, \Sigma_{d+1} t\rangle + \mathcal{O}(t^2)\,,$$

如 $t \to 0$。为此，我们分以下几个步骤进行：首先在子引理 6.1 中建立 $\lambda_t - 1$ 的一个等价式，并利用它在子引理 6.2 中建立关于 $\|\Pi_t - \Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})}$ 的既定估计，最后再利用该估计在子引理 6.3 中建立关于 λ_t 的既定展开式。

为了得到这样的估计，我们将在我们关键地利用了 Υ 和 κ 具有相似的性质。这使我们能够借助 [3]，将 κ 在 [34, 29] 中得到的一些结果加以推广。

我们首先研究 $(e^{i\langle t,\overline{\Theta}\rangle} - 1)\cdot \in \widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ 被 $\left\|e^{i\langle t,\overline{\Theta}\rangle} - 1\right\|_{\mathcal{B}_0}$ 支配。这意味着 $\left\|\widetilde{P}_t - P_t\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = \mathcal{O}(|t|)$，从而

$$\left\|\Pi_t - \widetilde{\Pi}_t\right\|_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}(t)\,, \tag{6.16}$$

$\widetilde{\ }$，使用 Π_t 和 Π_t的通常柯西积分表达式。特别地，关于$\|\Pi_t - \Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})}$ 的已述估计将由$\sim$ $\sim\|\Pi_t - \Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})}$的相同估计推出。

引理 3.1 可由 (6.15)、 $t \mapsto \Pi_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B} \to L^1(\mu_{\overline{\Delta}}))$ 的连续性以及下面的第一个子引理立即得出。

子引理 6.1 当 $t \to 0, 1-\lambda_t \sim \log(1/|t|)\langle t, \Sigma_{d+1} t\rangle$ 时，其中 Σ_{d+1} 由 (6.5) 给出。

子引理 6.1 的证明 为研究 $t \mapsto \lambda_t$ 的展开，在子引理 6.1、6.2 和 6.3 中，我们考虑分别属于 P_t、$\widetilde{P}_t$ 的归一化特征向量 v_t、$\widetilde{v}_t$，它们分别与由 $v_t = \frac{\Pi_t(1_\Delta)}{\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[\Pi_t(1_\Delta)]}$ 和 $\widetilde{v}_t = \frac{\Pi_t(1_\Delta)}{\overline{\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[\Pi_t(1_\Delta)]}}$ 给出的 λ_t、$\widetilde{\lambda}_t$ 相关，我们将使用以下表达式

$$\lambda_t = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[P_t(v_t)] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[e^{i\langle t, \overline{\Psi}\rangle} v_t] \quad \text{and} \quad \widetilde{\lambda}_t = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[\widetilde{P}_t(\widetilde{v}_t)] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[e^{i\langle t, \overline{\Upsilon}\rangle} \widetilde{v}_t]\,,$$

因此

$$\lambda_t - \widetilde{\lambda}_t = I_1(t) + I_2(t)\,, \tag{6.17}$$

with

$$I_1(t) := \int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t, \overline{\Psi}\rangle}(v_t - \widetilde{v}_t)\, d\mu_{\overline{\Delta}} = \int_{\overline{\Delta}} (1 - e^{i\langle t, \overline{\Psi}\rangle})(\widetilde{v}_t - v_t)\, d\mu_{\overline{\Delta}},$$

and

$$I_2(t) := \int_{\overline{\Delta}} (e^{i\langle t, \overline{\Psi}\rangle} - e^{i\langle t, \Upsilon\rangle})\widetilde{v}_t\, d\mu_{\overline{\Delta}}.$$

如下文所述，$I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 是 $\mathcal{O}(|t|^2)$。关于 I_2，我们首先注意到，$(e^{i\langle t,\ \overline{\Psi}\rangle} - e^{i\langle t,\ \Upsilon\rangle}) \cdot \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ 受 $(e^{i\langle t,\ \overline{\Psi}\rangle} - e^{i\langle t,\ \Upsilon\rangle}) = e^{i\langle t,\ \Upsilon\rangle}(e^{i\langle t,\ \Theta\rangle} - 1)$ 的 Lipschitz 范数控制。由 v_t、$\widetilde{v}_t$ 的定义及 (6.16) 可得

$$\|v_t - \widetilde{v}_t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = \mathcal{O}(t), \quad \text{as } t \to 0\,.$$

回顾一下，$\mathcal{B} \subset L^{b_q}$，其中固定的 $b_q > 2$ 满足 (6.6)。此外，注意到由 (6.2) 可知，Υ，因此对于任意 $q < 2$，$\overline{\Psi}$ 都属于 L^q。根据 b_q 的选取，$b_q > q/(q-1)$。因此，

$$|I_1(t)| \ll |t| \int_{\overline{\Delta}} |\overline{\Psi}|\, |\widetilde{v}_t - v_t|\, d\mu_{\overline{\Delta}} \ll |t|\, \|\overline{\Psi}\|_{L^q} \|\widetilde{v}_t - v_t\|_{L^{\frac{q}{q-1}}} \ll |t|\, |\widetilde{v}_t - v_t\|_{\mathcal{B}} \ll t^2.$$

接下来，回顾 (6.12) 中 Θ 的定义，

$$I_2(t) = \int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t, \Upsilon\rangle}(e^{i\langle t, \Theta\rangle} - 1)\widetilde{v}_t\, d\mu_{\overline{\Delta}} = I_2^1(t) + I_2^2(t)$$

with

$$I_2^1(t) := it \int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t, \Upsilon\rangle}\, \Theta\, \widetilde{v}_t\, d\mu_{\overline{\Delta}}, \quad \text{and} \quad I_2^2(t) := \int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t, \Upsilon\rangle}(e^{i\langle t, \Theta\rangle} - 1 - it\Theta)\widetilde{v}_t\, d\mu_{\overline{\Delta}}\,.$$

现在，由于 Θ 有界，

$$|I_2^2(t)| \ll |t|^2 \int_{\overline{\Delta}} |\Theta|^2\, |\widetilde{v}_t|\, d\mu_{\overline{\Delta}} \ll (|t|\, \|\Theta\|_\infty)^2 \int_{\overline{\Delta}} |\widetilde{v}_t|\, d\mu_{\overline{\Delta}} \ll |t|^2.$$

对于 I_2^1，记作

$$\begin{aligned} I_2^1(t) &= it\int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t,\Upsilon\rangle}\,\Theta\,\widetilde{v}_0\,d\mu_{\overline{\Delta}} + it\int_{\overline{\Delta}} e^{i\langle t,\Upsilon\rangle}\,\Theta\,(\widetilde{v}_t-\widetilde{v}_0)\,d\mu_{\overline{\Delta}} \\ &= it\int_{\overline{\Delta}}\Theta\,d\mu_{\overline{\Delta}} + it\int_{\overline{\Delta}}(e^{i\langle t,\Upsilon\rangle}-1)\,\Theta\,\widetilde{v}_0\,d\mu_{\overline{\Delta}} + \mathcal{O}(|t|^2) \\ &= 0+\mathcal{O}(|t|^2), \quad \text{as } t\to 0\,, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $\int_{\overline{\Delta}}\Theta\,d\mu_{\overline{\Delta}}=0$。综上所述，$|I_2(t)|\ll|t|^2$。

I_1 的界和 I_2，结合 (6.17)，可得

$$\lambda_t = \widetilde{\lambda}_t + \mathcal{O}(|t|^2), \quad \text{as } t\to 0\,. \tag{6.18}$$

接下来，只需利用 (6.12) 中 Υ 的形式，证明 $1-\lambda_t$ 具有所需的渐近形式。为此，我们注意到

$$1-\widetilde{\lambda}_t = \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[1-\widetilde{P}_t(\widetilde{v}_t)] = \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[(1-e^{i\langle t,\Upsilon\rangle})\widetilde{v}_t] = I_1'(t)+I_2'(t)\,, \tag{6.19}$$

with

$$I_1'(t) := \int_{\overline{\Delta}}(1-e^{i\langle t,\Upsilon\rangle})\widetilde{v}_0\,d\mu_{\overline{\Delta}} \quad \text{and} \quad I_2'(t) := \int_{\overline{\Delta}}(1-e^{i\langle t,\Upsilon\rangle})(\widetilde{v}_t-\widetilde{v}_0)\,d\mu_{\overline{\Delta}}\,.$$

我们估计 $I_1'(t)$。回顾方程 (6.1)、(6.2) 以及 $\int_{\overline{\Delta}}\Upsilon\,d\mu_{\overline{\Delta}}=0$。对于任意 L、w、N，记 $W_N(L,w) := (\pi_d(L+Nw)\ |L+Nw| - \mathbb{E}_\mu[|\widetilde{\kappa}|])$，并计算得

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \int_{\overline{\Delta}}(1-e^{i\langle t,\Upsilon\rangle}-i\langle t,\Upsilon\rangle)\,d\mu_{\overline{\Delta}} \\ &= \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}}\sum_{N\geq 1}\left(e^{i\langle t,W_N(L,w)\rangle}-1-i\langle t,W_N(L,w)\rangle\right)\mu(\{\kappa=L+Nw\})+\mathcal{O}(|t|^2) \\ &= \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}}\sum_{N=1}^{1/|t|}\left(e^{i\langle t,W_N(L,w)\rangle}-1-i\langle t,W_N(L,w)\rangle\right)\left(c_{L,w}N^{-3}+\mathcal{O}(N^{-4})\right) \\ &\quad + O\left(|t|^2+|t|\sum_{(L,w)\in\mathcal{E}}|w|\sum_{N>1/|t|}N.N^{-3}\right) \\ &= \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}}\frac{c_{L,w}}{2}\sum_{N=1}^{1/|t|}\langle t,W_N(L,w)\rangle^2 N^{-3}+\mathcal{O}(|t|^2)\,. \end{aligned}$$

由于 $\langle t、W_N(L、w)\rangle^2 N^{-3} = N^{-1}\langle t,\ (\pi_d(w)\ \ |w|)\ \rangle^2+\mathcal{O}(|t|^2N^{-2})$，

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \sum_{(L,w)\in\mathcal{E}}\frac{c_{L,w}}{2}\,\log(1/|t|)\langle t,(\pi_d(w),|w|)\rangle^2+\mathcal{O}(|t|^2) \\ &= \log(1/|t|)\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle+\mathcal{O}(|t|^2)\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

对于 $I_2'(t)$，我们只需说明，通过 [3], 得到 [34] 的论证是成立的；该论证给出了与 κ 的扰动相关的特征值的渐近行为，而不是像这里那样与 Υ 相关。[34, 3] 的论证所需的要素包括：1） κ 的尾部；以及 2）"双概率"估计（5.6）。关于 1），我们已经知道Υ 的尾部：见公式（6.1）和（6.2）。关于 2），对于（5.6）的类似结论，我们回顾一下，已经知道该结论对 $\widetilde{\kappa}$成立。由于 Υ 的表达式（通过 $\widetilde{\kappa}$），[34,证明命题 11–12] 时所使用的论证确保了

$$\mu_{\overline{\Delta}}(A_{N,V}) = \mathcal{O}(N^{-3-\varepsilon}), \quad \text{as } N \to +\infty\,, \tag{6.21}$$

其中

$$A_{N,V} := \left\{\Upsilon = W_N(L,w),\ \exists |j| \le V\log(n+2),\ |\Upsilon \circ f^j| > |W_N(L,w)|^{4/5}\right\}.$$

方程 (6.2) 和 (6.21) 连同 [3, 定理 3 的证明。4] 确保了[7]

$$I_2'(t) = o\left(|t|^2\log(1/|t|)\right), \quad \text{as } t \to 0\,, \tag{6.22}$$

由此结合 (6.18)、(6.19) 和 (6.20) 得出结论。 ∎

在本节余下部分，我们将证明子引理 6.1 的一个更强版本，以及关于 Π_t 的强连续性估计；这些结果对于在第 7 节中给出的引理 3.2 和 3.4 的证明至关重要。

回想一下， $q \in [1,2)$ 已在本节开头固定。

子引理 6.2

$$\left\|\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0\right\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} + \|\Pi_t - \Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} = \mathcal{O}(t) \quad \textit{as } t \to 0\,.$$

证明：根据 (6.16)，只需控制 $\left\|\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0\right\|_{\mathcal{B}\to L^q}{}^{(\mu_{\overline{\Delta}})}$。我们声称，采用 b_q （见 (6.6)）以及 (6.8) 之前正文中的 ε，即可应用 [29, 命题 5.4]，从而确保

$$\|1_Y(\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_0} = \mathcal{O}(|t|), \quad \text{as } t \to 0\,. \tag{6.23}$$

利用 (6.23)，我们修改 [29, 命题 5.3]的证明，以完成该子引理的证明。令 $\pi_0(x,\ell) := x$，回忆 $\omega(x,\ell) = \ell$，并利用 [29, 公式 (44)],，我们~ ~写出 $(\Pi_t - \Pi_0)(w)(x) = I_{1,\,t}(x) + I_{2,\,t}(x) + I_{3,\,t}(x)$，其中

$$\begin{aligned}
I_{1,t}(x) &:= \left[(e^{i\langle t,\Upsilon_{\omega(x)}(\pi_0(x))\rangle} - 1)\widetilde{\Pi}_0(w)\right]\\
I_{2,t}(x) &:= \left[e^{i\langle t,\Upsilon_{\omega(x)}(\pi_0(x))\rangle}(\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0)(w)(\pi_0(x))\right]\\
I_{3,t}(x) &:= (\widetilde{\lambda}_t^{-\omega(x)} - 1)[e^{i\langle t,\Upsilon_{\omega(x)}(\pi_0(x))\rangle}\widetilde{\Pi}_t(w)(\pi_0(x))]\,.
\end{aligned}$$

[7]更准确地说，参见定理 3.4] 的证明中对 λ_t 的估计。特别是，参见 [3, 引理 3.16 和 3.19]

首先,

$$\begin{aligned}\|I_{1,t}\|^q_{L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} &= \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\left((e^{i\langle t,\Upsilon_{\omega(\cdot)}(\pi_0(\cdot))\rangle}-1)\right)^q\right]\|w\|^q_{L^1(\mu_{\overline{\Delta}})}\\ &\le |t|^q\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\left|\Upsilon_{\omega(\cdot)}(\pi_0(\cdot))\right|^q\right]\|w\|^q_{L^1(\mu_{\overline{\Delta}})}\\ &\ll |t|^q\sum_{n\ge 0}\mathbb{E}_{\mu}\left[1_{Y\cap\{R>n\}}|\Upsilon_n|^q\right]\|w\|^q_{L^1(\mu_{\overline{\Delta}})}\\ &\ll |t|^q\sum_{n\ge 0}\mu_Y(R>n)^{1/q'}\||\Upsilon_n|^q\|_{L^{p'}(\mu_{\overline{Y}})}\|w\|^q_{L^1(\mu_{\overline{\Delta}})}\ll |t|^q\|w\|^q_{\mathcal{B}}\,, \end{aligned}\tag{6.24}$$

取 $p'>1$ 和 $q'>1$，使得 $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$ 和 $qp'<2$，并利用$\mu_{\overline{Y}}(R\ge n)$ 指数级快速递减这一事实。其次，由 (6.23) 可得

$$\begin{aligned}\|I_{2,t}\|^q_{L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} &\le \left\|(\widetilde{\Pi}_t-\widetilde{\Pi}_0)(w)(\pi_0(\cdot))\right\|^q_{L^q(\mu_{\overline{\Delta}})}\\ &\ll \|1_Y(\widetilde{\Pi}_t-\widetilde{\Pi}_0)(w)\|^q_\infty\ll |t|^q\|w\|^q_{\mathcal{B}}\,.\end{aligned}\tag{6.25}$$

第三，根据子引理 6.1，存在某个 $a'>0$，使得当 t 足够小时，$1>|\widetilde{\lambda}_t|>e^{-a'|t|^2\log(1/|t|)\,2}$，因此

$$\begin{aligned}\|I_{3,t}\|^q_{L^q(\mu_{\overline{\Delta}})} &\le \left\|1_Y\widetilde{\Pi}_t(w)\right\|_\infty|\lambda_t-1|^q\,\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[\left|\omega(\cdot)e^{a'\frac{|t|^2\log(1/|t|)}{2}(\omega(\cdot)-1)}\right|^q\right]\\ &\ll \left(|t|^2\log(1/|t|)\left\|\widetilde{\Pi}_t(w)\right\|_{\mathcal{B}}\right)^q\sum_{n\ge 1}\mu_Y(R>n)n^qe^{a'q\frac{n|t|^2\log(1/|t|)}{2}}\\ &\ll \left(|t|^2\log(1/|t|)\|w\|_{\mathcal{B}}\right)^q\,,\end{aligned}\tag{6.26}$$

只要 $|t|$ 足够小即可；这里再次利用了 $\mu_Y(R>n)$ 随n 指数级快速衰减这一事实。由 (6.24)、(6.25) 和 (6.26) 即得结论。

剩下的工作是完成

命题 (6.23) 的证明。回顾一下，b_q 满足 (6.6)，且 ε 已在 (6.8) 之前的正文中固定；特别地，$\frac{1}{b_q}+\frac{1}{q}<1$。存在 $p\in(2,b_q)$，使得$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$。特别地，$1<q\frac{p-1}{p}$，因此 $2\frac{p-1}{p}>\frac{2}{q}>1$。令 $\gamma\in\left(1,\frac{p-1}{p}\right)$。令$h\in\mathcal{B}$。注意，$h=vw$，其中 $w:=e^{-\varepsilon\omega}h\in\mathcal{B}_0$，且 $v:=e^{\varepsilon\omega}\in L^{b_q}$ 在分割元素上为常数。

按照这些选择，$h,v,p,b=b_q,\gamma$满足 [29, 命题 5.4、引理 C.2] 中的假设；将其中的 $\Pi_t\widetilde{\ }$替换为当前的 Π_t 后，证明过程不变，结论仍然成立（这等价于将 [29] 中的 $\overline{\kappa}$ 替换为当前的 $\overline{\Psi}$）。同样，这种调整之所以可行，是因为 $\overline{\Psi}$ 在各个分割元素上为常数，并且 $\overline{\Psi}$的尾部与 $\overline{\kappa}$ 的尾部相似（同样参见公式 (6.1) 和 (6.2)）。（相似的尾部尤其保证了 $\overline{\Psi}.$ 与 $\overline{\kappa}.$ 一样可积。）因此，[29, 引理 C.2] 的证明只需将$\overline{\kappa}$ 替换为 $\overline{\Psi}$即可继续成立。此外，由于具有相同的

$\overline{\Psi}$的性质，可以很容易地修改 [29, 命题 5.4]的证明，从而证明断言 (6.23)。

对 [29, 命题 5.4] 的改编蕴含

$$\|1_Y(\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0)(h)\|_{\mathcal{B}_0} \ll |t|\|1_Y\widetilde{\Pi}'_0(h)\|_{\mathcal{B}_0} + |t|^\gamma \left(\|h\|_{\mathcal{B}} + \|e^{-\varepsilon\omega}h\|_{\mathcal{B}_0}\|e^{\varepsilon\omega}\|_{L^{b_q}}\right) .$$

由 [29,引理 C.2] ，将 $\overline{\kappa}$ 替换为 $\overline{\Psi}$,

$$\left(\|1_Y\widetilde{\Pi}'_0(h)\|_{\mathcal{B}_0} \le \|h\|_{\mathcal{B}} + \|e^{-\varepsilon\omega}h\|_{\mathcal{B}_0}\|e^{\varepsilon\omega}\|_{L^{b_q}}\right) ,$$

我们得出

$$\|1_Y(\widetilde{\Pi}_t - \widetilde{\Pi}_0)(h)\|_{\mathcal{B}_0} \ll |t| \left(\|h\|_{\mathcal{B}} + \|e^{-\varepsilon\omega}h\|_{\mathcal{B}_0}\|e^{\varepsilon\omega}\|_{L^{b_q}}\right) \ll |t|\|h\|_{\mathcal{B}} ,$$

因为 $\|e^{-\varepsilon\omega}h\|_{B_0} = \|h\|_{\mathcal{B}}$。 ∎

子引理 6.3 由于 $t \to 0$, $1 - \lambda_t = \mathsf{log}(1/|t|)\langle t,\ \Sigma_{d+1}t\rangle + O(|t|^2)$。

证明 我们沿用子引理 6.1 证明中的记号。由 (6.18)、(6.19) 和 (6.20) 可得 $1 - \lambda_t = \mathsf{log}(1/|t|)\langle t,\ \Sigma_{d+1}t\rangle + I'_2(t) + O(|t|^2)$。证明 $|I'_2(t)| = O(|t|^2)$ 的过程与 [29, 引理 6.1] 的证明完全相同（将其中所有的 $\overline{\kappa}$、P_t、Π_t、v_t、λ_t 分别替换为 Υ、P_t、Π_t、$\widetilde{v}_t$、λ_t，并逐行遵循证明过程）。这是因为 Υ 满足以下性质（$\overline{\kappa}$ 也满足这些性质）： Υ 在各个分割元素上为常数，等式 (6.2)、(6.22) 和 (5.6)$\widetilde{}$ 成立，并且子引理 6.2 中给出的关于 Π_t 的估计成立。 ∎

7 联合多维局部极限定理的证明（引理 3.2 和 3.4）

设 $d \in \{0, 1, 2\}$。与中心极限定理相比，证明多元局部极限定理所需的一项特定性质是非算术性（或极小性），这一点将在下一个引理中讨论。

引理7.1 对于每个真闭子群 Γ of $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 以及每个 $a \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$,

$$\mu\left(\widehat{\Psi} + g - g \circ T \notin a + \Gamma\right) > 0 .$$

$\widehat{}$证明 我们对 [11, 引理 A.3] 的证明进行调整，以适用于 $d+1$维观测量 Ψ，但呈现方式略有不同。假设存在 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$的一个真子群 Γ、一个可测函数 $g = (g_1, ..., g_{d+1}) : M \to \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 和 $a = (a_1, ..., a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}\widehat{}$，使得上述条件 $\Psi + g - g \circ T \in a + \Gamma$ μ-几乎处处成立。

• 我们来证明，可以找到 Γ 的一组生成元（$v_1, ..., v_{d+1}$），其形式为

$$v_i := (\mathbf{e_i}, \alpha_i) \text{ for } i = 1, ..., d, \quad v_{d+1} := (\mathbf{0}, \alpha_{d+1}),$$

其中，$\mathbf{e_i}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基中的第 i个向量，而$\mathbf{0}$是 $\mathbb{Z}^d$的零元。令 $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ 满足 $v_i := (\mathbf{e_i}, \alpha_i) \in \Gamma$，其中 $i = 1, ..., d$。这样的数存在，因为 Γ 在前 d 个坐标上的投影生成$\mathbb{Z}^d$（因为已在 [34] 中证明，$\kappa\colon M \to \mathbb{Z}^d$ 是非算术的）。

注意到 $\Gamma \cap (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R})$是 $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}$的离散子群。事实上，它是一个闭子群，而且不可能是 $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}$，否则 Γ 就会是 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$，因为此时$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 的任意元素$(a'_1, ..., a'_{d+1})$都可以改写为 $\left(\sum_{i=1}^d a'_i.v_i\right) + \left(a'_{d+1} - \sum_{i=1}^d a'_i\alpha_i\right)(\mathbf{0}, 1)$。因此，$\Gamma \cap (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R})$是离散的，并且具有$\{\mathbf{0}\} \times (\alpha_{d+1}\mathbb{Z})$的形式，其中 α_{d+1}是非负实数。令 $v_{d+1} := (\mathbf{0}, \alpha_{d+1}) \in \Gamma$。

我们来证明（$v_1, ..., v_{d+1}$）生成群 Γ。令 $a' = (a'_1, ..., a'_{d+1}) \in \Gamma \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$。设 $w = a' - \sum_{i=1}^d a'_i v_i = (\mathbf{0}, \beta)$。根据 α_{d+1} 的定义，存在$m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\beta = m\alpha_{d+1}$。因此 $a' \in \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{Z}v_i$。

• 我们来证明存在 $r, \alpha \in \mathbb{R}$ 以及两个可测函数 $c'\colon M \to \mathbb{Z}$和 $G\colon M \to \mathbb{R}$，使得 $\mu(0 < G < \min \tau) > 0$且

$$\tau - \mu(\tau) = r + \alpha.c' + G - G \circ T.$$

由上一项可知，存在可测函数 $c = (c_1, ..., c_{d+1})\colon M \to \mathbb{Z}^{d+1}$，使得

$$\widehat{\Psi} + g - g \circ T = a + \sum_{i=1}^{d+1} c_i.v_i \quad \mu - a.s.,$$

取 $c_i = \kappa_i + g_i - g_i \circ T - a_i$ 作为 $i \in \{1, ..., d\}$，并且

$$c_{d+1} = \left(\tau - \mu(\tau) + g_{d+1} - g_{d+1} \circ T - a_{d+1} - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.c_i\right) / \alpha_{d+1}\mathbf{1}_{\alpha_{d+1} \neq 0}. \quad (7.1)$$

Thus

$$\tau - \mu(\tau) + g_{d+1} - g_{d+1} \circ T = a_{d+1} + \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i.c_i.$$

现在我们注意到，$\kappa = -\kappa \circ \xi \circ T$和 $\tau = \tau \circ \xi \circ T$通过 ξ对合映射 $(q, \varphi) \in \partial \Omega \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$映射到 $(q, -\varphi)$，因此，将前一个恒等式与 $\xi \circ T$复合后得到

$$\tau - \mu(\tau) + g_{d+1} \circ \xi \circ T - g_{d+1} \circ T \circ \xi \circ T = a_{d+1} + \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i.c_i \circ \xi \circ T.$$

因此，对前两个恒等式取平均，得到

$$\tau-\mu(\tau)+\frac{g_{d+1}\circ\xi\circ T-g_{d+1}\circ T\circ\xi\circ T}{2}$$
$$+\frac{g_{d+1}-g_{d+1}\circ T}{2}=a_{d+1}+\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i\frac{c_i+c_i\circ\xi\circ T}{2}\,.$$

但是对于 $i=1,\ \ldots,\ d,$

$$c_i+c_i\circ\xi\circ T=g_i-g_i\circ T-g_i\circ\xi\circ T+g_i\circ T\circ\xi\circ T$$

是一个余边界，因此根据 (7.1)， $\alpha_{d+1}\frac{c_{d+1}+c_{d+1}\circ\xi\circ T}{2}-(\tau-\mu(\tau)-a_{d+1})$ 也是一个余边界。因此，我们证明了存在两个可测函数$c':M\to\mathbb{Z}$ 和 $G:\ M\to\mathbb{R}$，使得

$$\tau-\mu(\tau)=a_{d+1}+\frac{\alpha_{d+1}}{2}.c'+G-G\circ T\,,i.e.\ \tau=r+\frac{\alpha_{d+1}}{2}.c'+G-G\circ T\,,$$

其中 $r:=\mu(\tau)+a_{d+1}$。条件 $\mu(0<G<\min\tau)>0$ 可通过对 G 加上一个常数得到。上述恒等式将与 τ 的非算术性相矛盾。

- 我们完全按照 [11, 引理 A.3] 证明的第二部分进行。
令 $\alpha:=\frac{\alpha_{d+1}}{2}$。对于 $\delta>0$，我们考虑点集 $\mathcal{C}''_\delta$，其中的点 $y=\phi_t(x)$ 满足$x\in M$，$0<t<\tau(x)$ 且 $|t-G(x)|<\delta$。
由前一项可知，首次返回时间 ζ 到 $\mathcal{C}''_0$ 的取值属于 $r\mathbb{N}+\alpha\mathbb{Z}$。事实上，如果 $y=\phi_t(x)\in\mathcal{C}''_0$ 且 $t=G(x)\in(0;\tau(x))$，并且$\phi_s(y)=\phi_u(T^n(x))\in\mathcal{C}''_0$，其中 $u=t+s-\tau_n(x)=G(T^n(x))\in(0,\tau(T^n(x)))$，那么 $s=G(T^n(x))-t+\tau_n(x)=G(T^n(x))-G(x)+\tau_n(x)=nr+\alpha c'_n$。

我们选择 $\varepsilon>0$ 使得 $r+\varepsilon\in\alpha\mathbb{Q}$。令 b 为$\alpha\mathbb{Z}+(r+\varepsilon)\mathbb{Z}$的最小正元素，使得 $\alpha\mathbb{Z}+(r+\varepsilon)\mathbb{Z}=b\mathbb{Z}$。事实上，如果$r+\varepsilon=\alpha\frac{p}{q}$且 p、$q\in\mathbb{Z}$、$q\neq0$，那么 $\alpha\mathbb{Z}+(r+\varepsilon)\mathbb{Z}=\frac{\alpha}{q}(q\mathbb{Z}+p\mathbb{Z})=b\mathbb{Z}$，其中 $b:=\frac{|\alpha|\,gcd}{(p,q)\,|q|}$。
到 $\mathcal{C}'_0:=\{(x,G(x))\ x\in M,G(x)\leq\tau(x)+\varepsilon\}$ 的悬挂流 $\phi^{(\varepsilon)}$（其底空间为 (M,T)，屋顶函数为 $\tau+\varepsilon$）的首次返回时间属于 $\alpha\mathbb{Z}+(r+\varepsilon)\mathbb{N}\subset b\mathbb{Z}$。事实上，若 $y=\phi_t(x)\in\mathcal{C}'_0$，其中 $t=G(x)\in(0;\tau(x)+\varepsilon)$，且 $\phi_s^{(\varepsilon)}(y)=\phi_u^{(\varepsilon)}(T^n(x))\in\mathcal{C}'_0$，其中 $u=t+s-\tau_n(x)-n\varepsilon=G(T^n(x))\in(0,\tau(T^n(x))+\varepsilon)$，那么 $s=G(T^n(x))-t+\tau_n(x)+n\varepsilon=G(T^n(x))-G(x)+\tau_n(x)+n\varepsilon=nr+\alpha c'_n+n\varepsilon$。因此，若 $\delta\in(0,b/2)$，则 $\phi^{(\varepsilon)}$ 返回到 $\mathcal{C}'_\delta$（定义方式与 $\phi^{(\varepsilon)}$ 相同，只是将 $\mathcal{C}''_\delta$ 替换为 $\phi^{(\varepsilon)}$）的回归时间仅会出现在时刻 t，且与 $b\mathbb{Z}$ 的距离至多为 2δ，这与 $\phi^{(\varepsilon)}$ 的混合性相矛盾。如 [11, 引理 A.2]，中所述，悬挂流 $\phi^{(\varepsilon)}$ 混合性的证明与 [10, 第 6.10-6.11] 节中建立的台球流混合性证明思路相同，这要归功于时间距离（将 τ 替换为 $\tau+\varepsilon$ 后，时间距离保持不变）。

∎

引理 3.2 的证明 令 $p>2$, G,H,h 如引理 3.2 的假设所述。为证明联合多维局部极限定理，我们将使用第 6 节中建立的估计。沿用本节的记号，并选择一对 (q,p_q)，使得 $q\in[1,2)$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $b_q>p$（这将推出 $\frac{1}{b_q}+\frac{1}{q}<1$）。

对于 Δ 和 $\overline{\Delta}$，我们沿用约定：对任意 $u:\ \Delta\to\mathbb{R}^{d'}$ 和 $\overline{u}:\ \overline{\Delta}\to\mathbb{R}^{d'}$，有 $u_n:=\sum_{k=0}^{n-1}u\circ f_\Delta^k$ 和 $\overline{u}_n:=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{u}\circ f_{\overline{\Delta}}^k$。

$\widehat{\ }$ 为简便起见，对于分别对应于 $G\circ\pi$、$H\circ\pi$、$\Psi\circ\pi$ 且定义在 Δ 上的函数，我们沿用记号 G、H、Ψ（而非 $\widehat{\ }$ 上的 M）。由于函数 G 和 H 在 M 上有界且动态 Hölder 连续，函数 G 和 H 在 Δ 上也有界且动态 Hölder 连续，具体如下：只需增大第 6 节中引入的 Young Banach 空间 $\mathcal{B}$ 内 $\beta\in(0,1)$ 的取值，G 和 H 就满足以下性质

$$s(x,y)>2k\quad\Rightarrow\quad|G(f_\Delta^k(x))-G(f_\Delta^k(y))|<L_G\beta^k,\ |H(f_\Delta^k(x))-H(f_\Delta^k(y))|<L_H\beta^k\,. \tag{7.2}$$

回顾一下，Young 的 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的定义中的 ε（见 (6.8) 前的正文）使得 $\mathcal{B}$ 连续嵌入 $\mathbb{L}^{b_q}(\mu_{\overline{\Delta}})$。此外，根据子引理 6.2,

$$\|\Pi_t-\Pi_0\|_{\mathcal{B}\to L^q(\mu_{\overline{\Delta}})}=\mathcal{O}(t)\,.$$

采用上述记号，我们需要研究以下量：

$$\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G.h(\widehat{\Psi}_n-L)H\circ f_\Delta^n]\,.$$

由傅里叶反演定理可知

$$\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G.h(\widehat{\Psi}_n-L)H\circ f_\Delta^n]=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}}e^{-i\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t)\mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left[Ge^{i\langle t,\widehat{\Psi}_n\rangle}H\circ f_\Delta^n\right]\,dt\,, \tag{7.3}$$

对于 $\widehat{h}(t):=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}}h(\ell,x)e^{i\langle t,(\ell,x)\rangle}\,dx$。

- 步骤 1：过渡到商空间

  – 逼近。$\widehat{\ }$ 回忆一下，由 (6.10) 可知 $\Psi\circ\pi=\overline{\Psi}\circ\overline{\pi}+\chi\circ f_\Delta-\chi$，其中 $\overline{\Psi}=(\overline{\kappa},\overline{\tau})$ 的取值在 $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}$ 中，并且在每个分割元素上局部一致地属于 Hölder，且 χ 有界，并按照 (6.11) 的意义动态地属于 Hölder。因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[Ge^{i\langle t,\widehat{\Psi}_n\rangle}H\circ f_\Delta^n]&=\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G\circ f_\Delta^{k_n}e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n\circ\overline{f}_{\overline{\Delta}}^{k_n}\circ\overline{\pi}+\chi\circ f_\Delta^{k_n+n}-\chi\circ f_\Delta^{k_n}\rangle}H\circ f_\Delta^{k_n}\circ f_\Delta^n]\\&=\mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left(e^{-i\langle t,\overline{\Psi}_{k_n}\circ\overline{\pi}\rangle}(Ge^{-i\langle t,\chi\rangle})\circ f_\Delta^{k_n}.e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n\circ\overline{\pi}\rangle}.\left((He^{i\langle t,\chi\rangle})\circ f_\Delta^{k_n}e^{i\langle t,\overline{\Psi}_{k_n}\circ\overline{\pi}\rangle}\right)\circ f_\Delta^n\right)\,.\end{aligned}$$

我们用 $G_{(k_n)}(t) \circ \overline{\pi}$ 逼近 $\widehat{G}_{(k_n)}(t) := e^{-i\langle t, \overline{\Psi}_{k_n} \circ \overline{\pi}\rangle}(Ge^{-i\langle t, \chi\rangle}) \circ f_{\Delta}^{k_n}$，其中

$$G_{(k_n)}(t) \circ \overline{\pi} := \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[e^{-i\langle t, \overline{\Psi}_{k_n} \circ \overline{\pi}\rangle}(Ge^{-i\langle t, \chi\rangle}) \circ f_{\Delta}^{k_n} | s(.,.) > 2k_n]$$

并类似地 $e^{i\langle t, \overline{\Psi}_{k_n} \circ \overline{\pi}\rangle}(He^{i\langle t, \chi\rangle}) \circ f_{\Delta}^{k_n}$ 由 $H_{(k_n)}(-t) \circ \overline{\pi}$。

– 控制该逼近中的误差。

由于 G、H 和 $e^{i\langle t, \chi\rangle}$ 一致有界，并且在 (7.2) 和 (6.11) 的意义下具有动态 H¨older 连续性，因此

$$\left\| \widehat{G}_{(k_n)}(t) - G_{(k_n)}(t) \circ \overline{\pi} \right\|_\infty \leq C \left(\|G\|_\infty |t| + L_G \right) \beta^{k_n} . \tag{7.4}$$

因此

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G.e^{i\langle t, \widehat{\Psi}_n\rangle}.H \circ f_{\Delta}^n] - \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[G_{(k_n)}(t).e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n\rangle}.H_{(k_n)}(-t) \circ f_{\overline{\Delta}}^n \right] \right| \\ &\quad \leq C'(1+|t|) \left(\|G\|_\infty \|H\|_\infty + L_H \|G\|_\infty + L_G \|H\|_\infty \right) \beta^{k_n} . \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G.h(\widehat{\Psi}_n - L)H \circ f_{\Delta}^n] \tag{7.5}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}} e^{-i\langle t, L\rangle} \widehat{h}(t) \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[G_{(k_n)}(t).e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n\rangle}.H_{(k_n)}(-t) \circ f_{\overline{\Delta}}^n \right] dt$$

$$+ \mathcal{O}\left(\beta^{k_n} \left(\|G\|_\infty \|H\|_\infty + L_H \|G\|_\infty + L_G \|H\|_\infty \right) \right) , \tag{7.6}$$

因为 $\int_{\mathbb{R}^d} (1+|t|).|\widehat{h}(t)| \, dt < \infty$。

- 步骤 2：使用 $f_{\overline{\Delta}}$ 的转移算子。

根据 (7.5)，我们需要研究 $t \in \mathbb{R}^d$ 中 $\widehat{h}(t)$ 乘以下列因子的积分：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[G_{(k_n)}(t).e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n\rangle}.H_{(k_n)}(-t) \circ f_{\overline{\Delta}}^n \right] &= \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t).P_t^n(G_{(k_n)}(t)) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t).P_t^{n-3k_n}(P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))) \right] . \end{aligned} \tag{7.7}$$

我们已经知道 $\|H_{(k_n)}(-t)\|_{L^p} \leq \|H\|_{L^p}$。设 $m \geq 2$。我们来证明，存在 $C_0 > 0$，使得对于每个 $n \geq 3, t \in \mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\Delta}$，只要满足条件 $\overline{s}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$，以下不等式成立

$$\left| P_t^{mk_n}(G_{(k_n)}(t))(\bar{x}) - P_t^{mk_n}(G_{(k_n)}(t))(\bar{y}) \right| \leq C_0(1+|t|) \left| P^{mk_n}(|G_{(k_n)}(t)|)(x) \right| \beta^{\overline{s}(\bar{x}, \bar{y})} . \tag{7.8}$$

事实上，我们观察到

$$\begin{aligned} &\left| P_t^{mk_n}(G_{(k_n)}(t))(\bar{x}) - P_t^{mk_n}(G_{(k_n)}(t))(\bar{y}) \right| \\ &\leq \sum_{\phi_{(mk_n)}} \left| e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} e^{i\langle t, \overline{\Psi}_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))\rangle}(G_{(k_n)}(t))(\phi_{(mk_n)}(\bar{x})) \right. \\ &\left. - e^{g_{mk_n}(\phi_{mk_n}(\bar{y}))} e^{i\langle t, \overline{\Psi}_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{y}))\rangle}(G_{(k_n)}(t))(\phi_{(mk_n)}(\bar{y})) \right| , \end{aligned}$$

其中求和遍历 $f_{\overline{\Delta}}^{mk_n}$ 的反分支 $\phi_{(mk_n)}$，且 g 满足

$$|e^{g(\overline{x})} - e^{g(\overline{y})}| \le L_g e^{g(x)} \beta^{\overline{s}(\overline{x},\overline{y})}, \text{if } \overline{s}(\overline{x},\overline{y}) > 1\,. \tag{7.9}$$

最后，我们注意到

$$G_{(k_n)}(t)(\phi_{(mk_n)}(\bar{x})) = G_{(k_n)}(t)(\phi_{(mk_n)}(\bar{y}))\,,$$

由于 $m \ge 2$，并且

$$\begin{aligned}\left|e^{i\langle t,\overline{\Psi}_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))\rangle} - e^{i\langle t,\overline{\Psi}_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{y}))\rangle}\right| &\le |t| L_{\overline{\Psi}} \sum_{j=0}^{mk_n-1} \beta^{\bar{s}(\bar{x},\bar{y})+mk_n-j} \\ &\le |t| L_{\overline{\Psi}} \beta^{\overline{s}(\bar{x},\bar{y})+1}/(1-\beta)\,, \end{aligned} \tag{7.10}$$

and

$$\begin{aligned}\left|e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} - e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{y}))}\right| &\le e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} \left|e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{y}))-g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} - 1\right| \\ &\le e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} L_g \sum_{j=0}^{mk_n-1} \beta^{\overline{s}(\overline{x},\overline{y})+mk_n-j+1} \\ &\le e^{g_{mk_n}(\phi_{(mk_n)}(\bar{x}))} L_g \frac{\beta^{\overline{s}(\bar{x},\bar{y})+1}}{1-\beta}\,, \end{aligned} \tag{7.11}$$

由 (7.9) 可知。至此，(7.8) 的证明完成。因此

$$\|P^{2k_n}(|G_{(k_n)}|)\|_{\mathcal{B}} \le \|P^{2k_n}(|G_{(k_n)}|)\|_{\mathcal{B}_0} = \mathcal{O}\left(\|G\|_\infty\right)\,,$$

and

$$\begin{aligned}\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}} &= \mathcal{O}\left((1+|t|)\|P^{3k_n}(|G_{(k_n)}|)\|_{\mathcal{B}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left((1+|t|)\|P^{k_n}(P^{2k_n}(|G_{(k_n)}|))\|_{\mathcal{B}}\right) \\ &\le \mathcal{O}((1+|t|)(\mathbb{E}_\mu[|G|] + \mathcal{O}(\theta^{k_n}\|G\|_\infty)))\,, \end{aligned} \tag{7.12}$$

其中最后一行用到了 (6.9)。

- 步骤 3：限制在 0 的邻域内。
令 $K > 0$ 满足：$\widehat{g}$ 的支撑集包含于 $\mathbb{T}^d \times [-K, K]$。利用子引理 6.3，我们将 $b_0 \in (0; \min(1, \beta_0))$（见 (6.13)、(6.14)）取得足够小，使得存在 $a' > 0$，令对所有 $t \in [-b_0, b_0]^{d+1}$，以下结论均成立

$$P_t^n = \lambda_t^n \Pi_t + \mathcal{O}(\theta^n)\,, \quad \lambda_t = e^{-\Sigma_{d+1} t\cdot t \,\log(1/|t|) + \mathcal{O}(t^2)}\,, \tag{7.13}$$

$$\Pi_t - \mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[\cdot] 1_{\overline{\Delta}} = \mathcal{O}(|t|) \text{ in } \mathcal{L}((\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) \to L^q(\mu_{\overline{\Delta}}))\,, \tag{7.14}$$

$$\theta \le e^{-2\Sigma_{d+1} t\cdot t \log(1/|t|)} \le |\lambda_t| \le e^{-a'|t|^2 \log(1/|t|)}\,, \tag{7.15}$$

并且 $\forall y > x > b_0^{-1}$，$1\,2(x/y)^{\epsilon} \leq \log(x)/\log(y) \leq 2(y/x)^{\varepsilon}$（例如，使用慢变函数的 Karamata表示）。最后这个条件意味着，对于每个足够大的 n（使得 $\mathfrak{a}_n > b_0^{-1}$）以及每个$u \in [-b_0\mathfrak{a}_n, b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}$，以下不等式均成立

$$\frac{1}{2}\min(|u|^{\varepsilon}, |u|^{-\varepsilon}) \leq \log(\mathfrak{a}_n/|u|)/\log \mathfrak{a}_n \leq 2\max(|u|^{\varepsilon}, |u|^{-\varepsilon})\,. \tag{7.16}$$

引理7.1确保对于每个 $t \neq 0$，P_t 的谱半径小于1。这意味着存在 $\theta_0 \in (0,1)$，使得$\sup_{b_0<|t|_\infty<K} \|P_t^n\| = \mathcal{O}(\theta_0^n)$（由谱半径的上半连续性可知）。因此

$$\left| \int_{b_0<|t|_\infty<K} e^{-i\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t)\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left(H_{(k_n)}(-t).P_t^{n-3k_n}(P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t)))\right)\,dt \right| \tag{7.17}$$

$$\leq \|h\|_{L^1} K\mathcal{O}\left(\theta_0^{n-3k_n}\|H\|_{L^p}\sup_{|t|<b_0}\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}}\right)\,, \tag{7.18}$$

因为 L^p 连续嵌入到Young空间 $\mathcal{B}$的对偶空间中。因此，我们可以专注于 $[-b_0, b_0]^d$。由（7.13）和（7.14）可得，在 $L^q(\mu_{\overline{\Delta}})$中，

$$\begin{aligned} P_t^{n-3k_n}(P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))) = \lambda_t^{n-3k_n}\left(\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))] + \mathcal{O}(|t|\,\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}})\right) \\ + \mathcal{O}\left(\theta^{n-3k_n}(1+|t|)\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}}\right)\,, \end{aligned}$$

因此

$$\int_{[-b_0,b_0]^{d+1}} e^{-i\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t)\left(\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t).P_t^{n-3k_n}(P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t)))\right]\right. \tag{7.19}$$

$$\left. -\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t)\right]\lambda_t^{n-3k_n}\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))]\right)\,dt \tag{7.20}$$

$$= \mathcal{O}\left(\|H\|_{L^p}\mathfrak{a}_n^{-d-2}\sup_{|t|<b_0}\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}}\right)\,,$$

因为

$$\begin{aligned} \int_{[-b_0,b_0]^{d+1}}\left(|t||\lambda_t|^{n-3k_n} + \theta^{n-3k_n}(1+|t|)\right)\,dt &\leq \int_{[-b_0,b_0]^{d+1}}|t|e^{-a'n|t|^2\log(1/|t|)}\,dt + \mathcal{O}\left(\theta^{\frac{n}{2}}\right) \\ &\leq \mathfrak{a}_n^{-d-2}\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n,b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}}|u|e^{-a'n|u/\mathfrak{a}_n|^2\log(|\mathfrak{a}_n|/|u|)}\,du + \mathcal{O}\left(\theta^{\frac{n}{2}}\right) \\ &\leq \mathfrak{a}_n^{-d-2}\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n,b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}}|u|e^{-\frac{a'|u|^2}{2\log(\mathfrak{a}_n)}\log(|\mathfrak{a}_n|/|u|)}\,du + \mathcal{O}\left(\theta^{\frac{n}{2}}\right) \\ &\leq \mathfrak{a}_n^{-d-2}\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n,b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}}|u|e^{-\frac{a'}{4}|u|^{2-\varepsilon}}\,du + \mathcal{O}\left(\theta^{\frac{n}{2}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\mathfrak{a}_n^{-d-2}\right)\,, \end{aligned} \tag{7.21}$$

其中我们用到了（7.16）。此外，根据 $H_{(k_n)}$ 的定义可得

$$\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t)\right] = \mathbb{E}_{\mu_\Delta}\left(e^{i\langle t,\overline{\Psi}_{k_n}\circ\overline{\pi}\rangle}(He^{i\langle t,\chi\rangle})\circ f_\Delta^{k_n}\right) \tag{7.22}$$

$$= \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[H] + \mathcal{O}(k_n t\|H\|_{L^p})\,, \tag{7.23}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 χ 一致有界，且 $\|\Psi_{k_n}\|_{L^{q(\mu)}} \ll k_n\|\Psi\|_{L^{q(\mu)}}$ 因为 $q<2$。此外，由于 (7.4)，对所有 $t\in[-b_0;b_0]^{d+1}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}[P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))] &= \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[(e^{i\langle t,\overline{\Psi}_{2k_n}\circ\overline{\pi}-\chi\rangle}G)\circ f_\Delta^{k_n}] + \mathcal{O}(\beta^{k_n})\\ &= \mathbb{E}_\mu[G] + \mathcal{O}\left(t\|G\|_{L^1} + t\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)}\right).\end{aligned}$$

将最后这两个估计与 (7.19) 通过 (7.21) 结合起来，我们推得

$$\begin{aligned}&\int_{[-b_0,b_0]^{d+1}} e^{-i\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t)\left(\mathbb{E}_{\mu_{\overline{\Delta}}}\left[H_{(k_n)}(-t).P_t^{n-3k_n}(P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t)))\right] - \mathbb{E}_{\mu_\Delta}[H]\,\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G]\,\lambda_t^{n-3k_n}\right)dt\\ &= \mathcal{O}\left(\mathfrak{a}_n^{-d-2}\left[\|H\|_{L^p}\sup_{|t|<b_0}\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}} + k_n\|G\|_{L^1}\|H\|_{L^p} + \|H\|_{L^1}\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)}\right]\right).\end{aligned}$$

由最后这个估计结合 (7.5) 和 (7.7)，可得

$$\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G.h(\widehat{\Psi}_n - L).H\circ f_\Delta^n] - \mathfrak{a}_n^{-d-1}\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[H]\,\mathbb{E}_{\mu_\Delta}[G]\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n,b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t/\mathfrak{a}_n)\lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n-3k_n}\,dt \tag{7.24}$$

$$= \mathcal{O}\left(\beta^{k_n}\|G\|_{Holder}.\|H\|_{Holder} + \mathfrak{a}_n^{-d-2}\left[\|H\|_{L^p}\sup_{|t|<b_0}\|P_t^{3k_n}(G_{(k_n)}(t))\|_{\mathcal{B}}\right.\right. \tag{7.25}$$

$$\left.\left. + k_n\|G\|_{L^1}\|H\|_{L^p} + \|H\|_{L^1}\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)}\right]\right). \tag{7.26}$$

因此，由于 (7.12)，上述公式 (7.24) 有界于

$$\mathcal{O}\left(\max(\beta,\theta)^{k_n}\|G\|_{Holder}.\|H\|_{Holder} + \mathfrak{a}_n^{-d-2}\left[k_n\|G\|_{L^1}\|H\|_{L^p} + \|H\|_{L^1}\|\widehat{\Psi}_{2k_n}.G\|_{L^1(\mu)}\right]\right).$$

还需估计

$$\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n,b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t/\mathfrak{a}_n)\lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n-3k_n}\,dt\,.$$

为此，我们注意到，由于（7.16），对于 $t\in[-\mathfrak{a}_n b_0,\mathfrak{a}_n b_0]^d$，

$$\lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n-3k_n} = \lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n}\lambda_{t/\mathfrak{a}_{n-3k_n}}^{-3k_n} = e^{-\frac{n}{\mathfrak{a}_n^2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\,(\log(\mathfrak{a}_n/|t|))+\mathcal{O}(n|t|^2/\mathfrak{a}_n^2)}e^{\mathcal{O}(\frac{k_n}{n}\max(|t|^{2-\epsilon},|t|^{2+\epsilon}))} \tag{7.27}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\log(\mathfrak{a}_n)}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\,(\log\mathfrak{a}_n-\log(|t|))+\mathcal{O}(\max(|t|^{2-\epsilon},|t|^{2+\epsilon})\eta_n)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\left(1-\frac{\log|t|}{\log\mathfrak{a}_n}\right)} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{a'\min(|t|^{2-\epsilon},|t|^{2+\epsilon})}{2}}\max(|t|^{2-\varepsilon},|t|^{2+\varepsilon})\eta_n\right),$$

其中 $\eta_n := \frac{1}{\log n} + \frac{k_n}{n}$。因此，由于 $\widehat{h}$ 是利普希茨连续的，记 $[h]_{Lip}$ 为其利普希茨常数，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n, b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t/\mathfrak{a}_n)\lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n-3k_n}\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}\left(\widehat{h}(0)+\mathcal{O}(t/\mathfrak{a}_n)\right)e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\left(1-\mathbf{1}_{|t|<b_0\mathfrak{a}_n}\frac{\log(|t|)}{\log(\mathfrak{a}_n)}\right)}\,dt + \mathcal{O}\left(\left(|\widehat{h}(0)|+\frac{[\widehat{h}]_{Lip}}{\mathfrak{a}_n}\right)\eta_n\right) \\
&= \widehat{h}(0)\int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle}\left(1+\frac{\mathbf{1}_{|t|<b_0\mathfrak{a}_n}}{2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\frac{\log(|t|)}{\log(\mathfrak{a}_n)}\right. \\
&\qquad \left.+O\left(\mathbf{1}_{|t|<b_0\mathfrak{a}_n}\max\left(1,e^{\frac{1}{2}\langle\Sigma_{d+1}t,t\rangle\frac{\log(|t|)}{\log\mathfrak{a}_n}}\right)\frac{|t|^4(\log(|t|))^2}{(\log n)^2}\right)\right)dt + O\left(|\widehat{h}(0)|\eta_n+\frac{[\widehat{h}]_{Lip}}{\mathfrak{a}_n}\right),
\end{aligned}
$$

这里我们使用了 $e^x = 1 + x + O(\max(1, e^x)x^2)$。因此

$$
\int_{[-b_0\mathfrak{a}_n, b_0\mathfrak{a}_n]^{d+1}} e^{-i\mathfrak{a}_n^{-1}\langle t,L\rangle}\widehat{h}(t/\mathfrak{a}_n)\lambda_{t/\mathfrak{a}_n}^{n-3k_n}\,dt = g_{d+1}\left(\frac{L}{\mathfrak{a}_n}\right)\int_{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}} h\,d\lambda_{d+1} + \mathcal{O}\left(|\widehat{h}(0)|\eta_n+\frac{[\widehat{h}]_{Lip}}{\mathfrak{a}_n}\right), \tag{7.28}
$$

with $g_{d+1}(z) := \frac{e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma_{d+1}z,z\rangle}}{\sqrt{(2\pi)^d\det\Sigma_{d+1}}}$.

引理 3.2 的证明到此结束。 ∎

引理 3.4 的证明 设 A_0、$B_0 \subset M$ 是可测集，使得 $\mu(\partial A_0) = \mu(\partial B_0) = 0$。设 $K \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 是有界集，且 $\Lambda_{d+1}(\partial K) = 0$（边界在$\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}$中），并设 $z \in \mathbb{R}^{d+1}$ 和 $(z_n)_n$ 是一个 $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}$序列，使得 $\lim_{n\to+\infty} z_n/a_n = z$。下面证明

$$
\lim_{n\to+\infty} a_n^{d+1}\mu\left(A_0\cap T^{-n}(B_0)\cap\{\widehat{\Psi}_n(x)\in z_n+K\}\right) = g_{d+1}(z)\mu(A_0)\mu(B_0)\lambda_{d+1}(K)\,. \tag{7.29}
$$

我们将分别用 $A_n^{\pm}$ 和 $B_n^{\pm}$ 近似 A_0 和 B_0，其中 A_n^-（分别地，A_n）是 $^+$) $M\setminus\bigcup_{k=-m_n}^{m_n}T^{-k}$（$\mathcal{S}_0$）中包含于（分别地，与）$A_0$ 相交的所有连通分支的并集，且 $m_n\to+\infty$；对于 B_0，$B_n^{\pm}$ 也作类似定义。由于这些连通分支的直径小于某个 $C>0$ 和某个 $\vartheta\in$（0, 1）对应的 $C\vartheta^n$，并且 μ（∂A_0）$=\mu$（∂B_0）$=0$，我们得出 μ（$A_n^+\setminus A_n^-$）和 μ（$B_n^+\setminus B_n^-$）随着 $n\to+\infty$ 趋于零。考虑引理 3.2 中取非负值的 h。我们设

$$
\mathfrak{M}_n(A,B) := a_n^{d+1}\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_A.h(\widehat{\Psi}_n - z_n).\mathbf{1}_{T^{-n}(B)}]
$$

and

$$
\mathfrak{M}(A,B) := \mu(A)\mu(B)g_{d+1}(z)\int_{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}} h\,d\Lambda_{d+1}\,.
$$

由于 $h \geq 0$，这两个量关于 A 和 B 单调递增。因此

$$\mathfrak{M}_n(A_m^-, B_m^-) - \mathfrak{M}(A_m^+, B_m^+) \leq \mathfrak{M}_n(A_0, B_0) - \mathfrak{M}(A_0, B_0) \leq \mathfrak{M}_n(A_m^+, B_m^+) - \mathfrak{M}(A_m^-, B_m^-) \,.$$

于是，将引理 3.2（其中 $k_n = \log\, n$）应用于 $\mathbf{1}_{A_m^\pm}$、$\mathbf{1}_{B_m^-}$ 可知，对所有 $m \geq 1$，这是因为这些观测量在动力学意义下是 H¨older 连续的，且 $\mathfrak{a}_n \sim a_n$，

$$\begin{aligned}(\mu(A_m^-)\mu(B_m^-) - \mu(A_m^+)\mu(B_m^+)) g_{d+1}(z) \int_{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}} g \, d\lambda_{d+1} &= \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{M}_n(A_m^-, B_m^-) - \mathfrak{M}(A_m^+, B_m^+) \\ &\leq \liminf_{n \to +\infty} \mathfrak{M}_n(A_0, B_0) - \mathfrak{M}(A_0, B_0) \,,\end{aligned}$$

由此我们得出，$\liminf_{n\to+\infty} \mathfrak{M}_n(A_0, B_0) - \mathfrak{M}(A_0, B_0) \geq 0$；对 lim sup 作类似处理，将指数 $+$ 和 $-$ 互换，即可得出

$$\lim_{n \to +\infty} \mathfrak{M}_n(A_0, B_0) = \mathfrak{M}(A_0, B_0) = 0 \,, \tag{7.30}$$

并将其推广到复值函数 g 的情形。考虑式 (2.10) 中出现的函数 H_0。设 $\delta = 1/L > 0$，其中 L 是一个整数，使得 $L > 2\|H_0\|_\infty$ 且 $K \subset (-L + 2\|H_0\|_\infty, L - 2\|H_0\|_\infty)^d \times (-\frac{2\pi}{\delta}, \frac{2\pi}{\delta})$。考虑由下式给出的函数族 $(g_{\delta,\theta} \colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C})_\theta$：

$$g_{\delta,\theta}(x) = e^{i\langle \theta, x \rangle} h_\delta(x) \,, \tag{7.31}$$

其中 $h_\delta \colon (x_1, \ldots x_{d+1}) \mapsto \frac{1 - \cos(\delta x_{d+1})}{(2L-1)^2 \pi \delta x_{d+1}^2} \mathbf{1}_{|x_1|, \ldots, |x_d| < L}$（利用波利亚分布的稠密性）。$g_{\delta,\theta}$ 的傅里叶变换为 $t \mapsto \sum_{|k_1|,..,|k_d|<L} \frac{e^{i\sum_{i=1}^d k_i t_i}}{2L-1}() \max(0, 1 - |(t_{d+1} + \theta)/\delta|)$。对于所有 θ，上述收敛结果 (7.30) 与 $h = g_{\delta,\theta}$ 一起蕴含 $(\mathfrak{m}_n)_n$ 依分布收敛到 $\mathfrak{m}$（因为这确保了特征函数收敛），其中 $\mathfrak{m}_n$ 关于像测度的密度为 $\frac{h_\delta}{a_n^{d+1}\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{A_0 \cap T^{-n}(B_0)} h_\delta(\widehat{\Psi}_n - z_n)]}$ $a_n^{d+1} \mathbf{1}_{A_0 \cap T^{-n}B_0} \mu$ 的测度，其中 $\mathfrak{m}$ 是相对于 $g_{d+1}(z)\Lambda_{d+1}$、密度为 $h_\delta / g_{d+1}(z)$ 的概率测度。因此，由于 $K \subset (-L, L)^d \times (-\frac{2\pi}{\delta}, \frac{2\pi}{\delta})$，前述分布收敛意味着 $\lim_{n\to+\infty} \int_K \frac{1}{h_\delta} \, d\mathfrak{m}_n = \int_K \frac{1}{h_\delta} \, d\mathfrak{m}$，即

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n^{d+1} \mu\left(A_0, \widehat{\Psi}_n - z_n \in K, T^{-n}(B_0)\right)}{a_n^{d+1} \mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{A_0 \cap T^{-n}(B_0)} h_\delta(\widehat{\Psi}_n - z_n)]} = \Lambda_{d+1}(K) \,,$$

因此，分母再次使用 7.30，

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n^{d+1} \mu\left(A_0, \widehat{\Psi}_n - z_n \in K, T^{-n}(B_0)\right)}{g_{d+1}(z) \mu(A_0) \mu(B_0)} = \Lambda_{d+1}(K) \,.$$

至此，便完成了对 Ψ_n (7.29)的逐点 MLLT 证明。

接下来还需证明收敛结果的一致性。假设 (3.1) 在 $z \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}:\ \ |z| \le La_n$ 中不一致收敛于 0，当 $n \to +\infty$时。因此，存在一个 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ 中的序列 $(z_n)_n$，使得 $|z_n| < La_n$；还存在一个整数序列$m(n)$和一个实数 $\eta > 0$，使得

$$\forall n \ge N_0, \quad \left| a_n^{d+1} \mu\left(A_0 \cap T^{-n}(B_0) \cap \{\widehat{\Psi}_n \in z_n + K\} \right) - g_{d+1}\left(\frac{z}{a_n}\right) \mu(A_0)\mu(B_0)\lambda_{d+1}(K) \right| > \eta\,.$$

引理 3.4 的证明到此结束。 ∎

联合局部极限定理的证明（引理 3.5）

在本附录中，我们证明引理 3.5。该证明与 [22] 的证明非常相似，不同之处在于函数 $\overline{\Psi}$ 在分割元素上并非常数。为完整起见，我们在本附录中说明，为证明引理 3.5 中陈述的联合局部极限定理估计，需要对 [22] 做哪些调整。

我们回顾一下，关于单元变化 κ （因此根据 (2.10)，也关于飞行函数 V）的最优局部极限定理已在 [22] 中得到。更准确地说，根据 [22, 定理 1.1 和评注 1.2],，对于任意 $h > 0$，存在 $C > 0$，使得 $\mu(V_n \in B(x,h))) \le C\frac{n}{a_n^d}\log\frac{|x|}{1+|x|^2}$，对任意 $n \ge 1$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 均成立。这里，$B(x,h)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中以 x 为中心、半径为 h 的开球。类似地，对于所有 $N \in \mathbb{Z}^d$ 和 $n \ge 1$，$\mu(\kappa_n = N) \le C\frac{n}{a_n^d}\log\frac{|N|}{1+|N|^2}$。

对 κ in [22] 的局部极限定理证明，很大程度上依赖于这样一个事实：κ 映射到商 Young 塔，并且 $\overline{\kappa}$ 在 Young 塔 Δ 的划分 $\mathcal{P}$ 的分割元素上为常数（如第 6 节所述）；关于 V 的结论可立即得出$\widehat{\ }$，因为在相差一个有界余边界的意义下，V 与 κ 相同。由 (6.10) 可知，$\Psi \circ \pi$ 可$\widehat{\ }$写成 $\overline{\Psi} \circ \overline{\pi} = (\overline{\kappa}, \overline{\tau}) \circ \overline{\pi}$ 加上一个有界余边界。因此，Ψ 的局部极限定理可由 $\overline{\Psi}$ 的局部极限定理推出。函数 $\overline{\tau}$，因而 $\overline{\Psi}$，在划分的分割元素上并非常数。然而，正如下文所论证的，[22] 中的论证仍然成立，从而可为 $\overline{\Psi}$ （进而为 Ψ）得到如$\widehat{\ }$引理 3.5 所述的局部极限定理。

在本节中，令 $d \in \{0,1,2\}$ 和 $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 为引理 3.5 陈述中的一个开球。为避免下文符号冲突，引理 3.5 陈述中的 z 将改记为 x。更具体地说，我们将在此证明，对于任意有界集 $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$，

$$\mu(\widehat{\Psi}_n \in x + U) \ll \frac{n}{a_n^{d+1}} \frac{(\log|x|)}{1+|x|^2} \quad \text{uniformly in } n \ge 1,\, x \in \mathbb{R}^{d+1}\ . \tag{A.1}$$

如 [22, 备注 1.3], 中所述，范围 $|x| \le a_n$ 内的局部极限定理可由相关的局部极限定理推出，而范围 $|x| \ge a_n$ 则需要大量工作。

A.1 范围 $|x| \le a_n$

由引理 3.2 中给出的局部极限定理估计可得 $\mu(\Psi_n \in B(x,h)) \ll_{a_n^{-d-1}} \ll \frac{n}{a_n^{d+1}}$ 对数 $\frac{|x||}{1+|x|^2}$，其中第一个不等式对 $n \ge 1, x \in \mathbb{R}^{d+1}$ 一致成立，第二个不等式则对满足 $|x| \le a_n$ 的 $n \ge 1$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立。事实上，$t \mapsto |t^2|$ 对数 $|t||$ 在 $t \to +\infty$ 时趋于极限 $+\infty$，其导数为 $t \mapsto {}^{t-1}_{t}{}^{2}$ 对数 $\frac{|x|^2}{a_n^2}$，因此它在 $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$ 上递增。于是，对足够大的 n，若 $|x| \le a_n$，则 $|$ 对数 $|x|| \le |$ 对数 $a_n| = \frac{2n}{n+}$ 对数 n 对数对数对数 n。

A.2 范围 $n \ll \log|x|$

在这个范围内，我们以类似于 [22, 引理 3.1] 的方式进行推导

引理 A.1 对任意 $\epsilon_1 > 0$ 和任意 $q \ge 1$，存在 $C_q > 0$，使得对每个 $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ 以及满足 $\epsilon_1 n \le \log|x|$ 的每个 $n \ge 1$，都有 $\mu(\widehat{\Psi}_n \in x + U) \le \frac{C_q}{n^q|x|^2}$。

证明 存在 x_0，使得若 $|x| > x_0$，则 $|x| > 2(\mathrm{diam}(U) + \epsilon_1^{-1}\log|x|)$。存在一个常数 C_q'，使得对于所有 x，以及满足 $\epsilon_1 n \le \log|x| \le \log x_0$ 的所有 n，都有 $\mu(\widehat{\Psi}_n \in x + U) \le \frac{C_q'}{n^q|x|^2}$。还需处理情形 $|x| \ge x_0$。可以看出，引理 3.1] 的证明 [22, 仅用到了以下事实：$|\kappa|_\infty$ 取整数值，$\mu(|\kappa|_\infty = p) \ll p^{-3}$ 当 $x \to +\infty$ 时成立，以及 $\mu(|\kappa|_\infty = p, |\kappa|_\infty \circ T^r \ge cp^{\frac{4}{5}}) \ll p^{-3-\frac{2}{45}}$。这些性质对于 $(\kappa, \lfloor\widetilde{\tau}\rfloor)$ 同样成立。因此，对于每个 $q \ge 1$，存在 $C_q' > 0$，使得对于所有 $y \in \mathbb{R}^d$ 以及满足 $\epsilon n \le \log|y|$ 的所有 $n \ge 1$，都有 $\mu((\kappa_n, (\lfloor\widetilde{\tau}\rfloor)_n) = y) \le \frac{C_q''}{n^q|y|^2}$，于是

$$\mu(\Psi_n \in x + U) \le \sum_{y \in (x+U+\{0\}^d \times [-n;0]) \cap \mathbb{Z}^{d+1}} \frac{C_q''}{n^q|y|^2} \le (n+1)(\mathrm{diam}(U)+1)^{d+1} \frac{4C_q''}{n^q|x|^2}.$$

因为上面第一个求和中的 y 满足

$$|y| \ge |x| - \mathrm{diam}(U) - n \ge |x| - \mathrm{diam}(U) - \frac{\log|x|}{\epsilon_1} \ge |x|/2.$$

最后取例如 $C_q := \max\left(C_q', 8C_{q+1}''(\mathrm{diam}(U)+1)\right)$，即可得出结论。 ∎

A.3 对于特定的 ϵ_1，$a_n \le |x| \le e^{\epsilon_1 n}$ 的范围

该 ϵ_1 应固定下来，使其与 ϵ_1 在[22, 命题 6.2]中的选择相匹配。正如我们将在下文解释的那样，它在当前论证中不起作用，但具体选择可参见 (A.4)。

由于 $\Psi\circ\pi$ 等于 $\overline{\Psi}\circ\overline{\pi}$ 加上一个有界余边界，所需的 Ψ 的 LLD (A.1)$\widehat{\ }$将由 $\overline{\Psi}$的 LLD 推出。因此，在此范围内，我们重点研究 $\overline{\Psi}$的 LLD 估计。正如附录 B 中所说明的，$\overline{\Psi}$ 在 Young 分割元素上是一致利普希茨的。

我们采用第 6 节的框架。与第 6 节一样，为简便起见，我们假设[8] R 的最大公约数为 1。

取 $\delta = b_0/4$，满足 $b_0 \in (0, \min(1, \beta_0))$（其中 β_0 已在 (6.13) 之前引入），且存在常数 $c > 0$ 使得[9]

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad |t| < b_0 \;\Rightarrow\; |\lambda_t| \le e^{-c|t|^2 L_t}, \quad \text{with } L(t) := \log(|t|^{-1}) = |\log|t||. \tag{A.2}$$

利用 (6.13) 和 (6.14)，我们考虑函数 $r:\ \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ 是 C^2，且 $\operatorname{supp} r \subset [-b_0, b_0]^{d+1}$ 使得[10]

$$\mu(\overline{\Psi}_n \in x + U) \le \int_{[-\delta,\delta]^{d+1}} e^{-i\langle t,x\rangle} r(t) P_t^n 1 \, dt = A_{n,x} + \mathcal{O}(\theta^n), \tag{A.3}$$

with

$$A_{n,x} := \int_{[-\delta,\delta]^{d+1}} e^{-i\langle t,x\rangle} r(t) \lambda_t^n \Pi_t 1 \, dt .$$

该范围内所需的局部极限定理 (A.1) 将由 (A.3) 以及关于 λ_t 和 Π_t的以下估计推出。以下结果对应于 [22]框架中最难的估计。令 $\partial_j = \partial_{t_j}$，其中 $j = 1$，……，$d+1$。对于 t、$h \in \mathbb{R}^{d+1}$、$\mathbf{b} > 0$，令

$$M_{\mathbf{b}}(t,h) = |h| L_h \big\{ 1 + L_h |t|^2 L_t + |h|^{-\mathbf{b}|t|^2 L_t} L_h^2 |t|^4 L_t^2 \big\} .$$

引理 A.2 引理 4.*1]* 的类比。设 $j \in \{1, \dots, d\}$。映射 $t \mapsto \lambda_t$和 $t \mapsto \Pi_t$：$\mathcal{B}_0 \to L^1$ 在 $[-b_0, b_0]^{d+1}$上是 C^1。

*Fur*此外，存在 $C > 0$ 和 $\mathbf{b} > 0$，使得对所有 t，$h \in [-b_0, b_0]^{d+}$ ^{1},

$$|\partial_j \lambda_{t+h} - \partial_j \lambda_t| \le C M_{\mathbf{b}}(t,h), \qquad \|\partial_j \Pi_{t+h} - \partial_j \Pi_t\|_{\mathcal{B}_0 \mapsto L^1} \le C M_{\mathbf{b}}(t,h).$$

在 [22], 中，我们得到了关于 $M_{\mathbf{b}}(t,h)$ 的相同公式，而当时使用的是 $\kappa \in \mathbb{Z}^d$，而非 $\overline{\Psi} \in \mathbb{R}^{d+1}$）。根据引理 A.2，在范围 $a_n \le |x| \le e^{\varepsilon_1 n}$ 内，对于

$$\varepsilon_1 := c/\mathbf{b} \tag{A.4}$$

其中 $\mathbf{b} > 0$ 如引理 A.2 中所述，且 $c > 0$ 如（A.2）中所述，则对于 $\overline{\Psi}$（如（A.1）$\widehat{\ }$，其中用 $\overline{\Psi}$ 代替 Ψ），所需的 LLD 可完全按照 [22, 第 6 节中借助推论 4.3]（针对 κ撰写）的方式得到。事实上，其中的证明仅使用了引理 A.2、（A.2）的陈述以及 $a_n = \sqrt{n}\log n$这一事实。

[8]这一假设并非必要。与 [22] 中一样，也可以不作此假设，但这样一来，(6.13) 会稍微复杂一些，因为此时 1 不再是一个简单的孤立特征值，而是有有限个有限重数的特征值。[9]这样一对 (b_0, c) 的存在性来自子引理 6.1。[10]这种 r 的存在性可由经典平滑论证保证；例如参见 [25,脚注 1])

A.4 引理 A.2 的证明

我们沿用 [22]的证明。我们重点讨论因 $\overline{\Psi}$ 在杨分割的原子上并非常数而需要进行的修改。我们将指出， [22] 证明中的哪些部分可以逐行照搬。本节中，令 $Q: L^1(\overline{Y}) \to L^1(\overline{Y})$ 为与吉布斯–马尔可夫映射 $\overline{F}: \overline{Y} \to \overline{Y}$ 相对应的转移算子（商塔（$\overline{\Delta}, f_{\overline{\Delta}}$）的基映射）。回忆一下， R是 $f_{\overline{\Delta}}$到 $\overline{Y}$的回归时间，因此 $F(\cdot) = f_{\overline{\Delta}}^{R(\cdot)}(\cdot)$。引理 4.1] 的证明（引理 A.2 是其类比结果，即在引理 3.5 的设定下）从下面的更新方程开始

$$\widehat{P}(z,t) = \sum_{n\geq 0} z^n P_t^n = \widehat{A}(z,t)\widehat{T}(z,t)\widehat{B}(z,t) + \widehat{E}(z,t), z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, t \in [-\delta_0, \delta_0]^{d+1} \tag{A.5}$$

其中，算子 $\widehat{A}$、$\widehat{T}$、$\widehat{B}$、$\widehat{E}$ 和 $\delta_0 > 0$ 将在下文各小节中定义/说明。特别地， T 将由下式给出

$$\widehat{T}(z,t) = (I - \widehat{Q}(z,t))^{-1},$$

with

$$\widehat{Q}(z,t) := Q\left(z^{R(\cdot)} e^{i\langle t, \overline{\Psi}_R \rangle}.\right) = \sum_{n\geq 1} z^n Q\left(\mathbf{1}_{\{R=n\}} e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n \rangle}.\right), \tag{A.6}$$

其中，我们用 $\overline{\Psi}_R$ 表示由下式定义的函数

$$\forall y \in \overline{Y}, \quad \overline{\Psi}_{R(y)}(y) = \sum_{k=0}^{R(y)-1} \overline{\Psi}(y,k).$$

沿用 [22], 中的方法，引理 A.2 的证明将利用 (A.5) 说明

$$\lambda_t = (g_0(t))^{-1}$$

其中， $t \mapsto g_0(t)$ 连续，满足 $g_0(0) = 1$ ，并且 1 是 $Q(g_0(t)\ t)$ 的主导特征值，且

$$\Pi_t = \lambda_t \widehat{A}(g_0(t), t)\widetilde{\pi}_0(t)\widehat{B}(g_0(t), t)$$

其中 $\widetilde{\pi}_0(t)$ 满足： $\widehat{H}(z,t) := \widehat{T}(z,t) - (g_0(t) - z)^{-1}\widetilde{\pi}(t)$ 关于 z 是解析的。与 [22], 中一样， λ 的导数的正则性（以 M_b 衡量；见引理 A.2 ） $\widehat{}$ 将通过使用隐函数定理，从研究 $Q(z,t)$（当 z 接近 1 时）以及 $\overline{\Psi}$ 所满足的性质得出。 Π 的类似性质将由 $\lambda = 1/g_0$ 所满足的性质，以及研究 A, T, B, E 关于 t 的导数（当 z 接近 1 时）得出。

A.4.1 更新算子

全文中，我们用 α 表示与 Gibbs-Markov映射 $(\overline{F}, \overline{Y}, \alpha, \mu_{\overline{Y}})$ 相对应的划分。此外，令 $s'(y, y')$ 表示点 $y, y' \in \overline{Y}$ 的通常分离时间（定义见例如 [22, 第 2] 节）；对于 $\beta \in (0, 1)$，令 $d_\beta(y, y') := \beta^{s'(y,y')}$。令 $\mathcal{B}_1(\overline{Y})$ 表示有界观测函数的巴拿赫空间 $v : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ 关于度量 d_β 是利普希茨的。由于 R 的尾概率呈指数衰减，因此当 $\mu(|\overline{\Psi}| > n)$ 时，$\mu_{\overline{Y}}(|\overline{\Psi}|_R > n) = \mathcal{O}(n^{-2})$（这一论证见例如 [29, 第 2] 节）。

命题 A.3 存在 $C_{\overline{\Psi}} > 0$ 使得

$$\forall a \in \alpha, \quad \forall y, y' \in a, \quad \sum_{\ell=0}^{R(a)-1} |\overline{\Psi}(y, \ell) - \overline{\Psi}(y', \ell)| \le C_{\overline{\Psi}} d_\beta(y, y') \,.$$

证明 回顾一下，$\overline{\Psi}$ 关于 Young度量 $\beta^{s(\cdot,\cdot)}$是利普希茨的。记其利普希茨常数为$C'_{\overline{\Psi}}$。因此，对于 $a \in \alpha$ 和 $y, \ y' \in a$,

$$\begin{aligned} |\overline{\Psi}_R(y) - \overline{\Psi}_R(y')| &\le \sum_{\ell=0}^{R(a)-1} |\overline{\Psi}(y, \ell) - \overline{\Psi}(y', \ell)| \\ &\le C'_{\overline{\Psi}} \sum_{\ell=0}^{R(a)-1} \beta^{R(a)-\ell+\overline{s}(y,y')} \le \frac{C'_{\overline{\Psi}} d_\beta(y, y')}{1-\beta} \,, \end{aligned}$$

因为 $s'(y, y') \le \overline{s}(y, y') - R(a) + 1$。 ∎

回顾一下

$$Q(u)(y) = \sum_{a \in \alpha} \xi(y_a) u(y_a) \,, \tag{A.7}$$

其中，y_a 是 F 下属于 a的 y 的原像，并且取 $\xi = e^{g_R}$，满足$g_R(y) := \sum_{k=0}^{R(y)-1} g(y, k)$，其中 g 满足（7.9）。因此

$$0 < \xi(y_a) = e^{g_R(y_a)} \le C\mu_{\overline{Y}}(a), \qquad |\xi(y_a) - \xi(y'_a)| \le C\mu_{\overline{Y}}(a) d_\beta(y, y'), \tag{A.8}$$

对所有的 y、$y' \in \overline{Y}$、$a \in \alpha$，其中我们定义 g_R 的方式与定义 $\overline{\Psi}_R$ 时相同，只是将函数 g 替换为 $\overline{\Psi}$。
下一个结果推广了 [22, 命题 5.1]。该命题在其上下文中针对函数 u 给出，该函数在 α 的各个元素上为常数（因此局部Lipschitz常数 K_u为零）。

命题 A.4 存在 $C > 0$ 使得

$$\|Q(u)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \le C \| |u| + K_u \|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \,,$$

对于每个满足 $K_u \in L^1(\mu_{\overline{Y}})$ 的 $u \in L^1(\overline{Y})$，且

$$\forall a \in \pi,\ \forall x \in a, \quad K_u(x) := \sup_{y,y' \in a} \frac{|u(y) - u(y')|}{\beta^{s'(y,y')}} .$$

特别地，对于所有 $v \in \mathcal{B}_1(\overline{Y})$（$\overline{Y}$ 上的 Lipschitz 函数集），

$$\|Q(uv)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \leq C\||uv| + K_{uv}\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \leq C\||u| + K_u\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\|v\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} . \tag{A.9}$$

命题 A.4 的证明 令 $y,y' \in \overline{Y}$。对于 $a \in \alpha$，我们将 $y_a, y'_a \in a$ 分别记为 y, y' 在 F 下的原像。由 (A.7) 以及 (A.8) 的第一部分可得

$$\|Q(u)\|_\infty \ll \sum_{a\in\alpha} \mu_{\overline{Y}}(a) \sup_a |u| \leq \||u| + K_u\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} ,$$

因为对于所有 $y, x \in a \in \alpha$, $|u(y)| \leq |u(x)| + K_u(x)$。
接下来，令 $a \in \alpha$ 和 $y, y' \in a$，利用 (A.8) 的第二部分，我们得到

$$\begin{aligned} |Q(u)(y) - Q(u)(y')| &\leq \sum_{a\in\alpha} \mu_{\overline{Y}}(a)\ |u(y_a) - u(y'_a)| \\ &\leq \sum_{a\in\alpha} \mu_{\overline{Y}}(a) K_u(a) \beta^{s'(y_a,y'_a)} \\ &\leq \sum_{a\in\alpha} \mu_{\overline{Y}}(a) K_u(a) \beta^{s'(y,y')+1} , \end{aligned}$$

证明至此结束。 ∎

对于带有 $|z| \leq 1$ 和 $t \in \mathbb{R}^d$ 的 $z \in \mathbb{C}$，在 (A.6) 中形式化定义的算子 $\widehat{Q}(z,t)$ 定义了 $L^1(\mu_{\overline{Y}})$ 上的一个算子，并且可以分解为 $\widehat{Q}(z,t) = \sum_{n=1}^\infty z^n Q_{t,\,n}$，其中我们令

$$Q_{t,n} := Q\left(1_{\{R=n\}} e^{i\langle t, \overline{\Psi}_R\rangle} .\right) .$$

下一个结果取代了 [22, 命题 5.2]。结论相同，但在我们的语境下，必须处理 K_u，因此我们完整地给出其证明。

命题 A.5 存在 $\delta_0 > 0$，使得将其视为取值于 $\mathcal{B}_1(\overline{Y})$ 上的连续线性算子集的函数时，

(a) 对所有 $t \in \mathbb{R}^d$，$z \mapsto \widehat{Q}(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}(0)$ 上解析；

(b) $(z,t) \mapsto (\partial_z^k \widehat{Q})(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}(0)$ 上关于 $k = 0$、1、2 是 $C^1 \times \mathbb{R}^d$；

(d) $z \mapsto (\partial_j \widehat{Q})(z,t)$ 在 $t \in B_1(0)$ 中关于 $j = 1$、.....、d 一致地 C^1 于 $B_{1+\delta_0}(0)$。

证明 只需证明存在 $a>0$、 $C>0$ 使得

$$\|Q_{t,n}\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \le C(|t|+1)e^{-an}, \qquad \|\partial_j Q_{t,n}\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \le C(|t|+1)e^{-an},$$

对所有 $t\in\mathbb{R}^d$, $j=1,\ldots,d$, $n\ge 1$ 均成立。由于 R 在分割元素上为常数，由命题 A.4(a) 可得

$$\|Q_{t,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))} \ll \left\|1_{\{R=n\}}(1+K_{e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R\rangle}})\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})},$$

并且

$$\begin{aligned}\|\partial_j Q_{t,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))} &= \left\|iQ\left(1_{\{R=n\}}(\overline{\Psi}_R)_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R\rangle}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))}\\ &\ll \left\|1_{\{R=n\}}\left(|\overline{\Psi}_R|+K_{(\overline{\Psi}_R)_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R\rangle}}\right)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}.\end{aligned}$$

但由命题 A.3 可得 $K_{e^{i\langle t,\ \overline{\Psi}_R\rangle}} \le C_{\overline{\Psi}}|t|$ 并且

$$K_{(\overline{\Psi}_R)_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R\rangle}} \le C_{\overline{\Psi}}(1+|t|\,|\overline{\Psi}_R|)\,. \tag{A.10}$$

因此

$$\|Q_{t,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))} \ll (1+|t|)\mu_{\overline{Y}}(R=n)\,,$$

and

$$\|\partial_j Q_{t,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))} \ll (1+|t|)\left\|1_{\{R=n\}}(1+|\overline{\Psi}_R|)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})},$$

注意到，对于所有 $r<2$，$\overline{\Psi}\in L^r(\overline{Y})$，且 R 具有指数尾部，因此存在 $a>0$，使得 $\|1_{\{R=n\}}(1+\overline{\Psi}_R)\|_1 \ll e^{-an}$。由此完成证明。∎

对于满足 $|z|\le 1$ 和 $t\in\mathbb{R}^d$ 的 $z\in\mathbb{C}$，定义

$$\widehat{A}(z,t): L^1(\overline{Y})\to L^1(\overline{\Delta}), \qquad \widehat{A}(z,t)(v)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n A_{t,n}(v)$$

其中 $A_{t,n}(v)(y,\ell) = 1_{\{\ell=n\}}P_t^n(v)(y,\ell) = 1_{\{\ell=n\}}e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n(y,0)\rangle}v(y)$.

命题 A.6 存在 $\delta_0>0$，使得将其视为从 $L^\infty(\overline{Y})$ 到 $L^1(\overline{\Delta})$ 的连续线性算子集取值的函数时，

(a) $z\mapsto\widehat{A}(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}$ $t\in\mathbb{R}^d$ 上解析；

(b) $(z,t)\mapsto(\partial_z\widehat{A})(z,t)$ *is* C^1 *on* $B_{1+\delta_0}(0)\times\mathbb{R}^d$.

证明 该证明与 [22, 命题 5 的证明3] 逐字相同，因为它只用到了 H¨older 不等式，并结合了$\|1_{R>n}\overline{\Psi}_R\|_{L^1(\overline{Y})}$ 关于 n 在 $n\to+\infty$时以指数速度衰减这一事实。∎

对于 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $|z| \le 1$ 和 $t \in \mathbb{R}^d$的情形，定义

$$\widehat{B}(z,t) : L^1(\overline{\Delta}) \to L^1(\overline{Y}), \qquad \widehat{B}(z,t)(v) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n B_{t,n}(v)$$

其中

$$B_{t,n}(v) = 1_{\overline{Y}} P_t^n (1_{D_n} v), \qquad D_n = \{(y, R(y) - n) : y \in \overline{Y},\, R(y) > n\}.$$

命题 A.7 存在 $\delta_0 > 0$，使得将其视为从 $\mathcal{B}_0$ 到 $\mathcal{B}_1(\overline{Y})$ 的连续线性算子集合取值的函数时，

(a) 对所有 $t \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto \widehat{B}(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}(0)$ 上是解析的；

(b) $(z,t) \mapsto (\partial_z \widehat{B})(z,t)$ *is* C^1 *on* $B_{1+\delta_0}(0) \times \mathbb{R}^d$.

证明与 [22, 命题 5.4], 的证明类似，但同样需要处理命题 A.4 中出现的 K_u。因此我们详细说明这一证明。

命题 A.7 的证明 我们注意到 $B_{t,n} v = Q(1_{\{R>n\}} v_{t,n})$，其中

$$v_{t,n}(y) := e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n(y, R(y)-n)\rangle} v(y, R(y) - n).$$

由于 R 在各分割元素上为常数，由命题 A.4 可得

$$\|B_{t,n}(v)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \ll \left\| 1_{\{R>n\}} (|v_{t,n}| + K_{v_{t,n}}) \right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \le (|t| + 1) \|1_{\{R>n\}}\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \tag{A.11}$$

and

$$\|\partial_j B_{t,n}(v)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \ll \left\| 1_{\{R>n\}} (|\partial_j v_{t,n}| + K_{\partial_j v_{t,n}}) \right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} . \tag{A.12}$$

但在 $\{R > n\}$ 上，

$$K_{v_{t,n}} \le (1 + |t| C_{\overline{\Psi}}) \|v\|_{\mathcal{B}_0} \quad \text{and} \quad K_{\partial_j v_{t,n}} \le |\overline{\Psi}|_R K_{v_{t,n}} + C_{\overline{\Psi}} \|v\|_\infty, \tag{A.13}$$

其中 $C_{\overline{\Psi}}$ 是命题 A.3 中出现的常数。事实上，对于任意 $a \in \alpha$ 和任意 y、$y' \in a$，记 $[v]_{\mathcal{B}_0}$ 为 v 的利普希茨常数，并利用以下事实

$$\begin{aligned} \overline{s}((y, R(a) - n), (y', R(a) - n)) &= \overline{s}((F(y), 0), (F(y'), 0)) + n \ge s'(F(y), F(y')) + n \\ &= s'(y, y') + n - 1 \ge s'(y, y') , \end{aligned}$$

我们注意到

$$\begin{aligned} &\left| e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n(y, R(y)-n))\rangle} v(y, R(y) - n) - e^{i\langle t, \overline{\Psi}_n(y', R(y')-n))\rangle} v(y', R(y') - n) \right| \\ &\le (|t| C_{\overline{\Psi}} \|v\|_\infty + [v]_{\mathcal{B}_0}) \, \beta^{s'(y,y')} , \end{aligned}$$

这就完成了（A.13）第一部分的证明。第二部分则由乘积利普希茨常数的标准估计得到。由（A.11）、（A.12）和（A.13）可得

$$\|B_{t,n}(v)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \ll (1+|t|)\|1_{\{R>n\}}\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\|v\|_{\mathcal{B}_0}$$

and

$$\|\partial_j B_{t,n}(v)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \ll (1+|t|)\left\|1_{\{R>n\}}|\overline{\Psi}|_R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\|v\|_{\mathcal{B}_0}.$$

结果源于以下事实：$\mu_{\overline{Y}}(R>n)$ 随 n 的变化而指数级快速衰减，以及对于任意 $\epsilon>0$，$|\overline{\Psi}|_R$ 是 $L^{2-\epsilon}$。∎

对于满足 $|z|\le 1$ 和 $t\in\mathbb{R}^d$ 的 $z\in\mathbb{C}$，定义

$$\widehat{E}(z,t):\mathcal{B}_0\to L^1(\overline{\Delta}),\qquad \widehat{E}(z,t)(v)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n E_{t,n}(v)$$

其中 $E_{t,\ n}(v)(y,\ell)\ =1_{\{\ell>n\}}P_t^n(v)(y,\ell)$。

命题 A.8 存在 $\delta_0>0$，使得将其视为从 $\mathcal{B}_0$ 到 $L^1(\overline{\Delta})$ 的算子时，

(a) 对所有 $t\in\mathbb{R}^d$，$z\mapsto\widehat{E}(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}(0)$ 上是解析的；

(b) $(z,t)\mapsto\widehat{E}(z,t)$ 在 $B_{1+\delta_0}(0)\times\mathbb{R}^d$ 上是 C^0；

证明 证明过程与命题 5.5] 的证明完全相同，因为它只用到了 H¨older 不等式，并结合了这样的事实：当 $n\to+\infty$ 时，$\|R1_{R>n}\|_{L^1(\overline{Y})}$ 关于 n 指数级快速衰减。∎

A.4.2 进一步估计

本小节中的结果与命题 5.6– 5.9] 类似。由于我们需要处理来自 (A.9) 的 K_u，因此这些证明需要进行一些修改。我们详细说明与这些修改相对应的部分，并指出命题 [22] 的证明中哪些部分保持不变。

命题 A.9 存在 $C>0$、$\delta_0>0$ 和 $b>0$，使得

$$\|\partial_j\partial_z\widehat{Q}(z,t+h)-\partial_j\partial_z\widehat{Q}(z,t)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})}\le C|h|L_h^2\big\{1+|h|^{-b\log|z|}L_h(|z|-1)\big\},$$

对于所有 t、$h\in B_{\delta_0}(0)$，所有满足 $1\le|z|\le 1+\delta$ 的 $z\in\mathbb{C}$，以及所有 $j=1$、.....、d。

证明 我们观察到

$$\partial_j\partial_z Q(z,t+h)(v)-\partial_j\partial_z Q(z,t)(v)=iQ\left(w_{t,h}Rz^{R-1}v)\right),$$

对于 $w_{t,h}:=(\overline{\Psi}_R)_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R\rangle}\left(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R\rangle}-1\right)$。由命题 A.4 和 A.3 可知

$$\begin{aligned}
&\|\partial_j\partial_z Q(z,t)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})}\\
&\ll\sum_{n=1}^{\infty}n|z|^{n-1}\left\|1_{\{R=n\}}\left(|\overline{\Psi}_R(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R\rangle}-1)|+K_{w_{t,h}}\right)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})},\\
&\ll\sum_{n=1}^{\infty}n|z|^{n-1}\left\|1_{\{R=n\}}\left(|\overline{\Psi}_R(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R\rangle}-1)|(1+(1+|t|)C_{\overline{\Psi}})+C_{\overline{\Psi}}|h|\,(|\overline{\Psi}_R|+C_{\overline{\Psi}})\right)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})},
\end{aligned}$$

事实上，对于每个分割元素 a 以及所有 $y,y'\in a$,

$$\begin{aligned}
&|w_{t,h}(y)-w_{t,h}(y')|\\
&\le\left|(\overline{\Psi}_R(y))_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R(y)\rangle}-(\overline{\Psi}_R(y'))_j e^{i\langle t,\overline{\Psi}_R(y')\rangle}\right|\left|e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R(y)\rangle}-1\right|+\left|\overline{\Psi}_R(y')\right|\left|e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R(y)\rangle}-e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R(y')\rangle}\right|\\
&\le C_{\overline{\Psi}}(1+|t|)|\overline{\Psi}_R|\beta^{s'(y,y')}\left|e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R(y)\rangle}-1\right|+|h|\left|\overline{\Psi}_R(y')\right|C_{\overline{\Psi}}\beta^{s'(y,y')},
\end{aligned}$$

由 (A.10) 和命题 A.3 得出；这给出了对 $K_{w_{t,h}}$ 所需的支配。因此，我们证明了

$$\begin{aligned}
\|\partial_j\partial_z Q(z,t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1(\overline{Y}))}&\ll\left\|\left(|\overline{\Psi}_R(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_R\rangle}-1)|+|h|(1+|\overline{\Psi}_R|)\right)Rz^R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\\
&\ll\left(\left\||\overline{\Psi}|_R\min(|h|\,|\overline{\Psi}|_R,1)Rz^R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}+|h|\right),\qquad(A.14)
\end{aligned}$$

只要 δ 足够小即可，因为对于所有 $\varepsilon\in(0,2)$，$\overline{\Psi}_R\in L^{2-\varepsilon}$，且 $\mu_{\overline{Y}}(R>n)$ 随 n 增大而指数级快速衰减（当 $n\to+\infty$ 时）。接下来需要估计 (A.14) 右端的第一项。对于任意 $x\in\overline{Y}$，记 $\psi(x)$ 为包含 x 的划分原子上 $|\overline{\Psi}|_R$ 的上整数部分的上确界。那么

$$\left\||\overline{\Psi}|_R\min(|h|\,|\overline{\Psi}|_R,1)Rz^R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\le\left\|\psi\min(|h|\,\psi,1)Rz^R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\qquad(A.15)$$

只要 δ 足够小即可。但

$$\left\|\psi\min(|h|\,\psi,1)Rz^R\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\ll\sum_{m,n=1}^{\infty}r_{m,n}$$

其中

$$r_{m,n}=\mu_{\overline{Y}}(\psi=m,R=n)mn\min\{|h|m,1\}|z|^n.\qquad(A.16)$$

其余证明与 [22, 命题 5.6] 相同。 ∎

注 A.10 与 [22, 注 5.7]，类似，对命题 A.9 的证明中所用论证的简化版本（仅针对 j 中的导数）给出

$$\|\partial_j \widehat{Q}(z,t+h)-\partial_j \widehat{Q}(z,t)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \le C|h|L_h\big\{1+|h|^{-b\log|z|}L_h(|z|-1)\big\}.$$

命题 A.11 存在 $C>0$、$\delta>0$ 和 $b>0$，使得

$$\|\partial_j \widehat{A}(z,t+h)-\partial_j \widehat{A}(z,t)\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})\mapsto L^1(\overline{\Delta})} \le C|h|L_h\big\{1+|h|^{-b\log|z|}L_h(|z|-1)\big\},$$

对所有 t、$h\in B_\delta(0)$，所有满足 $1\le|z|\le 1+\delta$ 的 $z\in\mathbb{C}$，以及所有 $j=1$、……、d，

证明 我们有

$$(\widehat{A}(z,t)v)(y,\ell)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n 1_{\{\ell=n\}} e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n(y,0)\rangle}v(y)=z^\ell e^{i\langle t,\overline{\Psi}_\ell(y,0)\rangle}v(y),$$

对于 $\ell=0$、……、$R(y)-1$。因此，我们可以按照命题 A.9 的证明进行，只是少了一个 n 因子（因此也少了一个 L_h 因子）。 ∎

命题 A.12 存在 $C>0$、$\delta>0$ 和 $b>0$，使得

$$\|\partial_j \widehat{B}(z,t+h)-\partial_j \widehat{B}(z,t)\|_{\mathcal{B}_0\mapsto\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \le C|h|L_h\big\{1+|h|^{-b\log|z|}L_h(|z|-1)\big\},$$

对所有 t、$h\in B_\delta(0)$，所有满足 $1\le|z|\le 1+\delta$ 的 $z\in\mathbb{C}$，以及所有 $j=1$、……、d，

证明 令 $v\in\mathcal{B}_0$。按照命题 A.7 的记号，

$$\partial_j \widehat{B}(z,t+h)(v)-\partial_j \widehat{B}(z,t)(v)=i\sum_{n\ge1} z^n Q\left(1_{\{R>n\}}\left(\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n}\right)\right) \tag{A.17}$$

with

$$v_{t,n}(y):=e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n(y,R(y)-n)\rangle}v(y,R(y)-n).$$

因此

$$\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n}=\left(\overline{\Psi}_n(\cdot,R(\cdot)-n)e^{i\langle t,\overline{\Psi}_n(\cdot,R(\cdot)-n)\rangle}\right)_j\left(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_n(\cdot,R(\cdot)-n)\rangle}-1\right)v(\cdot,R(\cdot)-n)\,. \tag{A.18}$$

由命题 A.4 可得

$$\left\|Q(1_{\{R>n\}}\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n})\right\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})}\ll\left\|1_{\{R>n\}}\left(|\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n})|+K_{\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n}}\right)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}. \tag{A.19}$$

我们按照命题 A.9 的证明进行。由 (A.18) 可得

$$\left\|1_{\{R>n\}}(\partial_j v_{t+h,n}-\partial_j v_{t,n})\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\le\left\|1_{\{R>n\}}\overline{\Psi}_n(\cdot,R(\cdot)-n)\left(e^{i\langle h,\overline{\Psi}_n(\cdot,R(\cdot)-n)\rangle}-1\right)\right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})}\|v\|_\infty\,. \tag{A.20}$$

此外，根据命题 A.3，对于所有 $a \in \pi$ 以及所有 $y, y' \in a$，

$$\begin{aligned}
&|(\partial_j v_{t+h,n} - \partial_j v_{t,n})(y) - (\partial_j v_{t+h,n} - \partial_j v_{t,n})(y')| \\
&\ll \beta^{s(y,y')} \left\| 1_{R>n} \left(1 + |\overline{\Psi}_n(\cdot, R(\cdot) - n)|\right) \left(e^{i\langle h, \overline{\Psi}_n(\cdot, R(\cdot)-n)\rangle} - 1\right) \right\|_{L^1(\mu)} (1 + C_{\overline{\Psi}}) \|v\|_{\mathcal{B}_0} \\
&+ |h| \beta^{s(y,y')} C_{\overline{\Psi}} \left\| 1_{R>n} (\overline{\Psi}_n(\cdot, R(\cdot) - n))_j \right\|_{L^1(\mu)} \|v\|_\infty .
\end{aligned}$$

结合 (A.19) 和 (A.20)，可知

$$\begin{aligned}
&\|Q(1_{R>n} \partial_j v_{t+h,n} - \partial_j v_{t,n})\|_{\mathcal{B}_1(\overline{Y})} \\
&\ll \left\| 1_{\{R>n\}} (1 + \overline{\Psi}_n(\cdot, R(\cdot) - n)) \left(e^{i\langle h, \overline{\Psi}_n(\cdot, R(\cdot)-n)\rangle} - 1\right) \right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \|v\|_{\mathcal{B}_0} + |h| \|v\|_\infty \\
&\ll \left\| 1_{\{R>n\}} \psi \min(|h|\, |\psi|) \right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} \|v\|_{\mathcal{B}_0} + |h| \|v\|_\infty . \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}$$

But

$$\sum_{n \geq 1} \left\| z^n 1_{\{R>n\}} \psi \min(|h|\, |\psi|) \right\|_{L^1(\mu_{\overline{Y}})} = \sum_{m,n \geq 1} \mu_{\overline{Y}}(\psi = m, R = n) m \min\{|h| m, 1\} |z|^n ,$$

按照命题 A.9 的证明中的方法，可以对其进行估计。最后，将此估计与 (A.17) 和 (A.21) 结合起来即可。 ∎

[22] 其余部分的证明（其中与第 5.2 节对应的内容给出了 $Q(z,t)$ 所需的全部谱性质）均无需改动即可成立。

B τ 和 χ 的光滑性 −

回顾 $\overline{\Delta} \subset \Delta$，利用 $T \circ \pi = \pi \circ f_\Delta$ 在 Δ 上成立这一事实，以及 $f_{\overline{\Delta}} = \overline{\pi} \circ f_\Delta$ 在 $\overline{\Delta}$ 上成立这一事实，$\overline{\tau}$ 和 χ_0（定义于第 6 节）可改写如下

$$\overline{\tau} := \widetilde{\tau} \circ \pi + \sum_{n \geq 1} \left(\tau \circ T^n \circ \pi - \tau \circ T^{n-1} \circ \pi \circ \overline{\pi} \circ f_\Delta \right) \quad \text{on } \overline{\Delta}$$

and

$$\chi_0 := \sum_{n \geq 0} \chi_{0,n}, \quad \text{with } \chi_{0,n} := (\tau \circ T^n \circ \pi - \tau \circ T^n \circ \pi \circ \overline{\pi}) \quad \text{on } \Delta .$$

首先注意，对每个 $x \in \Delta$，$\pi(x)$ 和 $\pi(\overline{\pi}(x))$ 都位于同一个稳定流形上，因此 $d(T^n(\pi(x)), T^n(\pi(\overline{\pi}(x)))) \leq C_1 \beta_1^n$，于是

$$\forall x \in \Delta, \quad |\chi_{0,n}| \leq 2 C_1 \beta_1^n . \qquad \text{(B.1)}$$

类似地，对于所有 $x \in \overline{\Delta}$，

$$|\tau(T^n(\pi(x))) - \tau(T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(x)))))| = |\tau(T^{n-1}(\pi(f_\Delta(x)))) - \tau(T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(x)))))| \qquad \text{(B.2)}$$

$$\leq 2 C_1 \beta_1^{n-1} . \qquad \text{(B.3)}$$

这确保了 χ_0 和 $\overline{\tau}$ 都有良好定义，并且我们已经证明了恒等式

$$\widetilde{\tau}\circ\pi-\chi_0+\chi_0\circ f_\Delta=\widetilde{\tau}\circ\pi\circ\overline{\pi}+\sum_{n\geq 0}\left(\tau\circ T^{n+1}\circ\pi\circ\overline{\pi}-\tau\circ T^n\circ\pi\circ\overline{\pi}\circ f_\Delta\right)=\overline{\tau}\circ\overline{\pi}$$

因为 $\overline{\pi}\circ f_\Delta=f_{\overline{\Delta}}\circ\overline{\pi}$。

对于任意满足 $\overline{s}(x,y)=N\geq 2k$ 的 $x,y\in\overline{\Delta}$，$T^N(\pi(x))$ 和 $T^N(\pi(y))$ 属于同一个不稳定流形，$T^{N-1}(\overline{\pi}(f_\Delta(x)))$ 和 $T^{N-1}(\overline{\pi}(f_\Delta(y)))$ 也同样如此。这意味着，对于每个 $n=0,...,N$，$d(T^n(\pi(x)),T^n(\pi(y)))\leq C_1\beta_1^{N-n}$ 和 $d(T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(y)))),T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(x)))))\leq C_1\beta_1^{N-n-1}$。因此

$$\begin{aligned}
|\overline{\tau}(x)-\overline{\tau}(y)|&\leq|\widetilde{\tau}(\pi(x))-\widetilde{\tau}(\pi(y))|+2\sum_{n\geq\lceil\overline{s}(x,y)/2\rceil+1}\|\tau\circ T^n\circ\pi-\tau\circ T^{n-1}\circ\pi\circ\overline{\pi}\circ f_\Delta\|_\infty\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\lceil\overline{s}(x,y)/2\rceil}\left|\tau(T^n(\pi(x)))-\tau(T^n(\pi(y)))-[\tau(T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(x)))))-\tau(T^{n-1}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta(y)))))]\right|\\
&\leq 2\left(\beta_1^{\overline{s}(x,y)}+2\sum_{n\geq\lceil\overline{s}(x,y)/2\rceil+1}\beta_1^n+2\sum_{n=1}^{\lceil\overline{s}(x,y)/2\rceil}\beta_1^{\overline{s}(x,y)-n-1}\right)\\
&\leq 2\beta_1^{\frac{\overline{s}(x,y)}{2}}\left(1+4\frac{\beta_1^{-1}}{1-\beta_1}\right).
\end{aligned}$$

现在，我们来证明 χ_0 满足

$$\sup_{k\geq 1}\sup_{x,y:s(x,y)>2k}\frac{|\chi_0(f_\Delta^k(x))-\chi_0(f_\Delta^k(y))|}{\beta^k}<\infty\,.$$

注意到

$$\chi_0\circ f_\Delta^k=\sum_{n\geq 0}\chi_{0,n}\circ f_\Delta^k,\quad\text{and }\chi_{0,n}\circ f_\Delta^k=\tau\circ T^{n+k}\circ\pi-\tau\circ T^n\circ\pi\circ\overline{\pi}\circ f_\Delta^k\,.\tag{B.4}$$

设 $x,y\in\Delta$ 满足 $s(x,y)=N>2k$。

- 对于 $n>k/2$，我们注意到由 (B.1) 可得

$$|\chi_{0,n}(f_\Delta^k(x))-\chi_{0,n}(f_\Delta^k(y))|\leq 2\|\chi_{0,n}\|_\infty\leq 4C_1\beta_1^n\,.\tag{B.5}$$

- 对于 $n=0,...,k/2$，我们观察到 $\pi(x)$ 和 $\pi(\overline{\pi}(x))$ 位于同一个稳定流形上，$\pi(y)$ 和 $\pi(\overline{\pi}(y))$ 也位于同一个稳定流形上，并且 $T^N(\pi(\overline{\pi}(x)))$ 和 $T^N(\pi(\overline{\pi}(y)))$ 位于同一个不稳定流形上。因此

$$\begin{aligned}
|\tau(T^{n+k}(\pi(x)))-\tau(T^{n+k}(\pi(\overline{\pi}(x))))|&\leq 2C_1\beta_1^{n+k}\,,\\
|\tau(T^{n+k}(\pi(y)))-\tau(T^{n+k}(\pi(\overline{\pi}(y))))|&\leq 2C_1\beta_1^{n+k}\,,
\end{aligned}$$

$$|\tau(T^{n+k}(\pi(\overline{\pi}(x)))) - \tau(T^{n+k}(\pi(\overline{\pi}(y))))| \le 2C_1\beta_1^{N-n-k} \le 2C_1\beta_1^{k-n}$$

Thus

$$|\tau \circ T^{n+k}(\pi(x)) - \tau \circ T^{n+k}(\pi(y))| \le 6C_1\beta_1^{k-n}\,. \tag{B.6}$$

此外，$x'_k = \overline{\pi}(f_\Delta^k(x))$ $y'_k = \overline{\pi}(f_\Delta^k(y)) \in \overline{\Delta}$和 $\overline{s}(x'_k, y'_k) = N-k$。因此，$T^{N-k}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta^k(x))))$ 和 $T^{N-k}(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta^k(y))))$ 位于同一个不稳定流形上，所以

$$|\tau(T^n(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta^k(x))))) - \tau(T^n(\pi(\overline{\pi}(f_\Delta^k(x)))))| \le 2C_1\beta_1^{N-k-n} \le 2C_1\beta_1^{k-n} \tag{B.7}$$

结合 (B.5)、(B.6) 和 (B.7)，由 (B.4) 可得

$$\left|\chi_0(f_\Delta^k(x)) - \chi_0(f_\Delta^k(y))\right| \le \sum_{n>k/2} 4C_1\beta_1^n + \sum_{n=0}^{k/2} 6C_1\beta_1^{k-n} \ll \beta_1^{\frac{k}{2}}\,.$$

[1]由于 $\beta_1^{\overline{\tau}} \le \beta$，我们得出结论。

致谢：我们感谢 CIRM、布雷斯特的 Erd¨os 中心以及莱顿大学和乌得勒支大学的热情款待。我们感谢 Ian Melbourne 与我们进行的有益讨论，也感谢他在 [22] 中获得的 LLD 结果所发挥的重要作用；该结果是本研究的关键要素之一。FP 在亨利·勒贝格中心 ANR-11-LABX-0020-01 框架内开展了这项工作，并得到 ANR 项目 GALS（ANR 23-CE40-0001）和 RAWABRANCH（ANR-23-CE40-0008）的支持。

参考文献

[1] J. Aaronson 和 H. Nakada，《关于“良好”无限测度保持变换的多重遍历及其他性质》，《遍历理论与动力系统》37 (2017)，1345–1368。[2] J. Aaronson 和 D. Terhesiu，《纤维半流的局部极限定理》，《离散与连续动力系统》40 (2020)，6575–6609。[3] P. B´alint 和 S. Gou¨ezel，《体育场台球中的极限定理》，《数学物理通讯》263 (2006)，461–512。[4] P. B´alint、O. Butterley 和 I. Melbourne，《流的相关性的多项式衰减，包括洛伦兹气体的例子》，《数学物理通讯》368 (2019)，55–111。[5] Q. Berger、M. Birkner、L. Yuan，《独立同分布随机变量之和的群体行为与个体行为：单次大跳现象的出现》，即将在《图卢兹科学学院年刊》发表。

[6] L. A. Bunimovich 和 Ya. G. Sinai，《具有周期性散射体构型的洛伦兹气体的统计性质》，《数学物理通讯》78 (1981)，第 4 期，479–497。[7] L. A. Bunimovich、Ya. G. Sinai 和 N. I. Chernov，《二维双曲台球的统计性质》（俄文），《数学科学进展》46 (1991)，第 4 期（280），43–92，192；英译见《俄罗斯数学评论》46 (1991)，第 4 期，47–106。[8] N. Chernov，《关联衰减与发散型台球》，《统计物理学杂志》94 (1999)，513–556。[9] N. Chernov、D. Dolgopyat，《无限视界周期洛伦兹气体中的反常电流》，《俄罗斯数学评论》64-4 (2009)，651–699。[10] N. Chernov 和 R. Markarian，《混沌台球》，《数学调查与专著》127。普罗维登斯：美国数学会（AMS），xii，316 页（2006）。[11] D. Dolgopyat 和 P. N´andori，《具有恒温边界的洛伦兹管中的非平衡密度分布》，《纯粹与应用数学通讯》69 (2016)，649–692。[12] D. Dolgopyat 和 P. N´andori，《双曲流的混合与局部中心极限定理》，《亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》40 (2020)，142–174。[13] D. Dolgopyat、P. N´andori 和 M Lenci，《随机游走的全局可观测量：大数定律》，57 (2021)，94–115。[14] D. Dolgopyat 和 P. N´andori，《某些力学系统的无限测度混合》，《数学进展》410 B (2022)，108–757。[15] D. Dolgopyat、P. N´andori 和 F. P`ene，《双曲流 $\mathbb{Z}^d$-覆盖的关联函数渐近展开》，《亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》58 (2022)，第 2 期，1244–1283。[16] S. Gou¨ezel，《具有中性点曲线的斜积的统计性质》，《遍历理论与动力系统》27 (2007)，123–151。[17] S. Gou¨ezel，《无限测度动力系统中由大偏差导出的关联渐近行为》，《数学集刊》125 (2011)，193–212。[18] K. Krickeberg，《具有无限不变测度的马尔可夫链的强混合性质》，载于《第五届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》（加利福尼亚州伯克利，1965/66），第 II 卷：概率论贡献，第 2 部分，加利福尼亚大学出版社，伯克利，1967 年，第 431–446 页。[19] M. Lenci，《关于无限体积混合》，《数学物理通讯》298 (2010)，第 2 期，485–514。

[20] H. A. Lorentz. 金属体中电子的运动。《荷兰皇家艺术与科学学院》（KNAW）科学部论文集 7 (1905)，第 2 期，438–593.[21] I. Melbourne 和 A. T¨or¨ok，《悬挂流的统计极限定理》，《以色列数学杂志》144 (2004)，191–209.[22] I. Melbourne、F. P`ene 和 D. Terhesiu.《周期性无限视界洛伦兹气体的局部大偏差》。即将在《分析杂志》发表。[23] I. Melbourne、D. Terhesiu.《具有无限测度的动力系统的算子更新理论与混合速率》，《数学发明》189 (2012)，第 1 期，61–110.[24] I. Melbourne、D. Terhesiu.《具有无限测度的非马尔可夫流的更新定理与混合》。《亨利·庞加莱研究所年刊》（B辑）《概率与统计》56 (2020) 449–476.[25] I. Melbourne 和 D. Terhesiu.《多元稳定局部大偏差的解析证明及其在确定性动力系统中的应用》。《电子概率杂志》27 (2022) 1–17.[26] F. P`ene.《随机景观中的平面洛伦兹过程》。《亨利·庞加莱研究所年刊·概率与统计》45 (2009) 818–839.[27] F. P`ene.《Zd-扩张的无限测度混合及其在周期性西奈台球中的应用》。《混沌、孤子与分形》106 (2018)，44–48.[28] F. P`ene.《无限测度中的混合与去相关：周期性西奈台球的情形》。《亨利·庞加莱研究所年刊·概率与统计》55 (2019) 378–411[29] F. P`ene 和 D. Terhesiu.《无限视界洛伦兹气体的局部极限定理与混合的精确误差项》。《数学物理通讯》382 (2021) 1625–1689.[30] S. Resnick，《极值、正则变差与点过程》，施普林格运筹学与金融工程丛书，施普林格，纽约，2008.[31] L. V. Rozovskii.《具有共同分布函数且属于正态分布吸引域的独立随机变量和的大偏差概率》。《概率论及其应用》34 (1989)，第 4 期，686—705；译文刊于《概率论及其应用》34 (1989)，第 4 期，625[32] Ya. G. Sinai.《具有弹性反射的动力系统》。《俄罗斯数学评论》25 (1970)，第 2 期，137–189。

[33] D. Sz´asz、T. Varj´u, 《洛伦兹过程的局部极限定理及其在平面上的回归》, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004) 254–278.[34] D. Sz´asz 和 T. Varj´u.《无限视界平面洛伦兹过程的极限定律与回归》。《统计物理学杂志》129 (2007) 59–80.[35] M. Thaler.《保持无限测度的一类区间映射的佩龙-弗罗贝尼乌斯算子的渐近行为》. Studia Math. 143 (2000) 103–119.[36] D. Terhesiu.《Gibbs-Markov 半流的 Z 扩张的 Krickeberg 混合》. Monatsh. Math.198 (2022) 859–893[37] L.-S. Young.《具有某种双曲性的动力系统的统计性质》. Ann. of Math. 147 (1998) 585–650.