arXiv:2302.04268v1 [math.OA] 8 Feb 2023

量子无信号双相关

MICHAEL BRANNAN、SAMUEL J. HARRIS、IVAN G. TODOROV 和
LYUDMILA TUROWSKA

Abstract. 我们引入经典和量子无信号双相关，并用算子系统张量积上的态刻画其不同类型，展示它们与双随机算子矩阵以及量子幻方扩张之间的联系。我们将并发双相关定义为双同步相关的一种量子输入输出推广。我们证明，量子可交换型的并发双相关对应于射影自由酉量子群的泛 C*-代数上的迹态。这表明，在量子输入输出框架下，有限集的量子置换必须由矩阵代数的量子自同构取代。我们将这些结果用于研究量子图同构游戏，描述了该情形下的游戏 C*-代数，并明确了它们与文献中现有的量子图同构代数概念之间的联系。

Contents

1. 引言 2 致谢 7 2. 预备知识 7 3. 双随机算子矩阵 10 3.1. 分解 10 3.2. 泛算子系统 12 4. 量子幻方 19 5. 双相关的表示 25 5.1. 量子双相关 25 5.2. 经典双相关 30 6. 并发双相关 32 7. 量子图同构游戏 44 7.1. 量子交换同构 44 7.2. 局部同构 51 7.3. 量子同构代数 52 8. 与代数量子同构的联系 55 8.1. 作为更强等价的代数同构 55 8.2. 一个部分逆命题 67 参考文献 73

Date: 2023年2月1日。

1. Introduction

近年来，量子系统中的纠缠与非定域性，以及算子代数和算子系统理论之间，出现了许多富有成果的交汇。从较高层面看，这种联系源于量子力学定律：这些定律指出，对（双部）量子系统进行局部测量时，其输入—输出行为由观测量的非交换算子代数及其状态空间编码。这为在物理问题与以非交换分析语言表述的问题之间进行转换提供了强有力的工具。这些发展的基础包括Junge、Navascues、Palazuelos、Perez-Garcia、Scholz和Werner的工作 [29], ，他们最早注意到量子物理中的Tsirelson问题与算子代数理论中的Connes嵌入问题之间的联系（另见 [44]）；还包括Paulsen、Severini、Stahlke、Winter及第三位作者的工作 [46], ，他们首次定义并刻画了同步无信号关联。这些联系的成果已在许多近期研究中得到体现；不完全列表见 [44, 35, 37, 36, 39, 38, 1, 40, 9]。我们特别指出Sloftsra的开创性工作 [50, 49], ，该工作将几何群论中的思想引入非局域博弈理论，证明双部量子相关集合并非闭集；以及Helton、Meyer、Paulsen和Satriano的工作[26], ，其中提出了非局域博弈的代数方法。近期，Ji、Natarajan、Vidick、Wright和Yuen在预印本 [28] 中解决了弱Tsirelson问题和Connes嵌入问题，所有这些思想最终汇聚于此。

在本文中，我们主要研究量子输入-量子输出二部关联的结构，这类关联推广了 Paulsen 和 Rahaman 在 [47] 中引入的双同步关联。回顾一下，对于四元组 (X, X, A, A) 上的无信号二部关联，其中 X 和 A 是有限集，它是一族条件概率分布

$$p = \{p(a, b|x, y) : (x, y) \in X \times X, (a, b) \in A \times A\}$$

具有定义良好的边缘分布（例如参见 [35]）。从操作层面看，在量子力学的交换算子模型中，p 描述了一个二部量子系统的输入输出行为：该系统由处于态 ξ 的希尔伯特空间 H 给出，其中该态被解释为 H 中的一个单位向量，并在其上共同执行局部测量：对于每个 x、$y \in X$，两个互不通信的参与方 Alice 和 Bob 分别可以使用彼此交换的局部测量系统$E_x = (E_{x,a})_{a\in A} \subseteq \mathcal{B}(H)$（Alice）和 $F_y = (F_{y,b})_{b\in A} \subseteq \mathcal{B}(H)$（Bob）。给定输入 x，Alice 使用系统 E_x 测量 ξ；类似地，给定y，Bob 使用 F_y 测量 ξ；Alice 和 Bob 的测量结果为（a，b）$\in A \times A$，其概率为

$$p(a, b|x, y) = \langle E_{x,a} F_{y,b} \xi, \xi \rangle.$$

如果一个关联 p 满足：对于所有 $x \in X$ 和$a \neq b$， $p(a,b|x,x) = 0$，则称其为同步的。启发式地说，Alice 和 Bob 的行为是同步的，因为对于给定的输入，他们似乎都调用同一个“虚拟函数” $X \to A$ 来获得输出。如果一个关联 p 是同步的，并且还满足：对于所有 $a \in A$ 和 $x \neq y$， $p(a,a|x,y) = 0$，则称其为双同步 [47]。在这种情况下，“虚拟函数” $X \to A$ 的行为仿佛还具有单射性。

借助算子代数和非交换几何的语言，可以将上一段所强调的直觉表述得更加严谨。令 $\mathcal{A}_{X,A} = \star_{|X|}\ell^\infty(A)$ 表示 $|X|$ 个 $|A|$ 维交换 C*-代数 $\ell^\infty(A)$ 的含幺自由积。C*- 代数 $\mathcal{A}_{X,A}$ 是泛算子系统 $\mathcal{S}_{X,A}$ 的一个 C*- 覆盖，该算子系统的生成元为 $e_{x,a}$，其中 $x \in X$ 和 $a \in A$，并满足关系 $e_{x,a} = e_{x,a}^2$，$_a = e_{x,a}^*$ 以及 $\sum_{a\in A} e_{x,a} = 1$,$x \in X$。在非交换几何的框架下，$\mathcal{A}_{X,A}$ 可以被视为有限维 C*-代数 $C(\mathcal{F}(X,A))$ 的量子化；该代数由定义在集合 $\mathcal{F}(X,A)$ 上的复值函数 $f\colon X \to A$ 构成。文献 [46] 表明，量子交换型的无信号相关 p 是同步的，当且仅当在 $\mathcal{A}_{X,A}$ 上存在一个迹态 τ，使得

$$p(a,b|x,y) = \tau(e_{x,a}e_{y,b}), \quad x,y \in X,\ a,b \in A. \tag{1}$$

如果关联 p 是双同步的（且 $|X| = |A|$），那么 [47] p 可由量子置换群 [56] 的 C*-代数 $C(S_X^+)$ 上的迹态 τ 通过（1）得到。类似于 $\mathcal{A}_{X,\ A}$，C*-代数 $C(S_X^+)$ 是由生成元 $e_{x,\ a}$、 x、 $a \in X$生成的万有单位 C*-代数，并且还满足附加关系 $\sum_{x\in X} e_{x,\ a} = 1$、 $a \in A$。注意， $C(S_X^+)$ 是置换群 S_X of X 上复值函数代数 $C(S_X)$ 的自由类比，并且自身是一个 C*-代数型量子群 [56]。

双同步相关出现在对某些非局域游戏类别的分析中，其中最著名的是图同构博弈 [1, 36, 38, 9] 和相关的度量等距博弈 [22]。在这里，量子置换群、无信号相关与图论之间出现了深刻且出人意料的联系。与此同时，图同构博弈与量子图 [40, 41, 9]之间的联系也得以建立。特别是在上述工作中，人们引入了量子图之间量子同构的一种自然的（算子）代数概念。

本研究的主要动机之一，是希望用二部关联来提供量子图之间量子同构的操作性刻画。顾名思义，描述量子图（以其诸多形式中的任意一种呈现 [51, 40, 9, 11]）需要借助二部量子系统的语言，为顶点或边的概念定义恰当的量子版本。因此，自然会考虑允许以量子态作为输入和输出的二部无信号关联。

Duan 和 Winter [20], 提出了量子输入—量子输出无信号（QNS）相关，随后该概念在 [52, 7, 11]中得到了系统研究。给定有限集 X 和 A, 并以 M_X （分别以 M_A）表示作用在 $|X|$维希尔伯特空间上的全矩阵代数, 则四元组（X， X， A， A）上的 QNS 相关是一个量子信道

$$\Gamma : M_X \otimes M_X \to M_A \otimes M_A$$

满足一对额外约束，这些约束等价于边缘信道的存在（参见公式 (5) 和 (6), 以及文章 [20] 以了解更多细节）。由于任意关于 (X, X, A, A) 的经典无信号关联 p 都可以被视为保持相应对角子代数的 QNS 相关 Γ_p ，因此, QNS 关联构成了其经典对应物的真正推广（另见公式 (8)）。

本文的主要目的是在量子输入输出场景中发展双同步性的概念，并找出其（操作性和算子代数）刻画。与经典场景相似，我们在此关注输入系统和输出系统大小相同的情形，即 $|A| = |X|$。在这种情况下，自然要考虑“ 双随机 ”相关 Γ： $M_X \otimes M_X \to M_A \otimes M_A$，也就是具有附加性质的保幺 QNS 关联，即其对偶信道 Γ^* 也属于 QNS 关联；这些信道被称为 QNS 双相关（参见定义 5.1）。双同步性的量子化必须包含这样一种性质的适当量子对应物：将相同的输入发送为相同的输出。在二部量子系统中, 这一性质自然由 Γ （以及 Γ^*）如何作用于标准最大纠缠态来刻画。更确切地说，如果 $(\epsilon_{x,\ y})_{x,\ y\in X}$ 是 M_X 的标准矩阵单位系，并且 $J_X = \frac{1}{|X|}\sum_{x,\ y\in X} \epsilon_{x,\ y} \otimes \epsilon_{x,\ y}$ 是最大纠缠态，那么自然应施加如下条件

$$\Gamma(J_X) = J_A. \tag{2}$$

QNS 相关中的条件 (2) Γ 由我们在先前的工作 [11], 中引入并进行了详细研究，当时称之为并发性。对于量子无信号并发双关联 Γ，其并发性等价于 Γ^* 的并发性（见注 6.2）。从操作的角度来看，并发双相关 Γ 的特征在于， Γ 和 Γ^* 都能双向保持局部测量的完美关联：输入态 J_X 的特征在于，在 J_X 上以任意固定的基进行局部测量时，结果总是完美关联且均匀随机。因此，并发双相关保留了这种完美关联结构，因而将其解释为双同步相关的完整量子版本是恰当的。

我们详细研究了各种类型的 QNS 双相关（量子可交换、量子近似、量子和局域），并给出它们的算子系统／代数刻画。在第 2 节介绍必要的预备知识后，我们在第 3 节提出算子双随机矩阵,

它们可视为经典双随机矩阵的量子化和算子值推广。事实证明，算子双随机矩阵是描述 QNS 双相关中各方的恰当数学对象。我们具体刻画了算子双随机矩阵的泛算子系统 $\mathcal{T}_X$，它是由与泛块算子双等距算子 V: $\mathbb{C}^{|X|} \otimes H \to \mathbb{C}^{|X|} \otimes K$ 的矩阵元相关的自然二阶乘积所张成的子空间（也就是说，等距算子 V 的转置 V^t 也是等距算子）。我们还确定了 $\mathcal{T}_X$ 的对偶算子系统，并建立了 $\mathcal{T}_X$ 及其泛 C*-代数$\mathcal{C}_X$的若干性质。我们的论证核心是关于双随机算子矩阵的一个分解结果（定理 3.2）。我们的结果可与 [52], 的研究相比较；该研究对块算子等距映射的泛算子系统 $\mathcal{T}_{X,\ A}$ 及相应的 C*-代数 $\mathcal{C}_{X,\ A}$ 进行了类似的探讨。

双随机算子矩阵的对角期望（直观而言，即经典分量）与 De Las Cuevas、Drescher 和 Netzer 在 [16] 中引入的量子幻方相一致；反过来说，双随机算子矩阵可以被视为量子幻方的量子版本。在第4节中，我们基于这一联系，使用算子系统的语言重新表述了 [16] 中的一些结果。事实上， [16] 中的主要结果之一是，并非每个量子幻方都可以扩张为量子置换。在定理 4.5 中，我们根据自然映射的完全正性刻画量子幻方的可扩张性。这些自然映射与给定的量子幻方相关，并定义在由量子置换矩阵的系数张成的算子系统 $\mathcal{P}_X \subseteq C(S_X^+)$ 上。我们证明，量子幻方的不可扩张性源于不同算子系统结构之间的区别。

在第5节中，我们介绍与不同物理模型（局域、量子、近似量子、量子可交换和一般无信号）相对应的量子无信号双相关类型，并通过赋予代数张量积 $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_X$ 的各种算子系统结构上的态来刻画它们。这里我们借助 [32]中发展的张量积理论。我们还专门讨论经典无信号双相关，证明其对应的编码算子系统 $\mathcal{S}_X$ 是由第4节研究的 $X \times X$-量子幻方各项所张成的泛算子系统，并在代数张量积 $\mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_X$上的算子系统张量积之态方面，得到了类似的刻画。

在第6节中，我们将重点放在并发双相关上，并在定理 6.7 中以迹态刻画并发量子可交换双相关。我们证明，此处所关注的迹态所属的 C*-代数，是射影自由酉量子群上的函数 C*-代数 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$。回顾一下，自由

酉量子群 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 的 C*-代数，是由双酉矩阵 $U=(u_{x,a})_{x,a}$ 的各项 $u_{x,a}$ 生成的万有单位 C*-代数。

C*-代数 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_{X+})$ 是 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 的 C*-子代数，由形如 $u_{x,a}^* u_{x',a'}$ 的长度为二的词生成。注意，C*-代数 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 是 $C(\mathcal{U}_X)$ 的自由类比；后者是单位酉群 $\mathcal{U}_X$ 上连续复值函数的 C*-代数。类似地，$C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 是射影酉群 $\mathbb{P}\mathcal{U}_X=\mathcal{U}_X/\mathbb{T}$ 上连续复值函数代数的自由类比。回顾一下，$\mathcal{U}_X$ 在 M_X 上通过共轭的自然作用诱导出 $\mathbb{P}\mathcal{U}_X$ 与群 $\mathrm{Aut}(M_X)$ 之间的一个同构，其中 $\mathrm{Aut}(M_X)$ 是矩阵代数 M_X 的 $*$-自同构群。通过这种方式，$C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X)$ 可以看作 M_X 的自同构群的量子版本。事实上，利用量子群理论，借助 [3, 推论 4.1] 和 [2, 定理1]，这一推理可以严格表述为：$C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 是迹态 C*-代数 M_X 的量子自同构群，其含义见 Wang [56]。

因此，从算子代数观点来看，定理 6.7 为我们将并发双关联定义为双同步相关的适当量子版本提供了又一个理由；事实上，在关联层面上，双同步性的量子化就是将 $\mathcal{D}_X\otimes\mathcal{D}_X$ 上的经典信道替换为 $M_X\otimes M_X$ 上的量子信道。在编码这些信道的迹态层面上，定理 6.7 表明，这种量子化就是将 $C(S_X^+)$（即 $\mathcal{D}_X$ 的量子自同构）替换为 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$（即 M_X 的量子自同构）。我们在此指出，C*-代数 $C(S_X^+)$ 和 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 确实是不同的 C*-代数，这一点可由 [54, 定理 4.5] 中的 K理论计算看出。总而言之，操作性的量子化概念与代数性量子化概念是一致的。我们的结果补充了文献中的一系列算子刻画，其中一部分总结于下表：

相关类型：	由以下空间上的态编码：
经典 NS 相关 $\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}$	$\mathcal{S}_{X,\ A}\otimes_{\max}\mathcal{S}_{X,\ A}$ [35, 定理 3.1]
经典 qc 相关 $\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}$	$\mathcal{S}_{X,\ A}\otimes_{c}\mathcal{S}_{X,\ A}$ [35, 定理 3.1]
经典 qa-关联 $\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}$	$\mathcal{S}_{X,\ A}\otimes_{\min}\mathcal{S}_{X,\ A}$ [35, 定理 3.1]
同步 qc-关联 $\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{s}}$	$\mathcal{A}_{X,\ A}$ （迹态） [46,定理 5.5]
双同步 qc-关联 $\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bis}}$	$C(S_X^+)$（迹态） [47,定理 2.2]
QNS 关联 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}$	$\mathcal{T}_{X,\ A}\otimes_{\max}\mathcal{T}_{X,\ A}$ [52, 定理 6.2]
QNS qc-关联 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}$	$\mathcal{T}_{X,\ A}\otimes_{c}\mathcal{T}_{X,\ A}$ [52, 定理 6.3]
QNS qa-关联 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}$	$\mathcal{T}_{X,\ A}\otimes_{\min}\mathcal{T}_{X,\ A}$ [52, 定理 6.5]
QNS 双相关 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{T}_X\otimes_{\max}\mathcal{T}_X$ [定理 5.4]
量子非信号量子交换双相关 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{T}_X\otimes_{c}\mathcal{T}_X$ [定理 5.5]
量子非信号量子近似双相关 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{T}_X\otimes_{\min}\mathcal{T}_X$ [定理 5.6]
经典非信号双相关 $\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{S}_X\otimes_{\max}\mathcal{S}_X$ [定理 5.10]
经典量子交换双相关 $\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{S}_X\otimes_{c}\mathcal{S}_X$ [定理 5.10]
经典量子近似双相关 $\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bi}}$	$\mathcal{S}_X\otimes_{\min}\mathcal{S}_X$ [定理 5.10]
并发量子交换相关 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{c}}$	$\mathcal{C}_{X,\ A}$ (迹态) [11,定理 4.1]
并发 qc-双相关 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bic}}$	$C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ (迹态) [定理 6.7]

在第7节中，我们运用并发双相关来研究量子图同构。我们考虑相对于 M_X 的量子图，将其视为

作为对称斜子空间 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$ [8, 51, 19, 52, 11]。我们根据适当的量子图同构游戏中的完美量子无信号策略来定义量子图之间的量子同构，这一方法建立在 [52] 所采用的量子图同态方法之上。在定理 7.4 中，我们将量子图 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$ 之间的量子交换同构刻画为存在一个双酉矩阵 $U = (u_{x,a})_{x,a} \in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_{X^+})$ 具有一个迹态 τ，并且

$$(3) \quad U(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} \otimes 1)U^* \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{B}(H) \quad \text{and} \quad U^{\mathrm{t}}(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}} \otimes 1)U^{\mathrm{t}*} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} \otimes \mathcal{B}(H),$$

其中 $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}$ 和 $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}$ 分别是与 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 规范关联的无迹对称子空间。请注意，条件 (3) 是经典图的量子同构的一种量子对应刻画 [1]：通过双酉矩阵替代量子置换矩阵，使其与相关邻接矩阵交织（见注 7.6）。我们还在定理 7.10 中进一步形式化关系 (3)，并引入一个自然的游戏代数 $\mathcal{A}_{P,Q}$，其迹态编码了 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-同构游戏的完美量子交换策略。特别值得注意的是，当 $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ 时，代数 $\mathcal{A}_{P,Q}$ 具有紧量子群的结构，这似乎是经典图的量子自同构群的一种推广。我们将这些量子群的研究留待未来工作。

最后，在第 8 节中，我们将第7节中的量子图同构的操作性概念，与文献中此前出现的算子代数概念进行比较；这些概念主要基于邻接矩阵 [40, 41, 9, 15]。我们在定理 8.9 中证明，前述文献所考察的代数量子同构，均可作为特殊情形纳入我们的框架。该定理的证明所依据的论证和思想，来自 Daws 关于量子图的近期工作 [15]。在定理 8.14 中，我们建立了一个部分逆命题，明确刻画了代数概念与量子图同构的操作性概念相一致的精确条件。

致谢。M.B. 得到了加拿大自然科学与工程研究委员会发现基金的部分资助。S.H. 得到了加拿大自然科学与工程研究委员会博士后奖学金的部分资助。I.T. 得到了美国国家科学基金会 DMS-2154459 项目和西蒙斯基金会一项资助（项目编号 708084）的部分资助。

2. Preliminaries

本节汇集量子无信号关联的基本预备知识，设定记号并引入术语。设 H 为希尔伯特空间。按照惯例，我们用 $\mathcal{B}(H)$ 表示 H 上所有有界线性算子的空间；当 H 是有限维时，有时也写作 $\mathcal{L}(H)$。我们用 I_H 表示 H 上的恒等算子；若 ξ、$\eta \in H$，则令 $\xi\eta^*$ 表示由 $(H)(\mathcal{B})H, H$ 给出的秩一

算子。除内积外，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 还表示向量空间与其对偶之间的对偶性。令 $\mathcal{B}(H)^+$ 表示 $\mathcal{B}(H)$ 中正算子构成的锥；此外，用 $\mathcal{T}(H)$ 表示其迹类算子理想，并用 Tr – 表示 $\mathcal{T}(H)$ 上的迹泛函。

算子系统是某个希尔伯特空间 H 上的自伴子空间 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$，并且包含 I_H。若 $\mathcal{S}$ 是算子系统，则 $\mathcal{S}$ [34] 的泛 C*-覆盖是一个对 $(C_u^*(\mathcal{S}), \iota)$，其中 $C_u^*(\mathcal{S})$ 是一个保幺 C*-代数，而 $\iota : \mathcal{S} \to C_u^*(\mathcal{S})$ 是一个保幺完全序嵌入，使得 $\iota(\mathcal{S})$ 作为 C*-代数生成 $C_u^*(\mathcal{S})$。此外，对于任意希尔伯特空间 K 和任意保幺完全正映射 $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(K)$，存在一个 *-表示 $\pi_\phi : C_u^*(\mathcal{S}) \to \mathcal{B}(K)$，使得 $\pi_\phi \circ \iota = \phi$。若 $\mathcal{S}$ 是有限维算子系统，则其巴拿赫空间对偶 $\mathcal{S}^{\mathrm{d}}$ 可视为一个算子系统 [14, 推论 4.5]。有关算子系统和完全正映射的资料与背景，请参阅 [45] 。

我们用 $|X|$ 表示有限集 X 的基数，令 $H^X = \oplus_{x \in X} H$，并用 M_X 表示所有大小为 $|X| \times |X|$ 的复矩阵所构成的空间；我们将 M_X 与 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^X)$ 视为相同，并令 $I_X = I_{\mathbb{C}^X}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 和 $M_n = M_{[n]}$。我们用 $(e_x)_{x \in X}$ 表示 $\mathbb{C}^X$ 的典范正交归一基，用 $(\epsilon_{x,x'})_{x,x' \in X}$ 表示 M_X 中的典范矩阵单位系，并用 $\mathcal{D}_X$ 表示 M_X 中关于基 $(e_x)_{x \in X}$ 的所有对角矩阵构成的子代数。若 $\mathcal{V}$ 是一个向量空间，我们用 $M_X(\mathcal{V})$ 表示所有元素属于 $\mathcal{V}$ 的 $X \times X$ 矩阵所构成的空间；注意，$M_X(\mathcal{V})$ 与 $M_X \otimes \mathcal{V}$ 之间存在典范线性同一。此处及下文中，我们用符号 $\otimes$ 表示向量空间的代数张量积。

对于一个元素 $\omega \in M_X$，我们用 ω^{t} 表示 ω 在典范基下的转置，用 $\overline{\omega}$ 表示 ω 的复共轭；因此，$\overline{\omega} = (\omega^{\mathrm{t}})^*$。从 M_X 到其对偶算子系统 M_X^{d} 的典范完全序同构，将元素 $\omega \in M_X$ 映射为线性泛函 $f_\omega : M_X \to \mathbb{C}$，其定义为 $f_\omega(T) = \mathrm{Tr}(T\omega^{\mathrm{t}})$；例如参见 [48, 定理 6.2]。因此，我们将 M_X 视为自对偶的，其配对为

$$(\rho, \omega) \to \langle \rho, \omega \rangle := \mathrm{Tr}(\rho\omega^{\mathrm{t}}). \tag{4}$$

另一方面，注意到 Banach空间前对偶 $\mathcal{B}(H)_*$ 可以典范地识别为 $\mathcal{T}(H)$；因此，每个正规泛函 $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ 都对应于一个（唯一的）算子 $S_\phi \in \mathcal{T}(H)$，使得 $\phi(T) = \mathrm{Tr}(TS_\phi)$，$T \in \mathcal{B}(H)$。当 X 是一个固定的有限集（有时会以笛卡尔积的形式出现）时，我们将结合使用上述两种对偶性：若 $\omega, \rho \in M_X$, $S \in \mathcal{T}(H)$ 且 $T \in \mathcal{B}(H)$，继续写作将更为方便

$$\langle \rho \otimes T, \omega \otimes S \rangle = \mathrm{Tr}(\rho\omega^{\mathrm{t}}) \, \mathrm{Tr}(TS).$$

如果 X 和 Y 是有限集，我们将 $M_X \otimes M_Y$ 视为 $M_{X \times Y}$，并以 M_{XY} 代之。同样地，我们令 $\mathcal{D}_{XY} = \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{D}_Y$。对于元素 $\omega_X \in M_X$ 和希尔伯特空间 H，记 $L_{\omega_X} : M_X \otimes \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 为由 $L_{\omega_X}(S \otimes T) = \langle S, \omega_X \rangle T$ 给出的线性映射。如果 $H = \mathbb{C}^Y$ 和 $\omega_Y \in M_Y$,

因此我们有线性映射 $L_{\omega_X}\colon M_{XY}\to M_Y$ 和 $L_{\omega_Y}\colon M_{XY}\to M_X$；注意

$$\langle L_{\omega_X}(R),\rho_Y\rangle=\langle R,\omega_X\otimes\rho_Y\rangle,\quad R\in M_{XY},\rho_Y\in M_Y,$$

并且对 L_{ω_Y} 也有类似的公式。我们将 $\mathrm{Tr}_X\colon M_{XY}\to M_Y$（分别将 $\mathrm{Tr}_Y\colon M_{XY}\to M_X$）记为偏迹；因此，$\mathrm{Tr}_X=L_{I_X}$（分别为 $\mathrm{Tr}_Y=L_{I_Y}$）。

设 X、Y、A 和 B 为有限集。从 M_X 到 M_A 的量子信道是一个完全正迹保持映射 $\Phi\colon M_X\to M_A$。关于 (X,Y,A,B) 的量子关联（若上下文已明确这些集合，也简称量子关联）是一个量子信道 $\Gamma\colon M_{XY}\to M_{AB}$。若满足以下条件，则这种 Γ 称为量子无信号（QNS）关联 [20]

$$\mathrm{Tr}_A\Gamma(\rho_X\otimes\rho_Y)=0\ \text{ whenever }\ \mathrm{Tr}(\rho_X)=0 \tag{5}$$

and

$$\mathrm{Tr}_B\Gamma(\rho_X\otimes\rho_Y)=0\ \text{ whenever }\ \mathrm{Tr}(\rho_Y)=0. \tag{6}$$

我们用 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}$ 表示所有 QNS 关联构成的集合。

作用于希尔伯特空间 H 上、关于 (X,A) 的随机算子矩阵，是一个正块算子矩阵 $E=(E_{x,\,x',\,a,\,a'})_{x,\,x',\,a,\,a'}\in M_{XA}(\mathcal{B}(H))$，满足 $\mathrm{Tr}_A E=I$。

若存在一个希尔伯特空间 H、一个单位向量 $\xi\in H$ 以及作用在 H 上的随机算子矩阵 $E=(E_{x,\,x',\,a,\,a'})_{x,\,x',\,a,\,a'}$ 和 $F=(F_{y,\,y',\,b,\,b'})_{y,\,y',\,b,\,b'}$，使得 $\Gamma\colon M_{XY}\to M_{AB}$ 是量子可交换的 QNS 相关，当且仅当

$$E_{x,x',a,a'}F_{y,y',b,b'}=F_{y,y',b,b'}E_{x,x',a,a'}$$

对所有 x、$x'\in X$、y、$y'\in Y$、a、$a'\in A$、b、$b'\in B$，以及

$$\Gamma(\epsilon_{x,x'}\otimes\epsilon_{y,y'})=\sum_{a,a'\in A}\sum_{b,b'\in B}\left\langle E_{x,x',a,a'}F_{y,y',b,b'}\xi,\xi\right\rangle\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{b,b'}, \tag{7}$$

对所有 x、$x'\in X$ 以及所有 y、$y'\in Y$。量子 QNS 关联的定义与 (7) 中相同，但要求 H 具有形式 $H_A\otimes H_B$，其中 H_A 和 H_B是某些有限维希尔伯特空间，且 $E_{x,\,x',\,a,\,a'}=E_{x,\,x',\,a,\,a'}\otimes I_B$ 和 $F_{y,\,y',\,b,\,b'}=I_A\otimes F_{y,\,y',\,b,\,b'}$来自某些随机算子矩阵 $(E_{x,\,x',\,a,\,a'})$ 和$(F_{y,\,y',\,b,\,b'})$，分别作用于 H_A 和 H_B。近似量子 QNS 关联是量子 QNS 关联的极限，而局部 QNS 关联是形式为 $\Gamma=\sum_{i=1}^k\lambda_i\Phi_i\otimes\Psi_i$ 的凸组合，其中 $\Phi_i\colon M_X\to M_A$ 和 $\Psi_i\colon M_Y\to M_B$ 是量子信道，$i=1,\ldots,k$。

我们用 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}$（分别用 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}$、$\mathcal{Q}_{\mathrm{q}}$、$\mathcal{Q}_{\mathrm{loc}}$）表示所有量子可交换（分别为近似量子、量子、局域）量子非信号关联的（凸）集合，并注意到以下包含关系

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{loc}}\subseteq\mathcal{Q}_{\mathrm{q}}\subseteq\mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}\subseteq\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}\subseteq\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}.$$

回顾一下，（经典）无信号（NS）关联是一族 $p=\{(p(a,b|x,y))_{a,\,b}\colon(x,y)\in X\times Y\}$ 关于 $A\times B$ 的概率分布，

满足

$$\sum_{b\in B} p(a,b|x,y) = \sum_{b\in B} p(a,b|x,y'), \quad x\in X, y, y'\in Y, a\in A,$$

and

$$\sum_{a\in A} p(a,b|x,y) = \sum_{a\in A} p(a,b|x',y), \quad x,x'\in X, y\in Y, b\in B$$

（例如参见 [35, 46]）。我们将所有无信号相关构成的（凸）集合记为 $\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}$。对于一个关联 $p\in\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}$，我们关联一个经典信息信道$\Gamma_p\colon \mathcal{D}_{XY}\to\mathcal{D}_{AB}$，其定义为

$$\Gamma_p(\epsilon_{x,x}\otimes\epsilon_{y,y}) = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} p(a,b|x,y)\epsilon_{a,a}\otimes\epsilon_{b,b}. \tag{8}$$

对于 $\mathsf{t}\in\{\mathsf{loc},\mathsf{q},\mathsf{qa},\mathsf{qc}\}$，$\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}$ 的子类 $\mathcal{C}_{\mathrm{t}}$ 定义方式与上一段相同，但使用经典随机算子矩阵，即形如 $E=\sum_{x\in X}\sum_{a\in A}\epsilon_{x,\ x}\otimes\epsilon_{a,\ a}\otimes E_{x,\ a}$ 的随机算子矩阵。注意，E 为随机的条件等价于要求 $(E_{x,\ a})_{a\in A}$ 对所有 $x\in X$ 都是正算子值测度（POVM）。我们注意到以下包含关系

$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{q}}\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{ns}},$$

以上均为严格结论：$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}\neq\mathcal{C}_{\mathrm{q}}$ 是贝尔定理 [4]，$\mathcal{C}_{\mathrm{q}}\neq\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}$ 是对弱 Tsirelson问题 [49] 的否定回答（另见 [21, 50]），而$\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}\neq\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}$ ——鉴于 [25, 29, 44], ——是否定已宣布的康尼斯嵌入问题解决方案的回答 [28]。

3. Bistochastic operator matrices

本节定义并考察双随机算子矩阵，它们是将随机算子矩阵 [52, 第 3] 节推广到本文所考虑的新背景下的特例。令 X 为一个有限集，并令 $A=X$。符号 X 和 A 仍分别用于表示取偏迹所针对的变量；符号 X 通常指量子信道的定义域，而 A 则指其值域。

定义 3.1. 设 H 为一个希尔伯特空间。若分块算子矩阵 $E=\big(E_{x,\ x',\ a,\ a'}\big)_{x,\ x',\ a,\ a'}\in(M_{XA}\otimes\mathcal{B}(H))^+$ 满足以下条件，则称其为双随机算子矩阵：

$$\mathrm{Tr}_A E = I_X\otimes I_H \quad and \quad \mathrm{Tr}_X E = I_A\otimes I_H.$$

3.1. 分解。若分块算子矩阵 $V=(V_{a,\ x})_{a,\ x\in X}$，其中$V_{a,\ x}\in\mathcal{B}(H,K)$，对于某些希尔伯特空间 H 和 K，则称其为双等距算子，如果 V和 $V_{\mathrm{t}}:=(V_{x,\ a})_{a,\ x\in X}$作为 $\mathcal{B}(H^X,K^X)$ 中的算子都是等距算子。

定理 3.2. 设 H 为一个希尔伯特空间，且 $E\in(M_{XA}\otimes\mathcal{B}(H))^+$。以下各项等价：

(i) E 是一个双随机算子矩阵；

(ii) 存在一个希尔伯特空间 K 以及算子 $V_{a,\ x} \in \mathcal{B}(H,K)$、 x、 $a \in X$，使得 $(V_{a,\ x})_{a,\ x\in X}$ 是一个双等距算子，并且

$$E_{x,x',a,a'} = V_{a,x}^* V_{a',x'}, \quad x,x',a,a' \in X. \tag{9}$$

证明。（ii）$\Rightarrow$（i）由于 V 是等距算子，

$$\sum_{a\in X} E_{x,x',a,a} = \sum_{a\in X} V_{a,x}^* V_{a,x'} = \delta_{x,x'} I_H,$$

因此 $\mathrm{Tr}_{\ A} E = I_X \otimes I_H$。由于 $V^{\mathrm{t}} = (V_{a,x})_{x,a}$ 是等距算子，

$$\sum_{x\in X} E_{x,x,a,a'} = \sum_{x\in X} V_{a,x}^* V_{a',x} = \delta_{a,a'} I_H,$$

因此 $\mathrm{Tr}_{\ X} E = I_A \otimes I_H$。

（i）$\Rightarrow$（ii）假设 $E = (E_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 是作用在 H 上的双随机算子矩阵，并令 $E_{a,a'} = (E_{x,x',a,a'})_{x,x'}$, $a,a' \in A$；于是，$E_{a,a'} \in M_X \otimes \mathcal{B}(H)$。令 Φ：$M_A \to M_X \otimes \mathcal{B}(H)$ 为线性映射，由 $\Phi(\epsilon_{a,a'}) = E_{a,a'}$, $a,a' \in A$ 给出。根据Choi定理， Φ 是一个保幺完全正映射；根据Stinespring定理，存在一个希尔伯特空间 K、一个等距算子 $V\colon \mathbb{C}^X \otimes H \to \tilde{K}$ 以及一个保单位 *-同态 π：$M_A \to \mathcal{B}(K)$，使得 $\Phi(T) = V^*\pi(T)V$, $T \in M_A$。在酉等价意义下，$\tilde{K} = \mathbb{C}^A \otimes K$ 对应某个希尔伯特空间 K，且 $\pi(T) = T \otimes I_K$, $T \in M_A$。记 $V_{a,x}$：$H \to K$, $a \in A$, $x \in X$ 为 V 的各项，其中 V 被视为分块算子矩阵。如定理 3.1], 中所述，我们得出 $E_{x,x',a,a'} = V_{a,x}^* V_{a',x'}$, $x,x' \in X$, $a,a' \in A$。

注意到

$$(\mathrm{Tr}_X \circ \Phi)\left(\epsilon_{a,a'}\right) = \mathrm{Tr}_X\left(E_{a,a'}\right) = \sum_{x\in X} E_{x,x,a,a'} = \delta_{a,a'} I_H;$$

因此

$$(\mathrm{Tr}_X \circ \Phi)(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho) I_H, \quad \rho \in M_A.$$

因此，若 $\omega \in \mathcal{T}(H)$ 且 $\rho \in M_A$，则

$$\begin{aligned} \langle \rho, \mathrm{Tr}(\omega) I_A \rangle &= \langle \mathrm{Tr}_A(\rho \otimes I_H), \omega \rangle = \langle (\mathrm{Tr}_X \circ \Phi)(\rho), \omega \rangle \\ &= \langle \mathrm{Tr}_X\left(V^*(\rho \otimes I_K)V\right), \omega \rangle . \end{aligned} \tag{10}$$

另一方面，令 $\rho = (\rho_{a,a'})_{a,a'\in X}$，则有

$$V^*(\rho \otimes I_K)V = \sum_{a,a'\in X} \rho_{a,a'} V^*(\epsilon_{a,a'} \otimes I_K)V = \left[\sum_{a,a'\in X} \rho_{a,a'} V_{a,x}^* V_{a',x'}\right]_{x,x'},$$

这意味着

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Tr}_X\left(V^*(\rho \otimes I_K)V\right), \omega \rangle &= \sum_{x\in X} \sum_{a,a'\in X} \rho_{a,a'} \mathrm{Tr}(V_{a,x}^* V_{a',x} \omega) \\ &= \sum_{a,a'\in X} \rho_{a,a'} \mathrm{Tr}\left(\sum_{x\in X} V_{a,x}^* V_{a',x} \omega\right). \end{aligned}$$

现在，式（10）意味着

$$\operatorname{Tr}\left(\sum_{x\in X} V_{a,x}^* V_{a',x}\omega\right) = \delta_{a,a'}\operatorname{Tr}(\omega), \quad a,a'\in X.$$

后一个等式对每个 $\omega\in\mathcal{T}(H)$ 都成立；因此，

$$\sum_{x\in X} V_{a,x}^* V_{a',x} = \delta_{a,a'} I_K,$$

也就是说， V^{t} 是一个等距算子。 □

3.2. 泛算子系统。回顾一下， [27, 58] 三元环是一个复向量空间 $\mathcal{V}$，配备三元运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$，该运算对外侧变量是线性的，对中间变量是共轭线性的，并满足

$$[s,t,[u,v,w]] = [s,[v,u,t],w] = [[s,t,u],v,w], \quad s,t,u,v,w\in\mathcal{V}.$$

$\mathcal{V}$ 的三元表示是一个线性映射 $\theta:\mathcal{V}\to\mathcal{B}(H,K)$，其中希尔伯特空间 H 和 K 满足

$$\theta([u,v,w]) = \theta(u)\theta(v)^*\theta(w), \quad u,v,w\in\mathcal{V}.$$

如果 θ 满足 $\operatorname{span}\{\theta(u)^*\eta: u\in\mathcal{V},\eta\in K\}$ 在 H中稠密，则称其为非退化。一个（具体的）算子三元环（TRO） [58] 是某些希尔伯特空间 H和 K上的子空间 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{B}(H,K)$，满足 $S,T,R\in\mathcal{U}$蕴含 $ST^*R\in\mathcal{U}$。关于 TRO 及其在下文中将用到的抽象版本的详细信息，请参阅 [6, 第4节。4]

令 $\mathcal{V}_X^0$ 为由元素 $v_{a,x}$, $a,x\in X$生成的三元环，并满足以下关系

$$\sum_{a\in X}[v_{a'',x''},v_{a,x},v_{a,x'}] = \delta_{x,x'}v_{a'',x''} \text{ and } \sum_{x\in X}[v_{a'',x''},v_{a,x},v_{a',x}] = \delta_{a,a'}v_{a'',x''}, \tag{11}$$

对所有 $x,x',x'',a,a',a''\in X$均成立。注意，关系 (11) 等价于

$$\sum_{a\in X}[u,v_{a,x},v_{a,x'}] = \delta_{x,x'}u \text{ and } \sum_{x\in X}[u,v_{a,x},v_{a',x}] = \delta_{a,a'}u, \tag{12}$$

对所有 x、x'、a、$a'\in X$以及所有 $u\in\mathcal{V}_X^0$。条件 (12) 表明，非退化三元表示 $\theta:\mathcal{V}_X^0\to\mathcal{B}(H,K)$ 与双等距算子 $V=(V_{a,x})_{a,x}$ 相对应，对应关系为 $V_{a,x}=\theta(v_{a,x})$；在这种情况下，我们记作 $\theta=\theta_V$。按照 [52, 第 5]，节，令 $\theta=\oplus_V\theta_V$，其中在直和中，我们从每个双等距算子的酉等价类中选取一个代表，并且底层希尔伯特空间的基数有界于 $\mathcal{V}$ 的基数。对应关系 $\|u\|:=\|\theta(u)\|$ 在 $\mathcal{V}_X^0$ 上定义了一个半范数；令 $\mathcal{V}_X:=\mathcal{V}_X^0/\ker\hat{}\theta$，注意到 $\mathcal{V}_X$ 是一个 TRO，并继续用 $v_{a,x}$ 表示 $\mathcal{V}_X^0$ 的典范生成元在商映射 $q:\mathcal{V}_X^0\to\mathcal{V}_X$ 下的像。映射 $\hat{}\theta$ 和 θ_V（对于一个双等距算子 V）给出

相应的 $\mathcal{V}_X$ 三元表示，我们仍用相同的记号表示。

令 $\mathcal{C}_X$ 为 TRO $\mathcal{V}_X$ 的右 C*-代数（因此，在 *- 同构意义下，$\mathcal{C}_X \cong \mathrm{span}(\theta(\mathcal{V}_X)^*\theta(\mathcal{V}_X))$），记作 $e_{x,\,x',\,a,\,a'} = v_{a,\,x}^* v_{a',\,x'}$，并令

$$\mathcal{T}_X = \mathrm{span}\{e_{x,x',a,a'} : x, x', a, a' \in X\},$$

视为 $\mathcal{C}_X$ 的一个算子子系统。显然，

$$(e_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'} \in M_{XX}(\mathcal{C}_X)^+ \tag{13}$$

并且这些关系

$$\sum_{b\in A} e_{x,x',b,b} = \delta_{x,x'}1 \quad \text{and} \quad \sum_{y\in X} e_{y,y,a,a'} = \delta_{a,a'}1, \quad x, x', a, a' \in X, \tag{14}$$

成立。

对于作用在希尔伯特空间 H 上的双等距算子 V，我们将 $\pi_V\colon \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(H)$ 记作 $\mathcal{C}_X$ 的 *- 表示，其定义为

$$\pi_V(S^*T) = \theta_V(S)^*\theta_V(T), \quad S, T \in \mathcal{V}_X. \tag{15}$$

引理 3.3. 以下结论成立：

(i) 每个非退化的 $\mathcal{V}_X$ 三元表示都具有形式 θ_V，其中 V是某个双等距算子。ˆ (ii) 映射 θ 是 $\mathcal{V}_X$的忠实三元表示。(iii) 每个 $\mathcal{C}_X$ 的保幺 *- 表示 π 都具有形式 π_V，其中 V是某个双等距算子。

证明。论证与 [52, 引理 5.1] 中的论证类似；那里讨论了当前设定的一个版本，其中涉及的是等距算子（不一定是双等距算子）。为方便读者，我们证明 (iii)。设 $\pi : \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(H)$ 是一个保幺 *-表示。则存在一个三元表示 $\theta\colon \mathcal{V}_X \to \mathcal{B}(H, K)$，使得 $\pi(S^*T) = \theta(S)^*\theta(T), S, T \in \mathcal{V}_{X,\,A}$（例如参见 [5, 定理 3.4] 和 [23, 第 1636]页）。由于 π 是保幺的，θ 是非退化的。根据 (i) 中所述的 $\mathcal{V}_X$ 的泛性质，存在一个算子矩阵 $V = (V_{a,\,x})$，其元素满足关系 (11)，使得 $\theta = \theta_V$，因此 $\pi = \pi_V$。□

令 $\mathcal{V}_{X,\,A}$ 为等距算子 $(\tilde{v}_{a,\,x})_{a,\,x\in X}$的泛 TRO，其定义方式与 TRO $\mathcal{V}_X$ [52, Section 5]类似。因此，TRO $\mathcal{V}_{X,\,A}$ 源自一个三元环，其典范生成元 $\tilde{v}_{a,\,x}$, $x, a \in X$只需满足关系 (11) 中的第一条。令 $\mathcal{C}_{X,\,A}$ 为 $\mathcal{T}_{X,\,A}$的右 C*-代数。令 $\tilde{e}_{x,\,x',\,a,\,a'} = \tilde{v}_{a,\,x}^* \tilde{v}_{a',\,x'}$, $x, x', a, a' \in X$，记作

$$\mathcal{T}_{X,A} = \mathrm{span}\{\tilde{e}_{x,x',a,a'} : x, x', a, a' \in X\}, \tag{16}$$

视为 $\mathcal{C}_{X,A}$ [52] 的算子子系统。文献 [52, 定理 5。2] 证明了，对于希尔伯特空间 H，保幺完全正映射 $\phi : \mathcal{T}_{X,A} \to \mathcal{B}(H)$ 与随机算子矩阵 $(E_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 相对应

通过赋值 $\phi(e_{x,x',a,a'}) = E_{x,x',a,a'}$。接下来，我们将给出这一事实的双随机版本，以供后续使用。

定理 3.4. 设 H 为希尔伯特空间，$\phi : \mathcal{T}_X \to \mathcal{B}(H)$ 为线性映射。考虑以下条件

(i) ϕ 是幺正完全正映射；(ii) $\left(\phi(e_{x,\ x',\ a,\ a'})\right)_{x,\ x',\ a,\ a'} \in M_{XA} \otimes \mathcal{B}(H)$ 是双随机算子矩阵；(iii) 存在含幺 *-表示 $\pi : \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi = \pi|_{\mathcal{T}_X}$，

且 (i') ϕ 是完全正映射；(ii') $\left(\phi(e_{x,\ x',\ a,\ a'})\right)_{x,\ x',\ a,\ a'} \in (M_{XA} \otimes \mathcal{B}(H))^+$。

那么 (i)⇔(ii)⇔(iii) 且 (i')⇔(ii')。因此，数对 $(\mathcal{C}_X, \iota)$ 是 ι 将 $\mathcal{T}_X$ 包含到 $\mathcal{C}_X$ 中的包含映射，构成了 $\mathcal{T}_X$ 的泛 C*-覆盖。

此外，若 $\left(E_{x,x',a,a'}\right)_{x,x',a,a'}$ 是作用在希尔伯特空间 H 上的双随机算子矩阵，则存在一个（唯一的）幺正完全正映射 $\phi : \mathcal{T}_X \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi(e_{x,x',a,a'}) = E_{x,x',a,a'}$ 对所有 x, x', a, a' 均成立。

证明。（i）⇒（ii）根据 Arveson 延拓定理和 Stinespring 定理，存在一个希尔伯特空间 K、一个 *-表示 $\pi : \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(K)$ 以及一个等距算子 $W \in \mathcal{B}(H, K)$，使得 $\phi(u) = W^*\pi(u)W$，$u \in \mathcal{T}_X$。根据引理 3.3，$\pi = \pi_V$ 对于某个双等距算子 $V = (V_{a,x})_{a,x}$。由（13），$E := \left(\pi(e_{x,x',a,a'})\right)_{x,x',a,a'} \in (M_{XA} \otimes \mathcal{B}(K))^+$，因此

$$\left(\phi(e_{x,x',a,a'})\right) = (I_X \otimes I_A \otimes W)^* E (I_X \otimes I_A \otimes W) \in (M_{XA} \otimes B(H))^+ .$$

此外，

$$\sum_{b \in X} W^* V_{b,x}^* V_{b,x'} W = \delta_{x,x'} W^* W = \delta_{x,x'} I, \quad x, x' \in X,$$

and

$$\sum_{y \in X} W^* V_{a,y}^* V_{a',y} W = \delta_{a,a'} W^* W = \delta_{a,a'} I, \quad a, a' \in X,$$

也就是说，算子矩阵 $\left(\phi(e_{x,\ x',\ a,\ a'})\right)_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 是双随机的。

(ii)⇒(iii) 由定理 3.2，存在一个希尔伯特空间 K 和一个双等距算子 $V = (V_{a,\ x})_{a,\ x} \in \mathcal{B}(H^X, K^X)$，使得

$$\phi(e_{x,x',a,a'}) = V_{a,x}^* V_{a',x'}, \quad x, x', a, a' \in X.$$

回顾 (15)，我们有

$$\pi_V(e_{x,x',a,a'}) = \theta_V(v_{a,x})^* \theta_V(v_{a',x'}) = V_{a,x}^* V_{a',x'} = \phi(e_{x,x',a,a'}),$$

因此，$\mathcal{C}_X$ 上的 *-表示 π_V 是 ϕ 的扩张。

(iii)⇒(i) 是显然的。

(i')⇒(ii') 这是（13）以及 $\mathcal{T}_X$ 是 $\mathcal{C}_X$ 的一个算符子系统这一事实的直接推论。

(ii')⇒(i') 设 $T=\phi(1)$，并注意，对于任意 x、$a\in X$，我们有

$$\sum_{b\in X}E_{x,x,b,b}=\sum_{b\in X}\phi(e_{x,x,b,b})=T=\sum_{y\in X}\phi(e_{y,y,a,a})=\sum_{y\in X}E_{y,y,a,a}. \tag{17}$$

首先假设 T 可逆。按照 [52, 命题 5.4], 的证明，令 $\psi:\mathcal{T}_X\to\mathcal{B}(H)$ 为下述映射:

$$\psi(u)=T^{-1/2}\phi(u)T^{-1/2},\quad u\in\mathcal{T}_X. \tag{18}$$

令 $F=\left(\psi(e_{x,\ x',\ a,\ a'})\right)_{x,\ x',\ a,\ a'}$，则有

$$F=\left(I_{XA}\otimes T^{-1/2}\right)E\left(I_{XA}\otimes T^{-1/2}\right)\geq 0,$$

并且 (17) 表明 F 是一个双随机算子矩阵。由蕴含关系 (ii)⇒(i)，ψ 是完全正的，因此 ϕ也是完全正的，因为 $\phi(\cdot)=T^{1/2}\psi(\cdot)T^{1/2}$。

现在放宽 T 可逆这一假设。利用蕴含关系 (ii)⇒(i)，令 $f:\mathcal{T}_X\to\mathbb{C}$ 为由 $f(e_{x,\ x',\ a,\ a'})=\frac{1}{|X|}\delta_{x,\ x'}\delta_{a,\ a'}$ 给出的态；对于 $\epsilon>0$，令 $\phi_\epsilon:\mathcal{T}_X\to\mathcal{B}(H)$ 由 $\phi_\epsilon(u):=\phi(u)+\epsilon f(u)I$ 给出。于是

$$\left(\phi_\epsilon(e_{x,x',a,a'})\right)_{x,x',a,a'}=E+\frac{\epsilon}{|X|}I_{XX}$$

且 $\phi_\epsilon(I)=T+\epsilon I$ 可逆。根据上一段，ϕ_ϵ 是完全正的；又由于 $\phi_\epsilon\to_{\epsilon\to 0}\phi$ 在点范数拓扑中，我们得出ϕ是完全正的。

最后，设 $E=\left(E_{x,\ x',\ a,\ a'}\right)_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 是作用于 H上的双随机算子矩阵。令 V 为与 E 相关联的双等距算子（根据定理 3.2），则完全正映射 $\phi:=\pi_V|_{\mathcal{T}_X}$ 满足等式 $\phi(e_{x,\ x',\ a,\ a'})=E_{x,\ x',\ a,\ a'}$，对所有 x、x'、a、a'均成立。□

注意，若 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统，其巴拿赫空间对偶 $\mathcal{S}^{\mathrm{d}}$ 可赋予一种自然的矩阵序结构。为此，我们回顾[14, 第 4] 节：任意矩阵 $\phi=(\phi_{i,\ j})_{i,\ j=1}^n\in M_n(\mathcal{S}^{\mathrm{d}})$ 都会导出一个线性映射 $F_\phi:\mathcal{S}\to M_n$，其定义如下:

$$F_\phi(u)=\sum_{i,j=1}^n\phi_{i,j}(u)\epsilon_{i,j}, \tag{19}$$

并令

$$M_n(\mathcal{S}^{\mathrm{d}})^+=\{\phi\in M_n(\mathcal{S}^{\mathrm{d}}):F_\phi\text{ is completely positive}\}.$$

已在 [14, 推论 4.5] 中证明，若 $\mathcal{S}$ 是有限维算子系统，则（矩阵有序）对偶 $\mathcal{S}^{\mathrm{d}}$ 在赋予适当的忠实态作为阿基米德序单位后，是一个算子系统。很容易验证，在这种情况下，$\mathcal{S}^{\mathrm{dd}}\cong_{\mathrm{c.o.i.}}\mathcal{S}$。

我们将元素 $T\in M_{XA}$与其矩阵 $(\lambda_{x,\ x',\ a,\ a'})_{x,\ x',\ a,\ a'}$对应，其中

$$\lambda_{x,x',a,a'}=\langle T(e_{x'}\otimes e_{a'}),e_x\otimes e_a\rangle,\quad x,x'\in X,a,a'\in A.$$

Let

$$\mathcal{L}_{X,A} = \left\{ (\lambda_{x,x',a,a'}) \in M_{XA} : \exists\, c \in \mathbb{C} \text{ s.t.} \sum_{a \in A} \lambda_{x,x',a,a} = \delta_{x,x'} c,\ x, x' \in X \right\}$$

并将 $\mathcal{L}_{X,\ A}$ 视为 M_{XA}的算子子系统。文献 [52,命题 5.5] 表明，线性映射 $\tilde{\Lambda} : \mathcal{T}^{\mathrm{d}}_{X,\ A} \to \mathcal{L}_{X,\ A}$定义如下：

$$\tilde{\Lambda}(\phi) = \left(\phi(\tilde{e}_{x,x',a,a'})\right)_{x,x',a,a' \in X},$$

是 $\mathcal{T}^{\mathrm{d}}_{X,A}$ 与 $\mathcal{L}_{X,A}$ 之间的保单位完全序同构。令

$$\mathcal{L}_X = \{(\lambda_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'} \in M_{XX} :\ \text{there exists } c \in \mathbb{C} \text{ s.t.}$$

$$\sum_{b \in X} \lambda_{x,x',b,b} = \delta_{x,x'} c \text{ and } \sum_{y \in X} \lambda_{y,y,a,a'} = \delta_{a,a'} c,\ \text{for all } x, x', a, a' \in X\}.$$

注 3.5. 若 $C = (\lambda_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'} \in M_{XA}$ 是一个矩阵，且 c_1、c_2 是标量，满足对所有 x、$x' \in X$ 和 $\sum_{y \in X} \lambda_{y,y,a,a'} = \delta_{a,a'} c_2$ 均有 $\sum_{b \in X} \lambda_{x,x',b,b} = \delta_{x,x'} c_1$，且对所有 a、$a' \in A$ 均有，则

$$c_1 = \frac{1}{|X|} \mathrm{Tr}(C) = c_2.$$

命题 3.6. 线性映射 $\Lambda : \mathcal{T}_{\mathrm{d}_X} \to \mathcal{L}_X$，定义为

$$\Lambda(\phi) = \left(\phi(e_{x,x',a,a'})\right)_{x,x',a,a' \in X} \tag{20}$$

是良定义的完全序同构。

证明。论证遵循 [52, 命题 5.5], 的证明，我们仅强调所需的修改。利用定理 3.4，我们看到映射 $\Lambda_+ : \left(\mathcal{T}_{\mathrm{d}_X}\right)^+ \to \mathcal{L}_X^+$定义为

$$\Lambda_+(\phi) = \left(\phi(e_{x,x',a,a'})\right)_{x,x',a,a'}, \quad \phi \in \left(\mathcal{T}^{\mathrm{d}}_X\right)^+,$$

是良定义的；由可加性和齐次性， Λ_+ 延拓为一个（$\mathbb{C}$-）线性映射 $\Lambda : \mathcal{T}_{\mathrm{d}_X} \to \mathcal{L}_X$。再次应用定理 3.4，并结合定理 3.2，可知 Λ 是完全正且双射的。

设 $\phi_{i,j} \in \mathcal{T}_{\mathrm{d}X}$, $i, j = 1, \ldots, m$，使得矩阵 $(\Lambda(\phi_{i,j}))_{i,j=1}^m$是 $M_m(\mathcal{L}_X)$ 中的一个正元素。令 $\Phi : \mathcal{T}_X \to M_m$ 由 $\Phi(u) = (\phi_{i,j}(u))_{i,j=1}^m$给出。则 $\left(\Phi(e_{x,x',a,a'})\right) \in M_m(\mathcal{L}_X)^+$。由定理 3.4， Φ是完全正的，即 $(\phi_{i,j})_{i,j=1}^m \in M_m\left(\mathcal{T}_{\mathrm{d}_X}\right)^+$。因此， Λ^{-1} 是完全正的，证明完毕。□

推论 3.7。线性映射 $\mathfrak{f} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_X$，由 $\mathfrak{f}(e_{x,\ x',\ a,\ a'}) = e_{x',\ x,\ a',\ a}$ 给出，是一个完全序自同构。

证明。映射 $\Phi : M_{XX} \to M_{XX}$，定义为 $\Phi(\epsilon_{x,a} \otimes \epsilon_{x',a'}) = \epsilon_{x',a'} \otimes \epsilon_{x,a}$，是一个（由酉算子实现的）完全序自同构。此外，$\Phi(\mathcal{L}_X) = \mathcal{L}_X$，因此 Φ 诱导出一个完全序自同构 $\Phi_0 : \mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_X$。根据命题 3.6，其对偶 Φ_0^* 是一个完全

序自同构 $\mathcal{T}_X$。对于 $x, x', a, a' \in X$ 和 $T = (\lambda_{x,x',a,a'}) \in \mathcal{L}_X$，我们有

$$\left\langle \Phi_0^*(e_{x,x',a,a'}), T \right\rangle = \left\langle e_{x,x',a,a'}, \Phi_0(T) \right\rangle = \lambda_{x',x,a',a} = \left\langle \mathfrak{f}(e_{x,x',a,a'}), T \right\rangle,$$

证明至此完成。 □

记

$$\mathcal{J}_X = \operatorname{span}\left\{ \sum_{y \in X} \tilde{e}_{y,y,a,a'} - \delta_{a,a'} 1 : a, a' \in X \right\}; \tag{21}$$

因此， $\mathcal{J}_X$ 是算子系统 $\mathcal{T}_{X,\ A}$ 中由式 (16) 定义的线性子空间。令 $\mathcal{J}_X$ 为 $\mathcal{C}_{X,\ A}$中由 $\mathcal{J}_X$生成的闭理想。记 q_X 为从 $\mathcal{T}_{X,\ A}$ 到 $\mathcal{T}_{X,\ A}/\mathcal{J}_X$的商映射。

回顾一下，若 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统，则称子空间 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$ 为核 [33, 定义 3.2]，当且仅当存在一个算子系统 $\mathcal{R}$ 以及一个幺正完全正映射（等价地，一个完全正映射） $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$，使得 $\mathcal{J} = \ker(\phi)$。

命题 3.8. 空间 $\mathcal{J}_X$ 是$\mathcal{T}_{X,\ A}$ 中的一个核，且线性映射 ι定义为

$$\iota\left(q_X\left(\tilde{e}_{x,x',a,a'}\right)\right) = e_{x,x',a,a'}, \quad x, x', a, a' \in X, \tag{22}$$

是一个从 $\mathcal{T}_{X,A}/\mathcal{J}_X$ 到 $\mathcal{T}_X$的良定义的完全序同构。此外，$\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_X \cong \mathcal{C}_X$ 在典范 *-同构意义下成立。

证明。令 $\alpha : \mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_{X,A}$ 为包含映射。由于 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_{X,A}$ 是 M_{XX}的算子子系统，因此 α 是一个完全序嵌入。由 [24, 命题 1.15], [52, 命题 5.5] 和命题 3.6，其对偶$\alpha^* : \mathcal{T}_{X,A} \to \mathcal{T}_X$ 是一个完全商映射。注意，若 $T \in \mathcal{L}_X$ 且 $a,\ a' \in X$ 则

$$\left\langle \alpha^*\left(\sum_{y \in X} \tilde{e}_{y,y,a,a'} - \delta_{a,a'} 1 \right), T \right\rangle = \left\langle \sum_{y \in X} \tilde{e}_{y,y,a,a'} - \delta_{a,a'} 1, \alpha(T) \right\rangle = 0,$$

也就是说， $\mathcal{J}_X \subseteq \ker(\alpha^*)$。

考虑典范线性映射 s

$$\mathcal{T}_{X,A} \to \mathcal{T}_{X,A}/\mathcal{J}_X \to \mathcal{T}_{X,A}/\ker(\alpha^*) \to \mathcal{T}_X,$$

其中前两个是满射线性映射，它们的复合是完全正的，而第三个是完全序同构（注意，商 $\mathcal{T}_{X,A}/\mathcal{J}_X$ 是线性代数的）。取对偶并运用命题 3.6，我们得到映射链

$$\mathcal{L}_X \cong (\mathcal{T}_{X,A}/\ker(\alpha^*))^{\mathrm{d}} \hookrightarrow (\mathcal{T}_{X,A}/\mathcal{J}_X)^{\mathrm{d}} \to \mathcal{L}_{X,A}. \tag{23}$$

根据 $\mathcal{J}_X$ 的定义（见 (21)），$(\mathcal{T}_{X,\ A}/\mathcal{J}_X)^{\mathrm{d}}$ 中的元素通过 (23) 中三个映射里的最后一个映射，对应于 $\mathcal{L}_{X,\ A}$ 的子空间 $\mathcal{L}_X$ 中的元素。

由此可知，(23) 中的中间映射是线性同构，因此 $\ker(\alpha^*) = \mathcal{J}_X$。特别地，$\mathcal{J}_X$ 是 $\mathcal{T}_{X,\ A}$ 中的一个核，而 $(\mathcal{T}_{X,\ A}/\mathcal{J}_X)^{\mathrm{d}} \cong \mathcal{L}_X$ 在完备序意义下同构。取对偶后可知，$\mathcal{T}_{X,\ A}/\mathcal{J}_X \cong \mathcal{T}_X$ 通过 (22) 中定义的映射 ι 在完备序意义下同构。

根据 $\mathcal{C}_X$ 的泛性质，存在一个幺正 *-满同态 $\pi : \mathcal{C}_{X,\ A} \to \mathcal{C}_X$，使得 $\pi(\tilde{e}_{x,\ x',\ a,\ a'}) = e_{x,\ x',\ a,\ a'}, x, x', a, a' \in X$。令 $\mathcal{J} = \ker(\pi)$，且 $\tilde{\pi} : \mathcal{C}_{X,\ A}/\mathcal{J} \to \mathcal{C}_X$ 为诱导的 *-同构。我们有

$$\pi\left(\delta_{a,a'}1 - \sum_{x\in X} \tilde{e}_{x,x,a,a'}\right) = \delta_{a,a'}1 - \sum_{x\in X} e_{x,x,a,a'} = 0;$$

因此，$\mathcal{J}_X \subseteq \mathcal{J}$。

分块算子矩阵 $\left(\tilde{e}_{x,x',a,a'} + \tilde{\mathcal{J}}_X\right)_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 是双随机的，因此根据定理 3.4，它导出一个典范的保幺满射 *-同态 $\pi' : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_{X,\ A}/\mathcal{J}_X$。由此我们得到一列保幺 *-同态

$$\mathcal{C}_X \xrightarrow{\pi'} \mathcal{C}_{X,A}/\tilde{\mathcal{J}}_X \longrightarrow \mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{C}_X,$$

其复合映射为恒等映射。由此可得 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_X$，证明完毕。□

下文中，记 $\hat{q}_X : \mathcal{C}_{X,\ A} \to \mathcal{C}_X$ 为命题 3.8 中给出的商映射，并继续用 q_X 表示从 $\mathcal{T}_{X,\ A}$到 $\mathcal{T}_X$的商映射。在陈述下一个推论之前，我们回顾一下：若算子系统 $\mathcal{S}$ 满足局部提升性质 [33, 第 8] 节，那么对于每个有限维算子子系统 $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$、C*-代数 $\mathcal{A}$和闭理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$，每个幺正完全正映射 $\phi_0 : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ 都存在一个完全正映射 $\phi : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{A}$ 作为其提升（也就是说，若 $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$表示商映射，则恒等式 $q \circ \phi = \phi_0$ 成立）。

推论 3.9。算子系统 $\mathcal{T}_X$ 具有局部提升性质。

证明。根据 [52, 推论 5.6], $\mathcal{T}_{X,A}$ 是 M_{XX}的算子系统商，而根据命题 3.8，$\mathcal{T}_X$ 是$\mathcal{T}_{X,A}$的算子系统商。因此，$\mathcal{T}_X$ 是 M_{XX}的算子系统商。该结论现在可由 [31,定理 6.8]推出。□

从算子系统范畴中张量积理论之初，将算子系统的交换张量积实现为最大张量积的算子子系统就一直十分重要 [32]。根据定理 3.4 和 [32, 定理 6.4], ，对于任意算子系统 $\mathcal{R}$，我们有 $\mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{R} \subseteq_{\mathrm{c.o.i.}} \mathcal{C}_X \otimes_{\max} C_u^*(\mathcal{R})$；下一个命题将确立一个更强的包含关系。

命题 3.10. 设 $\mathcal{R}$ 是一个算子系统。则 $\mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{R} \subseteq_{\mathrm{c.o.i.}} \mathcal{C}_X \otimes_{\max} \mathcal{R}$.

证明. 令 $\iota:\ \mathcal{T}_X \to \mathcal{C}_X$ 为包含映射。由交换张量积的函子性，以及当其中一个项是 C*-代数时交换张量积与最大张量积相同这一事实[32, 定理 6.7], $\iota\otimes\mathrm{id}:\ \mathcal{T}_X\otimes_{\mathrm{c}}\mathcal{R}\to\mathcal{C}_X\otimes_{\max}\mathcal{R}$ 是一个（保幺）完全正映射。假设

$$w\in M_n\left(\mathcal{T}_X\otimes\mathcal{R}\right)\cap M_n\left(\mathcal{C}_X\otimes_{\max}\mathcal{R}\right)^+,$$

设 H 是一个希尔伯特空间，且 $\phi:\ \mathcal{T}_X\to\mathcal{B}(H)$ 和 $\psi:\ \mathcal{R}\to\mathcal{B}(H)$ 是值域交换的保幺完全正映射。根据定理 3.4，ϕ 可延拓为一个 *-同态 $\pi:\mathcal{C}_X\to\mathcal{B}(H)$。由于 $\mathcal{C}_X$ 作为 C*-代数由$\mathcal{T}_X$ 生成，对每个 $u\in\mathcal{C}_X$都有 $\pi(u)\in\psi(\mathcal{R})'$；因此，

$$(\phi\cdot\psi)^{(n)}(w)=(\pi\cdot\psi)^{(n)}(w)\in M_n\left(\mathcal{B}(H)\right)^+,$$

因此 $w\in M_n(\mathcal{T}_X\otimes_{\mathrm{c}}\mathcal{R})^+$。由此可知，$\iota\otimes\mathrm{id}$ 是一个完全序嵌入。□

4. Quantum magic squares

在 [16], 中，我们定义并研究了量子幻方这一概念，并展示了一些例子，说明并非每个量子幻方都能膨胀为魔幻酉矩阵。本节旨在从算子系统的视角阐述这一结果，将量子幻方的膨胀性质与其相关典范映射的完全正性联系起来。量子幻方的泛算子系统及其性质还将在第5节中使用。

回忆一下 [16]，若分块算子矩阵 $E=(E_{x,\ a})_{x,\ a\in X}$，其中$E_{x,\ a}\in\mathcal{B}(H)$、$x$、$a\in X$，则称其为量子幻方，当$E_{x,\ a}\geq 0$ 并且

$$\sum_{b\in X}E_{x,b}=\sum_{y\in X}E_{y,a}=I\quad\text{for all } x,a\in X.$$

若量子幻方 E 满足：对于所有 x、$a\in X$，$E_{x,\ a}$ 都是投影（例如参见 [36, 定义 2.3]），则称其为魔幻酉矩阵（或量子置 $\mathcal{D}_{XX}\otimes\mathcal{B}$换）。注意到 $\mathcal{D}_{XX}\otimes\mathcal{B}(H)\subseteq M_{XX}\otimes\mathcal{B}(H)$，因此 E是量子幻方，当且仅当$\sum_{x,\ a\in X}\epsilon_{x,\ x}\otimes\epsilon_{a,\ a}\otimes E_{x,\ a}$是 $M_{XX}\otimes\mathcal{B}(H)$中的双随机算子矩阵。

文献 [16]中指出了量子幻方的两个子类（参见[16, 定义 5 和例 8]）。我们称作用于希尔伯特空间 H上的量子幻方 $(E_{x,\ a})_{x,\ a}$是可扩张的：如果存在一个希尔伯特空间 K、一个等距算子 $V:\ H\to K$，以及一个作用于 K上的量子置换 $(P_{x,\ a})_{x,\ a}$，使得

$$E_{x,a}=V^*P_{x,a}V,\quad x,a\in X. \tag{24}$$

如果交换族$\{P_{x,a}\}_{x,\ a}$ 构成量子置换，且满足条件 (24)，则称量子幻方 $(E_{x,\ a})_{x,\ a}$ 为局部可扩张。显然，在酉同一化意义下，条件 (24) 可替换为

条件 $E_{x,\ a} = QP_{x,\ a}Q$，其中我们假设 $H \subseteq K$，而 $Q : K \to H$ 是正交投影。

对于 x、$a \in X$，我们令 $e_{x,a} := e_{x,x,a,a}$ 以及

$$\mathcal{S}_X := \operatorname{span}\{e_{x,a} : x, a \in X\},$$

视为 $\mathcal{T}_X$ 的算子子系统。

定理 4.1. 设 H 是一个希尔伯特空间，且 $\phi : \mathcal{S}_X \to \mathcal{B}(H)$ 是一个线性映射。考虑以下条件

(i) ϕ 是一个幺正完全正映射；(ii) $(\phi(e_{x,a}))_{x,a}$ 是一个量子幻方，

and

(i') ϕ 是一个完全正映射；(ii') $(\phi(e_{x,a}))_{x,a} \in (\mathcal{D}_{XX} \otimes \mathcal{B}(H))^+$。

那么 (i)⇔(ii)，且 (i')⇔(ii')。此外，若 $(E_{x,a})_{x,a}$ 是作用在希尔伯特空间 H 上的量子幻方，则存在一个（唯一的）幺正完全正映射 $\phi : \mathcal{S}_X \to \mathcal{B}(H)$，使得对所有$x, a \in X$，都有 $\phi(e_{x,a}) = E_{x,a}$。

证明。(i)⇒(ii) 设 ϕ: $\mathcal{S}_X \to \mathcal{B}(H)$ 是一个幺正完全正映射，其中 H是某个希尔伯特空间。根据 Arveson 延拓定理，ϕ 有一个完全正延拓 $\phi : \mathcal{T}_X \to \mathcal{B}(H)$。令 $E_{x,x',a,a'} := \phi(e_{x,x',a,a'})$，定理 3.4 表明 $(E_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 是一个双随机矩阵。特别地，$(\phi(e_{x,a}))_{x,a}$，也就是说，$(\phi(e_{x,a}))_{x,a}$是一个量子幻方。

(ii)⇒(i) 令 $E_{x,a} := \phi(e_{x,a})$，且 $E_{x,x',a,a'} := \delta_{x,x'}\delta_{a,a'}E_{x,a}$, $x, x', a, a' \in X$.于是 $(E_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 是一个双随机算子矩阵，由定理3.4，存在一个（保幺）完全正映射 $\phi : \mathcal{T}_X \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi(e_{x,x',a,a'}) = E_{x,x',a,a'}$, $x, x', a, a' \in X$。由于 $\phi = \phi|_{\mathcal{S}_X}$，映射 ϕ是完全正的。

(i')⇒(ii') 直接由定理 3.4 和 Arveson 延拓定理得出。

(ii')⇒(i') 令 $E_{x,a} := \phi(e_{x,a})$, $x, a \in X$。对于 $x \in X$，令 $T = \sum_{a\in X} E_{x,a}$; 则 $T \in \mathcal{B}(H)^+$。先假设 T 可逆。于是矩阵$\left(T^{-1/2}E_{x,a}T^{-1/2}\right)_{x,a}$是一个量子幻方；由蕴含关系 (ii)⇒(i)，线性映射 $\psi : \mathcal{S}_X \to \mathcal{B}(H)$，定义为 $\psi(e_{x,a}) = T^{-1/2}E_{x,a}T^{-1/2}$，是完全正的。由于 $\phi(u) = T^{1/2}\psi(u)T^{1/2}$, $u \in \mathcal{S}_X$，映射 ϕ 是完全正的。如果 T 不可逆，我们固定一个态 $f : \mathcal{S}_X \to \mathbb{C}$，并对 $\epsilon > 0$ 考虑映射 $\phi_\epsilon : \mathcal{S}_X \to \mathcal{B}(H)$，定义为 $\phi_\epsilon(u) = \phi(u) + \epsilon f(u)I$。证明接下来与定理 3.4 中蕴含关系 (ii')⇒(i') 的证明类似。

定理中的最后一个结论可由蕴含关系 (ii)⇒(i) 的证明推出。□

Let

$$\mathcal{M}_X = \{(\mu_{x,a})_{x,a} \in \mathcal{D}_{XX} : \sum_{b\in X} \mu_{x,b} = \sum_{y\in X} \mu_{y,a},\ x,a \in X\},$$

视为 $\mathcal{D}_{XX}$ 的一个算子子系统。由于每个算子系统都由其正元素张成，$\mathcal{M}_X$ 是由 $\mathcal{D}_{XX}$ 中的标量双随机矩阵张成的算子系统。

推论 4.2。我们有 $\mathcal{S}_X^{\mathrm{d}} \cong \mathcal{M}_X$，在规范保幺完全序同构意义下成立。

证明。设 $\mathcal{M}_X^+$,1 为所有标量双随机矩阵构成的凸集，即矩阵 $T = (t_{x,a})_{x,a} \in \mathcal{M}_X^+$，其中 $\sum_{a\in X} t_{x,a} = 1$, $x \in X$。根据定理 4.1，若 $T \in \mathcal{M}_X^+$,1，则映射 $\gamma(T) : \mathcal{S}_X \to \mathbb{C}$，由 $\gamma(T)(e_{x,a}) = t_{x,a}$ 给出，是 $\mathcal{S}_X$ 上的一个（定义良好的）态。将任意元素 $T \in \mathcal{M}_X$ 写成线性组合 $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i$，其中 $T_i \in \mathcal{M}_X^+$,1, $i = 1, \ldots, k$，定义 $\gamma(T) := \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(T_i)$。映射 γ （线性且）定义良好：若 $T_i = (t_x^{(i)}{}_{,a}) \in \mathcal{M}_X^+$,1, $i = 1, \ldots, k$ 且 $\sum_{i=1}^k \lambda_i T_i = 0$，则对所有 $x, a \in X$，有 $\sum_{i=1}^k \lambda_i t_x^{(i)}{}_{,a} = 0$，这意味着 $\sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(T_i) = 0$。

设 $E = (E^{(i,j)})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{M}_X)^+$，并使用规范换位，写作 $E = (E_{x,y})_{x,y}$，其中 $E_{x,y} \in M_n$, $x, y \in X$ 满足

$$\sum_{y'\in X} E_{x,y'} = \sum_{x'\in X} E_{x',y}, \quad x, y \in X. \tag{25}$$

根据定理 4.1，我们可知存在一个完全正映射 $\phi : \mathcal{S}_X \to M_n$，使得 $\phi(e_{x,y}) = E_{x,y}$, $x, y \in X$。另一方面，$M_n(\mathcal{S}_X^{\mathrm{d}})$ 中的元素 $\gamma^{(n)}(E)$ 通过 (19) 导出一个线性映射 $F_{\gamma^{(n)}(E)} : \mathcal{S}_X \to M_n$。我们有

$$F_{\gamma^{(n)}(E)}(e_{x,a}) = \sum_{i,j=1}^n \gamma\left(E^{(i,j)}\right)(e_{x,a})\epsilon_{i,j} = E_{x,y} = \phi(e_{x,a}), \quad x, a \in X,$$

也就是说，$F_{\gamma^{(n)}(E)} = \phi$。特别地，$F_{\gamma^{(n)}(E)}$ 是完全正的，因此映射 γ 是完全正的。

由定理 4.1 可知，线性映射 γ 是满射，因而也是单射。我们证明 γ^{-1} 是完全正的。假设 $W \in M_n(\mathcal{S}_X^{\mathrm{d}})^+$；这意味着与 W 规范关联的线性映射 $F_W : \mathcal{S}_X \to M_n$ 是完全正的。令 $E_{x,y} := F_W(e_{x,y})$, $x, y \in X$；由定理 4.1，$E := (E_{x,y})_{x,y} \in (M_n \otimes M_X)^+$。这又意味着 $(\gamma^{-1})^{(n)}(W) \in (M_n \otimes M_X)^+$。由于矩阵 $E_{x,y}$ 满足关系 (25)，我们实际上有 $(\gamma^{-1})^{(n)}(W) \in (M_n \otimes \mathcal{M}_X)^+$，证明完毕。□

Let

$$\mathcal{J}_X^{\neq} = \operatorname{span}\left\{e_{x,x',a,a'} : x \neq x' \text{ or } a \neq a'\right\};$$

注意，$\mathcal{J}_X^{\neq}$ 是算子系统 $\mathcal{T}_X$的线性子空间。

命题 4.3。空间 $\mathcal{J}_X^{\neq}$ 是 $\mathcal{T}_X$ 中的一个核，并且在保单位完全序同构意义下，$\mathcal{S}_X \cong \mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq}$。

证明。由定理 3.4，存在一个幺正完全正映射 $\beta : \mathcal{T}_X \to \mathcal{S}_X$，使得 $\beta(e_{x,x',a,a'}) = \delta_{x,x'}\delta_{a,a'}e_{x,a}$, $x, x', a, a' \in X$。显然，$\mathcal{J}_X^{\neq} \subseteq \ker(\beta)$。另一方面，由命题 3.6 和推论 4.2，我们得到一串由四个典范线性映射组成的链

$$\mathcal{M}_X \cong \mathcal{S}_X^{\mathrm{d}} \longrightarrow (\mathcal{T}_X/\ker(\beta))^{\mathrm{d}} \longrightarrow \left(\mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq}\right)^{\mathrm{d}} \longrightarrow \mathcal{T}_X^{\mathrm{d}} \cong \mathcal{L}_X; \tag{26}$$

其中第一个、第二个和第四个映射是完全正的。此外，在这些映射的复合下，$\mathcal{M}_X$ 在 $\mathcal{L}_X$ 中的像与其自身重合；因此，$\ker(\beta) \subseteq \mathcal{J}_X^{\neq}$，从而 $\mathcal{J}_X^{\neq}$ 是 $\mathcal{T}_X$中的一个核。对（26）中的第二个映射取对偶，我们进一步得到一条链

$$\mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq} \to \mathcal{S}_X \to \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq}$$

由完全正映射组成，其复合是作用在$\mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq}$ 上的恒等映射。

另一方面，我们有一串典范的完全正映射

$$\mathcal{S}_X \to \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq} \to \mathcal{S}_X,$$

其复合是作用在 $\mathcal{S}_X$ 上的恒等映射。由此可得，$\mathcal{S}_X \cong \mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X^{\neq}$，相差一个典范的完全序同构。□

在下面的定理 4.5 中，我们将用算子系统的术语刻画可膨胀量子魔方和局部可膨胀量子魔方。令 $C(S_X^+)$ 为由投影 $p_{x,a}$, $x, a \in X$ 生成的通用 C*-代数，这些投影满足以下性质

$$\sum_{b\in X} p_{x,b} = \sum_{y\in X} p_{y,a} = 1, \quad x, a \in X$$

（因此，$C(S_X^+)$ 是定义在 X上的量子置换群的函数所构成的通用 C*-代数；例如参见 [9]）。记

$$\mathcal{P}_X = \operatorname{span}\{p_{x,a} : x, a \in X\},$$

视为 $C(S_X^+)$ 的一个算子子系统。

回顾一下，[48, 第 3] 节中提到，基于 $\mathcal{P}_X$ 的极小算子系统具有矩阵锥 $M_n(\mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X))^+$，其定义为

$$M_n(\mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X))^+ = \{(t_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathcal{P}_X) : \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_j}t_{i,j} \in \mathcal{P}_X^+, \text{ for all } \lambda_i \in \mathbb{C}, i \in [n]\},$$

并且，以 $\mathcal{P}_X$ 为基础的相应极大算子系统具有矩阵锥 $M_n(\mathrm{OMAX}(\mathcal{P}_X))^+$，这些矩阵锥作为带有阿基米德序单位的锥，由形如 $T \otimes u$ 的初等张量生成，其中 $T \in M_n^+$ 且 $u \in \mathcal{P}_X^+$。

命题 4.4. 存在典范幺正完全正映射

$$\mathrm{OMAX}(\mathcal{P}_X) \longrightarrow \mathcal{S}_X \longrightarrow \mathcal{P}_X. \tag{27}$$

证明。由定理 4.1，线性映射 $\mathfrak{q}: \mathcal{S}_X \to \mathcal{P}_X$，由 $\mathfrak{q}(e_{x,\ a}) = p_{x,\ a},\ x, a \in X$ 给出，是（保幺且）完全正的。

假设 $\phi \in (\mathcal{S}_X^{\mathrm{d}})^+$；由命题 4.3，$\phi$ 可以典范地识别为矩阵 $(\lambda_{x,\ a})_{x,\ a}$，属于 $\mathcal{M}_X^+$。由伯克霍夫定理以及推论 4.2 证明中的论证，我们还可以假设存在一个置换 $f: X \to X$，使得 $\lambda_{x,\ a} = \delta_{f(x),\ a},\ x, a \in X$。根据 $C(S_X^+)$ 的泛性质，置换 f 导出一个典范 *-表示 $\pi: C(S_X^+) \to \mathbb{C}$。由此可知，$\pi|_{\mathcal{P}_X}: \mathcal{P}_X \to \mathbb{C}$ 是（完全）正的。因此我们得到一个典范正映射 $r: \mathcal{S}_X^{\mathrm{d}} \to \mathcal{P}_X^{\mathrm{d}}$；根据最小算子系统结构的泛性质，它导出一个典范完全正映射 $\mathcal{S}_X^{\mathrm{d}} \to \mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X^{\mathrm{d}})$；取对偶后，得到一个典范完全正映射 $\mathrm{OMAX}(\mathcal{P}_X) \to \mathcal{S}_X$。

注意到 (27) 中映射的复合在 $\mathcal{P}_X$ 上是恒等映射；因此 $\mathfrak{q}$ 可逆。由于 $\mathfrak{q}^{-1} = r$，我们有 $\mathfrak{q}^{-1}$ 是正的，证明完成。□

定理 4.5. 设 H 是希尔伯特空间，$E = (E_{x,a})_{x,a}$ 是作用在 H 上的量子幻方。那么

(i) E 可扩张，当且仅当存在一个完全正映射$\phi: \mathcal{P}_X \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi(p_{x,a}) = E_{x,a},\ x, a \in X$；(ii) E 局部可扩张，当且仅当存在一个完全正映射 $\phi: \mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X) \to \mathcal{B}(H)$，使得 $\phi(p_{x,a}) = E_{x,a},\ x, a \in X$。

证明. (i) 设 $P = (P_{x,a})_{x,a}$ 是希尔伯特空间 K 上的魔幻酉矩阵，其中包含 H，并且若 Q 是从 K 到 H 的投影，则 $E_{x,a} = QP_{x,a}Q, x, a \in X$。根据 $C(S_X^+)$ 的泛性质，存在一个保幺 *-同态 $\pi: C(S_X^+) \to \mathcal{B}(K)$，使得 $\pi(p_{x,a}) = P_{x,a},\ x, a \in X$。令$\phi: \mathcal{P}_X \to \mathcal{B}(H)$ 为线性映射，定义为 $\phi(u) = Q\pi(u)Q,\ u \in \mathcal{P}_X$。作为完全正映射的压缩，$\phi$ 是完全正的；由构造可知，$\phi(p_{x,a}) = E_{x,a},\ x, a \in X$。

对于反向证明，令 $\tilde{\phi}: C(S_X^+) \to \mathcal{B}(H)$ 为 ϕ 的一个保幺完全正扩张，其存在性由 Arveson 扩张定理保证。根据 Stinespring定理，令 K 为一个希尔伯特空间，$\pi: C(S_X^+) \to \mathcal{B}(K)$ 为一个含幺 *-表示，且 $V: H \to K$ 为一个等距算子，使得 $\tilde{\phi}(u) = V^*\pi(u)V,\ u \in C(S_X^+)$。令 $P_{x,\ a} = \pi(p_{x,a})$，可得 $(P_{x,a})_{x,a}$ 是一个扩张 E 的魔幻酉矩阵。

(ii) 我们首先考虑 $n := \dim(H)$ 为有限维的情形。将$\mathcal{B}(H)$ 识别为 M_n，设 $\phi: \mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X) \to M_n$ 是一个幺正完全正映射。令

$$f_\phi: M_n(\mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X)) \to \mathbb{C}$$

为典范泛函，它与 ϕ 相关，如 [45, 第 6] 章所述；因此，

$$f_\phi((w_{i,j})_{i,j}) = \frac{1}{n}\sum \langle \phi(w_{i,j})e_j, e_i\rangle, \quad (w_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathcal{P}_X).$$

根据 [45, 定理 6.1]，f_ϕ 是正的。根据 [48, 定理 4.8]，f_ϕ 可被典范地识别为 $M_n(\mathrm{OMAX}(\mathcal{P}_X^{\mathrm{d}}))^+$ 中的一个元素（见 [48, 第3]节）。根据命题 4.4、推论 4.2 以及极大算子系统结构的定义，

$$f_\phi \equiv \sum_{l=1}^{r_\phi} \alpha_l \otimes \beta_l, \tag{28}$$

其中 $\alpha_l \in \mathcal{M}_X^+$ 且 $\beta_l \in M_n^+$，$l \in [r_\phi]$。

假设表示 (28) 具有形式 $f_\phi \equiv \alpha \otimes \beta$，其中$\alpha \in \mathcal{M}_X$ 且 $\beta \in M_n$。此时，ϕ 由下式给出

$$\phi(p_{x,y}) = \alpha_{x,y}\beta, \quad x, y \in X.$$

特别地，若 P_θ 是与 X上的置换 θ 相对应的置换酉算子，且 $f_\phi \equiv P_\theta \otimes \beta$，其中 $\beta \in M_n$，则

$$\phi(p_{x,y}) = \begin{cases} \beta & \text{if } \theta(x) = y \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad x, y \in X.$$

回到表示 (28)，利用伯克霍夫定理可写为$\alpha_l = \sum_\theta \lambda_\theta^{(l)} P_\theta$，其中求和遍历 X 的置换群，系数 $\lambda_\theta^{(l)}$ 均为非负数。因此，

$$f_\phi \equiv \sum_\theta P_\theta \otimes \gamma_\theta, \tag{29}$$

其中 $\gamma_\theta \in M_n^+$，求和遍历 X 的置换群。根据上一段，

$$E_{x,y} = \sum \{\gamma_\theta : \theta(x) = y\}, \quad x, a \in X.$$

现在，[16, 定理 12 和注 7] 表明 $(\phi(p_{x,a}))_{x,a}$ 是局部可扩张的。注意到其中记作 $\mathcal{CP}^{(|X|)}$ 的集合的矩阵凸包与 M_n 上局部可扩张的魔幻量子方阵一致。反向结论可通过逆转上述论证得出。

现在我们放宽对 H有限维性的假设。为简单起见，我们只考虑 H 可分的情况。固定一个由有限秩投影组成的序列 $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $Q_n \to_{n\to\infty} I$ 在强算子拓扑下成立。假设 E 局部可扩张，那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，$(I_X \otimes Q_n)E(I_X \otimes Q_n)$也局部可扩张，因此根据假设，映射 $\phi_n : \mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X) \to \mathcal{B}(Q_nH)$，由 $\phi_n(p_{x,\ a}) = Q_nE_{x,\ a}Q_n$, $x, a \in X$,$i \in \mathbb{I}$给出，是完全正的。由于 $\phi(u) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(u)$在弱算子拓扑下成立，$u \in \mathcal{P}_X$，因此 ϕ 是完全正的。

反过来，假设 $\phi:\mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X)\to\mathcal{B}(H)$是完全正的，令 $\phi_n:\mathrm{OMIN}(\mathcal{P}_X)\to\mathcal{B}(Q_nH)$ 为映射（完全正），由 $\phi_n(u)=Q_n\phi(u)Q_n,\ u\in\mathcal{P}_X$ 给出。写作 $f_{\phi_n}=\sum_\theta P_\theta\otimes\gamma_\theta^{(n)}$，其中 $\gamma_\theta^{(n)}\in\mathcal{B}(Q_nH)^+$，求和遍历 X的置换群。令$E_x^{(n)},\ _y=\sum\{\gamma_\theta^{(n)}:\ \theta(x)=y\}$；则 $E_x^{(n)},\ _y=Q_nE_{x,\ y}Q_n$。由于对每个 $x,\ y\in X$都有$\|E_{x,\ y}\|\le 1$，因此对每个 $n\in\mathbb{N}$都有 $\|\gamma_\theta^{(n)}\|\le 1$。现在，我们可以依次选取序列 $\left(\gamma_\theta^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$的弱*聚点，并假设

$$f_{\phi_n}\to f:=\sum_\theta P_\theta\otimes\gamma_\theta,$$

其中，对于 X 的每个置换 θ，在 $M_X\otimes\mathcal{B}(H)$ 的弱*拓扑中，$\gamma_\theta\in\mathcal{B}(H)^+$。此外，我们还有 $E_{x,\ y}=\sum\{\gamma_\theta:\ \theta(x)=y\}$。将其中记作 I_s 的恒等算子替换为 I_H 后，[16, 定理 12] 中蕴含关系 (a)⇒(b) 的证明表明，E 是局部可扩张的。□

5. Representations of bicorrelations

本节中，我们定义双相关的概念，并用算子系统张量积表示不同类型的双相关。我们将使用文献 [32] 中介绍的主要算子系统张量积：极小（min）、交换（c）和极大（max）。如果 $\tau\in\{\min,\mathrm{c},\max\}$，且 $\phi_i:\mathcal{S}_i\to\mathcal{T}_i$ 是算子系统之间的完全正映射，$i=1,2$，我们将 $\phi_1\otimes_\tau\phi_2$ 记作相应的张量积映射，其定义域为 $\mathcal{S}_1\otimes_\tau\mathcal{S}_2$，陪域为 $\mathcal{T}_1\otimes_\tau\mathcal{T}_2$（注意，根据 [32, 定理 4.6、5.5 和 6.3]，该映射是良定义的）。

在本节中，我们始终固定有限集 X 和 Y，并令 $A=X$ 和 $B=Y$。为便于清晰表达，我们将根据需要继续使用符号 A 和 B。

5.1. 量子双相关。如果 $\Gamma:\ M_{XY}\to M_{XY}$ 是一个保幺量子信道，那么在典范同一 $M_{XY}^{\mathrm{d}}\equiv M_{XY}$ 下，其对偶 $\Gamma^*:\ M_{XY}\to M_{XY}$ 由公式定义为

$$\langle\Gamma^*(\omega),\rho\rangle=\langle\omega,\Gamma(\rho)\rangle=\mathrm{Tr}\left(\omega\Gamma(\rho)^{\mathrm{t}}\right),\quad \omega,\rho\in M_{XY},$$

同样是一个（保幺）量子信道。

定义 5.1。如果一个 QNS 相关 $\Gamma:\ M_{XY}\to M_{XY}$ 满足 $\Gamma(I_{XY})=I_{XY}$，且 Γ^* 是一个 QNS 相关，则称其为 QNS 双相关。

令 $\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$ 为所有量子非信号双相关的集合。接下来，我们定义量子非信号双相关的不同类型，其定义借鉴了量子非信号相关类型的类似定义。若存在希尔伯特空间 H、单位向量 $\xi\in H$、双随机算子矩阵 $E=(E_{x,\ x',\ a,\ a'})_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 以及 $F=(F_{y,\ y',\ b,\ b'})_{y,\ y',\ b,\ b'}$，它们作用于 H 且元素两两交换，使得 Γ 的 Choi 矩阵与.....一致，则称 QNS 双相关 Γ: $M_{XY}\to M_{XY}$ 为量子交换型

$$\left(\left\langle E_{x,x',a,a'}F_{y,y',b,b'}\xi,\xi\right\rangle\right)_{x,x',a,a'}^{y,y',b,b'}\tag{30}$$

（等价地，关系 (7) 成立）。量子 QNS 双相关的定义类似，但要求 H 具有 $H_A\otimes H_B$ 的形式，其中希尔伯特空间 H_A 和 H_B 均为有限维，且 $E_{x、\ x'、\ a、\ a'}=E_{x、\ x'、\ a、\ a'}\otimes I_B$ 以及 $\tilde{}F_{y、\ y'、\ b、\ b'}=I_A\otimes F_{y、\ y'、\ b、\ b'}$，对应某些双随机算子矩阵 $(E_{x、\ x'、\ a、\ a'})\tilde{}$ 和 $(F_{y、\ y'、\ b、\ b'})$，它们分别作用于 H_A 和 H_B。近似量子 QNS 双相关是量子 QNS 双相关的极限，而局部 QNS 双相关则是具有如下形式的凸组合：$\Gamma=\sum_{i=1}^k\lambda_i\Phi_i\otimes\Psi_i$，其中 $\Phi_i\colon M_X\to M_A$ 和 $\Psi_i\colon M_Y\to M_B$ 是单位量子信道，$i=1,\ .....,\ k$。

对于 t $\in$ {loc, q, qa, qc}，我们令 $\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}$为所有类型为 t 的 QNS 双相关所构成的集合。

注 5.2. 若 t $\in$ {loc, q, qa, qc, ns} 且 $\Gamma\in\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}$，则 $\Gamma^*\in\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}$。当 t = ns 时，该断言属于定义的一部分；当 t = loc 时，该断言显然成立。对于 t = qc 的情形，设 $E=(E_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 和 $F=(F_{y,y',b,b'})_{y,y',b,b'}$ 是条目两两交换的双随机算子矩阵，且$\tilde{}\Gamma$的 Choi 矩阵与 (30) 相同。令 $E_{a,a',x,x'}:=E_{x,x',a,a'}$ 以及 $F_{b,b',y,y'}:=F_{y,y',b,b'}$，$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，并设 $E=(E_{a,a',x,x'})_{a,a',x,x'}$ 和 $F=(F_{b,b',y,y'})_{b,b',y,y'}$。我们有 $\tilde{}E=\sum_{x,x',a,a'}\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{x,x'}\otimes E_{x,x',a,a'}$，因此 E 是$\tilde{}E$的酉共轭，这意味着 $E\geq 0$；类似地，$F\geq 0$。由 Γ^* 的 Choi 矩阵等于 $\left(\left\langle\tilde{E}_{a,a',x,x'}\tilde{F}_{b,b',y,y'}\xi,\xi\right\rangle\right)_{a\ a'\ x\ x'\ ,\ b'\ y\ y'\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,}^{b}$ 这一事实，即可得到所述结论。t = q 的情形类似，而 t = qa 的情形则由取对偶信道的连续性得出。

注 5.3。假设 $\Gamma\in\mathcal{Q}_{\mathrm{loc}}$ 是保幺的。将其写成

$$\Gamma=\sum_{i=1}^k\lambda_i\Phi_i\otimes\Psi_i \tag{31}$$

凸组合，其中 $\Phi_i:\ M_X\to M_X$ 和 $\Psi_i:\ M_Y\to M_Y$ 是量子信道，$i=1,\ .....,\ k$。我们有 $\sum_{i=1}^k\lambda_i\Phi_i(I_X)\otimes\Psi_i(I_Y)=I_{XY}$。由此可得 $0\leq\Phi_i(I_X)\otimes\Psi_i(I_Y)\leq I_{XY}$；由于 I_{XY} 是 M_{XY}^+ 的单位球中的一个极点，因此对于每个 $i=1,\ .....,\ k$，都有 $\Phi_i(I_X)\otimes\Psi_i(I_Y)=I_{XY}$。于是，存在 $c_i>0$，使得对于所有 $i=1,\ .....,\ k$，$\Phi_i(I_X)=c_iI_X$ 且 $\Psi_i(I_Y)=\frac{1}{c_i}I_Y$。将 Φ_i（分别将 Ψ_i）替换为 $\frac{1}{c_i}\Phi_i$（分别替换为 $c_i\Psi_i$），我们得出，表示式 (31) 可以选择为满足以下性质：Φ_i 和 Ψ_i 是保幺量子信道，$i=1,\ .....,\ k$，也就是说，Γ 自动是一个局部双相关。

$\tilde{}$我们将 $f_{y,y',b,b'}$（分别将 $f_{y,y',b,b'}$）、y、y'、b、$b'\in Y$记作算子系统 $\mathcal{T}_Y$（分别为 $\mathcal{T}_{Y,B}$）的典范生成元。如果 s是定义在$\mathcal{T}_X\otimes\mathcal{T}_Y$上或定义在 $\mathcal{C}_X\otimes\mathcal{C}_Y$上的线性泛函，我们将 $\Gamma_s\colon M_{XY}\to M_{XY}$记作该线性映射，

定义为

$$\Gamma_s\left(\epsilon_{x,x'}\otimes\epsilon_{y,y'}\right)=\sum_{a,a'\in X}\sum_{b,b'\in Y}s\left(e_{x,x',a,a'}\otimes f_{y,y',b,b'}\right)\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{b,b'}. \tag{32}$$

注意，Γ_s^* 由以下恒等式给出

$$\Gamma_s^*\left(\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{b,b'}\right)=\sum_{x,x'\in X}\sum_{y,y'\in Y}s\left(e_{x,x',a,a'}\otimes f_{y,y',b,b'}\right)\epsilon_{x,x'}\otimes\epsilon_{y,y'}. \tag{33}$$

显然，对应关系 $s\to\Gamma_s$ 是从向量空间对偶 $(\mathcal{T}_{X,A}\otimes\mathcal{T}_{Y,B})^{\mathrm{d}}$ 到空间 $\mathcal{L}(M_{XY})$ 的线性映射，其中包含所有作用于 M_{XY} 上的线性变换。

定理 5.4. 设 X 和 Y 为有限集，且 $\Gamma:M_{XY}\to M_{XY}$ 是一个线性映射。以下条件等价：

(i) Γ 是一个 QNS 双相关；(ii) 存在一个态 s：$\mathcal{T}_X\otimes_{\max}\mathcal{T}_Y\to\mathbb{C}$，使得 $\Gamma=\Gamma_s$。

证明. (ii)⇒(i) 设 s 是 $\mathcal{T}_X\otimes_{\max}\mathcal{T}_Y$ 的一个态，满足 $\Gamma=\Gamma_s$，并令 $\tilde{s}=s\circ(q_X\otimes_{\max}q_Y)$，其中 $q_X:\mathcal{T}_{X,A}\to\mathcal{T}_X$（分别为 $q_Y:\mathcal{T}_{Y,B}\to\mathcal{T}_Y$）是商映射（参见公式 (21) 所在段落）；我们有，$\tilde{s}$ 是 $\mathcal{T}_{X,A}\otimes_{\max}\mathcal{T}_{Y,B}$的一个态。由于 $\Gamma=\Gamma_{\tilde{s}}$，根据 [52, 定理 6.2], $\Gamma\in\mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}$。此外，

$$\begin{aligned}\Gamma(I_{XY}) &= \sum_{x,a,a'\in X}\sum_{y,b,b'\in Y}s(e_{x,x,a,a'}\otimes f_{y,y,b,b'})\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{b,b'}\\ &= \sum_{a,a'\in X}\sum_{b,b'\in Y}\delta_{a,a'}\delta_{b,b'}\epsilon_{a,a'}\otimes\epsilon_{b,b'}=I_{XY}.\end{aligned}$$

我们验证 Γ^* 是无信号的：对于任意 $\omega_X=(\lambda_{a,a'})_{a,a'}\in M_X$ 以及任意 $\omega_Y=(\mu_{b,b'})_{b,b'}\in M_Y$，满足 $\mathrm{Tr}(\omega_Y)=0$，由 (33) 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_Y\Gamma^*(\omega_X\otimes\omega_Y)\\ =\;&\mathrm{Tr}_Y\sum_{x,x',a,a'\in X}\sum_{y,y',b,b'\in Y}\lambda_{a,a'}\mu_{b,b'}s(e_{x,x',a,a'}\otimes f_{y,y',b,b'})\epsilon_{x,x'}\otimes\epsilon_{y,y'}\\ =\;&\sum_{x,x',a,a'\in X}\sum_{b,b'\in Y}\lambda_{a,a'}\mu_{b,b'}\sum_{y\in Y}s(e_{x,x',a,a'}\otimes f_{y,y,b,b'})\epsilon_{x,x'}\\ =\;&\sum_{x,x',a,a'\in X}\sum_{b,b'\in Y}\lambda_{a,a'}\mu_{b,b'}\delta_{b,b'}s(e_{x,x',a,a'}\otimes 1)\epsilon_{x,x'}\\ =\;&\left(\sum_{b\in Y}\mu_{b,b}\right)\sum_{x,x',a,a'\in X}\lambda_{a,a'}s(e_{x,x',a,a'}\otimes 1)\epsilon_{x,x'}=0.\end{aligned}$$

类似地，如果 $\omega_X\in M_X$ 的迹为零，而 $\omega_Y\in M_Y$ 任意，则 $\mathrm{Tr}_X\Gamma^*(\omega_X\otimes\omega_Y)=0$，因此 Γ^* 是无信号的。

(i)⇒(ii) 令 $C = \left(C^{a,a',b,b'}_{x,x',y,y'}\right)^{a}_{x\ x'\ ,\ a'\ b\ b'\ ,,,,y,y'}$ 为 Γ的 Choi 矩阵；因此，C 的元素由下式给出

$$C^{a,a',b,b'}_{x,x',y,y'} = \left\langle \Gamma(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}), \epsilon_{a,a'} \otimes \epsilon_{b,b'} \right\rangle.$$

根据 [52, 定理 6.2], $C \in (\mathcal{L}_{X,A} \otimes_{\min} \mathcal{L}_{Y,B})_{+}$。

令 $\tilde{C} = \left(\tilde{C}^{x,x',y,y'}_{a,a',b,b'}\right)^{x}_{,x\ \ '\ y,y'}$ 为 Γ^{*}的 Choi 矩阵。由于 Γ 和 $\Gamma^{*}{}_{a,a',b,b'}$均为无信号的，存在标量 $\tilde{c}^{b,}_{\ y\ y'\ ,}{}^{b'}$, $\tilde{d}^{a,}_{\ x\ x'\ ,}{}^{a'}$, $c^{b,}_{\ y\ y'\ ,}{}^{b'}$和 $d^{a,}_{\ x\ x'\ ,}{}^{a'}$，使得

$$\sum_{x\in X} \tilde{C}^{x,x,y,y'}_{a,a',b,b'} = \delta_{a,a'} \tilde{c}^{b,b'}_{y,y'}, \quad y, y', b, b' \in Y,$$

$$\sum_{y\in Y} \tilde{C}^{x,x',y,y}_{a,a',b,b'} = \delta_{b,b'} \tilde{d}^{a,a'}_{x,x'}, \quad x, x', a, a' \in X,$$

$$\sum_{a\in X} C^{x,x',y,y'}_{a,a,b,b'} = \delta_{x,x'} c^{b,b'}_{y,y'}, \quad y, y', b, b' \in Y$$

and

$$\sum_{b\in Y} C^{x,x',y,y'}_{a,a',b,b} = \delta_{y,y'} d^{a,a'}_{x,x'}, \quad x, x', a, a' \in X.$$

注意，等式 $\tilde{C}^{x'}{}_{,\ \ x\ y\ y'\ ,,,,b'}{}^{,\ a'\ b\ b'\ ,,,,y,y'} = C^{a}{}_{,\ a'\ b\ b'\ ,,,,y,y'}{}^{x\ x'}$ 成立。这些关系连同注 3.5 现在推出，对于所有 $\omega \in M_{YY}$和所有 $\omega' \in M_{XX}$，$L_{\omega}(C) \in \mathcal{L}_X$ 以及 $L_{\omega'}(C) \in \mathcal{L}_Y$均成立（回忆一下，$L_{\sigma}$ 表示沿泛函 σ的切片映射）。因此，$C \in (\mathcal{L}_X \otimes_{\min} \mathcal{L}_Y)_{+}$。结论 (ii) 现在由典范同一 $(\mathcal{T}_X \otimes_{\max} \mathcal{T}_Y)^{\mathrm{d}} \cong \mathcal{L}_X \otimes_{\min} \mathcal{L}_Y$. □得出

定理 5.5。设 X 和 Y是有限集，且 $\Gamma : M_{XY} \to M_{XY}$是线性映射。以下各项等价：

(i) $\Gamma \in \mathcal{Q}^{\mathrm{bi}}_{\mathrm{qc}}$；(ii) 存在一个态 $s : \mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_Y \to \mathbb{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma_s$；(iii) 存在一个态 $s : \mathcal{C}_X \otimes_{\max} \mathcal{C}_Y \to \mathbb{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma_s$。

证明。由定理 3.4 和 [32, 定理 6.4]，$\mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{C}_X \otimes_{\max} \mathcal{C}_Y$完全序同构，因此根据 Krein 延拓定理，(ii) 与 (iii) 等价。

(i)⇒(iii) 可由 $\mathcal{C}_X$ 的泛性质以及定理 3.4 中的论证推出；相关论证与 [52, 定理 6.3] 中的论证类似。

(iii)⇒(i) s 的 GNS 表示和最大 C*-代数张量积的泛性质给出 *-表示 $\pi_X : \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(H)$ 和 $\pi_Y : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{B}(H)$，它们的值域交换；并存在一个单位向量$\xi \in H$，使得 $s(u \otimes v) = \langle \pi_X(u)\pi_Y(v)\xi, \xi \rangle$, $u \in \mathcal{C}_X$, $v \in \mathcal{C}_Y$。令 $E_{x,x',a,a'} = \pi_X(e_{x,x',a,a'})$ 和 $F_{x,x',a,a'} = \pi_Y(f_{y,y',b,b'})$，再应用定理 3.4，即得所述结论。□

定理 5.6. 设 X 和 Y是有限集，且 $\Gamma : M_{XY} \to M_{XY}$是一个线性映射。以下条件等价：

(i) $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bi}}$；(ii) 存在一个态 $s\colon \mathcal{T}_X \otimes_{\min} \mathcal{T}_Y \to \mathbb{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma_s$；(iii) 存在一个态 $s\colon \mathcal{C}_X \otimes_{\min} \mathcal{C}_Y \to \mathbb{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma_s$。

证明。(ii)⇔(iii)由最小张量积的内射性得出。

(i)⇒(iii) 给定 $\varepsilon > 0$，设 E 和 F 分别是作用在有限维希尔伯特空间 H_X 和 H_Y上的双随机算子矩阵，并且$\xi \in H_X \otimes H_Y$是一个单位向量，使得

$$\left|\left\langle \Gamma(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}), \epsilon_{a,a'} \otimes \epsilon_{b,b'} \right\rangle - \left\langle \left(E_{x,x',a,a'} \otimes F_{y,y',b,b'}\right) \xi, \xi \right\rangle\right| < \varepsilon,$$

对所有 $x, x', a, a' \in X$, $y, y', b, b' \in Y$均成立。由引理 3.3，存在 H_X（分别为 H_Y）上的 $\mathcal{C}_X$（分别为 $\mathcal{C}_Y$）的 *-表示 π_X（分别为 π_Y），使得 $E_{x,x',a,a'} = \pi_X(e_{x,x',a,a'})$（分别为 $F_{y,y',b,b'} = \pi_Y(f_{y,y',b,b'})$），$x, x', a, a' \in X$（分别为 $y, y', b, b' \in Y$）。令 s_ε 为 $\mathcal{C}_X \otimes_{\min} \mathcal{C}_Y$ 上由下式给出的态

$$s_\varepsilon\left(u \otimes v\right) = \left\langle \left(\pi_X(u) \otimes \pi_Y(v)\right) \xi, \xi \right\rangle,$$

且 s 是序列 $\{s_{1/n}\}_n$ 在弱*拓扑中的一个聚点。于是

$$\begin{aligned} s\left(e_{x,x',a,a'} \otimes f_{y,y',b,b'}\right) &= \lim_{n\to\infty} s_{1/n}\left(e_{x,x',a,a'} \otimes f_{y,y',b,b'}\right) \\ &= \left\langle \Gamma(e_x e_{x'}^* \otimes e_y e_{y'}^*), e_a e_{a'} \otimes e_b e_{b'}^* \right\rangle, \end{aligned}$$

从而得到 $\Gamma = \Gamma_s$。

(iii)⇒(i) 设 s 是满足 (iv) 和 $\varepsilon > 0$的一个态。由 [30, 推论 4.3, 10], 存在忠实 *-表示 $\pi_X\colon \mathcal{C}_X \to \mathcal{B}(H_X)$ 和$\pi_Y\colon \mathcal{C}_Y \to \mathcal{B}(H_Y)$、单位向量 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H_X \otimes H_Y$以及正标量$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$，使得

$$\left| s(e_{x,x',a,a'} \otimes f_{y,y',b,b'}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\langle \left(\pi_X(e_{x,x',a,a'}) \otimes \pi_Y(f_{y,y',b,b'})\right) \xi_i, \xi_i \right\rangle \right| < \varepsilon,$$

对所有 $x, x', a, a' \in X$, $y, y', b, b' \in Y$均成立。设 $\xi = \oplus_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}\xi_i \in \mathbb{C}^n \otimes (H_X \otimes H_Y)$；则 $\|\xi\| = 1$。令 $E_{x,x',a,a'} = I_n \otimes \pi_X(e_{x,x',a,a'})$ 和 $F_{y,y',b,b'} = \pi_Y(f_{y,y',b,b'})$。则 $(E_{x,x'a,a'})_{x,x',a,a'}$（分别地，$(F_{y,y',b,b'})_{y,y',b,b'}$）是作用在 $\mathbb{C}^n \otimes H_X$（分别地，H_Y）上的双随机算子矩阵，并且

$$\left|s\left(e_{x,x',a,a'} \otimes f_{y,y',b,b'}\right) - \left\langle E_{x,x'a,a'} \otimes F_{y,y',b,b'}\xi, \xi \right\rangle\right| < \varepsilon.$$

令 $(P_\alpha)_\alpha$（分别地，$(Q_\beta)_\beta$）为作用在 H_X（分别地，H_B）上的有限秩投影网，并在强算子拓扑下收敛到恒等算子。令 $H_\alpha = P_\alpha H_A$（分别地，$K_\beta = Q_\beta H_B$）、$E_\alpha = (I \otimes P_\alpha)E(I \otimes P_\alpha)$（分别地，$F_\beta = (I \otimes Q_\beta)F(I \otimes Q_\beta)$），以及 $\xi_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\|(P_\alpha \otimes Q_\beta)\xi\|}(P_\alpha \otimes Q_\beta)\xi$（注意，$\xi_{\alpha,\beta}$ 最终是良定义的）。那么，E_α 和 F_β 分别是作用在$P_\alpha H$ 和 $Q_\beta K$上的双随机算子矩阵，而与三元组 $(E_\alpha, F_\beta, \xi_{\alpha,\beta})$ 相关联的 QNS 相关是量子双相关。□

注记 5.7。由注 5.2,

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}} \subseteq \mathcal{Q}_{\mathrm{qc}} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}. \tag{34}$$

我们不知道式（34）中的等号是否成立。这个问题归结为典范算子系统结构是否相等的问题。事实上，不难验证，算子系统 $\mathcal{T}_{X,A} \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_{Y,B}$ 的子空间 $\mathcal{J}_{XY} := \mathcal{T}_{X,A} \otimes \mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_X \otimes \mathcal{T}_{Y,B}$ 是一个核，并且 $(\mathcal{T}_{X,A} \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_{Y,B})/\mathcal{J}_{XY}$ 上的态恰好对应于 $\mathcal{Q}_{\mathrm{qc}} \cap \mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$ 的元素。然而，虽然存在一个典范的双射幺正完全正映射 $(\mathcal{T}_{X,A} \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_{Y,B})/\mathcal{J}_{XY} \to \mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_Y$，但尚不清楚其逆映射是否完全正。若确实如此，那么定理 5.5 将推出式（34）中的反向包含关系。

5.2. 经典双相关。本小节中，我们考虑一类相关，它们构成了第5.1小节所定义的量子双相关的自然经典对应物。我们固定有限集 X 和 Y，并令 $A = X$ 和 $B = Y$。

定义 5.8. 若一个无信号相关 $p = \{(p(a,b|x,y))_{a,\ b} : (x,y) \in X \times Y\}$定义在四元组 (X, Y, X, Y) 上，且族

$$p^* := \{(p(a,b|x,y))_{x,y} : (a,b) \in X \times Y\}$$

是一个无信号相关。

我们令 $\Delta : M_{XY} \to \mathcal{D}_{XY}$为典范对角期望。给定一个定义在 (X, Y, X, Y) 上的无信号相关 p，我们令 $\mathcal{E}_p : \mathcal{D}_{XY} \to \mathcal{D}_{XY}$为（经典）信息通道，其定义为

$$\mathcal{E}_p(\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}) = \sum_{a \in X} \sum_{b \in Y} p(a,b|x,y) \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b}.$$

此外，对于给定的经典信息信道 $\mathcal{E} : \mathcal{D}_{XY} \to \mathcal{D}_{XY}$，令$\Gamma_{\mathcal{E}} : M_{XY} \to M_{XY}$为如下定义的量子信道：

$$\Gamma_{\mathcal{E}}(\omega) = (\mathcal{E} \circ \Delta)(\omega), \quad \omega \in M_{XY},$$

为简洁起见，记 $\Gamma_p = \Gamma_{\mathcal{E}_p}$。反过来，给定一个量子信道 $\Gamma : M_{XY} \to M_{XY}$，令 $\mathcal{E}_\Gamma : \mathcal{D}_{XY} \to \mathcal{D}_{XY}$为如下定义的经典信息信道：令 $\mathcal{E}_\Gamma(\omega) = (\Delta \circ \Gamma)(\omega), \quad \omega \in \mathcal{D}_{XY}$。注意到关系 $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$。

命题 5.9. 设 p 是 (X, Y, X, Y) 上的一个 NS 双相关。则$\Gamma_{p^*} = \Gamma_p^*$。因此，若 $p \in \mathcal{C}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$，则 $\Gamma_p \in \mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}$。

证明。对于 x、$a \in X$ 和 y、$b \in Y$，我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{E}_p^*(\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}), \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} \right\rangle &= \left\langle \epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}, \mathcal{E}_p(\epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b}) \right\rangle \\ &= p(x,y|a,b) = p^*(a,b|x,y) \\ &= \left\langle \mathcal{E}_{p^*}(\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}), \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} \right\rangle, \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{E}_{p^*}=\mathcal{E}_p^*$。因此，对于 ω_1、$\omega_2\in M_{XY}$，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle\Gamma_p^*(\omega_1),\omega_2\right\rangle &= \langle\omega_1,(\mathcal{E}_p\circ\Delta)(\omega_2)\rangle=\langle\omega_1,(\Delta\circ\mathcal{E}_p\circ\Delta)(\omega_2)\rangle\\ &= \langle\Delta(\omega_1),(\mathcal{E}_p\circ\Delta)(\omega_2)\rangle=\left\langle(\mathcal{E}_p^*\circ\Delta)(\omega_1),\Delta(\omega_2)\right\rangle\\ &= \langle(\mathcal{E}_{p^*}\circ\Delta)(\omega_1),\Delta(\omega_2)\rangle=\langle\Gamma_{p^*}(\omega_1),\Delta(\omega_2)\rangle\\ &= \left\langle\Gamma_{p^*}(\omega_1),\omega_2\right\rangle,\end{aligned}$$

完成证明。 □

对于 $\mathrm{t}\in\{\mathrm{loc},\mathrm{q},\mathrm{qa},\mathrm{qc}\}$，令

$$\mathcal{C}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}=\left\{p\in\mathcal{C}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bi}}:\Gamma_p\in\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}\right\}.$$

容易验证，NS 双相关 p over (X,Y,X,Y) 属于 $\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$，当且仅当存在一个希尔伯特空间 H、一个单位向量 $\xi\in H$ 以及量子幻方 $(E_{x,\,a})_{x,\,a\in X}$ 和 $(F_{y,\,b})_{y,\,b\in Y}$，其条目彼此交换，并且满足

$$p(a,b|x,y)=\langle E_{x,a}F_{y,b}\xi,\xi\rangle,\quad x,a\in X,y,b\in Y. \tag{35}$$

类似地，$p\in\mathcal{C}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{bi}}$ 当且仅当表示 (35) 对 $H=H_A\otimes H_B$ 成立，其中 H_A 和 H_B 是有限维希尔伯特空间，$E_{x,\,a}=E'_{x,\,a}\otimes I_{H_B}$ 和 $F_{y,\,b}=I_{H_A}\otimes F'_{y,\,b}$，$x,a\in X$，$y,b\in Y$。最后，$p\in\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{bi}}$ 当且仅当 p 是如下形式的相关的凸组合：$p^{(1)}(a|x)p^{(2)}(b|y)$，其中 $(p^{(1)}(a|x))_{x,\,a}$ 和 $(p^{(2)}(b|y))_{y,\,b}$ 是（标量）双随机矩阵。

对于线性泛函 $s\colon\mathcal{S}_X\otimes\mathcal{S}_Y\to\mathbb{C}$，令 $p_s\colon X\times Y\times X\times Y\to\mathbb{C}$ 为如下函数：

$$p_s(a,b|x,y)=s(e_{x,a}\otimes e_{y,b}),\quad x,a\in X,y,b\in Y.$$

定理 5.10. 设 X 和 Y 为有限集，且 p 为定义在 (X,Y,X,Y) 上的无信号相关。考虑以下命题：

(i) *p is an NS bicorrelation;*
(ii) *there exists a state $s:\mathcal{S}_X\otimes_{\max}\mathcal{S}_Y\to\mathbb{C}$ such that $p=p_s$;*
(i') *$p\in\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$;*
(ii') *there exists a state $s:\mathcal{S}_X\otimes_{\mathrm{c}}\mathcal{S}_Y\to\mathbb{C}$ such that $p=p_s$;*
(i") *$p\in\mathcal{C}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bi}}$;*
(ii") *there exists a state $s:\mathcal{S}_X\otimes_{\min}\mathcal{S}_Y\to\mathbb{C}$ such that $p=p_s$.*

则 (i)⇔(ii)、(i')⇔(ii') 和 (i")⇔(ii")。

证明. (i)⇔(ii) 根据命题 4.3 和 [24, 命题 1.16], ，最大张量积 $\mathcal{S}_X\otimes_{\max}\mathcal{S}_Y$ 的态以典范方式与 $\mathcal{M}_X\otimes_{\min}\mathcal{M}_Y$ 的元素相对应。现在，只需对定理 5.4 的证明稍作修改，即可完成该结论的证明。

(i')⇒(ii') 记 $\iota_X:\ \mathcal{S}_X\to\mathcal{T}_X$ 和 $\iota_Y:\ \mathcal{S}_Y\to\mathcal{T}_Y$ 为包含映射，并令 $p\in\mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$。根据定理 5.5，存在一个态 $s:\ \mathcal{T}_X\otimes_{\mathrm{c}}\mathcal{T}_Y\to\mathbb{C}$ 使得

$\Gamma_p = \Gamma_s$。令 $\tilde{s} = s \circ (\iota_X \otimes \iota_Y)$；则 $\tilde{s}$ 是 $\mathcal{S}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{S}_Y$ 上的一个态，使得 $p = p_{\tilde{s}}$。

(ii')⇒(i') 设 $s\colon\ \mathcal{S}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{S}_Y \to \mathbb{C}$，使得 $p = p_s$，并令 $\beta_X\colon\ \mathcal{T}_X \to \mathcal{S}_X$（分别为 $\beta_Y\colon\ \mathcal{T}_Y \to \mathcal{S}_Y$）是商映射，定义见命题 4.3 的证明。我们有

$$\tilde{s} := s \circ (\beta_X \otimes \beta_Y) : \mathcal{T}_X \otimes_{\mathrm{c}} \mathcal{T}_Y \to \mathbb{C}$$

是一个态。根据定理 5.5，与 $\tilde{s}$ 经由 (32) 对应的映射 $\Gamma_{\tilde{s}}\colon\ M_{XY} \to M_{XY}$ 是一个量子交换 QNS 双相关。由于 $\Gamma_{\tilde{s}} = \Gamma_p$，我们有 $p \in \mathcal{C}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$。

(i")⇔(ii") 的证明方式与等价关系 (i')⇔(ii') 类似，只需用定理 5.6 替代定理 5.5。□

6. Concurrent bicorrelations

在本节中，设 X 为有限集且 $Y = A = B = X$。令 $J_X = \frac{1}{|X|} \sum_{x, y \in X} \epsilon_{x,y} \otimes \epsilon_{x,y}$ 为 M_{XX} 中的典范最大纠缠态。我们将 [11] 中相容 QNS 关联的定义特化如下：

定义 6.1. 若 QNS 双相关 $\Gamma : M_{XX} \to M_{AA}$ 满足 $\Gamma(J_X) = J_A$，则称其为相容的。

对于 t $\in$ {loc,q,qa,qc,ns}，令 $\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bic}}$ 为属于 $\mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bi}}$ 的所有相容双相关所构成的集合。

备注 6.2. 请注意，若 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bic}}$，则 $\Gamma^* \in \mathcal{Q}_{\mathrm{ns}}^{\mathrm{bic}}$ 也成立。事实上，由于 Γ 是保幺的，其对偶映射 $\Gamma^*\colon\ M_{AA} \to M_{XX}$ 是保迹的；因此，$\mathrm{Tr}(\Gamma^*(J_A)) = 1$。于是

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Gamma(J_X), J_A \rangle &= \langle J_X, \Gamma^*(J_A) \rangle = |\langle J_X, \Gamma^*(J_A) \rangle| \\ &\leq \|J_X\|_2 \|\Gamma^*(J_A)\|_2 \leq \|\Gamma^*(J_A)\|_1 = 1. \end{aligned}$$

柯西-施瓦茨不等式中的等号条件现在意味着 $\Gamma^*(J_A)$ 是 J_X 的倍数。如果对于某个 $\alpha \in \mathbb{C}$，有 $\Gamma^*(J_A) = \alpha J_X$，那么 $\alpha \langle J_X, J_X \rangle = \langle \Gamma^*(J_A)\ J_X \rangle = \langle J_A, \Gamma(J_X) \rangle = \langle J_A, J_A \rangle$，从而得到 $\alpha = 1$。

由酉矩阵的各个元素 $(\tilde{u}_{a,\ x})_{a,\ x \in X}$ 生成的泛 C*-代数（称为布朗代数）最早由 L. G. Brown[12]研究。我们将引入布朗代数的一个子商，并将证明其上的迹可表示不同类型的并发双相关。首先，令

$$\tilde{u}_{x,x',a,a'} = \tilde{u}_{a,x}^* \tilde{u}_{a',x'}, \quad x, x', a, a' \in X,$$

并令 $\mathcal{U}_{X,\ A}$ 为布朗代数的 C^*-子代数，由集合 $\{\tilde{u}_{x,x',a,a'}\colon\ x, x', a, a' \in X\}$ 生成。

引理 6.3. 若 $\pi : \mathcal{U}_{X,\ A} \to \mathcal{B}(H)$ 是一个含幺 *-表示，则存在一个分块算子酉算子 $U = (U_{a,\ x})_{a,\ x}$ 使得 $\pi(\tilde{u}_{x,\ x',\ a,\ a'}) = U_{a,\ x}^* U_{a',\ x'}$，$x, x', a, a' \in X$。

证明。设 $\mathcal{V}_{X,\ A}$ 为等距算子 $(v_{a,\ x})_{a,\ x}$的泛 TRO，定义见[52, 第 5] 节。下文中，我们将把乘积 $v_{a_1,\ x_1}^{\varepsilon_1} v_{a_2,\ x_2}^{\varepsilon_2} \cdots v_{a_k,\ x_k}^{\varepsilon_k}$视为以下某个空间中的元素，其中 ε_i 要么是空符号，要么是 $*$，且对所有 i 均有 $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$：它们或者属于 $\mathcal{V}_{X,\ A}$, $\mathcal{V}_{X,\ A}^*$, $\mathcal{C}_{X,\ A}$，或者属于与 TRO$\mathcal{V}_{X,\ A}$对应的左 C*-代数。设 $\mathcal{J}$ 为由以下元素生成的 $\mathcal{C}_{X,\ A}$ 的闭理想

$$\sum_{x\in X} \tilde{e}_{y,x,b,a}\tilde{e}_{x,y,a,b} - \tilde{e}_{y,y,b,b}, \quad y,a,b \in X.$$

根据 [11, 引理 4.2],，映射 $\rho\colon \tilde{e}_{x,x',a,a'} \mapsto \tilde{u}_{x,x',a,a'},\ x,x',a,a' \in X$ 可延拓为一个满 *-同态 $\rho\colon \mathcal{C}_{X,A} \to \mathcal{U}_{X,A}$，其核为 $\rho = \mathcal{J}$。设$\pi\colon \mathcal{U}_{X,A} \to \mathcal{B}(H)$是一个 *-表示。则 $\pi\circ\rho\colon \mathcal{C}_{X,A} \to \mathcal{B}(H)$是一个消去 $\mathcal{J}$的 *-表示。根据 [52, 引理 5.1],，存在一个分块算子等距映射 $U = (U_{a,x})_{a,x\in X}$，其中$U_{a,x} \in \mathcal{B}(H,K)$，希尔伯特空间 K, $x,a \in X$满足某个条件，使得 $(\pi\circ\rho)(\tilde{e}_{x,x',a,a'}) = U_{a,x}^* U_{a',x'},\ x,x',a,a' \in X$。

根据 $\mathcal{V}_{X,\ A}$ 的定义，算子矩阵 U 导出了一个典范三元表示 $\theta_U\colon \mathcal{V}_{X,\ A} \to \mathcal{B}(H,K)$。不失一般性，我们可以假设 $K = \operatorname{span}(\theta_U(\mathcal{V}_{X,\ A})H)$。事实 $(\pi\circ\rho)(\mathcal{J}) = \{0\}$ 现在意味着

$$U_{b,y}^* \left(I - \sum_{x\in X} U_{a,x}U_{a,x}^* \right) U_{b,y} = 0, \quad y,a,b \in X. \tag{36}$$

由于 $UU^* \leq I$，我们有 $I - \sum_{x\in X} U_{a,\ x}U_{a,\ x}^* \geq 0$，因此 (36) 可写为

$$\left(I - \sum_{x\in X} U_{a,x}U_{a,x}^* \right)^{1/2} U_{b,y} = 0, \quad y,a,b \in X,$$

进一步可得

$$\left\langle \left(I - \sum_{x\in X} U_{a,x}U_{a,x}^* \right) T\xi, T\xi \right\rangle = 0, \quad a \in X, \xi \in H, T \in \theta_U(\mathcal{V}_{X,A}).$$

由极化可得 $\sum_{x\in X} U_{a,\ x}U_{a,\ x}^* = I$, $a \in X$。由于 $I - UU^*$ 是一个对角元为零的正分块对角算子，$I - UU^* = 0$；因此，U 是酉算子。由于 $U_{a,\ x}^* U_{b,\ y} = \pi(\tilde{u}_{x,\ y,\ a,\ b})$，$x,y,a,b \in X$，证明完毕。□

回顾一下，$\tilde{e}_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 是 C*-代数 $\mathcal{C}_{X,\ A}$的典范生成元（因此，矩阵 $\left(\tilde{e}_{x,\ x',\ a,\ a'}\right)_{x,\ x',\ a,\ a'}$ 是一个通用随机算子矩阵）。令

$$\tilde{g}_{y,z,b,c}^{x,x'} = \delta_{x,x'}\tilde{e}_{y,z,b,c} - \sum_{a\in X} \tilde{e}_{y,x,b,a}\tilde{e}_{x',z,a,c}$$

and

$$\tilde{h}_{y,z,b,c}^{a,a'} = \delta_{a,a'}\tilde{e}_{y,z,b,c} - \sum_{x\in X} \tilde{e}_{y,x,b,a}\tilde{e}_{x,z,a',c},$$

并且 $\tilde{\mathcal{J}}_1$（分别为 $\tilde{\mathcal{J}}_2$）是 $\mathcal{C}_{X,A}$ 的闭理想，由 $\tilde{g}^{x}{}_{,y\ z\ b,,,c}^{\ \ x'}$（分别为 $\tilde{h}^{a}{}_{,y\ z\ ,,\ b,c}^{\ \ a'}$）、$y,z,b,c,x,x' \in X$（分别为 $y,z,b,c,a,a' \in X$）生成。

˜引理 6.4. 在典范 *-同构意义下，$\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_2 \simeq \mathcal{U}_{X,A}$。

证明。记 $\tilde{\mathcal{J}}_2^0 \mathcal{C}_{X,\ A}$ 为由元素 $\tilde{h}^{a,\ a}_{y\ y}$、$_{b,\ b}$ 生成的闭理想，其中 a， b，$y \in X$。文献 [11, 引理 4.2] 中证明了

$$\mathcal{C}_{X,A}/\tilde{\mathcal{J}}_2^0 \simeq \mathcal{U}_{X,A}.$$

设 $\rho : \mathcal{C}_{X,\ A} \to \mathcal{B}(K)$ 是一个湮灭 $\tilde{\mathcal{J}}_2^0$ 的含幺 *-表示，且相应的 $\mathcal{C}_{X,\ A}/\tilde{\mathcal{J}}_2^0$ 的诱导表示是˜ ˜忠实的。根据引理 6.3，存在一个酉算子 $U = (U_{a,\ x})_{a,\ x\in X}$，使得˜ ˜ ˜若 $U_{x,\ x',\ a,\ a'} = U^*_{a,\ x} U_{a',\ x'}$，则

$$\rho(\tilde{e}_{x,x',a,a'}) = \tilde{U}_{x,x',a,a'}, \quad x, x', a, a' \in X.$$

˜但是，由于 U 是酉算子，

$$\begin{aligned} \rho\left(\tilde{h}^{a,a'}_{y,z,b,c}\right) &= \delta_{a,a'}\tilde{U}_{y,z,b,c} - \sum_{x\in X} \tilde{U}_{y,x,b,a}\tilde{U}_{x,z,a',c} \\ &= \delta_{a,a'}\tilde{U}_{y,z,b,c} - \sum_{x\in X} \tilde{U}^*_{b,y}\tilde{U}_{a,x}\tilde{U}^*_{a',x}\tilde{U}_{c,z} \\ &= \delta_{a,a'}\tilde{U}_{y,z,b,c} - \delta_{a,a'}\tilde{U}^*_{b,y}\tilde{U}_{c,z} = 0. \end{aligned}$$

˜因此， ρ 会自动消去 $\mathcal{J}_2$。证明完毕。 □

我们称分块算子矩阵 $U = (u_{a,x})_{a,x} \in M_X(\mathcal{B}(H))$ 为双酉的，如果 U和 U t都是酉算子。令 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 为由双酉 $(u_{a,x})_{a,x\in X}$ 的各项生成的泛 C*-代数，并令 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 为 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 的子代数，它由以下形式的长度为二的词生成

$$u_{x,x',a,a'} := u^*_{a,x} u_{a',x'}, \quad x, x', a, a' \in X.$$

此外，回顾一下，$e_{x,x',a,a'}$, $x, x', a, a' \in X$ 表示 C*-代数 $\mathcal{C}_X$ 的典范生成元（因此 $(e_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'}$ 是一个泛双随机算子矩阵），令

$$g^{x,x'}_{y,z,b,c} = \delta_{x,x'} e_{y,z,b,c} - \sum_{a\in X} e_{y,x,b,a} e_{x',z,a,c} \tag{37}$$

and

$$h^{a,a'}_{y,z,b,c} = \delta_{a,a'} e_{y,z,b,c} - \sum_{x\in X} e_{y,x,b,a} e_{x,z,a',c}, \tag{38}$$

并令 $\mathcal{J}_1$ （分别为 $\mathcal{J}_2$）是 $\mathcal{C}_X$ 的闭理想，由元素 $g^{x\ \ x'}_{,y\ z\ ,,b,c}$（分别为 $h^{a,}_{y\ z\ ,,b,c}$）生成，其中 $y, z, b, c, x, x' \in X$（分别为 $y, z, b, c, a, a' \in X$）。

我们注意到，普适 C*-代数 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 及其子代数 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 已在紧量子群文献中得到充分研究。Wang 在 [55], 中引入了 C*-代数 $C(\mathcal{U}_X^+)$，并证明它具有 C*-代数意义下的紧量子群结构。特别是， $C(\mathcal{U}_X^+)$ 自带余结合余乘法，使其成为连续函数 C*-代数的一种非交换类比

定义在酉群 $\mathcal{U}_X$ 上的连续函数。随后 Banica 在 [2] 中详细研究了量子群 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 的结构。另一方面，子代数 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \subseteq C(\mathcal{U}_X^+)$ 可以自然地理解为定义在射影酉群$\mathbb{P}\mathcal{U}_X/\mathbb{T}$上的连续函数空间的非交换版本。在经典情形下，$\mathcal{U}_X^+$ 对 M_X 的共轭作用诱导出群同构 $\mathbb{P}\mathcal{U}_X \cong \mathrm{Aut}(M_X)$，其中 $\mathrm{Aut}(M_X)$ 是 M_X 的 $*$- 自同构群。

在量子情形下，我们自然会预期 $\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+$ 与 M_X 的量子自同构之间存在类似的对应关系，事实也的确如此：在 [56], 中，Wang 引入了量子自同构群 $\mathrm{Aut}^+(M_X)$（通过一个带有生成元与关系的抽象普适 C*-代数 $C(\mathrm{Aut}^+(M_X))$），随后 Banica 在 [3] 中证明，自然的量子群 C*-代数态射 $C(\mathrm{Aut}^+(M_X)) \to C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 实际上是一个同构。在下文的引理 6.5 中，我们将 Banica 的结果加以推广，证明事实上 M_X 的任何“具体”量子自同构（即一个 $*$-同态 $\pi\colon C(\mathrm{Aut}^+(M_X)) \cong C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H)$）都可以通过双酉对 M_X 进行“具体”共轭来实现（也就是说，π 是表示 $C(\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H)$ 的限制）。

引理 6.5. (i) 我们有 $\mathcal{C}_X/\overline{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2} \simeq C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$。

(ii) 若 $\pi\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H)$ 是含幺 *-表示，则存在一个双酉 $(U_{a,x})_{a,x} \in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得 $\pi(u_{x,x',a,a'}) = U^*_{a,x}U_{a',x'}$。

证明. (i) 令 $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2}$，回忆一下，$\mathcal{J}_X$ 是由这些元素生成的 $\mathcal{C}_{X,A}$ 的闭理想：

$$\sum_{y\in X} \tilde{e}_{y,y,a,a'} - \delta_{a,a'}1, \quad a,a' \in X$$

(见包含方程 (21) 的段落)，并回忆一下引理 6.4 之前定义的 $\mathcal{C}_{X,A}$ 的理想 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$，令

$$\tilde{\mathcal{J}} = \overline{\tilde{\mathcal{J}}_X + \tilde{\mathcal{J}}_1 + \tilde{\mathcal{J}}_2}. \tag{39}$$

根据命题 3.8，$\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_X \simeq \mathcal{C}_X$；因此，$\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J} \simeq \mathcal{C}_X/\mathcal{J}$。

回忆一下，$\mathcal{U}_{X,A}$ 是由生成元 $\tilde{u}_{x,x',a,a'} := \tilde{u}^*_{a,x}\tilde{u}_{a',x'}$, $x,x',a,a' \in X$生成的泛 C^*-代数，其中矩阵 $(\tilde{u}_{a,x})_{a,x}$ 是酉算子。由引理6.4，我们有典范 *-同构 $\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_2 \simeq \mathcal{U}_{X,A}$。

我们有 $\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J} \simeq (\mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_2)/(\mathcal{J}/\mathcal{J}_2)$。利用引理 6.4 中的识别，我们有 $\mathcal{J}/\mathcal{J}_2$ 由以下元素生成

$$\sum_{y\in X} \tilde{u}_{y,y,a,a'} - \delta_{a,a'}1, \quad a,a' \in X,$$

and

$$\sum_{a\in X} \tilde{u}_{y,x,b,a}\tilde{u}_{x',z,a,c} - \delta_{x,x'}\tilde{u}_{y,z,b,c}, \quad y,z,b,c,x,x' \in X.$$

设 $\rho : \mathcal{U}_{X,\ A} \simeq \mathcal{C}_{X,\ A}/\mathcal{J}_2 \to \mathcal{B}(K)$ 是一个湮灭 $\mathcal{J}/\mathcal{J}_2$ 的含幺 *-表示。根据引理 6.3，存在一个酉算子 $U = (U_{a,\ x})_{a,\ x}$ 使得 $\rho(\tilde{u}_{x,\ x',\ a,\ a'}) = U^*_{a,\ x} U_{a',\ x'},\ x, x', a, a' \in X$，

$$\sum_{y \in X} \tilde{U}^*_{a,y} \tilde{U}_{a',y} = \delta_{a,a'} I, \quad a, a' \in X, \tag{40}$$

and

$$\tilde{U}^*_{b,y} \left(\sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x'} - \delta_{x,x'} I \right) \tilde{U}_{c,z} = 0, \quad x, x', y, z, b, c \in X. \tag{41}$$

根据 (40)，$\tilde{U}_{\mathrm{t}} = (\tilde{U}_{y,a})_{a,y}$ 是一个等距算子。但于是 $\tilde{U}^{\mathrm{t}} (\tilde{U}^{\mathrm{t}})^* \leq I$，通过比较矩阵的 (x, x) 项可得，$\sum_{a \in X} U_{a,x} U^*_{a,x} \leq I, x \in X$。另一方面，(41) 蕴含 $\tilde{U}^*_{b,y} \left(\sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x} - I \right) \tilde{U}_{b,y} = 0$。因此，

$$\left(I - \sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x} \right)^{1/2} \tilde{U}_{b,y} = 0$$

因此 $\left(\sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x} - I \right) \tilde{U}_{b,y} = 0$。由于 $\tilde{U}$ 是酉算子，这意味着

$$0 = \left(\sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x} - I \right) \sum_{y \in X} \tilde{U}_{b,y} \tilde{U}^*_{b,y} = \sum_{a \in X} \tilde{U}_{a,x} \tilde{U}^*_{a,x} - I.$$

Now,

$$\left(\tilde{U}^*_{b,y} \otimes I \right) \left(I - \tilde{U}^{\mathrm{t}} \tilde{U}^{\mathrm{t}*} \right) \left(\tilde{U}_{b,y} \otimes I \right) \tag{42}$$

是 $M_X(\mathcal{B}(H))$ 中的正分块矩阵，并且其主对角线上的元素均为零。因此，矩阵 (42) 为零，进而

$$\left(I - \tilde{U}^{\mathrm{t}} \tilde{U}^{\mathrm{t}*} \right)^{1/2} \left(\tilde{U}_{b,y} \otimes I \right) = 0, \quad b, y \in X. \tag{43}$$

在右侧乘以 $U^*_{b,\ y} \otimes I$，并对变量 y 求和，我们得到 $\tilde{U}_{\mathrm{t}} \tilde{U}^{\mathrm{t}*} = I$；因此，$U^{\mathrm{t}}$ 是酉算子。由此，U 给出了 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 的含幺 *-表示；限制后，则给出 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 的含幺 *-表示。由此我们证明，每个湮灭 $\mathcal{J}/\mathcal{J}_2$ 的含幺 $*$-表示 $\rho : \mathcal{C}_{X,\ A}/\mathcal{J}_2 \to \mathcal{B}(K)$，都会诱导一个从 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的含幺 $*$-同态。

根据 [52, 定理 5.2]，，存在一个 $*$-同态 $\varphi : \mathcal{C}_{X,A} \to C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$，使得 $\varphi(\tilde{e}_{x,x',a,a'}) = u_{x,x',a,a'},\ x, x', a, a' \in X$。直接验算可知，$\varphi$ 消去 $\mathcal{J}_2$，因此可导出一个 $*$-同态 $\tilde{\varphi} : \mathcal{C}_{X,A}/\tilde{\mathcal{J}}_2 \to C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$，$\tilde{e}_{x,x',a,a'} + \tilde{\mathcal{J}}_2 \mapsto u_{x,x',a,a'}$。容易看出

$\tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{J}}_2 \subseteq \ker\tilde{\varphi}$。上一段表明，若$T \in \mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}_2$，则

$$\begin{aligned}\|T+\tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{J}}_2\| &= \sup\{\|\rho(T)\| : \rho \text{ a *-rep. of } \mathcal{C}_{X,A}/\tilde{\mathcal{J}}_2 \text{ with } \rho(\tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{J}}_2)=0\}\\ &\leq \|\tilde{\varphi}(T)\|,\end{aligned}$$

从而得到包含关系 $\ker(\tilde{\varphi}) \subseteq \mathcal{J}/\mathcal{J}_2$，进而有等式 $\ker(\tilde{\varphi}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}_2$。由于 $\tilde{\varphi}$ 是满射，我们得到所述结论。

(ii) 设 $\pi: C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个含幺 *-表示。令 $\rho: \mathcal{C}_{X,A} \to \mathcal{C}_{X,A}/\mathcal{J}$ 为商映射，根据 (i) 的证明，我们可以将 ρ视为从 $\mathcal{C}_{X,A}$ 到 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 的 *-满同态。它还给出了一个双酉算子$U = (U_{a,x})_{a,x}$，使得 $(\pi\circ\rho)(\tilde{e}_{x,x',a,a'}) = U_{a,x}^* U_{a',x'},\ x,x',a,a' \in X$。我们现在看到 $\pi(u_{x,x',a,a'}) = U_{a,x}^* U_{a',x'},\ x,x',a,a' \in X$，证明完毕。□

回顾一下，C*-代数 $\mathcal{A}$ 的反 C*-代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 具有与 $\mathcal{A}$相同的集合、线性结构和对合，其乘法定义为 $u^{\mathrm{op}}v^{\mathrm{op}} = (vu)^{\mathrm{op}}$，其中 u^{op} 表示将元素 $u \in \mathcal{A}$ 视为 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$中的元素时所得的记号。给定希尔伯特空间 H，用 H^{d} 表示其对偶 Banach 空间；对于算子 $T \in \mathcal{B}(H)$，令 $T^{\mathrm{d}}: H^{\mathrm{d}} \to H^{\mathrm{d}}$ 为其对偶。我们注意到以下恒等式

$$(T^{*\mathrm{d}})^* = T^{\mathrm{d}}. \tag{44}$$

若 $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ 是忠实 *-表示，则映射 $\pi^{\mathrm{op}}: \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}(H^{\mathrm{d}})$ 定义为 $\pi^{\mathrm{op}}(u^{\mathrm{op}}) = \pi(u)^{\mathrm{d}}$，是忠实 *- 表示。

以下结果可由紧量子群的反 antipode 存在性以及如下事实证明：$\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+$ 中，反 antipode 已知是 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 的 $*$-反自同构（例如参见 [42, 命题 1.7.9]）。为方便不熟悉量子群技术细节的读者，我们给出一个自足的证明。

引理 6.6. 设 X 为有限集。映射

$$\partial(u_{x,x',a,a'}) = u^{\mathrm{op}}_{x',x,a',a}, \quad x,x',a,a' \in X,$$

延拓为一个 *-同构 $\partial: C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}}$。

证明。设 $\pi: C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H)$ 是一个忠实的 *-表示，并设 $U = (U_{a,x})_{a,x} \in M_X(\mathcal{B}(H))$ 是一个双酉，使得 $\pi(u_{x,x',a,a'}) = U_{a,x}^* U_{a',x'},\ x,x',a,a' \in X$。

取 $V_{a,x} = U_{a,x}^{*\mathrm{d}},\ x,a \in X$。我们观察到 $V := (V_{a,x})_{a,x}$ 是双酉的。事实上，利用 (44)，我们有

$$\sum_{a\in X} V_{a,x}^* V_{a,x'} = \sum_{a\in X} U_{a,x}^{\mathrm{d}} U_{a,x'}^{*\mathrm{d}} = \left(\sum_{a\in X} U_{a,x'}^* U_{a,x}\right)^{\mathrm{d}} = \delta_{x,x'} I_{H^{\mathrm{d}}}$$

and

$$\sum_{x\in X} V_{a,x}^* V_{a',x} = \sum_{x\in X} U_{a,x}^{\mathrm{d}} U_{a',x}^{*\mathrm{d}} = \left(\sum_{x\in X} U_{a',x}^* U_{a,x}\right)^{\mathrm{d}} = \delta_{a,a'} I_{H^{\mathrm{d}}},$$

也就是说， $V^*V = I$ 和 $V\mathrm{t}^*V\mathrm{t} = I$；关系 $VV^* = I$ 和 $V\mathrm{t}V\mathrm{t}^* = I$ 也可类似地推出。因此，存在一个 *-表示 $\rho\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathcal{B}(H^{\mathrm{d}})$，使得 $\rho(u_{x',x,a',a}) = \pi^{\mathrm{op}}(u_x^{\mathrm{op}}{}_{,x',a,a'})$，$x, x', a, a' \in X$；注意， ρ 是从 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 到 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}}$ 的一个（定义良好的）*-同态。由对称性可知， ρ 是一个 *-同构。□

在陈述下一个定理之前，我们先引入一些记号和术语。若 $\Phi : M_X \to M_X$ 是一个量子信道，我们将 $\Phi^\sharp\colon M_X \to M_X$ 表示为由下式给出的量子信道：

$$\Phi^\sharp(\omega) = \Phi(\omega^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}, \quad \omega \in M_X.$$

若存在一个酉算子 $U = (\lambda_{a,\ x})_{a,\ x\in X} \in M_X$，使得 $\Phi(\omega) = U^*\omega U$, $\omega \in M_X$，则称信道 $\Phi\colon M_X \to M_X$ 为酉信道。最后，若存在一个交换 C*-代数 $\mathcal{A}$、一个 *-同态 $\pi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 和一个态 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，使得 $\tau = \phi \circ \pi$，则称 C*-代数 $\mathcal{B}$ 上的迹 $\tau\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ 为交换的。

定理 6.7. 设 X 是一个有限集，且 $\Gamma\colon M_{XX} \to M_{XX}$ 是一个 QNS 双相关。那么

(i) $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bic}}$ 当且仅当存在一个迹 $\tau\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathbb{C}$ 使得

$$\Gamma(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}) = (\tau(u_{x,x',a,a'}u_{y',y,b',b}))_{a,a',b,b'}, \quad x, x', y, y' \in X; \tag{45}$$

(ii) $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{bic}}$ 当且仅当 (45) 对一个经过有限维 C*-代数分解的 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 的迹成立；(iii) $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{bic}}$ 当且仅当 (45) 对 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 的交换迹成立，当且仅当存在酉信道 Φ_i, $i = 1, \ldots, k$，使得 $\Gamma = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi_i \otimes \Phi_i^\sharp$ 为一个凸组合。

证明。(i) 令 $U := (u_{a,x})_{a,x}$ 为泛双酉元，并设 $\Gamma : M_{XX} \to M_{XX}$ 由 (45) 给出。存在一个态 $\nu\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \otimes_{\max} C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$，定义为

$$\nu(u \otimes v^{\mathrm{op}}) = \tau(uv), \quad u, v \in C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \tag{46}$$

（参见 [13, 第 219] 页）。令 $s = \nu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial)$；因此， s 是 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \otimes_{\max} C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 上的一个态。我们有

$$s(u_{x,x',a,a'} \otimes u_{y,y',b,b'}) = \nu(u_{x,x',a,a'} \otimes u^{\mathrm{op}}_{y',y,b',b}) = \tau(u_{x,x',a,a'}u_{y',y,b',b}),$$

这意味着 $\Gamma = \Gamma_s$。由引理 6.5 (i) 和定理 5.5， $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bi}}$。由于 U 是酉算子，根据定理 4.3] 的证明， Γ 是相容的。

反之，设 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bic}}$。根据定理 5.5，存在一个态 $s\colon \mathcal{C}_X \otimes_{\max} \mathcal{C}_X \to \mathbb{C}$ 使得 $\Gamma = \Gamma_s$。令 $V = (v_{a,\ x})_{a,\ x}$ 为一个泛双等距（见第 3.2 小节），并用 $f_{y,\ y',\ b,\ b'}$ 表示张量积中第二个副本的典范生成元。 Γ 的并发性意味着条件

成立

$$\sum_{x',y'\in X} s\left(e_{x',y',a,b}\otimes f_{x',y',a,b}\right)=1,\quad a,b\in X. \tag{47}$$

令 $\tau\colon \mathcal{C}_X\to\mathbb{C}$ 为由 $\tau(u)=s(u\otimes 1),\quad u\in\mathcal{C}_X$ 给出的泛函。根据[11, 引理 4.2], , 存在典范 *-满同态 $\pi:\mathcal{C}_{X,\ A}\to\mathcal{C}_X$; 令 $\tilde{\tau}=\tau\circ\pi$。令由 $\tilde{s}(w)=(s\circ(\pi\otimes\pi))(w)$ 给出的 $\tilde{s}:\mathcal{C}_{X,\ A}\otimes_{\max}\mathcal{C}_{X,\ A}\to\mathbb{C}$, 则有

$$\sum_{x',y'\in X}\tilde{s}\left(\tilde{e}_{x',y',a,b}\otimes\tilde{f}_{x',y',a,b}\right)=1,$$

并且现在, 根据 [11, 定理 4.1], 的证明, 有

$$\tilde{s}\left(\tilde{e}_{x,y,a,b}\otimes\tilde{f}_{x,y,a,b}\right)=\tilde{s}\left(\tilde{e}_{x,y,a,b}\tilde{e}_{y,x,b,a}\otimes 1\right),\quad x,y,a,b\in X,$$

并且 $\tilde{\tau}$ 是迹态。取商后, 我们得出

$$s\left(e_{x,y,a,b}\otimes f_{x,y,a,b}\right)=s\left(e_{x,y,a,b}e_{y,x,b,a}\otimes 1\right),\quad x,y,a,b\in X, \tag{48}$$

并且 τ 是迹态。

回顾记号 (37) 和 (38), 令

$$G_{y,z,b,c}=\left(g^{x,x'}_{y,z,b,c}\right)_{x,x'}\quad\text{and}\quad H_{y,z,b,c}=\left(h^{a,a'}_{y,z,b,c}\right)_{a,a'}.$$

我们断言

$$\tilde{G}_{y,z,b,c}:=\begin{bmatrix}G_{y,y,b,b} & G_{y,z,b,c}\\ G_{z,y,c,b} & G_{z,z,c,c}\end{bmatrix}\in M_2\left(M_X(\mathcal{C}_X)\right)^+. \tag{49}$$

事实上, 令 $Z_{y,\ z,\ b,\ c}:=\begin{bmatrix}v_{b,\ y}\otimes I_X & 0\\ 0 & v_{c,\ z}\otimes I_X\end{bmatrix}$。应用规范换位 $M_2(M_X(\mathcal{C}_X))\simeq M_X(M_2(\mathcal{C}_X))$ 后, 我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{y,z,b,c}&=\begin{bmatrix}g^{x,x'}_{y,y,b,b} & g^{x,x'}_{y,z,b,c}\\ g^{x,x'}_{z,y,c,b} & g^{x,x'}_{z,z,c,c}\end{bmatrix}_{x,x'}\\ &=\begin{bmatrix}\delta_{x,x'}e_{y,y,b,b}-\sum_a e_{y,x,b,a}e_{x',y,a,b} & \delta_{x,x'}e_{y,z,b,c}-\sum_a e_{y,x,b,a}e_{x',z,a,c}\\ \delta_{x,x'}e_{z,y,c,b}-\sum_a e_{z,x,c,a}e_{x',y,a,b} & \delta_{x,x'}e_{z,z,c,c}-\sum_a e_{z,x,c,a}e_{x',z,a,c}\end{bmatrix}_{x,x'}\\ &=Z^*_{y,z,b,c}\begin{bmatrix}\delta_{x,x'}1-\sum_a v_{a,x}v^*_{a,x'} & \delta_{x,x'}1-\sum_a v_{a,x}v^*_{a,x'}\\ \delta_{x,x'}1-\sum_a v_{a,x}v^*_{a,x'} & \delta_{x,x'}1-\sum_a v_{a,x}v^*_{a,x'}\end{bmatrix}_{x,x'}Z_{y,z,b,c}.\end{aligned}$$

由于 V_{t} 是等距算子, $V_{\mathrm{t}}V_{\mathrm{t}}^*\le I$, 从而 $\left(\delta_{x,x'}1-\sum_a v_{a,x}v^*_{a,x'}\right)_{x,\ x'}\ge 0$, 这意味着（49）, 并结合关系 $\sum_{a\in X}v_{a,\ x}v^*_{a,\ x}\le 1, x\in X$。恒等式（49）现在表明 $G_{y,\ y,\ b,\ b}\in M_X(\mathcal{C}_X)^+$, 因此

$$\tau^{(X)}\left(G_{y,y,b,b}\right)\in M_X^+. \tag{50}$$

我们有

$$\sum_{a\in X}e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}=\sum_{a\in X}v^*_{b,y}v_{a,x}v^*_{a,x}v_{b,y}\le e_{y,y,b,b} \tag{51}$$

因此

$$\sum_{x,y\in X}\sum_{a,b\in X} e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b} \leq \sum_{x,y\in X}\sum_{b\in A} e_{y,y,b,b} = |X|^2 1; \tag{52}$$

同样,

$$\sum_{x,y\in X}\sum_{a,b\in X} f_{x,y,a,b}f_{y,x,b,a} \leq |X|^2 1. \tag{53}$$

由 (47)、(52) 和 (53),

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \sum_{x,y,a,b} s\left(\left(e_{x,y,a,b}\otimes 1 - 1\otimes f_{y,x,b,a}\right)^*\left(e_{x,y,a,b}\otimes 1 - 1\otimes f_{y,x,b,a}\right)\right) \\ &= \quad \sum_{x,y,a,b} s\left(\left(e_{y,x,b,a}\otimes 1 - 1\otimes f_{x,y,a,b}\right)\left(e_{x,y,a,b}\otimes 1 - 1\otimes f_{y,x,b,a}\right)\right) \\ &= \quad \sum_{x,y,a,b} s\left(e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}\otimes 1 + 1\otimes f_{x,y,a,b}f_{y,x,b,a}\right) \\ &- \quad \sum_{x,y,a,b} s\left(e_{y,x,b,a}\otimes f_{y,x,b,a} + e_{x,y,a,b}\otimes f_{x,y,a,b}\right) \leq 2|X|^2 - 2|X|^2 = 0. \end{aligned}$$

将 τ 应用于 (52)，可得

$$\sum_{x,y\in X}\sum_{a,b\in X} \tau(e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}) \leq \sum_{x,y\in X}\sum_{b\in A} \tau(e_{y,y,b,b}) = |X|^2.$$

另一方面，由 (48),

$$\sum_{x,y\in X}\sum_{a,b\in X} \tau(e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}) = |X|^2.$$

利用（51），现在可得

$$\tau\left(e_{y,y,b,b} - \sum_{a\in X} e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}\right) = 0 \quad \text{for all } x,y,b \in X.$$

$\tau^{(X)}(G_{y,\ y,\ b,\ b})$ 的对角元为零；正性条件（50）意味着 $\tau^{(X)}(G_{y,\ y,\ b,\ b})$ 的非对角元也为零。现在，正性条件（49）意味着

$$\tau^{(2X)}\left(\tilde{G}_{y,z,b,c}\right) = 0, \quad y,z,b,c \in X.$$

条件 (49) 和柯西-施瓦茨不等式推出 $\tau^{(2X)}\left(Q\tilde{G}^{1/2}_{y,z,b,c}\right)$=0，对所有 $Q \in M_2(M_X(\mathcal{C}_X))$ 均成立，因此 $\tau_{(2X)}$ 消灭由 $\tilde{G}^{1/2}_{y\ z}$, ,$_{b,c}$ 生成的 $M_2(M_X(\mathcal{C}_X))$ 的闭理想。特别地，$\tau_{(2X)}$ 消灭由 $G_{y,z,b,c}$ 生成的 $\tilde{M}_2(M_X(\mathcal{C}_X))$ 的闭理想；由于 $\mathcal{C}_X$ 是保幺的，这意味着 τ 消灭由元素 $g^{x}_{,y\ z}$, ,$_{b,c}$, $x,x',y,z,b,c \in X$ 生成的 $\mathcal{C}_X$ 的闭理想，即 $\mathcal{J}_1$。

类似地，注意到

$$\sum_{x\in X} e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b} = \sum_{x\in X} v_{b,y}^{*}v_{a,x}v_{a,x}^{*}v_{b,y} \le e_{y,y,b,b}, \quad y,a,b\in X.$$

根据备注 6.2,

$$\sum_{a',b'\in X} s\left(e_{x,y,a',b'}\otimes f_{x,y,a',b'}\right) = 1, \quad x,y\in X.$$

类似地，利用 (48) 可得

$$\tau\left(e_{y,y,b,b} - \sum_{x\in X} e_{y,x,b,a}e_{x,y,a,b}\right) = 0 \quad x,y,b\in X,$$

从而得到以下关系

$$\tau^{(2X)}\left(\tilde{H}_{y,z,b,c}\right) = 0, \quad y,z,b,c\in X.$$

由此可知， τ 湮灭由 $h^{a}_{,y\ z\ b,,,c}$ 生成的理想 $\mathcal{J}_2$，其中 $a,a',y,z,b,c\in X$，因此它也湮灭 $\overline{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2}$。于是， τ 在商 $\mathcal{C}_X/\mathcal{J}$ 上诱导出一个迹态（仍记作同一符号）。应用引理 6.5 (i) 即可完成证明。

(ii) 假设 $\Gamma: M_{XX}\to M_{XX}$ 是一个量子相容 QNS 双相关。根据 [11, 定理 4.3], ，存在一个有限维 C*-代数 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{A}$ 上的迹 $\mathfrak{t}$ ，以及一个 *-同态 $\alpha: \mathcal{U}_{X,A}\to\mathcal{A}$，使得 $\Gamma=\Gamma_{\mathfrak{t}\circ\alpha\circ}$ 取商后，我们可以假设 $\mathfrak{t}$ 是忠实的。令 $\rho: \mathcal{C}_{X,A}\to\mathcal{U}_{X,A}$ 为规范商映射，其存在性由 [11, 引理 4.2] 保证。令 $\tilde{\tau}:\mathcal{C}_{X,A}\to\mathbb{C}$ 为泛函，定义为 $\tilde{\tau}(u)=(\mathfrak{t}\circ\alpha\circ\rho)(u)$, $u\in\mathcal{C}_{X,A}$；显然， $\tilde{\tau}$ 是 $\mathcal{C}_{X,A}$ 上的迹。还需注意， $\Gamma=\Gamma_{\tilde{\tau}}$ （为简洁起见，此处及下文用 $\Gamma_{\tilde{\tau}}$ 表示$\Gamma_{s_{\tilde{\tau}}}$，其中 $s_{\tilde{\tau}}$ 是与迹 $\tilde{\tau}$ 规范关联的态）。根据 (i) 的˜证明， $\tilde{\tau}$ 湮灭 (39) 中定义的理想 $\mathcal{J}$；因此，由于 $\mathfrak{t}$ 是忠实的，$(\alpha\circ\rho)(\tilde{\mathcal{J}})=0$，从而得到一个 $*$-同态 $\tilde{\rho}: C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^{+})\to\mathcal{A}$，以及 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^{+})$ 上经由 $\mathcal{A}$ 分解的迹 $\tau=\mathfrak{t}\circ\tilde{\rho}$。

反过来，假设 $\mathcal{B}$ 是有限维 C*-代数。设 $\pi: C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^{+})\to\mathcal{B}$ 是一个保单位 *-同态，且 $\tilde{\tau}: \mathcal{B}\to\mathbb{C}$ 是一个迹，使得若 $\tau=\tilde{\tau}\circ\pi$，则 $\Gamma=\Gamma_{\tau}$。由引理 6.5 (ii)，存在一个有限维希尔伯特空间 K 和一个双酉矩阵 $U=(U_{a,\ x})_{a,\ x\in M_X(\mathcal{B}(K))}$，使得 $\pi(u_{x,\ x',\ a,\ a'})=U^{*}_{a,\ x}U_{a',\ x'}$, $x,x',a,a'\in X$。现在，经过直接验证可知 $\Gamma\in\mathcal{Q}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{bic}}$。

(iii) 假设 $\Gamma\in\mathcal{Q}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{bic}}$。根据 [11, 定理 4.3 (iii)], ，存在一个交换 C*-代数 $\mathcal{A}$、一个 *-同态 $\tilde{\pi}:\mathcal{U}_{X,\ A}\to\mathcal{A}$以及一个态$\phi: \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ ，使得若 $\tilde{\tau}=\phi\circ\tilde{\pi}$ ，则 ($\tilde{\tau}$ 是 $\mathcal{U}_{X,\ A}$ 上的一个迹)$\Gamma=\Gamma_{\tilde{\tau}}$。将 $\mathcal{A}=C(\Omega)$ 表示为某个紧豪斯多夫空间 Ω 上的函数代数，并设μ 为 Ω 上的一个正则博雷尔测度，使得 $\phi(h)=\int_{\Omega}h d\mu$。记

$U_{x,\ x',\ a,\ a'} = \tilde{\pi}(\tilde{u}_{x,\ x'a,\ a'})$，$x$、$x'a$、$a' \in X$，则有

$$\phi(\tilde{U}_{x,x',a,a'}\tilde{U}_{y',y,b',b}) = \int_\Omega \tilde{U}_{x,x',a,a'}(t)\tilde{U}_{y',y,b',b}(t)d\mu(t), \quad x,x',a,a' \in X.$$

由于 μ 可以由点质量求值的凸组合逼近，Γ 可以由凸组合 $\sum_{i=1}^k \lambda_i\Gamma_i$ 逼近，其中

$$\Gamma_i(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}) = \left(\mu^{(i)}_{x,x',a,a'}\mu^{(i)}_{y',y,b',b}\right)_{a,a',b,b'}, \quad x,x',y,y' \in X,$$

对于某些标量矩阵 $M_i = \left(\mu^{(i)}_{x,x',a,a'}\right)_x$、$x'$、$b$、$b'$。由于矩阵 M_i 产生了 $\mathcal{U}_X$ 的（一维）*- 表示 A，根据引理 6.3，它们可分解为如下形式：$\mu^{(i)}_x$、x'、a、$a' = \bar{\lambda}^{(i)}_a$、$x\lambda^{(i)}_{a'}$、$x'$、$x$、$x'$、$a$、$a' \in X$，其中 $U_i = (\lambda^{(i)}_a$、$x)$ 为酉矩阵，a、x、$i = 1$、.....、k。注意，$\Gamma_i = \Phi_i \otimes \Phi_i^\sharp$，其中 Φ_i 是 Choi 矩阵为 $\left(\mu^{(i)}_{x,x',a,a'}\right)_x$ 的（保幺）量子信道，x'、a、a'。根据 Carathéodory 定理和紧致性，我们有 Γ 本身就是这种形式的凸组合。进一步有

$$\Phi_i(\omega) = U_i^{\mathrm{t}*}\omega U_i^{\mathrm{t}}, \quad \omega \in M_X,\ i = 1,\dots,k,$$

并且特别地，Φ_i 是一个酉信道，$i = 1$，.....，k。

假设 Φ：$M_X \to M_X$ 是一个酉信道。令 $U = (\lambda_{a,\ x})_{a,\ x} \in M_X$ 为一个酉算子（因而也是双酉），使得 $\Phi(\omega) = U^*\omega U, \omega \in M_X$。我们有

$$\begin{aligned}
\left(\Phi \otimes \Phi^\sharp\right)(J_X) &= \frac{1}{|X|}\sum_{x,y\in X} \Phi(\epsilon_{x,y}) \otimes \Phi(\epsilon_{y,x})^{\mathrm{t}} \\
&= \frac{1}{|X|}\sum_{x,y\in X} (U^*e_x)(U^*e_y)^* \otimes ((U^*e_y)(U^*e_x)^*)^{\mathrm{t}} \\
&= \frac{1}{|X|}\sum_{x,y\in X}\sum_{a,b\in X}\sum_{a',b'\in X} \lambda_{y,b}\overline{\lambda}_{x,a}\lambda_{x,a'}\overline{\lambda}_{y,b'}(\epsilon_{a,b} \otimes \epsilon_{a',b'}) \\
&= \frac{1}{|X|}\sum_{a,b\in X}\sum_{a',b'\in X} \delta_{a,a'}\delta_{b,b'}(\epsilon_{a,b} \otimes \epsilon_{a',b'}) = J_X.
\end{aligned}$$

因此，$\Phi \otimes \Phi^\sharp$ 是一个并发关联；又因为 Φ 是保幺的，所以它是一个并发双关联。由于 $\mathcal{Q}^{\mathrm{bic}}_{\mathrm{loc}}$ 是凸的，我们有，所有形如 $\Phi \otimes \Phi^\sharp$ 的初等张量的凸组合都属于 $\mathcal{Q}^{\mathrm{bic}}_{\mathrm{loc}}$。

现在假设 $\Gamma = \sum_{i=1}^k \lambda_i\Phi_i \otimes \Phi_i^\sharp$ 是一个凸组合，其中 Φ_i是一个酉信道，$i = 1$，.....，k。假设 $\Phi_i(\omega) = U_i^*\omega U_i, \omega \in M_X$，其中 $U_i \in M_X$ 是一个酉算子。由于 U_i 具有标量元素，它自动是双酉，因此导出 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$的一个典范（一维）保幺 *-表示。一个标准论证现在表明，对于有限维交换 C*-代数 $\mathcal{D}_k$上的一个迹，$\Gamma = \Gamma_\tau$。

最后，若 $\Gamma = \Gamma_\tau$，其中 τ 可经由一个交换 C*-代数分解，则 (iii) 中第一段的论证表明 $\Gamma \in \mathcal{Q}^{\mathrm{bic}}_{\mathrm{loc}}$。□

注 6.8. 假设 τ是 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$上的可核迹。由 [13,定理 6.2.7],, 泛函 $\mu\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \otimes_{\min} C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$, 定义为$\mu(u \otimes v^{\mathrm{op}}) = \tau(uv)$, 是一个定义良好的态。令 $s = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial)$（一个定义在 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)\otimes_{\min} C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}}$上的态），可以类似于定理 6.7 证明的第一段进行推导，从而得出 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bic}}$。反过来，我们不知道每个 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qa}}^{\mathrm{bic}}$是否都来自 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$上的一个可核迹。

回顾一下， [47] 一个定义在 (X, X, X, X) 上的无信号相关 p 称为双同步的，当且仅当

$$p(a, b|x, x) \neq 0 \implies a = b \quad \text{and} \quad p(a, a|x, y) \neq 0 \implies x = y.$$

在 [47, 注 2.1] 中已证明，类型为 $\mathsf{t} \neq \mathsf{ns}$ 的双同步相关是（经典）双相关。下面的命题描述双同步性与并发性之间的关系。

命题 6.9. 设 $\mathsf{t} \in \{\mathsf{loc}, \mathsf{q}, \mathsf{qc}\}$。若 $p \in \mathcal{C}_{\mathrm{t}}$ 是定义在四元组 (X, X, X, X) 上的双同步无信号相关，则存在 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{bic}}$，使得

$$\mathcal{E}_p = \Delta \circ \Gamma|_{\mathcal{D}_{XX}}. \tag{54}$$

证明. 我们先考虑 $\mathsf{t} = \mathsf{qc}$ 的情形。设 $p \in \mathcal{C}_{\mathrm{qc}}$ 是一个双同步相关。根据 [47, 定理 2.2], , 存在一个迹态 $\tau\colon C(S_X^+) \to \mathbb{C}$, 使得

$$p(a, b|x, y) = \tau(p_{a,x} p_{b,y}), \quad x, y, a, b \in X. \tag{55}$$

Let

$$p_{x,x'a,a'} := p_{a,x}^* p_{a',x'} = p_{a,x} p_{a',x'}, \quad x, x', a, a' \in X,$$

并令 $C(\mathbb{P}S_X^+)$ 为 $C(S_X^+)$ 的子代数，由形如 $p_{x,x',a,a'}$, $x, x', a, a' \in X$ 的元素生成。由于每个量子置换都是双酉的，因此存在一个保单位 *-同态 $\pi\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to C(\mathbb{P}S_X^+)$，满足

$$\pi(e_{x,x',a,a'}) = p_{x,x',a,a'}, \quad x, x', a, a' \in X.$$

令 $\tilde{\tau} = \tau \circ \pi$; 因此， $\tilde{\tau}$是 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 上的迹态，从而根据定理 6.7， $\Gamma_{\tilde{\tau}}$ 是量子可交换并发无信号双相关。此外，如果 x， $y \in X$ 那么

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ \Gamma_{\tilde{\tau}})(\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}) &= \sum_{a,b \in X} \tilde{\tau}(e_{x,x,a,a} e_{y,y,b,b}) \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} \\
&= \sum_{a,b \in X} \tau(p_{x,x,a,a} p_{y,y,b,b}) \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} \\
&= \sum_{a,b \in X} \tau(p_{a,x}^* p_{a,x} p_{b,y}^* p_{b,y}) \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} \\
&= \sum_{a,b \in X} \tau(p_{a,x} p_{b,y}) \epsilon_{a,a} \otimes \epsilon_{b,b} = \mathcal{E}_p(\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y}),
\end{aligned}$$

从而得到（54）。

情形 t =q 和 t = loc 类似。 □

7. The quantum graph isomorphism game

在本节中，我们将第6节研究的并发双相关视为非交换图同构博弈的策略。这使我们能够定义不同类型的非交换图的量子同构的量子信息版本，并根据底层图所产生的关系对其进行刻画。

7.1. 量子交换同构。文献中已经研究了若干相关的量子图概念（见 [9, 15, 20]）。这里我们采用 [52], [51] 和 [11]中使用的概念。设 X 为有限集， $H = \mathbb{C}^X$，并回顾一下， H^{d} 表示 H的对偶（巴拿赫）空间。注意，作为加法群， H^{d} 可与 H等同；我们用 $\bar{\zeta}$ 表示 H^{d}中的元素，它对应于 H 中的向量 ζ （因此， $\bar{\zeta}\colon H \to \mathbb{C}$由 $\bar{\zeta}(\xi) = \langle \xi, \zeta\rangle$给出）。令 $\theta\colon H \otimes H \to \mathcal{L}(H^{\mathrm{d}}, H)$为如下线性映射

$$\theta(\xi \otimes \eta)(\bar{\zeta}) = \langle \xi, \zeta\rangle \eta, \quad \zeta \in H.$$

我们有

$$\theta((S \otimes T)\zeta) = T\theta(\zeta)S^{\mathrm{d}}, \quad \zeta \in H \otimes H,\ S, T \in \mathcal{L}(H). \tag{56}$$

对于子空间 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$， 令

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \{\theta(\zeta) : \zeta \in \mathcal{U}\}.$$

我们令 $\partial_X\colon (\mathbb{C}^X)^{\mathrm{d}} \to \mathbb{C}^X$ 为由 $\partial_X(\bar{e}_x) = e_x, x \in X$ 给出的线性映射，并令 $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} := \mathcal{S}_{\mathcal{U}}\partial_X^{-1}$；因此， $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{C}^X)$。

我们用 $\mathrm{m}\colon \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}$ 表示由下式给出的映射

$$\mathrm{m}(\zeta) = \left\langle \zeta, \sum_{x \in X} e_x \otimes e_x \right\rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X.$$

另令 $\mathfrak{f}\colon \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$ 为由 $\mathfrak{f}(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$ 给出的翻转算子。

定义 7.1. 顶点集为 X 的量子图是一个线性子空间$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$，其斜对称性体现在 $\mathrm{m}(\mathcal{U}) = \{0\}$，对称性体现在$\mathfrak{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$。

下文中，对于子空间 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$，我们用 $P_{\mathcal{U}}$表示从 $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$到 $\mathcal{U}$的正交投影；因此， $P_{\mathcal{U}} \in M_{XX}$。对于顶点集为 X的经典（简单、无向）图 G，我们用 $\sim$ （或在需要澄清时用 $\sim_G$ ）表示 G的邻接关系。图 G产生量子图

$$\mathcal{U}_G = \mathrm{span}\{e_x \otimes e_y : x \sim y\},$$

并记为 $P_G = P_{\mathcal{U}_G}$；注意 $P_G \in \mathcal{D}_{XX}$，并且

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}_G} = \mathrm{span}\{\epsilon_{x,y} : x \sim y\}$$

˜ 是 M_X 的一个无迹自伴子空间。更一般地，对于任意量子图 $\mathcal{U}$，$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} \subseteq M_X$ 始终是一个无迹且在转置下不变的子空间；这是 Stahlke 的量子图 [51]，在我们的设定下对应的适当版本，其中无迹性和自伴性作为定义的一部分予以假定。

为引出下文的定义 7.2，我们先回顾图 [1] 和 G 的图同构博弈，其中两者的顶点集均为 X。对于元素 $x, y \in X$，我们用 $\mathsf{rel}_G(x, y)$ 表示集合 $\{=, \sim, \not\sim\}$中的元素，它描述图 G中点对 (x, y) 的邻接关系。若关联 $p \in \mathcal{C}_{\mathrm{t}}$ 是 (G, H)-同构游戏的完美 t-策略，则p 是双同步的，并且

$$p(a,b|x,y) = 0, \text{ if } \mathrm{rel}_G(x,y) \neq \mathrm{rel}_H(a,b) \text{ or } \mathrm{rel}_H(x,y) \neq \mathrm{rel}_G(a,b). \tag{57}$$

注意，对于给定的相关类型 t，顶点集为 X 的两个图 G 和 H 是 t-同构的 [1]，当且仅当存在一个定义在四元组 (X, X, X, X) 上、类型为 t 的双同步双相关 p，使得

$$\omega \in \mathcal{D}^{+}_{XX} \text{ and } \omega = P_G \omega P_G \implies \Gamma(\omega) = P_H \Gamma(\omega) P_H \tag{58}$$

and

$$\sigma \in \mathcal{D}^{+}_{XX} \text{ and } \sigma = P_H \sigma P_H \implies \Gamma^*(\sigma) = P_G \Gamma^*(\sigma) P_G. \tag{59}$$

事实上，条件 (58) 等价于要求：若 $x \sim_G y$ 但 $a \not\sim_H b$，则 $p(a, b|x, y) = 0$；而 (59) 等价于要求：若$a \sim_H b$ 但 $x \not\sim_G y$，则 $p(a, b|x, y) = 0$。这两个条件合在一起，等价于 (57)。

回顾 [52, 11]，若 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$ 是量子图，且 $P = P_{\mathcal{U}}$和 $Q = P_{\mathcal{V}}$，则量子同态博弈 $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 的完美策略是满足下述条件的 QNS 关联 $\Gamma : M_{XX} \to M_{XX}$

$$\omega \in M^{+}_{XX} \text{ and } \omega = P\omega P \implies \Gamma(\omega) = Q\Gamma(\omega)Q.$$

定义 7.2。设 t $\in$ {loc, q, qa, qc, ns}。若存在 $\Gamma \in \mathcal{Q}^{\mathrm{bic}}_{\mathrm{t}}$使得 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 t-同构的，记作 $\mathcal{U} \cong_{\mathrm{t}} \mathcal{V}$，则

(i) Γ 是 $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$的完美策略，并且 (ii)

Γ^* 是 $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$的完美策略。

注 7.3。虽然本节主要关注量子图，但需要指出的是，为了第 8 节中的论述，定义 7.2 可以更一般地表述，其中涉及的子空间 $\mathcal{U}$ 和$\mathcal{V}$ 属于 $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$，而它们不一定是量子图。

在下一个定理中，我们给出关系 $\mathcal{U} \cong_{\mathrm{qc}} \mathcal{V}$ 的算子代数刻画。我们回顾腿编号记法：若 $\mathfrak{F} : M_{XX} \otimes \mathcal{B}(H) \to M_{XX} \otimes \mathcal{B}(H)$ 是由下式给出的（由酉算子实现的）同构，

$$\mathfrak{F}(S \otimes T \otimes R) = T \otimes S \otimes R, \quad S, T \in M_X, R \in \mathcal{B}(H),$$

对于 $U=(U_{a,\ x})_{a,\ x}\in M_X\otimes\mathcal{B}(H)$，我们记作 $U_{2,\ 3}=I_X\otimes U$，以及 $U_{1,\ 3}=\mathfrak{F}(I_X\otimes U)$。注意，$U_{2,\ 3}$，$U_{1,\ 3}\in M_{XX}\otimes\mathcal{B}(H)$ 和

$$U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^{*}=\sum_{x,y,a,b\in X}\epsilon_{x,a}\otimes\epsilon_{y,b}\otimes U_{a,x}U_{b,y}^{*}. \tag{60}$$

为表述下一个定理，令 $\bar{A}=A^{\mathrm{t}*}$，并称一个冯·诺伊曼代数为迹态的，如果它存在一个迹态。若 H 是一个希尔伯特空间，且 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是一个冯·诺伊曼代数，则算子矩阵 $U=(U_{a,\ x})_{a,\ x\in X}$ 称为 $\mathcal{N}$-对齐的，如果对于所有 x、y、a、$b\in X$，都有 $U_{a,\ x}^{*}U_{b,\ y}\in\mathcal{N}$。

定理 7.4。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{C}^X\otimes\mathbb{C}^X$ 中的量子图，并令 $P=P_{\mathcal{U}}$ 和 $Q=P_{\mathcal{V}}$。

以下各项等价：

(i) $\mathcal{U}\cong_{\mathrm{qc}}\mathcal{V}$;

(ii) *there exists a tracial von Neumann algebra* $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}(H)$ *and an* $\mathcal{N}$*-aligned bi-unitary* $U=(U_{a,x})_{a,x}\in M_X(\mathcal{B}(H))$ *such that*

$$(P\otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^{*}(Q^{\perp}\otimes I)=0\quad\textit{and}\quad(\bar{P}^{\perp}\otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^{*}(\bar{Q}\otimes I)=0;$$

(iii) 存在一个迹冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 以及一个 $\mathcal{N}$-对齐的双酉 $U=(U_{a,\ x})_{a,\ x}\in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得

$$U(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\otimes 1)U^{*}\subseteq\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{B}(H)\ \textit{and}\ U^{\mathrm{t}}(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}\otimes 1)U^{\mathrm{t}^{*}}\subseteq\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\otimes\mathcal{B}(H).$$

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 对于向量 $\xi=\sum_{x,\ y\in X}\alpha_{x,\ y}e_x\otimes e_y\in\mathbb{C}^X\otimes\mathbb{C}^X$，令 $\overline{\xi}=\sum_{x,\ y\in X}\overline{\alpha}_{x,\ y}e_x\otimes e_y$ 并设

$$Y_{\xi}=\sum_{x,y\in X}\alpha_{x,y}\epsilon_{x,y};$$

注意 $Y_{\xi}\in M_X$（并且，记号 $\overline{\xi}$ 的使用与第 7.1 小节开头的定义一致，差别仅在于一种典范的识别）。令 $\Gamma\colon M_{XX}\to M_{XX}$ 为满足定义 7.2 中条件（i）和（ii）的并发量子交换双相关。

由定理 6.7，存在一个迹态 $\tau\colon C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^{+})\to\mathbb{C}$，使得

$$\Gamma(e_{x,x'}\otimes e_{y,y'})=\left(\tau(u_{x,x',a,a'}u_{y',y,b',b})\right)_{a,a',b,b'},\quad x,x',y,y'\in X.$$

令 π_{τ} 为通过 GNS 构造与 τ 相关联的 *-表示，并令 ζ 为相应的循环向量。那么，$\mathcal{N}=\pi_{\tau}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^{+}))''$ 是一个有限冯·诺伊曼代数，其上与 ζ 对应的向量态是忠实的迹态。

设 $E=(\pi_{\tau}(u_{x,\ x',\ a,\ a'}))_{x,\ x',\ a,\ a'}$。与 [11, 定理 5.5] 的证明一样，我们有

$$\langle\Gamma(\xi\xi^{*})\eta,\eta\rangle=(\mathrm{Tr}\otimes\tau)\left(E(Y_{\bar{\xi}}\otimes Y_{\eta}\otimes 1_{\mathcal{A}})E(Y_{\xi}^{*}\otimes Y_{\eta}^{*}\otimes 1_{\mathcal{N}})\right),$$

由 τ 的忠实性可知，

$$E\left(Y_{\bar{\xi}}\otimes Y_{\eta}\otimes I\right)E=0,\quad\xi\in\mathcal{U},\eta\in\mathcal{V}^{\perp}.$$

根据引理 6.5 (ii)，存在一个双酉 $U=(U_{a,\ x})_{a,\ x}$，使得 $E=(U_{a,\ x}^{*}U_{a',\ x'})_{x,\ x',\ a,\ a'}$。记 $\xi=\sum_{x,\ y\in X}\alpha_{x,\ y}e_x\otimes e_y$ 和 $\eta=\sum_{a,\ b\in X}\beta_{a,\ b}e_a\otimes e_b$，我们计算得到

$$E\left(Y_{\bar{\xi}}\otimes Y_{\eta}\otimes I\right)E=\left(\sum_{x',y',a',b'\in X}\overline{\alpha_{x',y'}}\beta_{a',b'}U_{a,x}^{*}U_{a',x'}U_{b',y'}^{*}U_{b,y}\right)_{x,y,a,b}.$$

因此 $\sum_{x',y',a',b'}\alpha_{x',y'}\beta_{a',b'}U_{a,x}^{*}U_{a',x'}U_{b',y'}^{*}U_{b,y}=0$ 对于任意 $x,\ y,\ a,\ b$。令 $R_{\xi,\ \eta}=\sum_{x',y',a',b'}\alpha_{x',y'}\beta_{a',b'}U_{a',x'}U_{b',y'}^{*}$，我们有

$$U_{a,x}^{*}R_{\xi,\eta}U_{b,y}=0,\quad x,y,a,b\in X.$$

由此可得

$$R_{\xi,\eta}=\sum_{x,y\in X}U_{a,x}U_{a,x}^{*}R_{\xi,\eta}U_{b,y}U_{b,y}^{*}=0. \tag{61}$$

令 $F:=U_{\mathrm{t}1,3}U_{2,3}^{*}$；于是，$F\in M_{XX}\otimes\mathcal{B}(H)$。根据 (61)，算子 F 满足以下条件

$$\langle F(\eta\otimes h),\xi\otimes g\rangle=0,\quad h,g\in H,$$

这意味着 $(P\otimes I)F(Q^{\perp}\otimes I)=0$。

令 $\tilde{E}:=(U_{a,x}^{*}U_{a',x'})_{a,a',x,x'}$。由对称性，

$$\tilde{E}(Y_{\bar{\xi}'}\otimes Y_{\eta'}\otimes I)\tilde{E}=0,\quad \xi'\in\mathcal{V},\eta'\in\mathcal{U}^{\perp}.$$

设定

$$\tilde{F}:=U_{1,3}\bar{U}_{2,3}=\sum_{x,y,a,b\in X}\epsilon_{a,x}\otimes\epsilon_{b,y}\otimes U_{a,x}U_{b,y}^{*},$$

我们类似地得到

$$\langle\tilde{F}(\eta'\otimes h),\xi'\otimes g\rangle=0,\quad \xi'\in\mathcal{V},\eta'\in\mathcal{U}^{\perp},h,g\in H,$$

因此

$$(Q\otimes I)\tilde{F}(P^{\perp}\otimes I)=0. \tag{62}$$

设 $\mathfrak{t}:\ M_X\to M_X$ 是由 $\mathfrak{t}(T)=T^{\mathrm{t}}$ 给出的映射。由于算子 $P^{\perp}$ 和 Q 是自伴的，$(\mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t})(Q)=\bar{Q}$ 且 $(\mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t})(P^{\perp})=\bar{P}^{\perp}$。因此，将映射 $\mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t}\otimes\mathrm{id}$ 应用于关系 (62)，可得 $(\bar{P}^{\perp}\otimes I)F(\bar{Q}\otimes I)=0$

(ii)⇒(i) 假设 $(P\otimes I)U_{\mathrm{t}1,3}U_{2,3}^{*}(Q^{\perp}\otimes I)=0$ 且 $(\bar{P}^{\perp}\otimes I)U_{\mathrm{t}1,3}U_{2,3}^{*}(\bar{Q}\otimes I)=0$。根据定理 6.7 (i)，由 $\Gamma(\epsilon_{x,x'}\otimes\epsilon_{y,y'})=\left(\tau((U_{a,x}^{*}U_{a',x'}U_{b',y'}^{*}U_{b,y})\right)_{a,a',b,b'}$ 给出的线性映射 Γ 是一个相容的量子可交换双关系。反转前几段中的论证，并使用 [11, 定理 5.5], 的证明，我们得到：如果 $E=(U_{a,x}^{*}U_{a',x'})_{x,x',a,a'}$，那么

$$\langle\Gamma(\xi\xi^{*}),\eta\eta^{*}\rangle=(\mathrm{Tr}\otimes\tau)\left(E(Y_{\bar{\xi}}\otimes Y_{\eta}\otimes I)E(Y_{\bar{\xi}}^{*}\otimes Y_{\eta}^{*}\otimes I)\right)=0,$$

对于所有 $\xi \in \mathcal{U}$ 以及所有 $\eta \in \mathcal{V}^{\perp}$。类似地,

$$\langle \Gamma^*(\xi'\xi'^*), \eta'\eta'^* \rangle = 0 \text{ for all } \xi' \in \mathcal{V}, \eta' \in \mathcal{U}^{\perp}.$$

由此可得 $\mathcal{U} \cong_{\mathrm{qc}} \mathcal{V}$ 通过 Γ。

(ii)⇒(iii) 对于每个 $\xi \in \mathcal{U}$、$\eta \in \mathcal{V}^{\perp}$、$h$、$g \in H$，我们有

$$\langle U_{1,3}^{\mathrm{t}} U_{2,3}^*(\eta \otimes h), \xi \otimes g \rangle = \langle \eta \otimes h, U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi \otimes g) \rangle = 0. \tag{63}$$

考虑 $U_{2,\ 3}\bar{U}_{1,\ 3}$ 作为作用于 $\mathbb{C}^{XX} \otimes \mathcal{B}(H)$ 上的线性算子，令

$$(U_{2,3}\bar{U}_{1,3})(\xi \otimes T) := \sum_{x,y,a,b \in X} (\epsilon_{b,y} \otimes \epsilon_{a,x})\xi \otimes U_{a,x}U_{b,y}^* T,\ \xi \in \mathbb{C}^{XX}, T \in \mathcal{B}(H).$$

固定 $\xi \in \mathbb{C}^{XX}$。我们有

$$\begin{aligned}
&(\theta \otimes \mathrm{id})(U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi \otimes I)) \\
&= \sum_{x,y,a,b \in X} \theta((\epsilon_{b,y} \otimes \epsilon_{a,x})\xi) \otimes U_{a,x}U_{b,y}^* = \sum_{x,y,a,b \in X} \epsilon_{a,x}\theta(\xi)\epsilon_{b,y}^{\mathrm{d}} \otimes U_{a,x}U_{b,y}^* \\
&= \left(\sum_{a,x \in X} \epsilon_{a,x} \otimes U_{a,x} \right) (\theta(\xi) \otimes I) \left(\sum_{b,y \in X} \epsilon_{b,y}^{\mathrm{d}} \otimes U_{b,y}^* \right).
\end{aligned}$$

注意，$\partial_X \epsilon_{b,\ y}^{\mathrm{d}} \partial_X^{-1} = \epsilon_{y,\ b}$。因此,

$$\begin{aligned}
&(\theta \otimes \mathrm{id})(U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi \otimes I))(\partial_X^{-1} \otimes I) \\
&= \left(\sum_{a,x \in X} \epsilon_{a,x} \otimes U_{a,x} \right) \left(\theta(\xi)\partial_X^{-1} \otimes I \right) \left(\sum_{b,y \in X} \partial_X \epsilon_{b,y}^{\mathrm{d}} \partial_X^{-1} \otimes U_{b,y}^* \right) \\
&= U(\theta(\xi)\partial_X^{-1} \otimes I)U^*.
\end{aligned} \tag{64}$$

~ ~为了证明 $U(\mathcal{S}_{\mathcal{U}} \otimes 1)U^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{B}(H)$，令 $\xi \in \mathcal{U}$，并分别固定 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}^{\perp}$ 的标准正交基 $(\eta_i)_{i \in \mathbb{I}}$ 和 $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{J}}$。于是

$$U(\theta(\xi)\partial_X^{-1} \otimes I)U^* = \sum_{i \in \mathbb{I}} \theta(\eta_i)\partial_X^{-1} \otimes R_i + \sum_{j \in \mathbb{J}} \theta(\zeta_j)\partial_X^{-1} \otimes S_j$$

对于某些 R_i、$S_j \in \mathcal{B}(H)$、$i \in \mathbb{I}$、$j \in \mathbb{J}$。由前面的论证可得

$$(\theta \otimes \mathrm{id})(U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi \otimes I)) = (\theta \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{i \in \mathbb{I}} \eta_i \otimes R_i + \sum_{j \in \mathbb{J}} \zeta_j \otimes S_j \right)$$

and

$$U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi \otimes I) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \eta_i \otimes R_i + \sum_{j \in \mathbb{J}} \zeta_j \otimes S_j.$$

令 $\omega_{g,h}$ 为定义在 $\mathcal{B}(H)$ 上的向量泛函，由 $\omega_{g,h}(T) = \langle Tg, h \rangle$ 给出；并且对于 $\eta \in \mathbb{C}^{XX}$，令 ℓ_η 为定义在 $\mathbb{C}^{XX}$ 上的线性泛函，由 $\ell_\eta(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$ 给出。

Then

$$\begin{aligned}(\ell_\eta\otimes\omega_{g,h})(U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi\otimes I))) &= \sum_{x,y,a,b\in X}\langle(\epsilon_{x,a}\otimes\epsilon_{y,b})\xi,\eta\rangle\langle U_{a,x}U_{b,y}^{*}g,h\rangle\\ &= \langle U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi\otimes g),\eta\otimes h\rangle,\end{aligned}$$

而

$$(\ell_\eta\otimes\omega_{g,h})\left(\sum_{i\in\mathbb{I}}\eta_i\otimes R_i+\sum_{j\in\mathbb{J}}\zeta_j\otimes S_j\right)=\sum_{i\in\mathbb{I}}\langle\eta_i,\eta\rangle\langle R_ig,h\rangle+\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle\zeta_j,\eta\rangle\langle S_jg,h\rangle.$$

现在取 $\eta=\zeta_j$，由 (63) 可得

$$(\ell_\eta\otimes\omega_{g,h})\left(U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(\xi\otimes I))\right)=0$$

并且

$$(\ell_\eta\otimes\omega_{g,h})\left(\sum_{i\in\mathbb{I}}\eta_i\otimes R_i+\sum_{j\in\mathbb{J}}\zeta_j\otimes S_j\right)=\|\zeta_j\|^2\langle S_jg,h\rangle;$$

因此，$\langle S_jg,\ h\rangle=0$。由于 g 和 h 可以任意选取，故对所有 $j\in\mathbb{J}$，$S_j=0$。因此

$$U(\theta(\xi)\partial_X^{-1}\otimes I)U^{*}=\sum_{i\in\mathbb{I}}\theta(\eta_i)\partial_X^{-1}\otimes R_i\subseteq\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{B}(H).$$

将类似的论证应用于 $(Q\otimes I)\ \tilde{F}(P^{\perp}\otimes I)\ =0$，其中 $\tilde{F}=U_{1,3}\bar{U}_{2,3}$，可得

$$U^{\mathrm{t}}(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}\otimes 1)(U^{\mathrm{t}})^{*}\subseteq\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\otimes\mathcal{B}(H).$$

(iii)⇒(ii) 可由 (64) 并通过反转蕴含 (ii)⇒(iii) 中的论证得到。□

注。（i）定理 7.4 证明中的论证可用于得出：$\mathcal{U}\to^{\mathrm{qc}}\mathcal{V}$ 当且仅当存在一个迹泛诺依曼代数 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 和一个 $\mathcal{N}$-对齐的等距算子 $V=(V_{a,\ x})_{a,\ x}$，$V_{a,\ x}\in\mathcal{B}(H)$，使得

$$V(\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\otimes 1)V^{*}\subseteq\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{B}(H).$$

这补充了在 [11, 定理 5.7]中得到的刻画。

（ii）定理 7.4 的类似结果也适用于 $\mathcal{U}\simeq_{\mathrm{q}}\mathcal{V}$，此时空间 H 是有限维的。下文第 7.2 小节将讨论 $\mathcal{U}\simeq_{\mathrm{loc}}\mathcal{V}$ 的情形。

推论 7.5。设 G和 H 是顶点集为 X的图。以下命题等价：

(i) $\mathcal{U}_G\cong_{\mathrm{qc}}\mathcal{U}_H$；(ii) 存在一个迹泛诺依曼代数 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 以及一个与 $\mathcal{N}$- 对齐的双酉 $U=(U_{a,x})_{a,x}\in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得 $U_{a,x}U_{b,y}^{*}=0$如果 $x\sim_G y$ 和 $a\not\sim_H b$，或 $x\not\sim_G y$ 和 $a\sim_H b$；

(iii) 存在一个迹冯诺依曼代数 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 以及一个与 $\mathcal{N}$- 对齐的双酉 $U = (U_{a,x})_{a,x} \in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得

$$(P_G \otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^* = U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^*(P_H \otimes I);$$

(iv) 存在一个迹冯诺依曼代数 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 和一个双酉算子 $U = (U_{a,\,x})_{a,\,x} \in M_X(\mathcal{B}(H))$，使得 $U_{a,\,x}^* U_{b,\,y} \in \mathcal{N}$, $x, y, a, b \in X$，并且

$$U(\mathcal{S}_G \otimes 1)U^* \subseteq \mathcal{S}_H \otimes \mathcal{B}(H) \text{ and } U^{\mathrm{t}}(\mathcal{S}_H \otimes 1)U^{\mathrm{t}*} \subseteq \mathcal{S}_G \otimes \mathcal{B}(H).$$

证明。我们有 $\mathcal{U}_G = \{e_x \otimes e_y \colon x \sim_G y\}$ 和 $\mathcal{U}_H = \{e_a \otimes e_b \colon a \sim_H b\}$。由于 $\bar{P}_G = P_G$ 和 $P_H = P_H$，条件

$$(P_G \otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^*(P_H^{\perp} \otimes I) = 0 \text{ and } (\bar{P}_G^{\perp} \otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^*(\bar{P}_H \otimes I) = 0 \tag{65}$$

等价于 $(P_G \otimes I)U_{t1,\,3}U_{2,\,3}^* = U_{1,\,3}^{\mathrm{t}}U_{2,\,3}^*(P_H \otimes I)$，并且在 $x \sim_G y$ 和 $a \not\sim_H b$ 或 $x \not\sim_G y$ 和 $a \sim_H b$成立时，也等价于 $U_{a,\,x}U_{b,\,y}^* = 0$ 。该陈述现在由定理 7.4 得出。□

注 7.6。推论 7.5 中对双酉 U 的条件等价于条件 $A_{H^c} * U(A_G \otimes I)U^* = 0$和 $A_{G^c} * U^{\mathrm{t}}(A_H \otimes I)\,\bar{U} = 0$，其中 G^c 是 G 的补集，而 $*$ 表示 Schur 乘积。我们可以为 loc 和 q 类型表述类似的刻画。如果双酉 U 实际上是量子置换（也就是说，U 的各项 $u_{i,\,j}$ 都是正交投影），那么这些条件等价于条件 $U(A_G \otimes I)U^* = A_H \otimes I$。事实上，若量子置换 U 满足 $A_{H^c} * U(A_G \otimes I)U^* = 0$，那么只要 $i \neq j$ 和 $i \not\sim_H j$成立，我们就有

$$0 = (U(A_G \otimes I)U^*)_{i,j} = \sum_{k \sim_G \ell} u_{i,k}u_{j,\ell}.$$

对任意满足 $k \sim_G \ell$ 的固定 k，左乘 $u_{i,k}$，可得$u_{i,k}u_{j,\ell} = 0$，只要 $i \not\sim_H j$, $i \neq j$ 和 $k \sim_G \ell$ 成立。类似地，若 $i = j$ 且 $k \sim_G \ell$，则 $k \neq \ell$，因此 $u_{i,k}u_{j,\ell} = 0$。

接下来，在上述论证中互换 G 和 H 的角色，并将 U 替换为魔幻酉矩阵 U^{t}，恒等式 $A_{G^c} * U^{\mathrm{t}}(A_H \otimes I)\,\bar{U} = 0$ 可得 $u_{k,i}u_{\ell,j} = 0$，只要 $i \not\sim_G j$, $i \neq j$ 和 $k \sim_H \ell$ 成立，或者 $i = j$ 且 $k \sim_H \ell$。

由此可知，若 $i \sim_H j$，则（假设 $n = |X|$）我们有

$$\begin{aligned}(U(A_G \otimes I)U^*)_{i,j} &= \sum_{k \sim_G \ell} u_{i,k}u_{j,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{j,k} + \sum_{k \sim_G \ell} u_{i,k}u_{j,\ell} + \sum_{\substack{k \not\sim_G \ell \\ k \neq l}} u_{i,k}u_{j,\ell} \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} u_{i,k}u_{j,\ell} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{i,k}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} u_{j,\ell}\right) = 1 = (A_H)_{i,j}.\end{aligned}$$

类似地，若 $i \not\sim_H j$，则要么 $i = j$，要么 $i \sim_{H^c} j$，两种情况下我们都得到

$$(U(A_G \otimes I)U^*)_{i,j} = \sum_{k \sim_G \ell} u_{i,k} u_{j,\ell} = 0 = (A_H)_{i,j}.$$

由此可得 $U(A_G \otimes I)U^* = A_H \otimes I$。反向结论显然。

7.2. 局部同构。本小节中，我们将注意力限制在局部类型的量子图同构上。

命题 7.7. 设 X 为有限集，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 为$\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X$中的量子图。以下条件等价：

(i) $\mathcal{U} \cong_{\text{loc}} \mathcal{V}$;
(ii) *there exists a unitary* $U \in M_X$ *such that* $(U \otimes \bar{U})(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

证明. (i)⇒(ii) 设 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\text{loc}}^{\text{bic}}$ 是一个满足定义 7.2 中关于量子图 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$所列条件的关联。根据定理 6.7 (iv)，$\Gamma = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi_i \otimes \Phi_i^\sharp$ 可表示为凸组合，其中 $\Phi_i : M_X \to M_X$ 是一个酉量子信道，$i = 1, \ldots\ldots, k$。定义 7.2 中的条件 (i) 和 (ii) 等价于

$$\left\langle \Gamma(P_{\mathcal{U}}), P_{\mathcal{V}}^\perp \right\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \left\langle \Gamma^*(P_{\mathcal{V}}), P_{\mathcal{U}}^\perp \right\rangle = 0. \tag{66}$$

迹泛函的单调性现在意味着，对于任意 $i = 1, \ldots, k$，$\Phi_i \otimes \Phi_i^\sharp$ 都满足定义 7.2 中的条件。因此，我们可以假设 $\Gamma = \Phi \otimes \Phi^\sharp$，其中 $\Phi : M_X \to M_A$ 是一个酉量子信道。令 $U \in M_X$为一个酉算子，使得 $\Phi(\omega) = U^* \omega U$，$\omega \in M_X$。直接验证可得

$$\Phi^\sharp(\omega) = \bar{U}^* \omega \bar{U}, \quad \omega \in M_X.$$

因此，

$$\Gamma(\omega) = (U \otimes \bar{U})^* \omega (U \otimes \bar{U}), \quad \omega \in M_{XX}.$$

现在，(66) 中的第一个条件意味着，对于任意 $\xi \in \mathcal{U}$，我们有

$$\left((U \otimes \bar{U})^* \xi\right)\left((U \otimes \bar{U})^* \xi\right)^* = (U \otimes \bar{U})^* (\xi\xi^*)(U \otimes \bar{U}) \le P_{\mathcal{V}},$$

也就是说，$(U \otimes U)^*(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$。另一方面，

$$\Gamma^*(\omega) = (U \otimes \bar{U}) \omega (U \otimes \bar{U})^*, \quad \omega \in M_{XX},$$

并利用对称性进行论证，可得 $(U \otimes U)(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$；因此，(ii) 得证。

(ii)⇒(i) 给定一个酉算子 $U \in M_X$，令 $\Phi(\omega) = U^* \omega U$，$\omega \in M_X$，且$\Gamma = \Phi \otimes \Phi^\sharp$。证明的第一部分中的论证表明，$\mathcal{U} \cong_{\text{loc}} \mathcal{V}$ 通过 Γ。□

注。命题 7.7 也可以等价地视为定理 7.4 的推论。事实上，注意到，根据定理 6.7 (iv) 及其证明，$\Gamma \in \mathcal{Q}_{\text{loc}}^{\text{bic}}$ 当且仅当 $\Gamma = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Gamma_i$ 是凸组合，其中$\Gamma_i(e_{x,\,x'} \otimes e_{y,\,y'}) = (\pi_i(u_{x,\,x',\,a,\,a'} u_{y',\,y,\,b',\,b}))_{a,\,a',\,b,\,b'}$对于某个 $*$-表示 $\pi_i : C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathbb{C}$。利用所有 Γ_i均为正这一事实，可以很容易地看出

可以假设 $k = 1$。令 $U = (u_{a,\ x})_{a,\ x} \in M_X$ 为与 π_1 相对应的酉算子，如蕴含关系 (i)⇒(ii) 的证明所示；我们有 U 满足相应的条件 (ii) 和 (iii)。特别地，$U\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}U^* \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}$且 $U_{\mathrm{t}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}(U_{\mathrm{t}})^* \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}$。由于 $\tilde{\mathcal{S}}^{\mathrm{t}}_{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}$和 $\tilde{\mathcal{S}}^{\mathrm{t}}_{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{V}}$，我们得到$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$，即$U^*\mathcal{S}_{\mathcal{V}}U \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$，这意味着$U^*\mathcal{S}_{\mathcal{V}}U = \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$。特别地，这表明$\bar{\ }$满足 $(U \otimes U)(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$。

命题 7.8. 设 G 和 H 为顶点集为 X的图。那么 $\mathcal{U}_G \cong_{\mathrm{loc}} \mathcal{U}_H$ 当且仅当 $G \cong H$。

证明. 图 G 与 H 之间的图同构 $\varphi : X \to X$ 导出置换酉算子 $U_\varphi : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$；令 $\Phi : M_X \to M_A$ 为由 U_φ给出的共轭作用，则关联 $\Phi \otimes \Phi^\sharp$ 实现了同构 $\mathcal{U}_G \cong_{\mathrm{loc}} \mathcal{U}_H$。

反过来，假设 $\mathcal{U}_G \cong_{\mathrm{loc}} \mathcal{U}_H$。由命题 7.7，存在一个$\bar{\ }$酉算子 $U \in M_X$，使得 $(U \otimes U)(\mathcal{U}_G) = \mathcal{U}_H$。令

$$\mathcal{S}_G = \mathrm{span}\{\epsilon_{x,y} : x \sim y \text{ or } x = y\},$$

现在我们有 $U\mathcal{S}_GU^* = \mathcal{S}_H$。根据 [43, 命题 3.1]， $G \cong H$。 □

推论 7.9. 存在量子图 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{U} \cong_{\mathrm{q}} \mathcal{V}$ 但 $\mathcal{U} \ncong_{\mathrm{loc}} \mathcal{V}$。

证明。根据 [1, 定理 6.4], ，存在图 G 和 H，使得 $G \cong_{\mathrm{q}} H$但 $G \ncong_{\mathrm{loc}} H$。根据命题 7.8， $\mathcal{U}_G \ncong_{\mathrm{loc}} \mathcal{U}_H$；为完成证明，我们证明 $\mathcal{U}_G \cong_{\mathrm{q}} \mathcal{U}_H$。根据 [36, 定理 2.1], ，存在一个量子置换矩阵 $(P_{x,\ a})_{x,\ a}$，其作用于一个有限维希尔伯特空间H，使得

$$P_{x,a}P_{y,b} = 0 \ \text{ if } x \sim_G y \ \&\ a \not\sim_H b, \ \text{ or } \ x \not\sim_G y \ \&\ a \sim_H b.$$

根据注 7.6， $\mathcal{U}_G \cong_{\mathrm{q}} \mathcal{U}_H$ □

7.3. 量子同构代数。设 X 为一个有限集，且$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^{XX}$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{XX}$ 为量子图。我们将引入一个 C*-代数，其迹性质反映同构游戏 $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$的性质。设 P（分别为 Q）是从 $\mathbb{C}^{XX}$ 到 $\mathcal{U}$（分别从 $\mathbb{C}^{XX}$到 $\mathcal{V}$）的投影。对于矩阵 S、$T \in M_{XX}$，定义一个线性映射

$$\gamma_{S,T} : M_{XX} \otimes C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \otimes M_{XX} \otimes C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^{\mathrm{op}} \to C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$$

令

$$\gamma_{S,T}(\omega \otimes u \otimes v^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Tr}(\omega(S \otimes T))uv, \quad \omega \in M_{XX} \otimes M_{XX},\ u, v \in C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+).$$

设定 $W = (u_{x,x',a,a'})_{x,x',a,a'} \in M_{XX} \otimes C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$，并令

$$\mathcal{I}_{P,Q} = \left\langle \gamma_{P,Q^\perp}\left(W \otimes W^{\mathrm{op}}\right), \gamma_{P^\perp,Q}\left(W \otimes W^{\mathrm{op}}\right) \right\rangle$$

为 $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 中由元素 $\gamma_{P,Q^\perp}(W \otimes W_{\mathrm{op}})$ 和 $\gamma_{P^\perp,Q}(W \otimes W_{\mathrm{op}})$ 生成的闭理想。设 $\mathcal{A}_{P,Q} = C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)/\mathcal{I}_{P,Q}$。我们用 $\dot{u}$ 表示元素 $u \in C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)$ 在 $\mathcal{A}_{P,Q}$ 中经商映射得到的像。

定理 7.10. 设 X 为一个有限集，$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^{XX}$（分别为 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{XX}$）为量子图，且 $P \in M_{XX}$（分别为 $Q \in M_{XX}$）为投影到 $\mathcal{U}$（分别为 $\mathcal{V}$）上的投影。对于 QNS 双相关 $\Gamma : M_{XX} \to M_{XX}$，以下条件等价：

(i) Γ是同构游戏 $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ 的一个完美量子可交换（分别为量子／局域）策略；(ii) 存在 $\mathcal{A}_{P,Q}$ 的一个迹 τ（分别为一个可通过有限维／阿贝尔 *-表示分解的迹 τ），使得

$$\Gamma(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}) = \left(\tau(\dot{u}_{x,x',a,a'}\dot{u}_{y',y,b',b})\right)_{a,a',b,b'}, \quad x, x', y, y' \in X. \tag{67}$$

证明。(i)⇒(ii) 我们首先考虑量子可交换情形。根据定理 6.7，存在一个迹态 τ: $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+) \to \mathbb{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma_\tau$。记

$$\tilde{W} = (u_{x,x',a,a'}u_{y',y,b',b}) \in M_{XXXX} \otimes C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+),$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma(\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}), \epsilon_{a,a'} \otimes \epsilon_{b,b'} \rangle = \tau(u_{x,x',a,a'}u_{y',y,b',b}) \\ = \;& \mathrm{Tr}(((\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}) \otimes (\epsilon_{a,a'} \otimes \epsilon_{b,b'}))\tau^{(XXXX)}(\tilde{W})) \\ = \;& \tau(\gamma_{\epsilon_{x,x'} \otimes \epsilon_{y,y'}, \epsilon_{a,a'} \otimes \epsilon_{b,b'}}(W \otimes W^{\mathrm{op}})). \end{aligned}$$

由线性性，

$$\langle \Gamma(S), T \rangle = \tau\left(\gamma_{S,T}(W \otimes W^{\mathrm{op}})\right), \quad S, T \in M_{XX}. \tag{68}$$

由于 Γ 是游戏 $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ 的一个完美策略，等式 (68) 意味着

$$\tau\left(\gamma_{P,Q^\perp}(W \otimes W^{\mathrm{op}})\right) = \tau\left(\gamma_{P^\perp,Q}(W \otimes W^{\mathrm{op}})\right) = 0.$$

设 $g = \gamma_{P,Q^\perp}(W \otimes W_{\mathrm{op}})$；我们声称 $g \in C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^+$。为此，令

$$\mathfrak{m} : M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)) \otimes_{\max} M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^{\mathrm{op}} \to M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))$$

为乘法映射，并注意，若 $u \in M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^+$ 且 $v^{\mathrm{op}} \in M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^{\mathrm{op}+}$，则

$$\mathfrak{m}(u \otimes v^{\mathrm{op}}) \in M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^+$$

（这可通过将 $M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))$ 和 $M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^{\mathrm{op}}$ 视为作用于同一希尔伯特空间上的彼此交换的 C*-代数来说明）。我们有 $W \in M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^+$，并且根据引理 6.6，$W_{\mathrm{op}} \in M_{XX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^{\mathrm{op}+}$。由此可得

$$\tilde{W} \in M_{XXXX}(C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+))^+.$$

对正矩阵 $P \otimes Q^\perp$ 取偏迹可得到一个正算子；注意到后一个算子与 g 相同后，结论便得证。

类似地，

$$h := \gamma_{P^\perp,Q}(W \otimes W^{\mathrm{op}}) \in C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)^+.$$

我们有

$$\tau(g) = \tau(h) = 0;$$

通过直接应用柯西-施瓦茨不等式， τ 湮灭了 $\mathcal{I}_{P,Q}$ ，因此诱导出一个迹（记号相同） $\tau:\mathcal{A}_{P,Q}\to\mathbb{C}$。等式 (67) 的有效性在 $\mathcal{A}_{P,Q}$ 上仍然成立。

现在考虑 Γ 是量子关联的情形。根据定理 6.7，存在一个迹 τ： $C(\mathbb{P}\mathcal{U}_X^+)\to\mathbb{C}$，它经过一个有限维 C*-代数分解，使得 $\Gamma=\Gamma_\tau$。根据前面的段落， τ 湮灭$\mathcal{J}_{P,\ Q}$。因此， τ 诱导出一个迹（仍记为） τ： $\mathcal{A}_{P,\ Q}\to\mathbb{C}$ ，它经过一个有限维 C*-代数分解，并且如前所述， $\Gamma=\Gamma_\tau$。 Γ 为局部类型的情形类似。

(ii)⇒(i) 可由关系 (68) 直接得到。 □

注 7.11. 根据恒等式 (68) 以及定理 7.4 的证明， $\mathcal{A}_{P,\ Q}$ 是由元素 $u_{a,\ x}^* u_{a',\ x'}$生成的通用 C*-代数，其中 $U=(u_{x,\ a})_{a,\ x}$ 是一个双酉矩阵，并满足以下关系

$$(P\otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^*(Q^\perp\otimes I)=0\quad\&\quad(\bar{P}^\perp\otimes I)U_{1,3}^{\mathrm{t}}U_{2,3}^*(\bar{Q}\otimes I)=0. \tag{69}$$

注 7.12。让我们考虑特殊情形 $P=Q$；这正是量子自同构 $\mathcal{U}\to\mathcal{U}$的情形。我们希望将 $\mathcal{A}_{P,\ P}$ 解释为量子图 $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}^X\otimes\mathbb{C}^X$的自同构量子群。这一设想可以通过赋予$\mathcal{A}_{P,\ P}$ 一个自然的余结合余乘法 Δ_P： $\mathcal{A}_{P,\ P}\to\mathcal{A}_{P,\ P}\otimes\mathcal{A}_{P,\ P}$来严格表述，从而使其成为一个 C*-代数紧量子群。

为了在 $\mathcal{A}_P$上构造这样的余乘法 $\Delta_{P,P}$，我们首先考虑 $C(\mathcal{U}_X^+)$，即由双酉 $U=(u_{x,a})$ 的各个元素生成的泛 C*-代数 $\in M_X(C(\mathcal{U}_X^+))$。众所周知，赋予余乘法 Δ： $C(\mathcal{U}_X^+)\to C(\mathcal{U}_X^+)\otimes C(\mathcal{U}_X^+)$，由 $\Delta(u_{x,a})=\sum_{c\in X}u_{x,\ c}\otimes u_{c,a}$在 $C(\mathcal{U}_X^+)$ [55]上给出后，C*-代数 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 是一个紧矩阵量子群。定义一个新的 C*-代数 $\mathcal{B}$，它由 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 对关系（69）取商得到。将 $\mathcal{B}$的典范生成元矩阵记为 $V=(v_{x,a})\in M_X(\mathcal{B})$。（注意，根据定义， V 是满足关系（69）的泛$X\times X$ 双酉。）我们声称，赋值 $\Delta_{\mathcal{B}}(v_{x,a}):=\sum_c v_{x,\ c}\otimes v_{c,a},\ (x,a\in X)$，确定了一个余结合余乘法 $\Delta_{\mathcal{B}}$： $\mathcal{B}\to\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$，从而使 $(\mathcal{B},\Delta_B)$ 成为一个紧矩阵~量子群。为此，只需验证由下式给出的矩阵 $V\in M_X\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$即可：

$$\tilde{V}=\left(\sum_{c\in X}v_{x,c}\otimes v_{c,a}\right)_{x,a\in X}=V_{1,2}V_{1,3},$$

~满足 V 的定义关系（也就是说， V是双酉的，并且满足 $M_X\otimes M_X\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 中的方程（69））。事实上，如果上述内容得到验证，就可以证明 $C(\mathcal{U}_X^+)$ 上的余乘法 Δ可通过商$C(\mathcal{U}_X^+)\to\mathcal{B}$分解，从而证明 $\Delta_{\mathcal{B}}$定义良好，并在 $\mathcal{B}$上诱导出量子群结构。

首先注意到这样这个直接由~关于 V的公式以及 V的双酉性得出。为验证式（69），我们首先注意到，在

$M_X \otimes M_X \otimes(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$中，我们有

$$\tilde{V}_{1,3}^{\mathrm{t}} \tilde{V}_{2,3}^{*} = (V_{1,3}V_{1,4})^{\mathrm{t}}(V_{2,3}V_{2,4})^{*} = V_{1,4}^{\mathrm{t}} V_{1,3}^{\mathrm{t}} V_{2,4}^{*} V_{2,3}^{*} = V_{1,4}^{\mathrm{t}} V_{2,4}^{*} V_{1,3}^{\mathrm{t}} V_{2,3}^{*},$$

因此

$$(P \otimes I)\tilde{V}_{1,3}^{\mathrm{t}} \tilde{V}_{2,3}^{*}(P^{\perp} \otimes I) = (P \otimes I \otimes I) V_{1,4}^{\mathrm{t}} V_{2,4}^{*} V_{1,3}^{\mathrm{t}} V_{2,3}^{*}(P^{\perp} \otimes I \otimes I)$$

$$= \quad (P \otimes I \otimes I) V_{1,4}^{\mathrm{t}} V_{2,4}^{*}(P \otimes I \otimes I) V_{1,3}^{\mathrm{t}} V_{2,3}^{*}(P^{\perp} \otimes I \otimes I) = 0,$$

其中，在最后一行中，我们对 V 使用关系 (69)，在中间插入额外的一份 $(P \otimes I \otimes I)$。这表明，对于 V，关系 (69) 中的第一个关系 ˜ 成立。类似地可以验证关系 (69) 中的第二个关系。

最后，我们注意到，$\mathcal{A}_{P,\ P}$ 按照构造，是由 $\mathcal{B}$ 中形如 $v_{x,\ a}^{*} v_{x',\ a'}$、$x$、$x'$、$a$、$a' \in X$ 的二阶元素生成的 $\mathcal{B}$ 的 C*-子代数。于是，$\mathcal{A}_{P,\ P}$ 上的自然余乘法 Δ_P，就是 $\Delta_{\mathcal{B}}$ 在 $\mathcal{A}_{P,\ P}$ 上的限制（注意，$\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{P,\ P}) \subseteq \mathcal{A}_{P,\ P} \otimes \mathcal{A}_{P,\ P}$）。

注 7.13. 注意，根据命题 7.7，$\mathcal{A}_{P,\ P}$ 上的任意特征都对应于一个酉算子 $U \in \mathcal{U}_X$，使得 $(U \otimes U)\mathcal{U} = \mathcal{U}$。换言之，通过盖尔范德对偶，$\mathcal{A}_{P,\ P}$ 的阿贝尔化对应于由酉矩阵构成的经典紧群

$$G = \{U \otimes \bar{U} : U \in \mathcal{U}_X \text{ and } (U \otimes \bar{U})\mathcal{U} = \mathcal{U}\} \subseteq M_X \otimes M_X.$$

因此，$(\mathcal{A}_{P,\ P}, \Delta_P)$ 这一对就是对 $\mathcal{U}$ 的自同构所构成的这一非常自然的矩阵群进行量子化的结果。

8. Connection with algebraic quantum isomorphisms

本节旨在阐明第7节中定义并刻画的量子图同构概念，与在 [9] 中定义和研究的概念之间的联系。关于后者，我们主要参考文献为 [15], ，并尽可能遵循其中的记号。

8.1. 代数同构作为一种更强的等价关系。本节始终固定一个有限集 X，并令 $n = |X|$。我们用 tr 表示 M_X 上的归一化迹；因此，$\mathrm{tr} = \frac{1}{|X|}\mathrm{Tr}$。为简化记号，我们将用 1 代替 I_X。

用 $L^2(M_X)$ 表示希尔伯特空间，其底层线性空间为 M_X，内积由对 (M_X, tr) 应用 GNS 构造得到。更具体地，若 $\Lambda\colon M_X \to L^2(M_X)$ 是 GNS 映射，则设$\langle \Lambda(a)\ \Lambda(b)\rangle = \mathrm{tr}(a^{*}b)$（注意，内积关于第二个变量是线性的）。下文中，我们将 M_X 视为 $\mathcal{B}(L^2(M_X))$ 的子代数，其中一个元素 $a \in M_X$ 所对应的算子（记号相同，定义如下）：

$$a\Lambda(b) = \Lambda(ab), \quad a, b \in M_X.$$

注意，$\Lambda(a) = a\Lambda(1), \quad a \in M_X$。

令 $m\colon L^2(M_X) \otimes L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 为乘法映射，即该映射定义为令 $m(\Lambda(a) \otimes \Lambda(b)) = \Lambda(ab)$，且 $m^{*}\colon L^2(M_X) \to$

$L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 为其希尔伯特空间伴随。为简化记号，我们通常省略 Λ 的使用，并将 m （分别将 m^*）视为从 $M_X \otimes M_X$ 到 M_X （分别从 M_X 到 $M_X \otimes M_X$）的映射。注意到

$$m^*(\epsilon_{i,j}) = n \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{i,k} \otimes \epsilon_{k,j}. \tag{70}$$

确实，对于 p、q、s、$t = 1$、.....、n，我们有

$$\langle m^*(\epsilon_{i,j}), \epsilon_{p,q} \otimes \epsilon_{s,t} \rangle = \langle \epsilon_{i,j}, \epsilon_{p,q}\epsilon_{s,t} \rangle = \operatorname{tr}(\epsilon_{j,i}\epsilon_{p,q}\epsilon_{s,t}), \tag{71}$$

而

$$\begin{aligned} \left\langle n \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{i,k} \otimes \epsilon_{k,j}, \epsilon_{p,q} \otimes \epsilon_{s,t} \right\rangle &= n \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr}(\epsilon_{k,i}\epsilon_{p,q}) \operatorname{tr}(\epsilon_{j,k}\epsilon_{s,t}) \\ &= n \operatorname{tr}(\epsilon_{s,i}\epsilon_{p,q}) \operatorname{tr}(\epsilon_{j,t}). \end{aligned} \tag{72}$$

因此，(71) 和 (72) 的右端相等，从而得到 (70)；进一步，这意味着

$$m^*(1) = n \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{i,j} \otimes \epsilon_{j,i}. \tag{73}$$

令 $\eta : \mathbb{C} \to L^2(M_X)$ 为由 $\eta(\lambda) = \lambda\Lambda(1)$ 给出的映射。回顾 [15,定义 2.4]，若自伴线性映射 $A: L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 具有以下性质，则称其为量子邻接矩阵：

(1) $m(A \otimes A)m^* = A$; (2) $(\mathrm{id} \otimes \eta^* m)($
$1 \otimes A \otimes 1)(m^*\eta \otimes \mathrm{id}) = A$; (3) $m(A \otimes 1)$
$m^* = 0$。

我们强调，条件 (3) 反映了这样一个事实：我们处理的是无环图的量子版本（在此语境下，有环图的量子化方式是要求条件 $m(A \otimes 1)m^* = 1$ instead of (3) [15, p.6]）。三元组 $G = (M_X, \operatorname{tr} A)$，其中 A 是量子邻接矩阵，在 [9, 15] 中称为量子图。为将这一概念与本文所采用的概念区分开来，以下我们将称其为代数量子图。

我们固定一个代数量子图 $G = (M_X, \operatorname{tr} A)$。我们将 G 与 M_X-双模 S' 联系起来，该双模由 A 在 $\mathcal{B}(L^2(M_X))$ 中生成（为简洁起见，省略了它对 G 的依赖）；因此，回想一下， M_X 的元素被视为作用在 $L^2(M_X)$ 上的算子，我们有

$$S' = \operatorname{span}\{aAb : a, b \in M_X\}. \tag{74}$$

若有 x、$y \in M_X$，则我们将 $\Theta_{\Lambda(x),\ \Lambda(y)}$ 记作由下式给出的秩一算子

$$\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}(\xi) = \langle \Lambda(x), \xi \rangle \Lambda(y), \quad \xi \in L^2(M_X).$$

令 $\Psi : \mathcal{B}(L^2(M_X)) \to M_X \otimes M_X$ 为如下给出的线性映射，

$$\Psi\left(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}\right) = x^* \otimes y, \quad x, y \in M_X;$$

由有限维性可知， Ψ 是双射。令 $e=(1\otimes A)(m^*(1))$；回顾式（73），可得

$$e=n\sum_{i,j=1}^{n}\epsilon_{i,j}\otimes A(\epsilon_{j,i}). \tag{75}$$

引理 8.1. 设 $G=(M_X,\mathrm{tr}\ A)$ 是一个代数量子图。那么

(i) $\Psi(A)=e$,
(ii) $e=e^*$, *and*
(iii) $\Psi(S')=\mathrm{span}\{(1\otimes a)e(b\otimes 1):a,b\in M_X\}\subseteq M_X\otimes M_X$.

证明. (i) 注意到 $\{\sqrt{n}\Lambda(\epsilon_{i,\ j})\}_{1\le i,\ j\le n}$ 是 $L^2(M_X)$ 的标准正交基；因此，

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{\sqrt{n}\Lambda(\epsilon_{i,j}),\sqrt{n}\Lambda(A(\epsilon_{i,j}))},$$

由 (75) 即可得出结论。

(ii) 设 $R=\Theta_{\Lambda(a),\ \Lambda(b)}$, $a,b\in M_X$ 和 $T:=(\mathrm{id}\otimes\eta^*m)(1\otimes R\otimes 1)(m^*\eta\otimes\mathrm{id})$。为简化记号，记 $m^*\eta(1)=m^*(1)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\otimes\eta_i$。若 $x,y\in M_X$，则

$$\begin{aligned}
&\langle\Lambda(x),T\Lambda(y)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{m}\langle\Lambda(x)\otimes\Lambda(1),(1\otimes m)(1\otimes\theta_{\Lambda(a),\Lambda(b)}\otimes 1)(\xi_i\otimes\eta_i\otimes\Lambda(y)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{m}\langle\Lambda(x)\otimes\Lambda(1),(1\otimes m)(\xi_i\otimes\langle\Lambda(a),\eta_i\rangle\Lambda(b)\otimes\Lambda(y)\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{m}\langle\Lambda(x)\otimes\Lambda(1),\xi_i\otimes\Lambda(by)\rangle\langle\Lambda(a),\eta_i\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{m}\langle\Lambda(x),\xi_i\rangle\langle\Lambda(a),\eta_i\rangle\langle\Lambda(1),\Lambda(by)\rangle\\
=&\langle\Lambda(x)\otimes\Lambda(a),m^*(1)\rangle\langle\Lambda(b^*),\Lambda(y)\rangle=\langle\Lambda(xa),\Lambda(1)\rangle\langle\Lambda(b^*),\Lambda(y)\rangle\\
=&\langle\Lambda(x),\Lambda(a^*)\rangle\langle\Lambda(b^*),\Lambda(y)\rangle,
\end{aligned}$$

这表明 $T=\Theta_{\Lambda(b^*)\ \Lambda(a^*)}$，进而得到 $\Psi(T)=b\otimes a^*=\mathfrak{f}(\Psi(R))$，其中 $\mathfrak{f}$ 是翻转映射。由线性性，我们得到

$$\Psi(\mathrm{id}\otimes\eta^*m)(1\otimes A\otimes 1)(m^*\eta\otimes\mathrm{id}))=\mathfrak{f}(\Psi(A))$$

因此，由 (i) 和条件 (2)，$e=\mathfrak{f}(e)$。

此外，

$$A^*=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{\sqrt{n}\Lambda(\epsilon_{i,j}),\sqrt{n}\Lambda(A(e_{i,j}))}\right)^*=\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{\sqrt{n}\Lambda(A(e_{i,j})),\sqrt{n}\Lambda(\epsilon_{i,j})},$$

因此

$$e = \Psi(A) = \Psi(A^*) = n \sum_{i,j=1}^{n} A(\epsilon_{i,j})^* \otimes \epsilon_{i,j} = \mathfrak{f}(e^*),$$

给出 $e = e^* = \mathfrak{f}(e)$。

(iii) 该断言由以下事实得出

$$\Psi\left(a\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}b\right) = \Psi\left(\Theta_{\Lambda(b^*x),\Lambda(ay)}\right) = x^*b \otimes ay, \quad a,b,x,y \in M_X. \tag{76}$$

□

我们令 $\Lambda^{\otimes 2} = \Lambda \otimes \Lambda$ 并记作 $\mathcal{U}_G = \Lambda^{\otimes 2}(\Psi(S'))$；于是，$\mathcal{U}_G \subseteq L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$（注意，当 G 是经典的时，空间 $\mathcal{U}_G$ 与第 7 节中以相同方式记号的空间密切相关，但并不相同）。在本节中，我们固定 $L^2(M_X)$ 的一个标准正交基 $\{\Lambda(f_j)\}_{j=1}^{n^2}$；注意，$\{\Lambda(f_i^*)\}_{i=1}^{n^2}$ 也是一个标准正交基。令 ∂：$L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 为线性算子，其满足

$$\partial\left(\Lambda(f_j^*)\right) = \Lambda(f_j), \quad j = 1, \ldots, n^2, \tag{77}$$

~并令 $\mathcal{U}_G = (\partial \otimes 1)(\mathcal{U}_G)$。接下来我们记录形如 $\mathcal{U}_G$ 的~空间的性质，这些性质类似于定义 7.1 意义下的量子图的性质。

我们将 $\mathfrak{d}$ 记作 $L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 上的共轭线性映射，其定义如下：

$$\mathfrak{d}\left(\sum_{i,j=1}^{n^2} \alpha_{i,j}\Lambda(f_i) \otimes \Lambda(f_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{n^2} \bar{\alpha}_{i,j}\Lambda(f_i) \otimes \Lambda(f_j)$$

并回顾一下，$\mathfrak{f}$ 是 $L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 上的翻转映射。我们注意到，映射 ∂ 和 $\mathfrak{d}$ 的定义取决于基，但我们所使用的具体基会固定下来，或可从上下文中明确。同样的说明也适用于我们接下来定义的概念。

定义 8.2. 若子空间 $\mathcal{W} \subseteq L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 满足 $\mathcal{W}$ 是斜对称的，且 $(\mathfrak{d} \circ \mathfrak{f})(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$，则称其为量子伪图。

设 J_0：$L^2(M_X) \otimes L^2(M_X) \to L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 是由 $J_0(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = \Lambda(y^*) \otimes \Lambda(x^*)$ 给出的反线性映射。

引理 8.3. 设 $\mathcal{W} \subseteq L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 和 $\mathcal{U} = (\partial^{-1} \otimes 1)(\mathcal{W})$。以下命题等价：

(i) $(\mathfrak{d} \circ \mathfrak{f})(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$；(ii) $J_0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$；(iii) $\Psi^{-1}(\mathcal{U})$是自伴的。

证明。设 $x, y \in M_X$。则

$$\begin{aligned}
&(J_0 \circ (\partial^{-1} \otimes 1))(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) \\
&= (J_0 \circ (\partial^{-1} \otimes 1)) \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle \Lambda(f_i) \otimes \Lambda(y) \right) \\
&= J_0 \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle \Lambda(f_i^*) \otimes \Lambda(y) \right) = \sum_{i=1}^{n^2} \overline{\langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle} \Lambda(y^*) \otimes \Lambda(f_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n^2} \overline{\langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle} \langle \Lambda(f_j^*), \Lambda(y^*) \rangle \Lambda(f_j^*) \otimes \Lambda(f_i).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&((\partial \otimes 1) \circ J_0 \circ (\partial^{-1} \otimes 1))(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n^2} \overline{\langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle \langle \Lambda(f_j), \Lambda(y) \rangle} \Lambda(f_j) \otimes \Lambda(f_i) \\
&= (\mathfrak{d} \circ \mathfrak{f}) \left(\sum_{i,j=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(x) \rangle \langle \Lambda(f_j), \Lambda(y) \rangle \Lambda(f_i) \otimes \Lambda(f_j) \right) \\
&= (\mathfrak{d} \circ \mathfrak{f})(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)),
\end{aligned}$$

从而得到等价关系 (i)⇔(ii)。由于

$$\begin{aligned}
\Psi(\Theta^*_{\Lambda(x),\Lambda(y)}) &= \Psi(\Theta_{\Lambda(y),\Lambda(x)}) = \Lambda(y^*) \otimes \Lambda(x) \\
&= J_0(\Lambda(x^*) \otimes \Lambda(y)) = J_0(\Psi(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}),
\end{aligned}$$

我们得到等价关系 (ii)⇔(iii)。 □

命题 8.4. 设 $G = (M_X, \mathrm{tr}\ A)$ 是一个代数量子图。˜那么 $\mathcal{U}_G$ 是一个量子伪图。

证明。由于 A 是自伴的，存在 $x_i \in M_X$ 和 $\lambda_i \in \mathbb{R}$，使得 $A = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \Theta_{\Lambda(x_i)\,\Lambda(x_i)}$。利用 (76)，我们有

$$\begin{aligned}
&(\partial \otimes 1)((\Lambda^{\otimes 2} \circ \Psi)(aAb)) = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i (\partial \otimes 1)(\Lambda(x_i^* b) \otimes \Lambda(a x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i (\partial \otimes 1) \left(\sum_{j,k=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_k^*), \Lambda(x_i^* b) \rangle \langle \Lambda(f_j), \Lambda(a x_i) \rangle \Lambda(f_k^*) \otimes \Lambda(f_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \sum_{j,k=1}^{n^2} \overline{\langle \Lambda(f_k), \Lambda(b^* x_i) \rangle} \langle \Lambda(f_j), \Lambda(a x_i) \rangle \Lambda(f_k) \otimes \Lambda(f_j).
\end{aligned}$$

因此

$$(\mathfrak{d}\circ\mathfrak{f})((\partial\otimes 1)((\Lambda^{\otimes 2}\circ\Psi)(aAb))) = (\partial\otimes 1)(((\Lambda^{\otimes 2}\circ\Psi)(b^*Aa^*)),$$

从而满足条件 $(\mathfrak{d}\circ\mathfrak{f})(\mathcal{U}_G) = \mathcal{U}_G$。

利用 (73)，可得

$$0 = m(A\otimes 1)m^*(\epsilon_{i,i}) = n\sum_{k=1}^{n} A((\epsilon_{i,k}))\epsilon_{k,i} = n\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_j \operatorname{tr}(x_j^*\epsilon_{i,k})x_j\epsilon_{k,i},$$

因此，对所有 $y\in M_X$，均有

$$\begin{aligned}
0 &= n\sum_{i,k,j=1}^{n^2}\lambda_j \operatorname{tr}(x_j^*\epsilon_{i,k})\operatorname{tr}(x_j\epsilon_{k,i}y)\\
&= n\sum_{i,k,j=1}^{n^2}\lambda_j \operatorname{tr}(x_j^*\epsilon_{i,k})\operatorname{tr}(\epsilon_{i,k}^*yx_j) = n\sum_{i,k,j=1}^{n^2}\lambda_j\langle x_j,\epsilon_{i,k}\rangle\langle\epsilon_{i,k},yx_j\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n^2}\lambda_j\langle x_j,yx_j\rangle = \sum_{j=1}^{n^2}\lambda_j \operatorname{tr}(yx_jx_j^*) = \operatorname{tr}\left(y\sum_{j=1}^{n^2}\lambda_jx_jx_j^*\right).
\end{aligned}$$

因此，$\sum_{j=1}^{n^2}\lambda_jx_jx_j^* = 0$。根据上一段，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle(\partial\otimes 1)(((\Lambda^{\otimes 2}\circ\Psi)(aAb)),\sum_{k=1}^{n^2}\Lambda(f_k)\otimes\Lambda(f_k)\right\rangle\\
&\qquad= \sum_{i=1}^{n^2}\lambda_i\sum_{k=1}^{n^2}\overline{\langle\Lambda(f_k),\Lambda(b^*x_i)\rangle}\langle\Lambda(f_k),\Lambda(ax_i)\rangle\\
&\qquad= \sum_{i=1}^{n^2}\lambda_i\langle\Lambda(b^*x_i),\Lambda(ax_i)\rangle = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n^2}\lambda_iax_ix_i^*b\right) = 0,
\end{aligned}$$

表明 $\mathcal{U}_G$ 是斜对称的。 □

注 8.5. 命题 8.4 表明，代数量子图 $G = (M_X, \operatorname{tr} A)$ 可以导出一个典范量子伪图 $\tilde{\mathcal{U}}_G \subseteq L^2(M_X)\otimes L^2(M_X)$。我们之所以采用量子伪图，而非定义 7.1 中所定义的量子图，是因为 QNS 关联的设定取自 [20]。定义 QNS 关联时，除了使用无信号量子信道 $\Gamma\colon M_X\otimes M_Y\to M_A\otimes M_B$，还可以从无信号量子信道 $\Gamma'\colon M_X\otimes M_Y^{\mathrm{op}}\to M_A\otimes M_B^{\mathrm{op}}$ 出发。对于量子可交换无信号关联这一类，这会得到形式为 $(\tau(e_{x,x',a,a'}e_{y,y',b,b'}))$ 的 Choi 矩阵，而当前设定得到的则是矩阵 $(\tau(e_{x,x',a',a}e_{y',y,b',b})$。我们很快就会看到，要在这两种类型的量子同构之间建立清晰的联系

还需要采用一种与第 7 节所用概念略有不同的量子同构概念。我们将在定理 8.9 中严谨地讨论这一点。

设 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$ 是一个代数量子图，$r = 1, 2$。设$\mathcal{O}(G_1, G_2)$ 是由生成元 $p_{i,j},\ i, j = 1, \ldots, n^2$ 及使映射 $\rho\colon M_X \to M_X \otimes \mathcal{O}(G_1, G_2)$ 成为如下所示映射的关系所定义的通用（保幺）C*-代数

$$\rho(f_i) = \sum_{j=1}^{n^2} f_j \otimes p_{j,i}, \quad i = 1, \ldots, n^2, \tag{78}$$

使其成为一个保幺 $*$-同态，并满足

$$(A_2 \otimes \mathrm{id}) \circ \rho = \rho \circ A_1, \tag{79}$$

and

$$(\mathrm{tr} \otimes \mathrm{id}) \circ \rho = \mathrm{tr}(\cdot)1 \tag{80}$$

注8.6. 由 [18, 定理4.7] 的证明可知，矩阵$P = (p_{i,j})_{i,j=1}^{n^2} \in M_{n^2}(\mathcal{O}(G_1, G_2))$ 自动是酉算子。将 A_i 视为相对于基 $\{f_j\}_{j=1}^{n^2}$ 在 M_{n^2} 中对应的矩阵后，还可以进一步验证，等式（79）等价于

$$(A_2 \otimes 1_{\mathcal{O}(G_1,G_2)})P = P(A_1 \otimes 1_{\mathcal{O}(G_1,G_2)}). \tag{81}$$

事实上，我们有

$$(\rho \circ A_1)(f_i) = \sum_{k,j=1}^{n^2} (A_1)_{k,i} f_j \otimes p_{j,k} = \sum_{j=1}^{n^2} f_j \otimes (P(A_1 \otimes I_H))_{j,i}$$

and

$$\begin{aligned}(A_2 \otimes 1_{\mathcal{O}(G_1,G_2)})\rho(f_i) &= \sum_{k=1}^{n^2} A_2(f_k) \otimes p_{k,i} \\ &= \sum_{k,j=1}^{n^2} (A_2)_{j,k} f_j \otimes p_{k,i} = \sum_{j=1}^{n^2} f_j \otimes ((A_2 \otimes I_H)P)_{j,i}.\end{aligned}$$

通过比较相应的系数，即可得到恒等式 (81)。我们注意到，反向运用这些论证可知，关系 (81) 与 (79) 等价。

注意，若 $\{\Lambda(g_j)\}_{j=1}^{n^2} \subset L^2(M_X)$ 是另一个标准正交基，且$U \in M_{n^2}$是酉算子，使得 $\Lambda(g_j) = \Lambda(f_j),\ j = 1, \ldots, n^2$，那么

$$\rho(g_i) = \sum_{j=1}^{n^2} g_j \otimes ((U^* \otimes 1)P(U \otimes 1))_{j,i}.$$

在本节余下部分，我们假设底层的 C*-代数 $\mathcal{O}(G_1, G_2)$ 是非平凡的。

命题 8.7. 设 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$ 是一个代数量子图，$r = 1,2$。那么矩阵 $P \in M_{n^2} \otimes \mathcal{O}(G_1, G_2)$ 是双酉的。

证明。我们验证 $P^{\mathrm{t}} = (p_{j,i})_{i,j=1}^{n^2}$ 是酉算子。根据前述注记，我们可以假设 $\{\Lambda(f_i)\}_{i=1}^{n^2}$ 是 $\{\sqrt{n}\Lambda(\epsilon_{i,j})\}_{i,j=1}^{n}$。仿照 [15,引理 9 的证明，4], 令 $W \in M_{n^2}$ 为元素为

$$W_{(i,j),(k,l)} := n\left\langle \Lambda(\epsilon_{i,j}), \Lambda(\epsilon_{k,l}^*)\right\rangle = \mathrm{Tr}(\epsilon_{j,i}\epsilon_{l,k}) = \delta_{i,l}\delta_{j,k}.$$

Then

$$(W^*W)_{(i,j),(k,l)} = \sum_{p,q=1}^{n} W_{(p,q),(i,j)}W_{(p,q),(k,l)} = 1$$

当 $(i,j) = (k,l)$ 时取值，否则为零；因此，$W^*W = I_{n^2}$。由于 ρ 保持 $*$，我们得到

$$\sum_{j,l=1}^{n^2} f_l \otimes \langle \Lambda(f_j), \Lambda(f_i^*)\rangle\, p_{l,j} = \sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_j), \Lambda(f_i^*)\rangle\, \rho(f_j)$$

$$= \quad \rho(f_i^*) = \rho(f_i)^* = \sum_{j=1}^{n^2} f_j^* \otimes p_{j,i}^* = \sum_{j,l=1}^{n^2} f_l \otimes \left\langle \Lambda(f_l), \Lambda(f_j^*)\right\rangle p_{j,i}^*.$$

Thus

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n^2} p_{l,j}W_{j,i} &= n\sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_j), \Lambda(f_i^*)\rangle\, p_{l,j} \\ &= n\sum_{j=1}^{n^2} \left\langle \Lambda(f_l), \Lambda(f_j^*)\right\rangle p_{j,i}^* = \sum_{j=1}^{n^2} W_{l,j}p_{j,i}^*\end{aligned}$$

对所有 $i,l = 1,\ldots,n^2$；等价地，$P(W \otimes 1) = (W \otimes 1)P_{\mathrm{t}*}$。由此可得 $P^{\mathrm{t}*} = (W^{-1} \otimes 1)P(W \otimes 1)$，因此

$$\begin{aligned}P^{\mathrm{t}*}P^{\mathrm{t}} &= (W^{-1}\otimes 1)P(W\otimes 1)(W^*\otimes 1)P^*((W^*)^{-1}\otimes 1) \\ &= (W^{-1}\otimes 1)PP^*((W^*)^{-1}\otimes 1) = 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}P^{\mathrm{t}}P^{\mathrm{t}*} &= (W^*\otimes 1)P^*((W^*)^{-1}\otimes 1)(W^{-1}\otimes 1)P(W\otimes 1) \\ &= (W^*\otimes 1)P^*P(W\otimes 1) = 1.\end{aligned}$$

□

设 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$ 是一个代数量子图，$r = 1$，2。我们将 S_r' 记作通过 (74) 与 G_r 对应的空间，$r = 1$，2。我们称 [9,定义 4.4] 若 C*-代数 $\mathcal{O}(G_1, G_2)$ 存在一个迹态，记作 τ，则 G_1 与 G_2 量子交换同构，记为$G_1 \simeq_{\mathrm{qc}} G_2$。我们

除非另有说明，我们假设 $G_1 \simeq_{\mathrm{qc}} G_2$。设 H 为希尔伯特空间，它由对 τ 应用 GNS 构造得到；并且，为简便起见，我们继续用 $p_{i,\ j}$ 表示 $\mathcal{O}(G_1, G_2)$ 中相应典范生成元在由 τ得到的 $*$-表示下的像。根据 (81)，我们有

$$A_2 \otimes I_H = P(A_1 \otimes I_H)P^*. \tag{82}$$

我们将 $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^{n^2}$ 视为作用在 $L^2(M_X) \otimes H$ 上的算子，并注意到，根据（78），我们有

$$P(\Lambda(b) \otimes \xi) = \rho(b)(\Lambda(1) \otimes \xi), \quad b \in M_X, \xi \in H. \tag{83}$$

此外，对于 a、$d \in M_X$ 和 $\xi \in H$，我们有

$$\begin{aligned} &P(a \otimes 1)P^*P(\Lambda(d) \otimes \xi) = P(a \otimes 1)(\Lambda(d) \otimes \xi) = P(\Lambda(ad) \otimes \xi) \\ &= \rho(ad)(\Lambda(1) \otimes \xi) = \rho(a)(\rho(d)(\Lambda(1) \otimes \xi) = \rho(a)P(\Lambda(d) \otimes \xi), \end{aligned}$$

因此

$$P(a \otimes 1)P = \rho(a), a \in M_X, \tag{84}$$

作为 $L^2(M_X) \otimes \mathcal{B}(H)$ 上的映射。

我们定义 令 $P \in \mathcal{B}(L^2(M_X) \otimes H)$

$$\tilde{P}(\Lambda(f_j^*) \otimes \eta) = \sum_{k=1}^{n^2} \Lambda(f_k^*) \otimes p_{k,j}^* \eta, \quad \eta \in H.$$

采用腿记号，我们将 $P_{2,\ 3}$ 和 $P_{1,\ 3}$ 记作由 P 得到的、作用于 $L^2(M_X) \otimes L^2(M_X) \otimes H$ 上的相应算子。

引理 8.8. 我们有 $((\Lambda^{\otimes 2} \circ \Psi) \otimes \mathrm{id})(P(S_1' \otimes 1)P^*) = P_{2,3}\tilde{P}_{1,3}(\mathcal{U}_{G_1} \otimes 1)$.

证明. 设 $x, y \in M_X$. 我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)} \otimes 1\right) P^*(\Lambda(f_k) \otimes \eta) \\
&= P\left(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)} \otimes 1\right) \left(\sum_{j=1}^{n^2} \Lambda(f_j) \otimes p_{k,j}^* \eta \right) \\
&= P\left(\sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle \Lambda(y) \otimes p_{k,j}^* \eta \right) \\
&= P\left(\sum_{i,j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle \langle \Lambda(f_i), \Lambda(y) \rangle \Lambda(f_i) \otimes p_{k,j}^* \eta \right) \\
&= \sum_{m=1}^{n^2} \Lambda(f_m) \otimes \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(y) \rangle p_{m,i} \sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle p_{k,j}^* \right) (\eta) \\
&= \sum_{l,m=1}^{n^2} \Theta_{\Lambda(f_l),\Lambda(f_m)} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(y) \rangle p_{m,i} \sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle p_{l,j}^* \right) (\Lambda(f_k) \otimes \eta)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&P(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)} \otimes 1) P^* \\
&\quad = \sum_{l,m=1}^{n^2} \Theta_{\Lambda(f_l),\Lambda(f_m)} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(y) \rangle p_{m,i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle p_{l,j}^* \right).
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&((\Lambda^{\otimes 2} \circ \Psi) \otimes \mathrm{id}) \left(P(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)} \otimes 1) P^* \right) \\
&= \sum_{l,m=1}^{n^2} \Lambda(f_l^*) \otimes \Lambda(f_m) \otimes \left(\sum_{i=1}^{n^2} \langle \Lambda(f_i), \Lambda(y) \rangle p_{m,i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle p_{l,j}^* \right).
\end{aligned}
$$

由于 $P(\Lambda(y) \otimes \xi) = \sum_{i}^{n^2}{}_{,\ m=1} \langle \Lambda(f_i)\ \Lambda(y) \rangle \Lambda(f_m) \otimes p_{m,\ i} \xi$ 并且

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}(\Lambda(x^*) \otimes \eta) &= \sum_{j=1}^{n^2} \tilde{P}(\langle \Lambda(f_j^*), \Lambda(x^*) \rangle (\Lambda(f_j^*) \otimes \eta)) \\
&= \sum_{j,l=1}^{n^2} \langle \Lambda(x), \Lambda(f_j) \rangle \Lambda(f_l^*) \otimes p_{l,j}^* \eta,
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
((\Lambda^{\otimes 2} \circ \Psi) \otimes \mathrm{id})(P(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)} \otimes 1) P^*) = P_{2,3} \tilde{P}_{1,3} (\Lambda(x^*) \otimes \Lambda(y) \otimes 1).
$$

现在的结论可由 $\mathcal{U}_{G_1}$ 的定义及线性性直接得到。 □

设 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是一个冯·诺伊曼代数，配备忠实迹$\tilde{\tau}$，并设 $U = (u_{i,\ j})_{i,\ j} \in M_{n^2}(\mathcal{N})$ 是一个双酉分块算子矩阵（其元素属于 $\mathcal{N}$）。假设 $\Gamma : M_{n^2} \otimes M_{n^2} \to M_{n^2} \otimes M_{n^2}$ 是一个 QNS 相关，其定义为

$$\Gamma(\epsilon_{i,i'} \otimes \epsilon_{j,j'}) = (\tilde{\tau}(u^*_{k,i} u_{k',i'} u^*_{l',j'} u_{l,j}))_{k,k',l,l'}. \tag{85}$$

令 $\tilde{\Gamma} : M_{n^2} \otimes M_{n^2} \to M_{n^2} \otimes M_{n^2}$ 为如下给出的幺正完全正映射：

$$\tilde{\Gamma}(\epsilon_{k,k'} \otimes \epsilon_{l,l'}) = (\tilde{\tau}(u^*_{l,j} u_{k,i} u^*_{k',i'} u_{l',j'}))_{i,i',j,j'}.$$

若 $f_{k,\ k',\ i,\ i'} = u_{k,\ i} u^*_{k',\ i'}$，则 Γ 的 Choi 矩阵为 $(\tilde{\tau}(f_{k,\ k',\ i,\ i'} f_{l',\ l,\ j',\ j}))$，因此是一个量子可交换 QNS 相关。我们指出，容易验证，若 $\sigma : M_{n^2} \otimes M_{n^2} \to M_{n^2} \otimes M_{n^2}$ 是由 $\sigma(\epsilon_{k,\ k'} \otimes \epsilon_{l,\ l'}) = \epsilon_{k',\ l} \otimes \epsilon_{l',\ k}$ 给出的映射，则 $\Gamma = \sigma \circ \Gamma^* \circ \sigma$。

如果存在一个具有上一段所述形式的 $\Gamma \in \mathcal{Q}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{bic}}$，使得……，我们就称两个量子伪图 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 是 qc-伪同构的

(i) Γ 是 $\mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$的完美策略，且(ii)

Γ 是 $\mathcal{W}_2 \to \mathcal{W}_1$的完美策略。

定理 8.9. 设 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$，$r = 1, 2$ 是具有 $G_1 \simeq_{\mathrm{qc}} G_2$的代数量子图。那么量子伪图 $\mathcal{U}_{G_1}$ 和 $\mathcal{U}_{G_2}$ 是 qc-量子伪同构的。

证明。为简洁起见，设 $\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_{G_r}$，$r = 1, 2$。根据假设，C*-代数$\mathcal{O}(G_1, G_2)$存在迹态，记为 τ。设 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是通过 GNS 构造与 τ 相关联的冯·诺伊曼代数，$\tilde{\tau}$ 是 $\mathcal{N}$上的（忠实）迹，它对应于 τ。记 $u_{i,\ j}$为典范生成元 $p_{i,\ j}$ 在 Gelfand 映射下的像，并令 U 和 U 分别为对应于 P和 P的矩阵。令 Γ 为由（85）给出的 QNS 相关。注意，由（84）可得 $P(a \otimes 1)P^* = \rho(a)$，$a \in M_X$；并且由（82）可得$P(A_1 \otimes 1)P^* = A_2 \otimes 1$；因此，

$$\begin{aligned} P(aA_1b \otimes 1)P^* &= P(a \otimes 1)(A_1 \otimes 1)(b \otimes 1)P^* \\ &= P(a \otimes 1)P^*P(A_1 \otimes 1)P^*P(b \otimes 1)P^* \\ &= \rho(a)(A_2 \otimes 1)\rho(b). \end{aligned}$$

由（78）式可知 $U\ (S'_1 \otimes 1)\ U^* \subseteq S'_2 \otimes \mathcal{B}\ (H)$。根据引理 8.8，

$$U_{2,3}\tilde{U}_{1,3}(\mathcal{U}_1 \otimes 1) \subseteq \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{B}(H). \tag{86}$$

回顾（77）式中定义的映射 ∂，注意到

$$(\partial \otimes 1)\tilde{U}(\partial \otimes 1)(\Lambda(f_i) \otimes \eta) = (\partial \otimes 1)\left(\sum_{k=1}^{n^2} \Lambda(f_k^*) \otimes u^*_{k,i}\eta\right) = \sum_{k=1}^{n^2} \Lambda(f_k) \otimes u^*_{k,i}\eta,$$

也就是说，

$$(\partial \otimes 1)\tilde{U}(\partial \otimes 1) = U^{\mathrm{t}*} =: \bar{U}.$$

~令 $P_{\tilde{\mathcal{U}}_r}$ 为到 $\mathcal{U}_r$, $r = 1, 2$ 上的投影。那么条件 (86) 蕴含

$$(P_{\tilde{\mathcal{U}}_2}^{\perp} \otimes 1)U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(P_{\tilde{\mathcal{U}}_1} \otimes 1) = 0. \tag{87}$$

定理 7.4 的证明中的论证（另见后续的注）现在表明, Γ 是量子图同态游戏 $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$的一种完美策略~ ~。

关系式 (82) 表明 $U^*(A_2 \otimes 1)U = A_1 \otimes 1$。利用对称性，我们得到关系式

$$(P_{\tilde{\mathcal{U}}_1}^{\perp} \otimes 1)U_{2,3}^*\bar{U}_{1,3}^*(P_{\tilde{\mathcal{U}}_2} \otimes 1) = 0. \tag{88}$$

现在证明 $\tilde{\Gamma}$ 是$\tilde{\mathcal{U}}_2 \to \tilde{\mathcal{U}}_1$的一种完美策略。令 $\xi = \sum_{k,l=1}^{n^2} \alpha_{k,l} f_k \otimes f_l \in \tilde{\mathcal{U}}_2$ 和 $\eta = \sum_{i,j=1}^{n^2} \beta_{i,j} f_i \otimes f_j \in \tilde{\mathcal{U}}_1^{\perp}$; 则

$$\langle \tilde{\Gamma}(\xi\xi^*)\eta, \eta\rangle = \tilde{\tau}\left(\sum_{k,l,k',l'=1}^{n^2} \sum_{i,i',j,j'=1}^{n^2} \alpha_{k,l}\overline{\alpha_{k',l'}} u_{j,l}^* u_{k,i} u_{k',i'}^* u_{l',j'} \beta_{i',j'}\overline{\beta_{i,j}}\right).$$

记 $R_{\xi,\eta} = \sum_{k,l,i,j=1}^{n^2} \alpha_{k,l}\beta_{i,j} u_{k,i}^* u_{l,j}$, 我们有 $\langle \tilde{\Gamma}(\xi\xi^*)\eta, \eta\rangle = \tilde{\tau}(R_{\xi,\eta}^* R_{\xi,\eta})$, 并利用 $\tilde{\tau}$ 是忠实的这一事实，可推出

$$\langle \tilde{\Gamma}(\xi\xi^*)\eta, \eta\rangle = 0 \iff R_{\xi,\eta} = 0.$$

考虑到 (60)，现在我们有

$$\langle R_{\xi,\eta} f, h\rangle = \langle \bar{U}_{1,3}U_{2,3}(\eta \otimes f), \xi \otimes h\rangle, \quad f, h \in H,$$

因此

$$(P_{\tilde{\mathcal{U}}_2} \otimes 1)\bar{U}_{1,3}U_{2,3}(P_{\tilde{\mathcal{U}}_1}^{\perp} \otimes 1) = 0 \iff \tilde{\Gamma} \text{ is a perfect strategy for } \tilde{\mathcal{U}}_2 \to \tilde{\mathcal{U}}_1.$$

由 (88) 可知，证明完成。 □

注 8.10. 对于顶点集为 X 的经典图 G，令 $A_G : M_X \to M_X$ 为关于 G 的邻接矩阵的舒尔乘法映射。那么 $(M_X, \mathrm{tr}\ A_G)$ 是一个代数量子图。令

$$\mathcal{W}_G = \mathrm{span}\{\epsilon_{x,x} \otimes \epsilon_{y,y} : x \sim y \text{ in } G\} \subseteq M_X \otimes M_X.$$

那么 $\mathcal{W}_G$ 是 $L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$ 中的量子伪图。

令 G_1、G_2 为顶点集为 X 的经典图。图 G_1 和 G_2 之间有以下三种量子交换同构:

(a) 经典非定域游戏意义下的量子交换同构 [1]; (b) 代数量子图 $(M_X, \mathrm{tr}\ A_{G_1})$ 和 $(M_X, \mathrm{tr}\ A_{G_2})$ 的量子交换同构; (c) 量子非定域游戏（第7节）意义下的量子交换同构，使用量子伪图 $\mathcal{W}_1$ 和$\mathcal{W}_2$。

(a) 蕴含 (b)，而 (b) 蕴含 (c)。我们不知道这些蕴含关系是否可逆。

8.2. 部分逆命题。在本节余下部分，我们讨论定理 8.9 中所确立的蕴含在多大程度上可以逆转。~ ~我们首先注意到，形如 $\mathcal{U}=\mathcal{U}_G$ 的量子伪图，对于代数量子图 $G=(M_X, \mathrm{tr}\ A)$，自动具有某些额外结构，因此不能期望定理 8.9 能够完全逆转。事实上，设 $\mathcal{U}=(\partial^{-1}\otimes 1)(\tilde{\mathcal{U}})$，并回忆 $S'=\Psi^{-1}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{B}(L^2(M_X))$~ 是一个 M_X-双模。我们首先证明，任何满足 $\Psi^{-1}(\mathcal{U})$ 是一个 M_X-双模的量子伪图 $\mathcal{U}$，都可以由此方式得到。在下文中，我们固定 $L^2(M_X)$ 中的一个基 $\{\Lambda(f_i)\}_i$，以定义伪图 $\tilde{\mathcal{U}}$。

令 M_X^{op} 为 M_X 的对立代数。为简化记号，我们将 $M_{\mathrm{op}X}$视为与 M_X具有相同的底层向量空间，并用 $\cdot_{\mathrm{op}}$表示其乘积；因此， $a\cdot_{\mathrm{op}}b=ba$, $a,b\in M_X$。令 $(L^2(M_X^{\mathrm{op}})\ \Lambda^{\mathrm{op}})$ 为将 GNS 构造应用于 $(M_X^{\mathrm{op}}, \mathrm{tr})$ 所得的结果。由于

$$\langle\Lambda^{\mathrm{op}}(a),\Lambda^{\mathrm{op}}(b)\rangle=\mathrm{tr}(a^*\cdot_{\mathrm{op}}b)=\mathrm{tr}(ba^*)=\langle\Lambda(a),\Lambda(b)\rangle,$$

$L^2(M_X^{\mathrm{op}})\otimes L^2(M_X)$ 和 $L^2(M_X)\otimes L^2(M_X)$ 也可以作为希尔伯特空间相互识别。回想一下， $L^2(M_X)^{\mathrm{d}}$ 是$L^2(M_X)$ 的巴拿赫空间对偶（等价地说，是 $L^2(M_X)$ 的共轭希尔伯特空间）。若 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(L^2(M_X))$ 是一个 $*$-子代数，则映射 $T\mathrm{op}\mapsto T\mathrm{d}$，其中 $T\mathrm{d}\overline{\xi}=\overline{T^*\xi}$,$\xi\in L^2(M_X)$，是一个 $*$-同构。下文中，我们常将$T\mathrm{op}$ 与 $T\mathrm{d}$ 视为相同。对于线性算子 $T\colon\ L^2(M_X)\to L^2(M_X)$，我们定义$\bar{T}\colon\ L^2(M_X)^{\mathrm{d}}\to L^2(M_X)^{\mathrm{d}}$，令 $\bar{T}\bar{\xi}=\overline{T\xi}$, $\xi\in L^2(M_X)$。

引理 8.11. 设 $G=(M_X, \mathrm{tr}\ A)$ 是一个代数量子图。那么，将 $e=(1\otimes A)(m^*(1))$ 视为 $M_X^{\mathrm{op}}\otimes M_X$ 中的元素时，它是一个投影。

证明。根据引理 8.1，我们只需证明 e 是一个幂等元。利用 (75)，可得

$$\begin{aligned}e^2 &= n^2\left(\sum_{i,j=1}^n\epsilon_{i,j}\otimes A(\epsilon_{j,i})\right)\left(\sum_{k,l=1}^n\epsilon_{k,l}\otimes A(\epsilon_{l,k})\right)\\ &= n^2\sum_{i,j,k,l=1}^n\epsilon_{i,j}\cdot_{\mathrm{op}}\epsilon_{k,l}\otimes A(\epsilon_{j,i})A(\epsilon_{l,k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= n^2\sum_{i,j,k=1}^n\epsilon_{k,j}\otimes A(\epsilon_{j,i})A(\epsilon_{i,k})=n\sum_{j,k=1}^n\epsilon_{k,j}\otimes m(A\otimes A)m^*(\epsilon_{j,k})\\ &= n\sum_{j,k=1}^n\epsilon_{k,j}\otimes A(\epsilon_{j,k})=e.\end{aligned}$$

□

注记 8.12。我们指出，反转引理 8.1 和 8.11 的论证，便可轻易看出，任意满足 $e = \mathfrak{f}(e)$ 的投影 $e \in M_{\text{算子}_X} \otimes M_X$，都会导出满足量子邻接矩阵条件 (1) 和 (2) 的自伴算子 $A\colon\ L^2(M_X) \to L^2(M_X)$，并通过恒等式 (75) 与 e 相关联。

设 $J\colon\ L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 为共轭线性映射，由 $J(\Lambda(a)) = \Lambda(a^*)$ 给出，映射 $\kappa\colon\ \mathcal{B}(L^2(M_X)) \to \mathcal{B}(L^2(M_X))$ 由 $\kappa(x) = Jx^*J$ 给出。我们有，κ 是一个反-$*$-同态，满足 $\kappa^2 = \mathrm{id}$；记 $\pi\colon\ L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 为由 $\pi(x)\Lambda(a) = \Lambda(xa)$ 给出的 $*$- 同态，则有 $\kappa(\pi(M_X)) = \pi(M_X)'$。

命题 8.13。设 $\tilde{\mathcal{U}}$ 是一个量子伪图，使得 $\Psi^{-1}((\partial^{-1} \tilde{\otimes} 1)(\mathcal{U}))$ 是一个 M_X-双模。则存在一个代数量子图 $G = (M_X, \mathrm{tr}, A)$，使得 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G$。

证明。设 $\mathcal{U} = (\partial^{-1} \otimes 1)(\tilde{\mathcal{U}})$ 和 $S' = \Psi^{-1}(\mathcal{U})$。根据假设，$S'$ 是一个 M_X-双模，因此 $\kappa(S')$ 是一个 $\pi(M_X)'$-双模。在 $\mathcal{B}(L^2(M_X))$ 与 $L^{2\mathrm{d}} \otimes L^2(M_X)$ 之间的典范双射下，$\pi(M_X)'$-双模 $\kappa(S')$ 对应于 $(\pi(M_X)')^{\mathrm{op}} \otimes \pi(M_X)'$-不变子空间 $\mathcal{U}'$。因此，它给出了投影 $e \in M_{\mathrm{op}_X} \otimes M_X$，其像为 $\mathcal{U}'$。由引理 8.3，S' 是自伴的，因此 $\kappa(S')$ 也是自伴的；再由引理 8.3 可知，$e = \mathfrak{f}(e)$ 和 $J_0(\mathcal{U}') = \mathcal{U}'$。

令 $A\colon\ L^2(M_X) \to L^2(M_X)$ 为如注记 8.12 中与 e 对应的线性映射。我们有，$\kappa(S')$ 是由 A 生成的 $\pi(M_X)'$-双模。因此，S' 是由 A 生成的 $\pi(M_X)$-双模。事实上，由于 $\kappa(\pi(M_X)') = \pi(M_X)$，只需验证 $JA^*J = A$。记作 $A = \sum_{i=1}^m \lambda_i \Theta_{\Lambda(x_i)\,\Lambda(x_i)}$，$\lambda_i \in \mathbb{R}$、$x_i \in M_X$、$i = 1$、……、$m$。那么 $e = \Psi(A) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^* \otimes x_i$。另一方面，

$$JA^*J = JAJ = \sum_{i=1}^m \lambda_i \Theta_{\Lambda(x_i^*),\Lambda(x_i^*)}.$$

因此 $\Psi(JA^*J) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \otimes x_i^* = \mathfrak{f}(e)$。由于 $e = \mathfrak{f}(e)$，我们得到 $\Psi(JA^*J) = \Psi(A)$，这意味着 $JA^*J = A$。

最后，反向运用命题 8.4 中的论证可知，$\mathcal{U}$ 的斜对称性意味着 $m(A \otimes 1)m^* = 0$，这表明 A 是一个量子邻接矩阵。令 $G = (M_X, A, \mathrm{tr})$，则有 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G$。□

现在固定一个量子伪图 $\tilde{\mathcal{U}}_r$ in $L^2(M_X) \otimes L^2(M_X)$，其对应空间 S'_r 是一个 M_X-双模，并令 $\mathcal{U}_r := (\partial^{-1} \otimes 1)(\tilde{\mathcal{U}}_r)$，$r = 1, 2$。我们假设 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 是量子经典伪同构的，并令 $\mathcal{N}$ 为一个带有迹 τ 的冯·诺伊曼代数，且 $U = (u_{k,\,i})_{k,\,i=1}^{n^2}$ 是一个双酉算子，其中 $u_{k,\,i} \in \mathcal{N}$，$k, i = 1, \ldots, n^2$，使得 U 通过 (85) 产生一个量子非信号关联，实现 $\mathcal{U}_{G_1}$ 与 $\mathcal{U}_{G_2}$ 之间的量子经典伪同构。定理 8.9 的证明意味着

$$(P_{\tilde{\mathcal{U}}_2}^{\perp} \otimes 1)U_{2,3}\bar{U}_{1,3}(P_{\tilde{\mathcal{U}}_1} \otimes 1) = 0 \text{ and } (P_{\tilde{\mathcal{U}}_1}^{\perp} \otimes 1)U_{2,3}^*\bar{U}_{1,3}^*(P_{\tilde{\mathcal{U}}_2} \otimes 1) = 0; \tag{89}$$

反转其证明中的论证，我们得到以下等价条件

$$U(S_1' \otimes 1)U^* \subseteq S_2' \otimes \mathcal{N} \text{ and } U^*(S_2' \otimes 1)U \subseteq S_1' \otimes \mathcal{N}. \tag{90}$$

注意，映射 α_U：$\mathcal{B}(L^2(M_X)) \to \mathcal{B}(L^2(M_X)) \otimes \mathcal{N}$，定义为$\alpha_U(x) = U(x \otimes 1)U^*$，是保迹的，也就是说满足恒等式 $(\mathrm{tr} \otimes \mathrm{id})(\alpha_U(x)) = \mathrm{tr}(x) I$, $x \in \mathcal{B}(L^2(M_X))$。事实上，对于 $i,j \in X \times X$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr} \otimes \mathrm{id})(\alpha_U(\epsilon_{i,j}))) &= (\mathrm{tr} \otimes \mathrm{id})((u_{k,i}u_{l,j}^*)_{k,l}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}^* \\ &= \frac{1}{n}\delta_{i,j} I = \mathrm{tr}(\epsilon_{i,j}) I.\end{aligned}$$

假设存在一个 $*$-同态 $\rho\colon M_X \to M_X \otimes \mathcal{N}$，使得$U(\Lambda(b) \otimes \xi) = (\pi \otimes \mathrm{id})(\rho(b))(\Lambda(1) \otimes \xi)$。根据 [15, 第 9.1] 节（另见 (84)），

$$\alpha_U(\pi(a)) = (\pi \otimes \mathrm{id})(\rho(a)) \subseteq \pi(M_X) \otimes \mathcal{N}, \quad a \in M_X;$$

我们称 U 为 ρ 的酉实现。记 $\rho(f_i) = \sum f_j \otimes v_{j,\,i}$，我们有

$$U(\Lambda(f_i) \otimes \xi) = \sum_{j=1}^{n^2} \Lambda(f_j) \otimes v_{j,i}\xi, \quad i = 1, 2, \ldots, n^2,$$

因此，对于所有 i、j，$v_{i,\,j} = u_{i,\,j}$。元素 $u_{i,\,j}$ 满足 $\mathcal{O}(G_1$、$G_2)$ 的生成元所满足的全部关系，但关系 (79)（等价地，(81)）可能除外。下面的定理确立了这一最后的关系。

定理 8.14. 设 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$ 是一个代数量子图，$r = 1$，2。设 $\mathcal{N}$ 是一个迹态冯·诺伊曼代数，U 是一个条目属于 $\mathcal{N}$ 的双酉；通过 (85)，它产生一个 QNS 相关 Γ，实现了 $\mathcal{U}_{G_1}$ 与 $\mathcal{U}_{G_2}$ 之间的 ˜ ˜量子经典伪同构。假设 U 是保迹 $*$-同态 $\rho\colon M_X \to M_X \otimes \mathcal{N}$ 的酉实现。那么 $U(A_1 \otimes I) = (A_2 \otimes I)U$，从而 $G_1 \simeq_{\mathrm{qc}} G_2$。

定理 8.14 的证明运用了 [15] 中的论证以及一些辅助结论，我们现在来证明这些结论。令 $H = L^2(M_X)$（配备与 tr 相关联的内积）。我们通过酉映射 $\Lambda^{\mathrm{op}}(x) \mapsto \Lambda(x^*)$ 将 ~~$L^2(M_X^{\mathrm{op}})$~~ 与 $L^2(M_X)^{\mathrm{d}}$ 视为同一对象。

我们记 $\tilde{\Lambda}\colon \mathcal{B}(H) \to L^2(\mathcal{B}(H))$ 为对应于（非归一化迹）Tr 的 GNS映射。我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle \tilde{\Lambda}(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}), \tilde{\Lambda}(\Theta_{\Lambda(x'),\Lambda(y')}) \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\Theta_{\Lambda(y),\Lambda(x)}\Theta_{\Lambda(x'),\Lambda(y')}\right) \\ &= \left\langle \Lambda(y), \Lambda(y') \right\rangle_H \left\langle \Lambda(x'), \Lambda(x) \right\rangle_H = \left\langle \Lambda(y), \Lambda(y') \right\rangle_H \left\langle \overline{\Lambda(x)}, \overline{\Lambda(x')} \right\rangle_{H^{\mathrm{d}}}.\end{aligned}$$

因此，由下式定义的线性映射 $\omega\colon L^2(\mathcal{B}(H)) \to H^{\mathrm{d}} \otimes H$

$$\omega\left(\tilde{\Lambda}(\Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)})\right) = \overline{\Lambda(x)} \otimes \Lambda(y),$$

是一个酉算子。

现在固定代数量子图 $G_r = (M_X, \mathrm{tr}\ A_r)$、$r = 1、2$，取冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}$ 和双酉 U，如定理 8.14 的陈述所示。假设 $\mathcal{N}$ 作用于希尔伯特空间 K。令 $e_r \in M_X^{\mathrm{op}} \otimes M_X$ 为通过式 (75) 与 G_r 的邻接矩阵 $A_r : M_X \to M_X$ 相关联的投影，$r = 1、2$（见定理 8.9 证明之后的段落）；令 p_r 为从希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{B}(H))$（配备与 Tr 对应的内积）投影到其子空间 $\Lambda(S_r')$、$r = 1、2$ 上的正交投影。下面的引理是引理 9.17] 的特例；为方便读者，我们给出一个直接证明。

引理 8.15。以下结论成立：

(i) $(\omega \circ \tilde{\Lambda})(A_r) = (\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(e_r)$;
(ii) $\omega p_r \omega^* = (\bar{J} \otimes J) e_r (\bar{J} \otimes J)$;
(iii) $p_r \omega^*(\overline{\Lambda(1)} \otimes \Lambda(1)) = \tilde{\Lambda}(A_r)$.

证明。(i) 设 $T = \Theta_{\Lambda(x),\Lambda(y)}$, $x, y \in M_X$。则

$$\omega(\tilde{\Lambda}(T)) = \overline{\Lambda(x)} \otimes \Lambda(y) = (\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(x^* \otimes y).$$

由于 $A_r = n \sum_{i,j=1}^{n} \Theta_{\Lambda(\epsilon_{i,j})\ \Lambda(A_r(\epsilon_{i,j}))}$，我们有

$$\begin{aligned}(\omega \circ \tilde{\Lambda})(A_r) &= n \sum_{i,j=1}^{n} (\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(\epsilon_{i,j}^* \otimes A_r(\epsilon_{i,j})) \\ &= n \sum_{i,j=1}^{n} (\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(\epsilon_{j,i} \otimes A_r(\epsilon_{i,j})) = (\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(e_r).\end{aligned}$$

(ii) 利用（76），对于 $a, b \in M_X$，我们有

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{\Lambda}(aTb)) &= \omega(\tilde{\Lambda}(\Theta_{\Lambda(b^*x),\Lambda(ay)}) = \overline{\Lambda(b^*x)} \otimes \Lambda(ay) \\ &= \Lambda^{\mathrm{op}}(x^*b) \otimes \Lambda(ay) = (b \otimes a)(\Lambda^{\mathrm{op}}(x^*) \otimes \Lambda(y)),\end{aligned}$$

其中，后一个作用是 $M_{\mathrm{op}_X} \otimes M_X$ 在 $L^2(M_X^{\mathrm{op}}) \otimes L^2(M_X)$ 上的作用。因此

$$\omega(\tilde{\Lambda}(S_r')) = (M_X^{\mathrm{op}} \otimes M_X)(\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(e_r). \tag{91}$$

由于 $e_r \in M_{\mathrm{op}_X} \otimes M_X$，将其与映射 $\pi^{\mathrm{op}} \otimes \pi$ 下的像（该映射作用于 $L^2(M_X)^{\mathrm{d}} \otimes L^2(M_X)$）对应起来，对于 $a \otimes b, x \otimes y \in M_{\mathrm{op}_X} \otimes M_X$，我们得到

$$\begin{aligned}&(\overline{J} \otimes J)(x \otimes y)(\overline{J} \otimes J)((\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(a \otimes b)) \\ &= (\overline{J} \otimes J)(x \otimes y)(\overline{J\Lambda(a^*)} \otimes \Lambda(b^*)) = (\overline{J} \otimes J)(x \otimes y)(\Lambda^{\mathrm{op}}(a^*) \otimes \Lambda(b^*)) \\ &= (\overline{J} \otimes J)(\Lambda^{\mathrm{op}}(a^*x) \otimes \Lambda(yb^*)) = \overline{J\Lambda(x^*a)} \otimes \Lambda(by^*) \\ &= \Lambda^{\mathrm{op}}(x^*a) \otimes \Lambda(by^*) = (a \otimes b)(\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(x^* \otimes y^*)\end{aligned} \tag{92}$$

再结合 e_r 是自伴的这一事实（见引理 8.11），可知对于任意 $u \in M_{\text{算子}\ X} \otimes M_X$，我们有

$$(\overline{J} \otimes J) e_r (\overline{J} \otimes J)((\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(u)) = u(\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda)(e_r). \tag{93}$$

特别地，利用（91），

$$\operatorname{ran}\big((\overline{J}\otimes J)e_r(\overline{J}\otimes J)\big)=(M_X^{\mathrm{op}}\otimes M_X)(\Lambda^{\mathrm{op}}\otimes\Lambda)(e_r)=(\omega\circ\tilde{\Lambda})(S_r').$$

命题 (ii) 现在得证。

(iii) 利用 (i)、(ii)、(93) 以及针对 $a=b=1$ 的计算 (92)，我们有

$$\begin{aligned}(\omega p_r\omega^*)(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1)) &= (\overline{J}\otimes J)e_r(\overline{J}\otimes J)((\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1))\\ &= (\Lambda^{\mathrm{op}}\otimes\Lambda)(e_r)=(\omega\circ\tilde{\Lambda})(A_r).\end{aligned}$$

□

令 $\tilde{U}\colon L^2(\mathcal{B}(H))\otimes K\to L^2(\mathcal{B}(H))\otimes K$ 为如下给出的算子

$$\tilde{U}(\tilde{\Lambda}(b)\otimes\xi)=\alpha_U(b)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi),\quad \xi\in K.$$

设 L 为希尔伯特空间，令 $j\colon L\to L^{\mathrm{d}}$ 为如下给出的反线性同构：$j(g)=\overline{g}$，并令 $R\colon \mathcal{B}(L)\to\mathcal{B}(L^{\mathrm{d}})$ 为如下给出的映射：$R(x)=jx^*j, x\in\mathcal{B}(L)$。注意，若 $(g_i)_i$ 是 L 的一组标准正交基，$\epsilon_{i,j}\in\mathcal{B}(L)$ 是对应于 $(g_i)_i$ 的矩阵单位，且 $\{\bar{\epsilon}_{j,i}\}$ 是关于标准正交基 $(\bar{g}_i)_i$ 的 $\mathcal{B}(L^{\mathrm{d}})$ 的矩阵单位系，则

$$R(\epsilon_{i,j})=j(g_ig_j^*)^*j=j(g_jg_i^*)j=j(g_j)j(g_i)^*=\bar{\epsilon}_{j,i}.$$

接下来，我们令 $V=(R\otimes 1)(U^*)$。因此，若 $U=(u_{i,j})_{i,j=1}^{n^2}$ 相对于 $L^2(M_X)$ 的标准正交基 $\{\Lambda(f_i)\}_{i=1}^{n^2}$，那么 V 就是 $L^2(M_X)^{\mathrm{d}}\otimes K$ 上的算子，其相对于标准正交基 $\Big\{\Lambda(f_i)\Big\}_{i=1}^{n^2}$ 的矩阵为 $(v_{i,j})_{i,j=1}^{n^2}:=(u_{i,j}^*)_{i,j=1}^{n^2}$。

~引理 8.16。我们有 $(\omega\otimes 1)U(\omega^*\otimes 1)=U_{2,3}V_{1,3}$。

证明。对于 $1\le s、t\le n^2$ 和 $\xi\in K$，我们有

$$\begin{aligned}&(\omega\otimes 1)\tilde{U}(\omega^*\otimes 1)(\overline{\Lambda(f_t)}\otimes\Lambda(f_s)\otimes\xi)\\ =\;&(\omega\otimes 1)\tilde{U}(\tilde{\Lambda}(\Theta_{\Lambda(f_t),\Lambda(f_s)})\otimes\xi)\\ =\;&(\omega\otimes 1)\alpha_U(\Theta_{\Lambda(f_t),\Lambda(f_s)})(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)\\ =\;&(\omega\otimes 1)U(\Theta_{\Lambda(f_t),\Lambda(f_s)}\otimes 1)U^*(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)\\ =\;&(\omega\otimes 1)\left(\sum_{i,j=1}^{n^2}\epsilon_{i,j}\otimes u_{i,j}\right)(\Theta_{\Lambda(f_t),\Lambda(f_s)}\otimes 1)\left(\sum_{k,l=1}^{n^2}\epsilon_{l,k}\otimes u_{k,l}^*\right)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)\\ =\;&(\omega\otimes 1)\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n^2}\epsilon_{i,j}\Theta_{\Lambda(f_t),\Lambda(f_s)}\epsilon_{k,l}\otimes u_{i,j}u_{l,k}^*\right)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)\\ =\;&\sum_{i,l=1}^{n^2}\overline{\Lambda(f_l)}\otimes\Lambda(f_i)\otimes u_{i,s}u_{l,t}^*\xi=U_{2,3}V_{1,3}(\overline{\Lambda(f_t)}\otimes\Lambda(f_s)\otimes\xi)\end{aligned}$$

该陈述由线性性得出。 □

定理 8.14 的证明。我们回顾一下，冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}$ 作用于希尔伯特空间 K，并且 p_r 是从希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{B}(H))$（配备由 Tr 导出的内积）到 $\Lambda(S_r')$的正交投影。根据（90），

$$\tilde{U}(\tilde{\Lambda}(b)\otimes\xi)=\alpha_U(b)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)\in\tilde{\Lambda}(S_2')\otimes\mathcal{N}\xi,\quad b\in S_1', \tag{94}$$

因此

$$\tilde{U}(p_1\otimes 1)=(p_2\otimes 1)\tilde{U}(p_1\otimes 1).$$

类似地，$U^*(p_2\otimes 1)=(p_1\otimes 1)U^*(p_2\otimes 1)$，由此可得

$$(p_2\otimes 1)\tilde{U}=\tilde{U}(p_1\otimes 1).$$

利用引理 8.15 和 8.16，对于 $\xi\in\mathcal{B}(K)$，我们因此有

$$\begin{aligned}&\alpha_U(A_1)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi)=\tilde{U}(\tilde{\Lambda}(A_1)\otimes\xi)\\&=\tilde{U}(p_1\omega^*(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1))\otimes\xi)=(p_2\otimes 1)\tilde{U}(\omega^*(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1))\otimes\xi))\\&=(p_2\omega^*\otimes 1)U_{2,3}V_{1,3}(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1)\otimes\xi).\end{aligned}$$

由 U 的定义，我们有

$$U(\Lambda(1)\otimes\xi)=\rho(1)(\Lambda(1)\otimes\xi)=\Lambda(1)\otimes\xi. \tag{95}$$

注意到

$$V=(F^{-1}\otimes 1)U(F\otimes 1) \tag{96}$$

其中 $F:\ H^{\mathrm{d}}\to H$ 是由 $F\Lambda(x)=\Lambda(x^*)$ 给出的酉算子。事实上，为了证明 (96)，注意到 $F^{-1}=F^*$，并且对于 $\xi\in K$ 和 $i=1,\ .....,\ n^2$，我们计算：

$$\begin{aligned}(F^{-1}\otimes 1)U(F\otimes 1)(\overline{\Lambda(f_i)}\otimes\xi)&=(F^{-1}\otimes 1)U(\Lambda(f_i^*)\otimes\xi)\\&=(F^{-1}\otimes 1)(\pi\otimes\mathrm{id})(\rho(f_i^*))(\Lambda(1)\otimes\xi)\\&=(F^{-1}\otimes 1)(\pi\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{j=1}^{n^2}f_j^*\otimes u_{j,i}^*\Big)(\Lambda(1)\otimes\xi)\\&=(F^{-1}\otimes 1)\Big(\sum_{j=1}^{n^2}\Lambda(f_j^*)\otimes u_{j,i}^*\xi\Big)\\&=\sum_{j=1}^{n^2}\overline{\Lambda(f_j)}\otimes u_{j,i}^*\xi=V(\overline{\Lambda(f_i)}\otimes\xi).\end{aligned}$$

由 (96) 以及恒等式 $F(\Lambda(1))=\overline{\Lambda(1)}$ 和 $F^{-1}(\Lambda(1))=\Lambda(1)$，可得

$$V(\overline{\Lambda(1)}\otimes\xi)=\overline{\Lambda(1)}\otimes\xi. \tag{97}$$

利用 (94)、(95)、(97) 以及引理 8.15 和 8.16，最终得到

$$\begin{aligned}\alpha_U(A_1)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi) &= \tilde{U}(\tilde{\Lambda}(A_1)\otimes\xi)\\ &= (p_2\omega^*\otimes 1)U_{2,3}V_{1,3}(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1)\otimes\xi)\\ &= (p_2\omega^*\otimes 1)(\overline{\Lambda(1)}\otimes\Lambda(1)\otimes\xi)\\ &= \tilde{\Lambda}(A_2)\otimes\xi = (A_2\otimes I)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi),\end{aligned}$$

其中，我们将 A_2 视为 $\mathcal{B}(L^2(M_X))$ 中的左正则表示，也就是说，将其视为作用于 $L^2(\mathcal{B}(L^2(M_X)))$ 上的算子。因此，

$$(\alpha_U(A_1) - A_2\otimes I)(\tilde{\Lambda}(1)\otimes\xi) = 0, \quad \xi\in K.$$

这意味着

$$(\mathrm{id}\otimes L_{\xi\eta^*})((\alpha_U(A_1) - A_2\otimes I))\tilde{\Lambda}(1) = 0, \quad \xi,\eta\in K;$$

因此，

$$(\mathrm{id}\otimes L_{\xi\eta^*})((\alpha_U(A_1) - A_2\otimes I)) = 0, \quad \xi,\eta\in K.$$

因此 $\alpha_U(A_1) = A_2\otimes I$，这反过来意味着 $U(A_1\otimes I) = (A_2\otimes I)U$。证明完成。□

References

[1] A. Atserias, L. Mančinska D. E. Roberson D. E. Šámal S. Severini and , , , , A. Varvitsiotis *Quantum and non-signalling graph isomorphisms*, 组合理论杂志B辑 136 (2019), 289-328. [2] T. Banica, *Le groupe quantique compact libre* U(*n*), 数学物理通讯 190 (1997), no. 1, 143–172..[3] T. Banica, *Symmetries of a generic coaction*, 数学年刊 314 (1999), no. 4, 763-780. [4] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, 物理学物理学物理 1 (1964), no. 3, 195-200.

[5] D. P. Blecher, *A new approach to Hilbert C*-modules*, 数学年刊 307 (1997), no. 2, 253-290.

[6] D. P. Blecher and C. Le Merdy *Operator algebras and their modules – an operator* , , 牛津大学出版 *space approach* 2004 社, . [7] A. Bochniak, P. Kasprzak and P. Soltan, *Quantum correlations on quantum spaces* 2022 139 , 国际数学研究通知 ( ), rnac . [8] G. Boreland, I. G. Todorov and A. Winter, *Sandwich theorems and capacity bounds for non-commutative graphs* 177 2021 , 组合理论杂志A辑 ( ), Paper No. 105302, 39 pp. [9] M. Brannan, A. Chirvasitu K. Eifler S. Harris V. I. Paulsen X. Su and , , , , , M. Wasilewski *Bigalois extensions and the graph isomorphism game*, 数学物理通讯 375 (2020), no. 3, 1777-1809.

[10] M. Brannan, P. Ganesan and S. J. Harris, *The quantum-to-classical graph homomorphism game* 63 2022 112204 , 数学物理杂志 ( ), .

[11] M. Brannan, S. J. Harris, I. G. Todorov and L. Turowska, *Synchronicity for quantum non-local games* 284 2023 2, 109738 , 泛函分析杂志 ( ), no. Paper No. .[12] L. G. Brown, *Ext of certain free product C*-algebras*, 算子理论杂志 6 (1981), no. 1, 135-141. [13] N. P. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations*, 美国数学会, 2008. [14] M. D. Choi and E. G. Effros, *Injectivity and operator spaces*, 泛函分析杂志 24 (1977), 156-209.

[15] M. Daws, *Quantum graphs: different perspectives homomorphisms and quantum automorphisms* , , 预印本 ( ), 2022 2203 08716 arXiv: . . [16] G. De las Cuevas, T. Drescher and T. Netzer, *Quantum magic squares: dilations and their limitations* 61 2020 11, 111704, 15 , 数学物理杂志 ( ), no. pp.

[17] G. De las Cuevas, T. Netzer, and I. Valentiner-Branth, *Magic squares: Latin, Semiclassical and Quantum* 2022 2209 10230 , 预印本 ( ), arXiv: . .
[18] A. De Rijdt and N. Vander Vennet, *Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries* , Fourier研究所年刊（格勒诺布尔）60 (2010), no. 1, 169-216. [19] R. Duan, S. Severini and A. Winter, *Zero-error communication via quantum channels* ,

non-commutative graphs and a quantum Lovász θ function, IEEE信息论汇刊 59 (2013), no. 2, 1164-1174.
[20] R. Duan and A. Winter, *No-signalling assisted zero-error capacity of quantum channels and an information theoretic interpretation of the Lovász number*, IEEE信息论汇刊 62 (2016), no. 2, 891-914. [21] K. Dykema, V. I. Paulsen and J. Prakash, *Non-closure of the set of quantum correlations via graphs* 365 2019 3, 1125 1142 , 数学物理通讯 ( ), no. - .

[22] K. Eifler, *Quantum Symmetries Studied through the Lens of Non-local Games*, 学位论文（博士）, 德州农工大学, ProQuest LLC, 密歇根州安娜堡（2021）, 80 pp.
[23] G. K. Eleftherakis and E. T. A. Kakariadis, *Strong Morita equivalence of operator spaces* 446 2017 2, 1632 1653 , 数学分析与应用杂志 ( ), no. - . [24] D. Farenick and V. I. Paulsen, *Operator system quotients of matrix algebras and their tensor products* 111 2012 210 243 , 斯堪的纳维亚数学 ( ), - .

[25] T. Fritz, *Tsirelson's problem and Kirchberg's conjecture*, 数学物理评论 24 (2012), no. 5, 1250012, 67 pp.
[26] J. W. Helton, K. P. Meyer, V. I. Paulsen and M. Satriano, *Algebras, synchronous games and chromatic numbers of graphs* 25 2019 , , 纽约数学杂志 ( ), 328-361. [27] M. R. Hestenes, *A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations* 11 1962 138 194 , 理性力学与分析档案 ( ), - .

[28] Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright and H. Yuen, *MIP*=RE*, 预印本（2020）, arXiv:2001.04383. [29] M. Junge, M. Navascues C. Palazuelos D. Perez-Garcia V. Scholz and , , , , R. F. Werner *Connes' emnedding problem and Tsirelson's problem*, 数学物理杂志 52, 012102 (2011), 12 pages.
[30] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras* 1997 , 美国数学会, .

[31] A. S. Kavruk, *Nuclearity related properties in operator systems*, 算子理论杂志 71 (2014), no. 1, 95-156.
[32] A. S. Kavruk, V. I. Paulsen, I. G. Todorov and M. Tomforde, *Tensor products of operator systems* 261 2011 267 299 , 泛函分析杂志 ( ), - .

[33] A. S. Kavruk, V. I. Paulsen, I. G. Todorov and M. Tomforde, *Quotients, exactness* 235 2013 , *and nuclearity in the operator system category*, 高等数学 ( ), 321-360.
[34] E. Kirchberg and S. Wassermann, *C*-algebras generated by operator systems*, 泛函分析杂志 155 (1998), no. 2, 324-351. [35] M. Lupini, L. Mančinska V. I. Paulsen D. E. Roberson G. Scarpa S. Sev- , , , , , , erini I. G. Todorov and A. Winter *Perfect strategies for non-local games*, 数学物理分析与几何 23 (2020), no. 1, Paper No. 7, 31 pp. [36] M. Lupini, L. Mančinska and D. E. Roberson, *Nonlocal games and quantum permutation groups* 279 2020 5, 108592, 44 , 泛函分析杂志 ( ), no. pp.

[37] L. Mančinska, J. Prakash and C. Schafhauser, *Constant-sized robust self-tests for states and measurements of unbounded dimension*, 预印本（2021），arXiv：2103.01729。[38] L. Mančinska and D. E. Roberson, *Quantum isomorphism is equivalent to equality of homomorphism counts from planar graphs*, 《2020 IEEE 第61届计算机科学基础年度研讨会论文集》，661-672，IEEE Computer Soc.，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯。[39] M. Mrsat and M. Rørdam, *Non-closure of quantum correlation matrices and factorizable channels that require infinite dimensional ancilla. With an appendix by Narutaka Ozawa* 375 2020 3, 1761 1776 ，数学物理通讯（），第 - 期。[40] B. Musto, D. Reutter and D. Verdon, *A compositional approach to quantum functions* 59 2018 8, 081706, 42 ，数学物理杂志（），第期，页码。[41] B. Musto, D. Reutter and D. Verdon, *The Morita theory of quantum graph isomorphisms* 365 2019 2, 797 845 ，数学物理通讯（），第 - 期。[42] S. Neshveyev and L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories* ´ ´ 20, ´ ´ ´ 2013 ，法国数学会专题课程，巴黎，。[43] C. M. Ortiz and V. I. Paulsen, *Lovász theta type norms and operator systems*, Linear Algebra Appl. 477（2015），128-147。[44] N. Ozawa, *About the Connes embedding conjecture: algebraic approaches*, Jpn. J. Math. 8（2013），第1期，147-183。[45] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, 剑桥大学出版社，2002。[46] V. I. Paulsen, S. Severini, D. Stahlke, I. G. Todorov and A. Winter, *Estimating quantum chromatic numbers* 270 2016 6, 2188 2222 ，泛函分析杂志（），第 - 期。[47] V. I. Paulsen and M. Rahaman, *Bisynchronous games and factorizable maps*, Ann. Henri Poincar´e 22（2021），第2期，593-614。[48] V. I. Paulsen, I. G. Todorov and M. Tomforde, *Operator system structures on ordered spaces* 102 2011 25 49 ，Proc. London Math. Soc.（），-。[49] W. Slofstra, *The set of quantum correlations is not closed*, Forum Math. Pi 7（2019），E1。[50] W. Slofstra, *Tsirelson's problem and an embedding theorem for groups arising from non-local games* 33 2020 1, 1 56 ，J. Amer. Math. Soc.（），第 - 期。[51] D. Stahlke, *Quantum zero-error source-channel coding and non-commutative graph theory* 62 2016 1, 554 577 ，IEEE Trans. Inform. Theory（），第 - 期。[52] I. G. Todorov and L. Turowska, *Quantum no-signaling correlations and non-local games* 2020 2009 07016 ，预印本（），arXiv：。。[53] A. Uhlmann, *Roofs and convexity*, Entropy 12（2010），第7期，1799-1832。[54] C. Voigt, *On the structure of quantum automorphism groups*, J. Reine Angew. Math. 732（2017），255-273。[55] S .Wang, *Free products of compact quantum groups*, 数学物理通讯 167（1995），第3期，671–692。[56] S. Wang, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, 数学物理通讯 195（1998），第1期，195-211。[57] J. Watrous, *The theory of quantum information*, 剑桥大学出版社，2018。[58] H. Zettl, *A characterization of ternary rings of operators*, Adv. Math. 48（1983），第2期，117-143。

Department of Pure Mathematics and Institute for Quantum Computing, University of Waterloo, 200 University Ave West, Waterloo, Ontario, Canada,N2L 3G1

Email address: michael.brannan@uwaterloo.ca

Department of Mathematics and Statistics, Northern Arizona University, 801 S. Osborne Dr. Flagstaff AZ 86011 USA , „
Email address: samuel.harris@nau.edu

School of Mathematical Sciences, University of Delaware, 501 Ewing Hall,Newark, DE 19716, USA*Email address*: todorov@udel.edu

Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg, Gothenburg SE-412 96, Sweden*Email address*: turowska@chalmers.se