arXiv:2302.04275v2 [hep-th] 7 Jun 2023

量子场论的温和性第二部分——结构与共形场论

Michael R. Douglas, [1,2] Thomas W. Grimm, [3] 和 Lorenz Schlechter[3]

[1]美国哈佛大学数学科学与应用中心[2] 美国石溪大学物理系、*YITP* 和 *SCGP*[3] 荷兰乌得勒支大学理论物理研究所

摘要

温和几何起源于数理逻辑，通过定义驯性集合与函数的概念，实现了强有限性性质。在第一部分中，我们论证了一大类量子场论中的可观测量都是温和函数，而且理论的温和性取决于其紫外定义。本研究旨在：（1）形式化量子场论与逻辑结构之间的联系；（2）探究共形场论的温和性。为实现第一个目标，我们从一组量子场论出发，解释它们如何定义一种逻辑结构，并通过加入物理可观测量，将其扩展为第二种结构。随后，这两种结构是否具有温和性，即 o-极小性，就成为一个定义明确的性质；通过将它们与数学中已知的实例相对应，我们可以得出明确的结论。对于第二个目标，我们将量子引力可耦合的共形场论集合及有效理论集合的温和性预期加以量化。我们针对共形场论可观测量提出温和性猜想，并提出使共形场论空间成为温和集的普适约束。我们在若干实例中检验这些猜想，并着重指出其初步影响。

目录

1 引言 31.1 结果概要.4

2 一阶逻辑中的驯性质结构 6
2.1 结构及其语言.6 2.2 温和性——o-极小结构.8 2.3 量子场论的物理应用.10

3 来自物理理论的结构 12
3.1 来自量子场论的结构.12 3.2 定义中的微妙之处.17 3.3 含引力理论的结构.20

4 Ta物理可观测量的温和性 22
4.1 点上的量子场论.23 4.2 高维量子场论中的简单可观测量 . . . . . 24 4.3 有效场论中的驯性可观测量 . . . . . 26 4.4 共形场论中的驯性可观测量 . . . . . 27 4.5 与猜想 4 相关的先前猜想.32

5 Ta共形场论空间的温和性约束 35
5.1 定义与量子场论集合相关的 o-极小结构 36 5.2 不同维数下的温和性条件.37 5.3 共形场论空间的温和性.40 5.4 来自微观定义的论证.44

6 结论 45

A 温和几何中的细胞分解 49 B 三维陈-西蒙斯理论 51 C 自由量子场论中的结构 55

1 引言

温和性是数理逻辑中的一个概念，它在最基础的层面上实现了一种广义的有限性原理。过去几年间，它成为许多杰出数学进展的基础，证明了长期悬而未决的猜想，例如 [1–5], ，并为基础性定理提供了新的证明，参见例如 [6, 7]。更近些年来，温和性首次在物理学中得到应用 [8–11]。在参考文献 [8], 中，Bakker、Schnell、Tsimerman 和第二作者利用它证明了 Acharya 与第一作者提出的一个长期悬而未决的猜想 [12, 13],：某些弦紧化 [14] 中的通量真空数量是有限的。在本系列的第一部分 [11], 中，我们表明，非常一般的量子场论的微扰振幅是温和的，许多精确的量子场论结果也同样如此。在这项工作中，我们旨在大幅拓展这一视角，并进一步阐述这样一种观点：温和性是可观测物理的共同属性。我们将说明并形式化数理逻辑、几何与基础物理之间一种新的联系，并提出诸多应用与未来研究方向。

在数学中，温和性是通过先引入结构的概念，再要求它是 o-极小的来实现的。这类结构可以定义在实数上，并收集所有具有某些明确性质的 $\mathbb{R}^n$s。在数理逻辑中，结构提供了一种一阶语言，用来表述有关实数的命题，详情将在下文进一步说明。在此背景下，o-极小性最初是作为一种手段引入的，旨在将塔斯基可判定性定理 [15]推广到更复杂的情形。值得注意的是，从几何角度理解时，o-极小结构实现了 Grothendieck [16]所设想的那类驯性拓扑。从最基本的层面看，它们定义了驯性集合和驯服函数的含义，进而可用于定义何谓具有温和几何。

有充分理由期待许多物理理论具有温和性，这意味着它们的可观测量（例如关联函数、配分函数和振幅）都是温和函数。理由之一是，这推广了这样一个事实：除相变之外，可观测量通常都是实解析函数。在大多数 o-极小结构的例子中（事实上，在 2000年以前已知的所有结构中），所有温和函数总是可以分解为有限个解析片段。有限分解的存在可以理解为一个具有有限次相变的理论，这是一个非常合理的要求。温和性还可以包含某些特定的非解析行为，例如实指数函数在正无穷和负无穷处的本性奇点。这种行为也十分常见——它是熟悉的 $g \to 0$ 瞬子及其他隧穿振幅的 e^{-1/g^2}极限，也是渐近自由理论中动力学生成的质量尺度的极限。因此，量子理论在弱耦合下变得简单这一直觉，也可以通过温和性来表达。不过需要注意的是，人们可以构造反例，例如使用

定义该理论的拉格朗日量中的非温和函数，正如我们在第一部分 [11]中已经看到的那样。确定量子场论具有温和性所需的充分精确条件，将是本项工作的主要目标。

导向温和性的另一种直觉，体现在许多猜想中：自然的理论集合，例如由弦/M理论紧致化产生的理论，或能够与量子引力耦合的理论，都是有限的 [12, 13, 17–20]。一个集合具有温和性，意味着它由有限多个连通分支构成，因此，以这种方式重新表述这些猜想，就统一了模空间与孤立真空态（没有模参数）的情形。在文献 [9]中，第二位作者猜想，只有温和的有效场论才能与量子引力耦合。这表明这两种直觉彼此相关，而且满足驯性可观测量条件的量子场论数量有限。检验这一假设将是本文的另一项主要目标。

基于上述讨论，自然可以将物理中的温和性问题分为两个相互关联的部分。我们可以考察给定的、受到充分约束的理论集合中，物理可观测量是否具有温和性；也可以询问通过施加自然的物理条件所确定的理论集合是否具有温和性。正如第一部分和文献 [9], 中强调的，我们预期温和性取决于理论的紫外性质。对于有效理论，我们预期，固定且有限的能量截断，以及与量子引力的相容性，能够确保理论集合和可观测量都具有温和性。以目前的认识，要证明这些主张似乎还遥不可及，但仍可在具体实例中将其证伪。相比之下，我们有望最终证明共形场论的温和性性质。这类理论没有特定的紫外尺度，而我们预期，在一组自然的约束条件下，理论空间和可观测量都具有温和性。事实上，我们声称，可以系统地构造与 d维共形场论集合相关联的 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d}$ 。这些构造中需要施加的具体约束将通过两个猜想加以表述；本文的一项重要目标，就是通过探讨由此产生的挑战并分析明确的共形场论实例，为这些猜想提供动机。

1.1 结果总结

本节将简要概述研究结果，把大部分技术细节留到后续章节。本文的核心是结构这一概念，它既可以视为一阶逻辑中的概念，也可以视为集合论中的概念。温和性原则通过要求这些结构为 o-极小结构来实现。已有许多 o-极小结构的例子，我们将介绍其中几个重要的例子。从逻辑视角介绍这一主题的内容见第 2 节，而第一部分 [11] 主要着眼于几何视角。

我们将定义两个结构，分别记作 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$。第一个结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$是描述一类量子场论（QFT）所需的结构，这些量子场论在一组时空 $\mathcal{S}$中定义良好。因此，它由一组相容的量子场论，以及对这些集合进行参数化所需的函数构成。它概括了量子场论空间的参数化方式（例如通过拉格朗日量中的耦合常数），幺正性、因果性或不存在快子等相容性条件；此外，它还允许施加约束，以将理论空间限制在某些子集内，例如对自由度数量的上限。

结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$是针对时空 $\mathcal{S}$ 上的理论 $\mathcal{T}$ 阐述一般物理陈述所需的结构。更准确地说，它是将这些理论的所有可观测量——即关联函数和配分函数——加入 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 后得到的。这些可观测量是 $\mathcal{T}$ 的参数、算符的位置以及标记时空流形的参数的函数。

接下来，我们讨论这些结构的一般性质，特别是与 o-极小性相关的性质。对于时空 $\mathcal{S}$ ，我们主要选择拓扑S^n、 T^n 和 $\mathbb{R}^n$ ，或它们与共形平坦度量的乘积。虽然这种表述假设背景度量是非动力学的，但我们会在第 3.3 节讨论量子引力理论中出现的结构。我们预期，在集合 $\mathcal{T}$ 满足简单物理条件时，结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$是驯性质结构。这些条件包括对局域自由度数量的上界，例如对共形场论中的中心荷，或对量子场论中的紫外中心荷设定上界。最后，我们针对量子场论集合 $\mathcal{T}$ 提出精确的猜想；我们将论证这些集合具有有限个连通分支，因此 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 可能是 o-极小的。这些集合是

- 猜想 2： $\mathcal{T}_{\text{有效场论}}$，即带有截断 $\Lambda < M_{\mathrm{pl}}$ 且能够与量子引力耦合的有效理论集合；
- 猜想 5（a）： $\mathcal{T}_{\text{二维共形场论}}$，其中心荷有上界，非零算符维数（径向哈密顿量的谱隙）有下界；
- 猜想 5(b)： $\mathcal{T}_{\text{共形场论}d}$ 的 F （在 $d = 3$中）或 a （在 $d =$4中）有上界；这些量会随重整化群流而减小。具体表述取决于 §5.3 中讨论的一个问题，即如何处理通过规范化离散对称性而相关的理论。

此外，受一个数学猜想（猜想 1）的启发——该猜想认为，对温和函数进行积分后仍保持温和性——我们提出以下关于$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$的猜想：

- 猜想 3：由 $\mathcal{T}_{\mathrm{EFT}d}$ 中各理论的所有关联函数构建的结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{EFT}d}$ ，在驯性时空流形（Σ, g）上具有截断 Λ ，是 o-极小的。

- 猜想 4：给定一个由共形场论组成的驯性集合 $\mathcal{T}_{\rm CFT}$ 以及一个由黎曼流形组成的驯性集合 $\mathcal{S}$，结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_{\rm CFT}\,\mathcal{S}}$ 是 o-极小的。

我们在多种例子中检验了这些猜想，包括有限维量子力学、三维陈-西蒙斯理论，以及平直时空和反德西特时空中的自由量子场论。我们还利用共形场论已知的性质给出了一般性论证，例如，共形场论关联函数可以展开为共形部分波。我们的研究揭示了若干隐含的猜想。例如，我们注意到，相互作用共形场论中可观测量的温和性，与以下主张密切相关：算符维数空间中不可能存在受参数控制的能隙（参见例如 [21]）。

2 一阶逻辑中的驯性质结构

本节将介绍 o-极小结构的概念，重点讲解其在一阶逻辑中的定义 [22]。对于对更具几何意味的研究方法感兴趣的读者，请参阅第一部分 [11]，或该主题的一些入门书籍，例如 [23]。

从一阶逻辑的角度介绍结构和温和性，之后将有助于我们思考与量子场论相关的结构。在 §3 中，我们将构造一个结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$，使我们能够表述关于一组量子场论 $\mathcal{T}$ 的所有“物理”陈述。随后，我们将介绍 o-极小结构（亦称驯性结构），并简要评论其若干性质。

2.1 结构及其语言

在这里，我们将定义结构这一概念，它有时也称为一阶结构或模型。我们用基域（此处为 $\mathbb{R}$）、一组运算和一组函数 $\mathcal{F}$ 来表示结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 及其逻辑语言 L，

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}} := \langle \mathbb{R}; <, +, \cdot, -, \mathcal{F} \rangle \ , \qquad L(\mathcal{F}) \ . \tag{1}$$

接下来，我们将更精确地说明这些对象的含义。首先，我们引入较简单的结构 $\mathbb{R}_{\rm alg}$，它具有 $\mathcal{F} = \emptyset$。我们已在第一部分第 2 节中定义过这种结构，但现在我们将从逻辑的角度来看待它。基本对象是实数的有序域，以及若干标准运算

$$\mathbb{R}_{\rm alg} = \langle \mathbb{R}; <, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle \ , \tag{2}$$

其中 0、1 是场 $\mathbb{R}$ 中的特定元素。$\mathbb{R}_{\rm alg}$ 的定义隐含在逻辑语言 L 的指定中。该语言

使用形式符号 x_i、 $i = 1$、2、.....，以及某种多项式的概念$p(x_1, \ldots\ldots, x_n)$。[1] 这些多项式可用于表述 L-公式。根据定义，L-公式具有以下性质：

(i) 表达式 $p(x_1, ..., x_n) = 0$ 和 $p(x_1, ..., x_n) > 0$ 是 L-公式。它们称为原子 L- 公式。如果 ϕ 是这样的一个 L- 公式，那么 $\phi(\mathbb{R}_{\text{alg}})$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集。(ii) 如果 ϕ_1, ϕ_2 是 L-公式，那么 $\phi_1 \wedge \phi_2$、 $\phi_1 \vee \phi_2$和 $\neg\phi_1$ 都是 L-公式。这意味着，应用有限次逻辑运算“与”“或”和“非”时， L-公式具有良好的封闭性。就集合而言，这些运算分别对应于将原集合限制为其交集、并集或补集。(iii) 如果 ϕ 是一个 L-公式，那么 $\exists x_n\, \phi$ 也是一个 L-公式。就集合而言，$\phi(\mathbb{R}_{\text{alg}}) = A \subset \mathbb{R}^n$ 得到坐标投影 $\exists x_n\, \phi(\mathbb{R}_{\text{alg}}) = \pi_n(A) \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

因此， L-公式是一个形式符号串，用来编码在结构 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中使用语言 L可定义的集合的构造。显然，结构 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 相当简单，因为它完全由多项式构成。它或许足以表述关于那些自然地具有多项式形式的物理问题的简单陈述，却无法让我们提出更复杂的问题。尤其是，一旦涉及微分方程，就很快超出了多项式的范畴。这种语言中没有积分或无穷和的概念。

为了表述更复杂的陈述，可以像（1）那样扩展结构，即添加一组实函数 $\mathcal{F}$。具体而言，这意味着现在可以使用环运算 $+$， $\cdot$， $-$、实数、形式变量 x_1, ...， x_n，以及函数 f_1，.....， $f_m \in \mathcal{F}$来构造表达式；这些函数被视为从 $(x_1$, ...， $x_n)$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射。构造 $L(\mathcal{F})$ 的表达式时，也允许对这些运算进行任意有限次复合。 $L(\mathcal{F})$-公式的概念则是对条件 (i)、(ii)、(iii) 的直接扩展。特别地，形如以下形式的表达式

$$p\big(x_1, ..., x_n, f_1(x), ..., f_m(x)\big) = 0\ , \tag{3}$$

现在是一个 $L(\mathcal{F})$-公式，即 在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中可定义的。用 ϕ表示表达式 (3)，我们用 $\phi(\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ 表示 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的相应子集。如 (1) 所示，也允许使用不等式构成的表达式。[2]

为结束这段讨论，我们引入一些记号。我们把由一个 $L(\mathcal{F})$-公式给出的集合称为 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义集。如果我们所考虑的结构是显而易见的，

[1]起初，假设这些多项式的系数是整数。不过，我们感兴趣的是一种“带参数的结构”，其中系数可以是实数。[2]事实上，从表达式 (3) 出发并使用逻辑符号 $\exists$，便会自动得到不等式。考虑集合 $\{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R}:\ f(x) = y^2\}$。

我们就把这样的集合称为“可定义集”。我们也可以定义何谓 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义映射：要求这样一个在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义空间之间的映射 f，其图像是 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义的。在这种情况下，我们也可以简写为“可定义映射”，并将所考虑的结构隐去。

2.2 温和性——o-极小结构

到目前为止，我们尚未对结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$施加任何额外条件。不过，有一类特殊的结构称为 o-极小结构，它们蕴含广义有限性原理。结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 是 o-极小的，当且仅当其唯一的 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义子集 $\mathbb{R}$ 是由有限个点和区间构成的并集。[3]实数直线的子集满足这一简单条件，通过对线性投影封闭这一性质，即通过使用量词 $\exists$，这一条件会影响整个结构。任何高维集合或相关的逻辑表达式都可以通过投影化归为 $\mathbb{R}$，而其像只能落在由有限个点和区间组成的有限集族中。我们也将 o-极小结构称为驯性质结构，并将其可定义集和函数称为“驯性集合”和“温和函数”。

o-极小性有许多显著的推论。其中许多都建立在驯性集合与温和函数的一项核心性质之上，即细胞分解定理。我们在附录 A 中介绍这一结果。对 $\mathbb{R}^n$ 作细胞分解，就是使用同样连续的可定义函数，将 $\mathbb{R}^n$ 切分为有限个称为胞腔的部分。细胞分解定理指出，总能找到这样一种分解，使任意可定义集都是有限个胞腔的并集。此外，对于任意可定义函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$，都可以将 A划分为胞腔，使得 f 在每个胞腔上连续。在这两部分中，都可以用属于 C^p的元素替代“连续”。在许多（但并非所有）o-极小结构中，还存在胞腔为 C^∞ 甚至为解析 [24]的细胞分解。

如前所述，从几何的视角看由 $\mathbb{R}$ 构成的结构通常很方便。如果所研究的结构是 o-极小的，就会引出 Grothendieck [16] 所设想的“驯性拓扑”这一概念。要构造这种拓扑，首先从一个 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$出发，并引入可定义图册的概念；它由有限多个可定义集及可定义过渡函数组成。$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义拓扑可用于定义许多其他 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$-可定义的几何对象：流形、向量丛等。此外，它还有一个强大的复几何扩展版本 [25]。

为展示 o-极小结构理论的丰富性，我们列举几个例子。

[3]区间可以是开区间或闭区间，也可以是有界区间或无界区间。

- $\mathbb{R}_{\text{指数}}$： $\mathcal{F} = \{\exp\}$，其中 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是实指数函数。o-极小性在 [26] 中得到了证明。

- $\mathbb{R}_{\text{解析}}$： $\mathcal{F} = \{$所有受限实解析函数$\}$。这类函数都是定义在开集上的 $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 实解析函数 f $f|_{[-1,1]^n}$ 的限制 $U \supset [-1,1]^n$。要将其扩展到这些区间之外，只需将其在区间外定义为零即可。其 o-极小性由 [27]得出。

- $\mathbb{R}_{\text{解析，指数}}$：$\mathcal{F} = \{\exp$，所有受限实解析函数$\}$。其 o-极小性已在 [28]中证明。

- $\mathbb{R}_{\text{Pfaff}}$： $\mathcal{F} = \{$所有 Pfaffian 函数$\}$。若一个函数属于由满足微分方程 $\partial_{x_j} f_i(x) = P_{i,j}(x, f_1(x) \cdots, f_i(x))$的函数构成的 Pfaffian 链，则称它为 Pfaffian 函数，其中$P_{i,j}$是有限次多项式。Pfaffian 函数包括多项式、指数函数，以及定义在适当定义域上的所有初等函数。

- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$：从一个 o-极小结构 $\mathbb{R}$开始，通过添加一阶微分方程 $\partial_{x_i} f(x) = F_i(x, f(x))$ 的所有解，可以定义其 Pfaffian 闭包 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$，其中所有 F_i都是 $\mathbb{R}$ 中的可定义函数。 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的 o-极小性已在 [29]中得到证明。

- $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$：从一列实数 $1 \le M_0 \le M_1 \le ...$开始，使得 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1} = \infty$。为得到 $\mathcal{F}$，收集所有满足以下性质的函数。考虑 $f: [-1,1]^n \to \mathbb{R}$，其中 $f \in C^\infty$，且满足$|f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| \le c^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$；这里 $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ 是 α_i关于x_i的导数，而 c是与（α_i， x_i）无关的常数。 $\mathcal{F} = \mathcal{C}(M)$是所有满足 $n \ge 1$ 的此类函数的并集，并生成一个 o-极小结构 [30]。

- $\mathbb{R}_{\mathcal{G},\exp}$：这个 o-极小结构由 Gevrey 函数和指数函数组成。Gevrey 函数 $\mathcal{G}(R, \phi, \kappa)$ 是定义在复平面中楔形区域 S 上的所有全纯函数 $f: S \to \mathbb{C}$，其中 $S := \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < R, |\arg(z)| < \kappa\phi\}$，并且存在常数 A 和 B，使得 $|f_{(n)}(z)|/n! < AB^n(n!)^\kappa$，且极限 $\lim_{z \to 0} f_{(n)}(z)$ 存在。 [31]这个结构比 $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ 更大，并且允许在正实数轴上定义Γ-函数。

我们强调，$\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ 非常丰富，允许定义许多标准函数。事实上，我们在第一部分已经证明，所有费曼积分都可在这一结构中定义。然而，我们在第一部分也指出，可能存在无法在$\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$中定义的精确（非微扰）量子场论振幅。因此，或许值得注意的是，存在一些不同于$\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$、具有更奇特性质的结构。例如，结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$ 依赖于参数（M_i），并且当设定 $M_n = n$时会退化为 $\mathbb{R}_{\text{an}}$！这一参数化的结构类$\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$ 可用于证明关于 o-极小结构的若干重要事实。

特别是，可以证明存在两个参数集（M_i）、（N_i），使得 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(N)}$ 都是 o- 极小的，但不存在包含 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(N)}$ [30] 的更大 o- 极小结构。这表明不存在最大的 o-极小结构。

如上所述，并非每个 o-极小结构都允许解析胞腔分解。不过，已知结构 $\mathbb{R}_{\text{an}}$、$\mathbb{R}_{\text{exp}}$、$\mathbb{R}_{\text{an, exp}}$ 和$\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ 确实允许这种分解 [32]。允许解析胞腔分解的结构的 Pfaffian 闭包与该分解相容。结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}(M)}$ 是一个反例，它不允许解析胞腔分解 [30]。本研究不会涉及那些不允许这种分解的例子。

在结束关于温和性的讨论时，我们指出，还可以对结构施加其他逻辑性质。最值得注意的是，人们可能会想探讨 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$的“模型完备性”和“可判定性”。有关这些概念的介绍，请参阅 [33] 。温和性并不蕴含这两种性质，但已知许多 o-极小结构具备这些性质 [30, 34]。

2.3 量子场论中的物理应用

下面给出一些可以使用结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 表述的、在物理上具有意义的陈述。

我们首先通过示例说明可定义拉格朗日量 $\mathcal{L}$ 在量子场论中的一些方面。我们从某种逻辑语言$L(\mathcal{F})$中使用的抽象变量 $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,m+n}$ 开始。在我们的示例中，将它们分成两组：$\{x_i \equiv \lambda_i\}_{i=1,\ldots,m}$ 和 $\{x_{\alpha+m} \equiv \phi_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n}$。$\lambda_i$ 将是拉格朗日量中的耦合常数或参数，而 ϕ_α 是标量场。设 $V(\lambda, \phi)$ 为标量势（或任何其他耦合函数），它是 λ, ϕ 的函数。如果 V 是代数函数，即通过求解多项式方程定义的函数，那么它在结构 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中是可定义的。事实上，它在每个结构中都是可定义的，因为每个 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 都是通过扩展 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$得到的。当然，人们也可能希望考虑 (λ, ϕ) 的更一般的标量势和耦合函数。在这种情况下，$V(\lambda, \phi)$ 需要在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中是可定义的。这总可以通过将 V 添加到函数集合 $\mathcal{F}$ 中来实现。假设 V 二阶可微，那么我们就可以在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中表述如下陈述：

$$\begin{aligned} &(1) \quad \exists \phi_\alpha : V(\lambda, \phi) > 0 \ \wedge \ \partial_{\phi_\alpha} V(\lambda, \phi) = 0 \ \wedge \lambda_\alpha > 0 \ , \\ &(2) \quad V(\lambda, \phi) = 0 \ \vee \ \partial_{\phi_\alpha} \partial_{\phi_\alpha} V(\lambda, \phi) < 0 \ , \qquad etc. \end{aligned} \tag{4}$$

这些表达式由有限个逻辑运算组成，涉及可定义函数之间的等式和不等式；其中用到了这样一点：如果 V 是

在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中可定义的，那么它的各阶导数也可定义。[4] 因此，这些表达式是 $L(\mathcal{F})$-公式，也就是说，它们在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中可定义。

我们强调，对于可以纳入某个结构的函数，并没有先验限制，但若要得到一个 o-极小结构，我们可能需要仔细处理细节。例如，如果我们想表述关于$V(\lambda, \phi) = \lambda\cos(\phi)$ 和 $\phi \in \mathbb{R}$的命题，就应该选择一个包含 $\cos(x)$ 的结构，例如 $\mathbb{R}_{\cos}$，它包含 $\mathcal{F} = \{\cos(x)\}$。那么，诸如 $V(\lambda, \pi\phi) = 0$ 这样的命题，便可在结构 $\mathbb{R}_{\cos}$ 中定义，并定义出整数 $\mathbb{Z}$。显然，结构$\mathbb{R}_{\cos}$ 不可能是 o-极小的。另一方面，假设我们将 ϕ 的定义域限制在有限长度的区间 $[0, a]$上，那么我们可以改为向 $\mathcal{F}$ 添加一个函数 $f(x)$，使其在 $[0, a]$ 上等于 $\cos(x)$，在其他地方等于 0。这个结构是 o-极小的，因为它是 $\mathbb{R}_{\text{an}}$的子结构。

现在我们来探讨：一个结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 若能定义经典拉格朗日量$\mathcal{L}(\lambda, \phi)$，是否足以用来表述关于量子理论的命题。通常，我们将 $\mathcal{L}$ 视为场 ϕ 在一个 d维时空 Σ上的泛函。在某些时空位置 y_i 处，局域算符$\mathcal{O}_i(y_i)$的量子关联函数具有以下形式

$$\langle \mathcal{O}_1(y_1) ... \mathcal{O}_k(y_k) \rangle = \int D\phi \, \mathcal{O}_1(y_1) ... \mathcal{O}_k(y_k) \, e^{-\int_\Sigma d^d y \mathcal{L}} \, , \tag{5}$$

即由关于场 ϕ 的路径积分给出。现在我们可以问，关联函数在原始的 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中是否可在 λ 中定义。

人们立刻会发现，这是一个非常不平凡的问题，因为（5）涉及不可定义的运算和对象。最重要的是，函数积分这一概念不可定义：无法保证在 $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ 中可定义的函数，其积分在同一结构中仍然可定义。第一部分中给出了一个简单例子：我们证明，一个具有 aϕ^4 拉格朗日量的零维量子场论显然可在 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中定义，但其配分函数却由修正贝塞尔函数 $K_{1/4}(x)$ 给出。这个贝塞尔函数显然无法在 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中定义。我们还可以继续列举该理论中的其他关联函数，它们也未必能在 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中定义。

现在我们可以解释本文提出的主要新概念。给定某个量子场论或一组量子场论的关联函数列表，我们可以将它们加入函数集 $\mathcal{F}$，从而得到一个通常是全新结构的结构，它刻画了该量子场论或这些量子场论。接下来我们定义这一过程。

[4]要理解这一点，可以利用导数的数学定义：它可以看作一个涉及有限个附加变量（ϵ 和 δ）的逻辑语句。

3 来自物理理论的结构

本节讨论如何系统地将两个结构$\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$（它们满足 §2 中定义的公理）与给定的一组 $\mathcal{T}$物理理论和一组 $\mathcal{S}$ 时空相关联。基本思路是，集合 $\mathcal{T}$，$\mathcal{S}$ 在 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 中是可定义的，而且所有物理问题，即关于该理论可观测量的陈述，都应当能在 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$中定义。为此，我们提出需要将该理论的哪些函数加入生成该结构的函数集。虽然我们可以简单地加入研究这些理论所需的所有函数，但关键在于有所选择，以便所考虑的结构有机会成为 o-极小结构。在 §4 中，我们将进一步考察 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$，并在假设 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$为 o-极小的情况下讨论其温和性。随后，§5 将提出关于 $\mathcal{T}$的条件，使得 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 满足温和性标准。我们主要在 §3.1、§3.2 中讨论与量子场论相关联的结构，并在 §3.3 中简要评论含引力理论。

3.1 来自量子场论的结构

我们的首要目标是描述这样一个过程：给定由 $\mathcal{T}$ 参数化的一组量子场论，以及带有度规 g 、由 $\mathcal{S}$ 标记的一组时空 Σ，生成两个结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$。虽然结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 可以用来表述有关可观测量的陈述，但 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 只能用来表述有关理论和时空集合定义的陈述。

虽然我们相信这些定义可以做到数学上的严谨，但在描述弯曲时空上的量子场论时，我们将避免过于技术化。更完整讨论的起点，应当是对量子场论和关联函数给出严格定义。在这一领域浩瀚的研究成果中，让我们引用 [35,36] 作为读者在下文中可以记住的例子。

定义结构

让我们考虑一组由参数集合 $\mathcal{T}$ 标记的量子场论。[5] 如何定义这些理论，取决于所采用的框架（算符形式、路径积分、等等。）和理论类型。举例来说，考虑一组由一族拉格朗日量指定的量子场论。与 §2.3 中一样，我们可以要求这些拉格朗日量 $\mathcal{L}$在某个结构中是可定义的。拉格朗日量可以依赖于动力学场，也可以依赖于耦合常数 λ，这些耦合常数用于标记该族中的特定量子场论。接下来，我们对

[5]我们有时会将 $\mathcal{T}$ 称为量子场论空间，但我们默认它也包含有关这些量子场论的信息。用数学术语来说，$\mathcal{T}$ 可以被视为一个模空间，其点是带有附加数据的对象。

耦合常数 λ施加约束。为简单起见，可以将其视为一个 $\lambda \in \mathbb{R}^k$，使得对相应作用量进行量子化后，会得到一个定义良好且无奇异性的量子场论；这意味着我们即将列出的所有可观测量都有良好的定义，并满足量子场论的公理。我们要求集合 $\mathcal{T}$尽可能包含所有这些 λ值，即将 $\mathcal{T}$视为 $\mathbb{R}^k$的子集。正如我们稍后将看到的，我们常常会对 $\mathcal{T}$中的理论施加额外条件，例如对自由度数量的限制，以使 $\mathcal{T}$有可能成为一个驯性集合。换言之，尽管对 $\mathcal{T}$存在一些自然约束，例如良定义性，我们仍可进一步缩小这个空间。我们将能够定义空间 $\mathcal{T}$及理论本身的结构记为 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$。

结构 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$,$\mathcal{S}$ 不仅需要定义理论，还需要定义我们据以计算物理量的时空背景。让我们从一组 $\mathcal{S}$ 允许的时空 Σ 及其度规 g [6]开始。我们可以认为，这些时空由某些参数 ρ标记，即 将 $(\Sigma, g)_\rho$ 视为纤维化在某个参数空间之上。这个参数空间以及带有度规的时空都应当是$\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$,$\mathcal{S}$中可定义的。虽然 Σ_ρ 的选择会影响结果，但这并非我们主要关心的问题，因此我们常用记号 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$表示$\Sigma_\rho$ 采用标准选择，即共形平坦流形。

描述了 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$,$\mathcal{S}$的构造之后，现在让我们转向 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$。接着，我们选择一组以可观测量 O_κ 为内容的函数，这些可观测量是在 $\mathcal{T}$中的量子场论内计算得出的。这些函数定义在 $\mathcal{T} \times(\Sigma_\rho)^n$ 上，

$$O_\kappa(y_1, ..., y_n; \lambda, \rho) \ , \qquad y_k \in \Sigma_\rho \ , \ \lambda \in \mathcal{T} \ , \ \rho \in \mathcal{S} \ , \tag{6}$$

其中 y_k 是 n 时空位置。现在我们引入形式变量 x_i，用来参数化 $\mathbb{R}^m$，其中 m 足够大。考虑 $y_i \in \Sigma_\rho$周围的局部邻域后，我们便可在乘积空间上引入局部坐标，以指定向量（y_1，.....， y_n）。我们将后者视为 $n \cdot$维的 Σ_ρ 个变量 x_i。其余变量是参数 λ， ρ 。根据我们描述 $\mathcal{T}$， $\mathcal{S}$的方式，我们还可以再次通过某种局部构造。这样，我们将 O_κ（x）理解为 $\mathbb{R}^m$某个区域上的函数，并将其在其他所有位置设为零，从而把它扩展到整个 $\mathbb{R}^m$ 。现在我们可以定义一个结构$\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$，它通过这些函数扩展了$\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup O_\kappa \right\} , \tag{7}$$

其中，并集取遍所有可观测量，以及它们可以在其中求值的所有区域 Σ_ρ 和$\mathcal{T}$。注意，$\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$ 是与集合 $\mathcal{T}$， $\mathcal{S}$相关联的“量子结构”，因为我们是从量子关联

[6]关联函数定义在带 puncture 的时空上，算符插入位于各个 puncture 处。从驯性集合中移除有限个点不会破坏其温和性，因此，只要时空本身是可定义的，就可以定义带标签的 puncture 的时空。

函数构建出它的。即使对于量子场论，例如，具有多项式拉格朗日量的量子场论，我们也预期$\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{S}$包含许多非平凡函数，正如我们在第一部分 §4 中所见。

我们要求 $\mathcal{T}$和 Σ_ρ是 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{S}$-可定义的，这使我们能够系统地从 $\mathcal{T}\times(\Sigma_\rho)^n$ 上的函数 O_κ 中提取与 $\mathcal{F}$ 相关的信息。我们回顾一下 §2 中的内容：可定义流形可以由坐标片覆盖，这些坐标片通过可定义函数映射到 $\mathbb{R}^d$的可定义子集。我们利用这一点，将定义在任意一个 $(\Sigma_\rho,\ g_\rho)$ 上的所有可观测量合并为一个结构。

我们允许的可观测量是取值于 $\mathbb{R}$ 、定义在一族时空流形 Σ_ρ上的规范归一化配分函数和关联函数。换言之，我们考虑

$$O_\kappa(x) = \langle \mathcal{O}_1(y_1)\dots\mathcal{O}_n(y_n)\rangle_{\lambda,\rho}\ , \tag{8}$$

其中 $\{\mathcal{O}_1,...,\mathcal{O}_n\}$ 是带有参数 λ的量子场论的局域算符集合。 κ 是该算符集合的形式标签。如果关联函数取复值，我们就取其实部和虚部。注意，许多可观测量自然地被视为取值于 Σ_ρ、 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$上的向量丛中的量。此外，我们还需要说明算符如何依赖于量子场论参数。我们将在下文进一步讨论这些问题。

式 (8) 的一个基本例子是量子力学中与能量跃迁 E相关的二点函数。它是算符之间经过时间 Δt 的函数。在实时间量子力学中，它将是 $e^{iE|\Delta t|}$，这并不温顺。因此（在本工作中），我们取 Σ_ρ 为黎曼型（而非洛伦兹型）。特别地，一维量子场论就是欧几里得时间量子力学，因此，对于诱发能量跃迁 E 的算符，其归一化二点函数为 $e^{-E|\Delta t|}$。

一般而言，配分函数和关联函数只在一个整体乘法因子意义下确定，而该因子可能依赖于参数 $g\in\mathcal{T}$和$\rho\in\mathcal{S}$。所谓正则归一化，是指必须存在某种物理条件来消除这种歧义。通常，这通过在算符形式中解释可观测量来实现。例如，在$\Sigma = S^1\times X$ 上的配分函数（其中 S^1 上的平移通过等距变换作用）有一个更根本的定义，即迹 $\mathrm{Tr}\ \exp(-LH)$，其中 L 是 S^1 的周长，而 H 是超曲面 X 上正则量子化的哈密顿量。另一方面， S^d 上的配分函数并未正则归一化，因此不会被解释为可定义函数。[7]

关联函数也可以通过它们与算符形式的关系进行规范归一化。在共形场论（共形场论）中，这是通过

[7]在 $\log Z$ 的展开中，可能会出现某些特殊的普适项，例如体积无关项或对数体积项。事实上， $d=3$ 中的体积无关项将在下文发挥作用，但它不会被称为可定义的。

态-算符对应实现的，它是局域算符空间与径向量子化的希尔伯特空间之间的双射。因此，我们可以在关联函数中使用单位归一化的算符，并通过除以单位算符的关联函数，消除给定 (Σ, g) 的整体歧义。在渐近自由或紫外安全的量子场论中，可以通过在紫外极限下定义归一化来实现这一点。[8]

总之，结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$（或者说，当我们为 Σ 固定一个典范选取时的 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$）由以下数据构成：

1. 一个结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$，它允许定义带有 $\mathcal{T}$ 中标签的理论，以及带有 $\mathcal{S}$ 中标签的时空：

   - 一个集合 $\mathcal{S}$，用于标记 $\mathbb{R}_{\mathrm{def}\mathcal{T},\mathcal{S}}$-可定义的欧几里得时空（$\Sigma_\rho$, g_ρ），且满足 $\rho \in \mathcal{S}$。若未明确说明，$\mathcal{S}$ 就是 d 维共形平坦流形的集合（如下文所述）。

   - 一个集合 $\mathcal{T}$，用于标记 $\mathbb{R}_{\mathrm{def}\mathcal{T},\mathcal{S}}$-可定义且一致的量子场论。$\mathcal{T}$ 可以收集拉格朗日量中的离散或连续参数，或算符维数及算符乘积展开系数等数据。集合 $\mathcal{T}$ 可受限于针对所考虑理论的附加条件。

2. 典范归一化的配分函数和关联函数（8），它们依赖于参数 $\lambda \in \mathcal{T}$ 和 $\rho \in \mathcal{S}$、一列局域算符及其在时空 Σ_ρ 中的位置。

请注意，$\mathcal{T}$ 和关联函数**未必**需要在与拉格朗日量相同的结构中可定义。例如，人们可能希望对标记为 $\mathcal{T}$ 的理论施加幺正性界，而这可能需要对拉格朗日量进行复杂的操作。以第一部分中的 0d ϕ^4 理论为例，即具有多项式作用量 $S = \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 的理论。该模型的关联函数不在 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ 中。现在可能出现这样的情况：无法在原始结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ 中表述关于量子修正参数的条件，例如重整化质量 $m = m(m_0, \lambda)$。虽然并不能立刻看出 $\mathcal{T}$ 本身不是 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$-可定义的，但可能出现这种情况的一般情形是：一族参数化的理论具有一个质量平方为 $m^2(\lambda)$ 的标量模，且该质量平方既取正值也取负值。当然，负值会导致不稳定性（“快子”）。这可能导致相变，在这种情况下，我们预期关联函数在 $m^2(\lambda) = 0$ 处不连续。或者它可能导致定义不良，此时 $m^2(\lambda) = 0$ 是 $\mathcal{T}$ 的边界。尽管在这种情况下对 m 的约束是代数的，但该约束

[8] 在具有 S 矩阵的量子场论中，人们使用 LSZ 形式主义定义归一化的壳上动量空间关联函数，正如第一部分中所做的那样。

对原始参数 m_0 和 λ 的约束未必是代数的。没有先验理由认为函数 $m^2(\lambda)$ 是代数的；在 0d ϕ^4 示例中，它明确是非代数的。在这种情况下，理论空间（就不稳定性而言）或关联函数并非 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$-可定义的。

虽然这些定义对任意一组 d维量子场论都适用，但我们也可以考虑具有特定性质的量子场论集合，例如具有整体对称性、共形对称性和/或超对称性的量子场论集合。这些选择将称为量子场论的“类型”。为简化记法，我们有时写作

$$\mathbb{R}_{\text{QFT}d}\ , \qquad \mathbb{R}_{\text{CFT}d}\ , \qquad \mathbb{R}_{\text{AQFT}d}\ , \tag{9}$$

以便在只想强调结构的某些方面时使用。这里，AQFTd表示我们要求所考虑的量子场论是渐近自由的。当然，这种简化记法无法涵盖所有必要信息，它更像是此类理论相关结构的占位符。在实践中，尤其是在评估温和性时，明确给出 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{S}$的恰当定义至关重要。重要的是，我们希望让$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}}$ 足够丰富，从而能够提出关于理论 $\mathcal{T}$的物理问题，同时又足够精简，使得$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}}$ 可以是o-极小的。

举例：量子力学

一个简单的例子是具有有限多个态的量子力学系统，其中$\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}}$和$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}}$可以被明确识别。到目前为止，我们主要使用拉格朗日量的参数λ 来参数化理论空间。在这种情况下，我们发现，通过为态选取一组基底 $|i\rangle$ ，并指定有限个算符 $\mathcal{O}_a$、 $a_{i,\ j} = \langle i|\mathcal{O}_a|j\rangle$的矩阵元以及各态的能量 Δ_i 来定义理论更为方便。取单个算符 $\mathcal{O}$ （推广情形显而易见），这些理论由集合 $\mathcal{T} = \{a_{i,j}, \Delta_i\}$参数化，这是一个有限维参数空间。

利用这些，我们将时间序关联函数定义为对中间态求和，

$$\langle \mathcal{O}_1(t_1)\dots\mathcal{O}_n(t_n)\rangle = \sum_i \langle 0|\mathcal{O}_1(t_1)|i\rangle e^{-\Delta_i|t_1-t_2|}\langle i|\mathcal{O}_2(t_2)\dots\mathcal{O}_n(t_n)|0\rangle\ , \tag{10}$$

其中我们考虑 $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$。插入足够多的中间态后，这会化为有限和，其各项关于矩阵元呈多项式形式，关于能量呈指数形式 Δ_i。利用迹，可以将这一点自然地推广到配分函数。因此，我们可以认为，有限维希尔伯特空间上的量子力学理论空间由 Δ_i 和矩阵元参数化。由于它们只是实变量，如果我们从 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}} = \mathbb{R}_{\text{alg}}$ 开始，就可以用这些参数的有限和、有限积以及指数函数来定义每个关联函数

这些参数的有限和与有限积，以及指数函数。因此得到的结构是 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\ \mathcal{S}} = \mathbb{R}_{\exp}$。

对于希尔伯特空间为无穷维的量子力学，情况会更加复杂，因为对中间态求和是一个无穷和。尽管如此，关联函数仍然可以是温和的。我们给出两个简单的例子：自由粒子和谐振子。考虑跃迁函数 $\langle x|\, e^{-Ht}\, |y\rangle$。对于质量为 m 的自由粒子，它是

$$\langle x|\, e^{-(t_2-t_1)H}\, |y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{m(x-y)^2}{2(t_2-t_1)}}\ . \tag{11}$$

对于频率为 ω的谐振子，它是 Mehler 核

$$\langle x|\, e^{-(t_2-t_1)H}\, |y\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega(t_2-t_1))}} e^{-\frac{m\omega}{2\sinh(\omega(t_2-t_1))}\left(\cosh(\omega(t_2-t_1))\left(x^2+y^2\right)-2xy\right)}\ . \tag{12}$$

在这两种情况下，参数 m 和 ω 以及坐标差 $t_2 - t_1$ 的依赖关系都可以在 $\mathbb{R}_{\exp}$ 中定义。类似地，在福克空间中，两个海森堡基态的二点关联函数为

$$\langle 0|_{t_2}\, |0\rangle_{t_1} = \frac{1}{2m\omega} e^{\omega(t_2-t_1)}\ . \tag{13}$$

插入更多算符不会带来任何新的函数依赖关系，因为根据维克定理，任意 n点函数都可以写成二点函数乘积之和。例如，对于四点函数

$$\langle 0|_{t_2}\, x(t_4)x(t_3)\, |0\rangle_{t_1} = \sum_n \langle 0|_{t_2}\, x(t_4)\, |n\rangle_{t_0}\, \langle n|_{t_0}\, x(t_3)\, |0\rangle_{t_1} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2m\omega} e^{-\frac{1}{2}\omega(t_2-t_1)} e^{-\omega(t_4-t_3)} \tag{15}$$

因此，由自由粒子或谐振子的欧几里得量子力学生成的结构仍然是 $\mathbb{R}_{\exp}$。

3.2 定义中的细微之处

虽然我们的定义可以直接应用于许多例子，但一般的物理构型中可能会出现若干细微问题。下文将重点指出一些需要更谨慎处理的地方，以使这一定义完全精确；这些问题留待第三部分讨论。

时空的可定义性 Σ

在构造结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}\text{时},\ \mathcal{S}}$ 我们要求时空 Σ 及其度量 g 在 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}\text{中是}\mathcal{S}}$可定义的。对于 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$、$\mathcal{S}$和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}\text{而言},\ \mathcal{S}}$要成为 o-极小的，每个 Σ

都应是一个驯性集合，其度量 g 是一个驯服函数。我们已经指出，我们要求 Σ 是黎曼的，但我们应该允许哪些流形 Σ 呢?

要一般性地回答这个问题，我们需要发展一套驯服微分几何理论。形式上，给出初始定义并不困难：如 §2 中所述，驯服流形具有一个可定义图册（用有限个坐标图覆盖 Σ）以及可定义的转移函数。黎曼度量是 Σ的切丛平方的一个截面。我们要求这个丛是驯服的，即存在有限个平凡化，并且具有可定义的转移函数。于是，度量系数在更换坐标图时应以可定义的方式变换。尽管这些定义很容易表述，但据我们所知，尚无由温和性推出的有力定理。不过，温和性预计是一项非平凡的约束。在 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ 中可定义的流形是实代数几何的自然研究对象，而每个 o-极小结构都给出一种推广。

为了绕开驯服微分几何，我们采取务实的做法，为 Σ及其黎曼度量 g提出一些具体的选择。作为初步方案，我们允许拓扑为 $\mathbb{R}^k$、 S^k、 T^k 的流形，以及它们的直积。对于给定的 d ，这是一份有限的拓扑清单。其中包括 $\mathbb{R}^d$，因此我们可以联系第一部分中关于微扰理论的讨论；也包括共形场论最感兴趣的情形。对于 g，我们允许一般的共形平坦度量，以及此类度量的参数化族。例如， T^d 具有一族由正定对称 $d\times d$ 矩阵参数化的平坦度量（更准确地说，是在 $SL(d,\ \mathbb{Z})$下的等价类），而 $\mathcal{S}=SL(d,\ \mathbb{Z})\backslash SL(d,\ \mathbb{R})/SO(d)$是 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ [7]中可定义的陪集空间。纳入更一般的共形平坦度量，是为了能够关联诸如 $\mathbb{R}^d$ 与 S^d 这样的情形，同时也考虑到 AdS/CFT对偶。

需要强调的是，即使限制 $(\Sigma,\ g)$ 为共形平坦，在 o-极小 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$中，$(\Sigma,\ g)$ 的可定义性仍会带来额外条件。显然，几何体 $\mathbb{R}^d$、 S^d 和 T^d 在其标准度量下都是 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$-可定义的。然而，如果我们考虑一个在 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ 中不可定义的共形因子 σ，就可能需要向 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{S}$中引入一个新函数。这个因子 σ 也会进入关联函数，这表明我们的构造要保持自洽，就要求它属于 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{S}$。[9] 因此，鉴于我们的目标是确定由关联函数构造出的 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{S}$，我们需要要求 σ 是 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{S}$-可定义的，且不会向 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{S}$中加入新的非驯服函数。[10]

我们选择将对算符位置的依赖定义在位置空间（点

[9]例如，在 $d=2$ 共形场论中，关联函数对 σ 的依赖是普适的 [37]；它由 Polyakov 作用量乘以每个算子对应的一个因子给出，$Z(\sigma)=Z(0)e^{cS_{\mathrm{Polyakov}}[\sigma]}\prod_i e^{\Delta_i\sigma(x_i)}$。不过，这个特定因子会被规范归一化消去。[10]我们希望 $(\Sigma,\ g)$ 的体积（作为 $\mathcal{S}$上的函数）、点对之间的距离，以及交比等其他相关几何量，都是 $R^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{S}$中可定义的。我们相信，对于上述选择，情况确实如此。

位于 Σ 中），因为这种定义适用于任意流形 Σ。如果 Σ 具有平移对称性，那么可以改为采用对动量空间的依赖（通过对关联函数进行傅里叶变换），这也是我们在第一部分 §3 中使用的定义。虽然这两个函数空间彼此相关，但一般而言，它们并不一定定义相同的结构。事实上，不难看出，驯服函数的傅里叶变换，例如 $\mathbb{R}_{\mathrm{an},\,\exp}$，可能需要扩展该结构以纳入周期函数（参见 [38]，其中介绍了近期的一些一般性结果）。在这种情况下，得到的结构不可能是 o-极小的。当然，量子场论关联函数满足的约束远多于 $\mathbb{R}_{\mathrm{an},\,\exp}$ 所满足的约束，而且在这种情况下，动量空间和位置空间或许确实定义了相同的结构，至少对于某些 Σ 的选择而言。这个问题留待今后研究。无论如何，此处相关的是位置空间定义。

全局考量

在我们对$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 的定义中，无论是对于理论空间 $\mathcal{T}$，还是对于其中的时空 $\mathcal{S}$，我们在很大程度上都采用了局部视角。然而，为了在一般情形下完成我们的构造，还有一些有趣的全局层面需要加以讨论。

首先，即使我们将 $\mathcal{S}$ 限制为 $\mathbb{R}^k$上的共形平坦度量、 S^k以及它们的直积，为了完全严谨，我们也应说明允许何种共形边界。影响 $\mathcal{S}$ 选择的另一个考量，是确保作为格林函数而得到的函数是位置的、在一个简单的 o-极小结构中可定义的函数。这可能会促使我们进一步限制 $\mathcal{S}$ 。

其次，非标量算符的关联函数并不是 Σ上的函数。为使讨论简单，我们可以通过规定标架，使它们取实值。或者，也可以研究这些丛的转移函数，并构造$\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 使它们变得可定义。

第三，我们需要局域算符的关联函数作为 $\mathcal{T}$的函数，其中 $\mathcal{T}$是量子场论集合的参数。正如重整化的相关讨论中所熟悉的那样，将局域算符定义为耦合常数的函数并非完全简单。即使在量子力学中，也可能出现由能级交叉和单值化引起的歧义。我们可能会发现，沿着 $\mathcal{T}$中的一条回路移动时，一个算符 O_1 会变成另一个算符 O_2。虽然这些现象使得在 $\mathcal{T}$上定义连续函数变得困难，但要定义一个结构，我们并不需要这样做。只需将 $\mathcal{T}$分解为有限个胞腔（使用可定义边界），使得关联函数在每个胞腔中都有良好定义即可。

如果我们想讨论给定类型的所有量子场论组成的集合，就会遇到最后一个问题，而且这个问题更具挑战性。没有理由认为这样的讨论可以基于单一的量子场论定义。例如，虽然拉格朗日量提供了

非常具体的参数空间，但许多量子场论并没有已知的拉格朗日量定义。显而易见的处理方法是为每种定义各自定义一种结构，称为这些 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$、 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_2}$ 等等。然后，我们可以取这些结构的并集，得到一个包含所有关联函数的结构。对于这些函数对 Σ的依赖而言，这没有问题；但定义 $\mathcal{T}_1$和 $\mathcal{T}_2$ 有可能以不同方式参数化量子场论的重叠子集，而这两种参数化之间不存在可定义映射。若是如此，那么 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_2}$ 可能会导出不同的结构；即使二者都温和，它们的并集也未必温和。另一个问题是如何处理不同量子场论之间的等价关系，例如对偶——如果同一个量子场论在 $\mathcal{T}$中由无穷多个点表示，那么这种定义就行不通（需要显式地取商）。我们认为这些问题不会造成根本性的困难，但将留待未来工作处理。

3.3 引力理论的结构

现在，我们简要转向对包含动力学引力的理论的讨论。在经典层面上，最需要理解的理论是爱因斯坦广义相对论。我们或许仍然可以希望为这一理论关联一种结构，使其所有物理陈述都变得可定义。例如，可以尝试通过将该经典理论的所有解添加到 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中来构造这一结构。然而，先验地说，对于爱因斯坦方程的解并不存在温和性条件，因为二阶微分方程未必保持温和性。尽管如此，对于宇宙学常数为零的纯引力渐近平坦时空 [39] ，以及宇宙学时空（即空间紧致的时空） [40]，都可以排除时间周期解。周期解将对应于时空的离散等距变换，而事实证明，这些离散等距变换是由连续等距变换诱导的。这与温和性的预期完全一致。另一方面，加入负宇宙学常数后，便可以构造时间周期解 [41]。因此，我们面临着与 §3.2 中类似的挑战；在 §3.2 中，我们讨论了背景的 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T}}$，$s$-可定义性（$\Sigma, g$）。虽然对引力理论的全面处理超出了本文的范围，但我们将在下文汇集一些相关观察。

涨落引力背景

要构造一个具有涨落度量的普适量子理论十分困难。相反，围绕选定的固定背景 g对理论进行微扰地构造是有益的。然后研究该背景周围的小扰动 δg ，并为场 δg写下一个有效理论。在爱因斯坦引力的情况下，所得理论是一圈可重整化的。因此，如果经典背景是

温和的，第一部分的结果就适用于这个系统，并且该理论将在 $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ 中是可定义的。在四维的极大超引力情况下，这种可重整化性至少在七圈图之前成立。

量子引力理论与结构 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$

最令人振奋的任务无疑是研究量子引力理论的空间 $\mathcal{T}_{\text{QG}}$ 及其相关结构 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$。这需要我们面对诸多挑战，以下我们想重点介绍其中几个。

要以所需的普遍性来定义 $\mathcal{T}_{\text{QG}}$，我们对量子引力所知甚少。人们已投入大量工作，将弦理论视为一个有希望的候选理论。若相信过去几十年积累的经验，我们或许可以期待，实际上 $\mathcal{T}_{\text{QG}}$ 只是一个单一理论，即 M理论。遗憾的是，除了它在各种极限下的不同呈现形式之外，我们还没有这个理论的一般性表述。

即便承认这一重大局限，我们或许仍可尝试构造 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$的一部分。这里还会遇到另一个问题：众所周知，由于引力的微分同胚对称性，从局域算符的关联函数构造 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$ 并没有多大意义。我们可以改为从 S 矩阵构造 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$ ，以此绕过这个问题；弦散射振幅的研究便是如此。接下来我们可以问：仅凭微扰信息定义的 $\mathbb{R}_{\text{QG}}$ 是否有望成为 o-极小结构？然而，从微扰弦理论的例子可以看出，事实并非如此。事实上，如果我们从弦散射振幅确定相关结构 $\mathbb{R}_{\text{pString}}$ ，很容易看出，这些振幅中存在无限多个极点，意味着 $\mathbb{R}_{\text{pString}}$ 不可能是 o-极小的。不过，正如第一部分中提到的，我们可以期待这只是微扰处理造成的假象。给弦增加一个额外方向，很可能会使谱变为连续，并让相关函数更有望保持良好性质。

弦/M理论紧致化到反德西特空间及其结构 $\mathbb{R}_{\text{AdS}}$

目前我们对量子引力所拥有的最佳定义运用了 AdS/CFT 对应 [42]。正如综述中所讨论的 [43], ，反德西特时空M_{d+1} 具有一个共形边界 Σ，而 M_{d+1}上的量子引力可观测量对应于 Σ上的共形场论d 中的可观测量。因此，我们似乎已经定义了这些理论的相关结构：它就是 $\mathbb{R}_{\text{CFT}d}$。

仔细想来，这似乎并不是我们所想要的量子引力定义。问题在于，以这种方式得到的量子引力理论集合包含了各种各样与我们描述现实世界所需理论大相径庭的理论。其中包括反德西特半径非常小（负宇宙学常数非常大）的理论，以及高自旋引力理论 [44]。而

这还只是触及了表面——二维共形场论和三维共形场论的景观（对中心荷不设上限）似乎远比任何已知的弦理论/M理论紧化构造所能产生的景观庞大。

这促使我们定义满足额外约束的 CFTd 子集，这些约束源于规范-引力对偶，尤其是引力对偶具有局域性这一约束。[11] 文献 [45], 提出了这样一种设想，认为任何具有大N展开，且所有自旋大于 2 的单迹算符都具有（参数意义上）较大维数的 CFT，都有一个局域对偶。这一设想在许多研究中得到了发展，参见 [46] 及其中的参考文献。

若能定义满足这些条件的 CFTd子集及其相应的结构，将会很有意义。由于 [45] 中的条件是参数性的，我们大概可以通过定义满足严格界限的子集来实现这一点，然后证明所得结构不依赖于具体界限。然而，这些条件并非针对单个量子场论提出，而是针对一族量子场论提出的（例如依赖于 N），因此超出了本文所给定义的范围。精确定义留待未来工作。

在对偶侧，我们可以利用关联函数的对应关系 [43]，将一般共形场论关联函数的大 N 极限表示为经典超引力计算。经典广义相对论，甚至超引力，在数学上的理解都远胜于量子场论；即使将研究限制在纯引力扇区，处理这一结构并检验其温和性也会非常有趣。这些理论空间的温和性是对 [13] 有限性猜想的进一步细化，同样值得研究。

4 物理可观测量的温和性

引入与一组量子场论 $\mathcal{T}$ 和一组时空 $\mathcal{S}$ 相关联的结构 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 后，我们现在想了解它们何时是 o-极小的。为此，（1）我们需要确保 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 是一个 o-极小结构，其中 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{S}$是可定义的；（2）我们需要确保如第 3 节所述，将可观测量加入$\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 后仍保持温和性。关于如何在尽可能少的约束下指定一个驯性的理论集合 $\mathcal{T}$，我们留待第 5 节再讨论。这里我们将聚焦于第二步：假设 $\mathbb{R}^{\text{def}}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 是 o-极小的，让我们讨论一些可能确保 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\,\mathcal{S}}$ 是 o-极小的判据。

[11]更准确地说，尽管相互作用可以分布在 l_s 这样的长度尺度上，例如弦尺度，但这远小于反德西特半径 $l_s \ll R_{AdS}$。

4.1 点上的量子场论

让我们从最简单的情形开始：零维量子场论，也就是定义在一个点 p 上的理论。第一部分中我们已经提到过 ϕ^4-理论，但在下文中我们希望讨论得更一般。因此，假设 $S^{(0)}$ 是这样一种量子场论的作用量，它包含有限多个标量场 $\phi_1, \ldots \ldots \phi_n$。在更高维数中，$S^{(0)}$ 是对时空的积分；而在零维时，它不过是在点 p 处取值的场函数。因此，时空集合 $\mathcal{S} = \{p\}$ 是驯性的。我们假设拉格朗日量对 ϕ 和参数 λ 的依赖关系在某个 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}$ 中是可定义的，并考虑算子 O_k 的关联函数；这些算子也是关于 ϕ 的 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}$-可定义函数。最简单的情形是多项式算子 $O_k = \phi^k$ 和 $S^{(0)} = \sum_k \lambda_k O_k$，但也可以考虑更一般的情形。

在零维情形下，路径积分 (5) 化为普通积分

$$\langle \mathcal{O}_1 \ldots \mathcal{O}_n \rangle_\lambda = \int d\phi_1 \ldots d\phi_k \, \mathcal{O}_1 \ldots \mathcal{O}_n \, e^{-S^{(0)}(\phi,\lambda)} \,, \tag{16}$$

其中积分是在场构型空间上进行的。

现在，我们可以提出以下问题：(1) 将 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}$通过指数映射扩张得到的结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}{}_{,\exp}$ 是一个 o-极小结构吗？(2) 式 (16) 中的 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}{}_{,\exp}$-可定义函数，其积分是否得到一个依赖于 λ、且在某个 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{QFT0}}$ 中可定义的函数?

如 [29].[12] 所示，第一个问题可以得到肯定的回答。每个 o-极小结构在添加实指数函数后仍然是 o-极小的。§2.2 中给出了这一普遍事实的一个简单例子，我们在那里列出了 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$。

关于驯服函数的积分是否也驯服，第二个问题在数学界由来已久，至今尚无定论。不过，在这一问题上仍有若干值得一提的有趣结果。[13] 首先，普遍认为，若实值函数 $f(\phi, \lambda)$ 在 $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 中是可定义的，那么其积分 $g(\lambda) = \int d^k\phi \, f(\phi, \lambda)$ 在 $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ [47] 中也是可定义的。这一一般性结果自然与第一部分所述的费曼积分可定义这一事实相关。[14] 事实上，这一结果普遍适用于微扰展开，在这类展开中，式 (16) 中的指数会变为多项式表达式。若纳入指数函数，目前已知的结果则只有部分。一项重要的

[12]请注意，指数函数总是在 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{def}}$ 的 Pfaffian闭包中可定义。[13]我们感谢 Tobias Kaiser 就此主题提供的有益通信。[14]我们指出，这并不能立即推出费曼积分的温和性，因为通常需要通过正则化和重整化去除积分的奇点。这会使我们偏离实函数上的普通积分，而与周期积分的联系此时便变得相关。

[48] 的一项一般性结果是：若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在某个 o-极小结构 $\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def}$ 中可定义，那么 $\int_0^x f(t)dt$ 在 $\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def}$ 的 Pfaffian闭包 $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def})$ 中可定义，该闭包已在 §2.2 中引入。某些含指数函数的特殊积分也已被证明在 [49] 中是驯服的，而 [50] 中则提出了特殊驯性测度。

关于存在 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\rm QFT0}$的一般性陈述可由以下在 [51, 52]中提出的猜想推出。

猜想 1。对于每个 o-极小结构 $\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def}$，都存在一个 o-极小 $\widehat{}$结构 $\mathbb{R}$，使得对于每个实值函数 $f(\phi,\lambda)$（其在$\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def}$ 中是可定义的）以及每个在 $\widehat{\mathbb{R}}^{\rm def}$ 中可定义的集合 D，以下结论成立：

(1) 集合 $\left\{\lambda\in\mathbb{R}^m:\ \int_D d^k\phi|f(\phi,\lambda)|<\infty\right\}$ 在 $\widehat{\mathbb{R}}$中是可定义的。*(2)* 函数 $g(\lambda)=\int_D d^k\phi\, f(\phi,\lambda)$ 在 $\widehat{\mathbb{R}}$中是可定义的。

虽然这个猜想是在平直空间中表述的，但可以将其推广到可定义流形，并纳入可定义测度。

值得注意的是，上述考量可以自然地推广到局域在 N 点上的高维量子场论，例如构成有限格点。近期，[53]研究了这类情形。考虑一个只有一个场 ϕ 的量子场论，并通过设定 $\phi_i\equiv\phi(y_i)$，将其局域在 N 个时空点 $y_i\in\Sigma$ 上。将高维理论的作用量约化到这些有限个点上，会得到一个（近似的）零维作用量 $S^{(0)}(\phi_i,\lambda)$。在参考文献 [53] 中，研究了这些积分

$$I_{\nu_1\ldots\nu_N}(\lambda)=\int_{\mathcal{C}^N}d^N\phi\prod_i^N\phi_i^{\nu_i}\,e^{-S^{(0)}(\phi,\lambda)}\ , \tag{17}$$

以确定关联函数关于 λ的依赖关系，其中关联函数是 ϕ_i的多项式。显然，根据猜想 1，如果 $S^{(0)}(\phi,\lambda)$ 是可定义的，那么这些积分就在某个 o- 极小结构中可定义。事实上，文献 [53] 证明，对于简单的多项式 $S^{(0)}(\phi,\lambda)$，这些 $I_{\nu_1\ldots\nu_N}$ 满足一组微分方程，其解由 λ中的有理函数与广义超几何函数的乘积构成。这里出现的超几何函数属于 ${}_pF_p$ 类型，而在第一部分中就已经指出，证明它们具有温和性是一项挑战。

4.2 高维量子场论中的简单可观测量

对于一般的高维量子场论，我们不知道有任何数学定理或猜想能够推出物理可观测量的温和性。回想一下，从 $\mathbb{R}^{\rm def}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$过渡到 $\mathbb{R}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$时，我们加入了关联函数；如式（5）所示，这些关联函数由对场构型的路径积分给出。对这类积分的研究

[15]推广到有限多个域的情况是直接的。

非常复杂；据我们所知，即使对于简单的例子，也尚未在 o-极小语境中进行过研究。在第一部分中，这些积分是通过微扰方法研究的。在这一层面上，关联函数是温和函数。本文希望在非微扰层面研究这些对象的温和性。

为了衡量我们对可观测量温和性的预期，不妨考虑质量为 m 的克莱因-戈尔登场在 d 维欧几里得空间Σ中的例子。由于我们讨论的是自由理论，n 点关联函数可以利用维克定理，写成二点关联函数乘积之和

$$O^{(d)}(y_1, y_2) = \langle \mathbf{y}_2 | \, e^{-H(t_2-t_1)} \, | \mathbf{y}_1 \rangle \ , \qquad y_i = (t_i, \mathbf{y}_i) \in \Sigma \ . \tag{18}$$

对于平直空间中的克莱因-戈尔登场，这个二点函数可计算为（例如参见 [54]）

$$O^{(d)}(y_1, y_2) = (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{(y_2 - y_1)^2}{\sqrt{m}} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(\sqrt{m}(y_2 - y_1)^2) \ . \tag{19}$$

$K_a(x)$ 表示第二类修正贝塞尔函数。正如 §4.1 中已讨论的，这些函数在一般情况下是指数周期，而猜想 1 意味着它们在某个 o-极小结构中可定义。[16] 若确实如此，则有限个算符的所有关联函数都是温和的。

假设猜想 1 成立，平直空间中的温和性已经得以实现；但在反德西特时空中，情况便不再如此。反德西特空间在 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中可定义，但若不对参数施加进一步约束，就无法确立二点函数的温和性。它由 [56] 给出

$$O^{(d)}_{\text{AdS}_{d+1}}(y_1, y_2) = \frac{e^{-i\pi(d-1)/2}}{(2\pi)^{(d+1)/2}} ((y_1 \cdot y_2)^2 - 1)^{-\frac{d-1}{4}} Q^{(d-1)/2}_{\sqrt{d^2/4+m^2}-1/2}(y_1 \cdot y_2) \ , \tag{20}$$

其中，$Q^b_a(x)$ 表示第二类勒让德函数。质量的影响仅体现在勒让德函数的下参数 $\lambda = \sqrt{d^2/4 + m^2} - 1/2$ 中。现在可以看出，若考虑所有 $m \in \mathbb{R}$，参数 m 的依赖关系并不温和，因为 $Q^b_a(x)$ 会随 a 振荡。

这个简单的例子已经表明，在断言关联函数具有温和性时必须谨慎。我们提出两种可能避免此类违背的方式：

(1) co 考虑理论变为共形的情况，即令 $\lambda \to 0$；

[16] 只有在 $d = 1$ 或 $d = 3$ 这两种特殊情形下，该函数才会化为 $K_{1/2}(x) = e^{-x}\sqrt{\pi}/(2x)$，此时其在 $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ 中的可定义性显而易见。事实证明，$K_\alpha(x)$ 在 Pfaffian 结构$\mathcal{P}(\mathbb{R}_{\text{alg}})$ 中是可定义的，参见 [11] 的 v2 和 [55]。

(2) 引入截断尺度 Λ，并限制质量 $|m| < \Lambda$。

在情况（1）中，可以验证勒让德函数化为代数函数，因此在 $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 中是可定义的。在情况（2）中，我们利用 Q 在 a 中的解析性，推断它在 $|m| < \Lambda$ 上是受限解析的。[17]

尽管这些观察能否轻易推广到相互作用理论绝非显而易见，但我们将以此为启发，在下文提出两个猜想，讨论与量子引力相容的有效理论以及共形场论中关联函数的温和性。

4.3 有效场论中的驯性可观测量

首先讨论具有有限个动力学场、截断能标为 Λ 的 d 维有效场论。我们将所有这类理论构成的空间记为 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$。显然，要准确定义我们所说的 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$，需要付出大量努力。一种简化的理解方式是，只考虑拉格朗日理论，并汇集所有拉格朗日量及其对场和参数的依赖关系。这些拉格朗日量在场空间和参数空间上的图像构成若干集合，它们的形式并集可视为该空间 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$。

确定有效理论必须满足哪些条件，才能使 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$ 在某个 o-极小结构中可定义，是一项极具挑战性的任务。然而， [9]提出，要使 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$ 具有温和性，一个充分条件是该空间包含所有能够与量子引力一致耦合的有效理论。由此提出了以下猜想:

猜想 2（与量子引力一致的有效场论的温和性）。所有至少在固定截断尺度 Λ 以下有效、且能够与量子引力一致耦合的有效场论所构成的集合 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$ ，在某个 *o*-极小结构中是可定义的。

换言之，确定温和的 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$必须满足的约束集合，应被视为沼泽地计划的一部分；综述可参见例如 [57,58] 。需要强调的是，从低能观点出发，若不参考具有引力的紫外完备化，显然无法确定一组最小条件来确保 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$ 具有温和性。

给定一组定义良好的有效理论 $\mathcal{T}_{\text{EFT}d}$，我们可以再次构造一个相关的结构 $\mathbb{R}_{\text{EFT}d}$，它取决于某组 $\mathcal{S}$ 欧几里得时空。如今，要计算关联函数，就必须谨慎地实施截断Λ，例如考虑动量展开，并保留截至有限

[17] $Q_a^b(x)$ 可以用高斯超几何函数表示；若自变量不取奇点 0、1 和 ∞ ，则这些函数关于其参数是整函数。

阶的 Λ。至少对于微扰展开，我们预期第一部分的结果可以推广，并表明 $\mathbb{R}_{\mathrm{EFT}d}$ 是 o-极小的。我们相信这一性质会持续成立，并提出：

猜想 3（有效场论关联函数的驯性）。由驯性时空流形上的理论在截断为 Λ 时的所有关联函数构成的结构$\mathbb{R}_{\mathrm{EFT}d}$，$(\Sigma, g)$ 是 *o*-极小的。

一般来说，要确定所有仅由量子引力的一致性和在 Λ 以下的有效性所限定的 $\mathcal{T}_{\mathrm{EFT}d}$ 中各理论的 $\mathbb{R}_{\mathrm{EFT}d}$，是极具挑战性的。不过，要检验猜想 3，可以考虑由弦理论确定的任意一组有效理论，并研究其在某个选定的驯性时空流形上的关联函数。

4.4 共形场论中的驯性可观测量

接下来，我们将注意力转向 d 维时空中的共形场论。与上一节讨论的有效场论不同，共形场论没有尺度，因此不需要紫外完备化。接下来我们将主张，可观测量的驯性因此应当是驯性共形场论集合的普遍特征。我们将这一预期表述为一个猜想：

猜想 4——驯性共形场论可观测量猜想。给定一个共形场论的驯性集合 $\mathcal{T}$和一个黎曼流形的驯性集合 $\mathcal{S}$，对有限个驯性算符计算得到的规范化配分函数和关联函数，作为 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{S}$的函数变化时，均为温和函数。换言之，假设 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{S}$以及所考虑的算符 $\mathcal{O}_i$在某个 *o*-极小结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}\Cup\mathcal{S}}$可定义，则上述构造的物理可观测量结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}\Cup\mathcal{S}}$ 是 *o*-极小的。

尽管猜想 4 显然带有推测性，但我们对共形场论及其关联函数已有相当多的了解，足以提供有实质意义的证据。我们将首先讨论自由共形场论，在这种情况下，这一猜想最容易得到支持。事实证明，这一论断的真正力量体现在相互作用共形场论中；我们将简要讨论共形块，以汇集一些支持证据。值得注意的是，猜想 4 还蕴含着若干具有实质意义的推论，我们将在本节末尾概述这些推论。

自由共形场论

首先，我们来讨论 n 自由共形场论的驯性集合 $\mathcal{T}$中定义的算符的关联函数。根据维克定理，它们可以用二点函数表示。二点函数由共形对称性确定，其形式为

如下

$$\langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\rangle = \frac{\delta_{ij}}{(x_1-x_2)^{\Delta_i+\Delta_j}}\ , \tag{21}$$

其中 Δ_i 是 $\mathcal{O}_i$的标度维数。这些函数在时空位置 x_i 以及 Δ_i中都是温和函数。对于固定的有理数 Δ_i，函数 (21) 关于 x_i是代数的。若还要允许指数 Δ_i 变化，就必须考虑更大的 o-极小结构，例如 $\mathbb{R}_{\text{an, exp}}$。回到 n点关联函数，我们首先注意到，可能的 Wick 收缩数量有限。因此显然，这些函数中的每一个都是有限个温和函数乘积的和，因而本身也是温和函数。这里的温和性在时空位置和算符维数上都成立。请注意，只要我们能够使用有限个 Δ 作为自由理论集合 $\mathcal{T}$的参数，这一点就成立。因此，猜想 4 在所有这类例子中都成立。

相互作用共形场论

现在我们转而考虑相互作用共形场论的驯性集合 $\mathcal{T}$。与非相互作用情形一样，共形对称性强烈限制了关联函数可能具有的形式。事实上，只需完全确定二点函数和三点函数对时空的依赖关系即可。三点函数由下式给出

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \frac{C_{1,2,3}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}x_{23}^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}x_{13}^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}}\ , \tag{22}$$

其中我们简写了 $x_{ij}=x_i-x_j$。$C_{1,2,3}$ 是理论依赖常数，可以依赖于参数，但不依赖于时空坐标。事实上，将 $C_{1,2,3}$ 视为直接对 $\mathcal{T}$进行参数化是很自然的（例如参见 [59]）。这些参数的温和性显然成立。时空坐标和算符维数的温和性则可按式（21）推出。因此，第一个非平凡的关联函数是四点函数，我们将在下文讨论。

引入共形块，有助于将依赖于理论的数据（三点系数）与共形对称性的普适结构区分开来。我们将先讨论共形块的一般性质，再专门探讨二维共形场论，在那里可以理解温和性。最后，我们会看一些简单共形场论的例子，以及它们生成的结构。四点关联函数对四个算符插入位置的依赖 x_i 仅通过共形不变交比体现

$$z = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}\ . \tag{23}$$

于是，四点关联函数可以分解为维拉索罗共形块 $\mathcal{F}(c,\ \Delta_i,\ \Delta,\ z)$ 的和，这些共形块汇总了无限多个后裔态的贡献。[18] 具体而言，这一分解形式如下

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{\mathcal{O}\in\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2} C_{1,2,\mathcal{O}}C_{3,4,\mathcal{O}}\mathcal{F}(c,\Delta_i,\Delta,z)\ , \tag{24}$$

其中 z 是交比，而$C_{1,2,3}$ 表示算符乘积展开系数；它们与算符维数 Δ_i 共同体现了依赖于理论的信息。为了分析四点函数的温和性，我们现在将讨论范围限定在只有有限个初级算符的共形场论中，有理共形场论便是如此。在这种情况下，给定四点关联函数只涉及有限个共形块，因此共形块的温和性意味着四点函数的温和性。若初级场有无限多个，则求和将由积分取代，而 §4.1 的猜想 1 保证了这种情况下的温和性。

一般而言，Virasoro 共形块没有已知的闭式表达。我们将着重讨论一些已知此类表达式的例子，例如大 c 极限或最小模型。在这些情况下，共形块由 Gauss 超几何 ${}_2F_1$ 函数 [60]给出。具体而言，在大 c 极限下，共形块为 [61]

$$\lim_{c\to\infty}\mathcal{F}(c,\Delta_i,\Delta,z) = z^{\Delta}\ {}_2F_1\Big(\Delta+\Delta_{12},\Delta+\Delta_{34};2\Delta;z\Big)\ . \tag{25}$$

这个函数会随着共形维数之差 $\Delta_{ij}=\Delta_i-\Delta_j$ 而振荡，但在 Δ和 z方面则表现得较为平稳。为了明确展现这一行为，我们将讨论限定在单位交比的情形：

$$\mathcal{F}(\infty,\Delta_i,\Delta,1) = \frac{\pi\csc\left(\pi\left(-\Delta_{12}-\Delta_{34}\right)\right)\Gamma(2\Delta)}{\Gamma\left(\Delta-\Delta_{12}\right)\Gamma\left(\Delta-\Delta_{34}\right)\Gamma\left(\Delta_{12}+\Delta_{34}+1\right)}\ . \tag{26}$$

对于任意固定的 Δ，由于分母中的伽马函数存在极点，该函数在 $\Delta-\Delta_{ij}=-n$ 处有无穷多个零点，其中 $n\in\mathbb{N}$。这似乎与猜想 4 所要求的关联函数的温和性相冲突。请注意，对 Δ 的依赖并无问题，因为在幺正共形场论中，维数非负，而正实数轴上的 Γ 函数可以在我们于 §2.2 中回顾过的 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{G},\ \exp}$ 中定义。我们将在 4.5 节回到这一问题。恢复四点函数温和性有三种可能。首先，共形块的系数，也就是融合系数，可能为零。自由理论就是一个例子。其次，不同的块之间可能发生抵消。这

[18]我们感谢 Volker Schomerus 指出本文初稿中的一处错误：我们当时对共形块的相关论述作了过度简化。

尤其是在态有无穷多个、因而对振幅有无穷多项贡献时，这种可能性确实存在。最后，算符维数之差可能有界。反过来说，在只有有限多个初级态的相互作用共形场论中，若要求关联函数如猜想 4 所述具有温和性，就必须要求算符维数之差有界。

需要强调的是，这只是 $c \to \infty$ 极限下共形块的主导行为。一般情况下，尚无闭式表达式。计算共形块的常用方法要么是递归法，要么是使用所谓的 Dotsenko-Fateev 积分，这种积分最早由论文 [62]提出。这些积分是欧拉型积分的推广。球面上的四点函数具有如下形式： [63]

$$Z = z^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{2\beta}}(1-z)^{\frac{\alpha_2\alpha_3}{2\beta}}\prod_{i=1}^{N_1}\int_0^z \mathrm{d}x_i \prod_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\int_0^1 \mathrm{d}x_i \prod_{i<j}(x_i-x_j)^{2\beta}\prod_i x_i^{\alpha_1}(x_i-z)^{\alpha_2}(x_i-1)^{\alpha_3}.$$

参数 α_i、 β 和 N_i 是理论参数的有理函数，关于它们的精确依赖关系，请参阅 [63]。该积分是一个周期，因此关于交比 z 是温和的，但它对其余参数的温和性尚不明确。若能对此进行更深入的研究，将会很有意义。

一个带有参数的共形场论示例：Liouville理论

Liouville理论是一个带有自由参数的相互作用理论示例。Liouville理论定义在一个度量为 g_{ab} 、曲率为 R 的二维曲面上，其拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \mu e^{2b\phi} + \frac{Q}{4\pi}R\phi\ . \tag{27}$$

在固定几何上，这个拉格朗日量取决于两个参数：背景荷 Q 和耦合常数 b。参数 μ 可以自由取任意非零值，并且不会产生物理效应，因为它可以通过常数场重定义吸收。若这些参数满足以下关系，该理论就是共形场论

$$Q = b + \frac{1}{b}\ . \tag{28}$$

在这种情况下，该理论是一个具有一个自由参数的相互作用共形场论。由于中心荷 $c = 1 + 6Q^2$ 由背景荷 Q 的取值确定， c 的上界将 Q 的允许取值限制在一个紧区间内。初级场由指数函数 $\mathcal{O}_\alpha = e^{\alpha\phi}$给出，其共形维数为 $\Delta_\alpha = \alpha(Q-\alpha)$。相关算符具有

$$\alpha = Q/2 + ip\ , \qquad \Delta = p^2 + Q^2/4\ . \tag{29}$$

由于该理论结构简单，三点结构常数以及四点关联函数都可以显式计算。结构常数由 DOZZ公式 [64, 65]给出

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \left(\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}\right)^{\frac{Q-\alpha}{b}} \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha-Q)\Upsilon(\alpha-2\alpha_1)\Upsilon(\alpha-2\alpha_2)\Upsilon(\alpha-2\alpha_3)}\,, \tag{30}$$

其中 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 和 $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$。Upsilon函数 $\Upsilon(x)$ 是一个整函数，其积分表示为

$$\Upsilon(x) = \exp\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\left(\left(\tfrac{1}{2}Q - x\right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(\frac{1}{2}Q-x)\frac{t}{2}}{\sinh(bt/2)\sinh(t/2b)}\right)\right]\,. \tag{31}$$

这个函数是通常的 Γ 函数的近亲。请注意，该函数的零点只有实轴上的无穷多个零点，并且没有极点。 Υ 函数在虚方向上是温和的，在实方向上是解析函数。在 DOZZ公式中， Υ 函数的自变量形式为 $Q/2 + ip$。如果我们考虑中心荷 $c = 1 + 6Q^2$ 受某个固定常数限制的理论 $\mathcal{T}$，正如我们将在 §5 中指出的，这对于 $\mathcal{T}$的温和性是必要的，那么 Q 就被限制在一个区间内。这确保结构常数在 Q 和 p中都具有温和性。

球面上的四点关联函数现在可以用系数 $C_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3}$ 以及超几何共形块表示为

$$\langle \mathcal{O}_{\frac{-1}{2b}}\mathcal{O}_{\alpha_1}\mathcal{O}_{\alpha_2}\mathcal{O}_{\alpha_3}\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}p\, C_{-\frac{1}{2b},\alpha_1,\frac{Q}{2}+ip} C_{\frac{Q}{2}+ip,\alpha_3,\alpha_4} \mathcal{F}(c,\Delta_i,\Delta,z)\,, \tag{32}$$

其中， Δ 由式 (29) 给出。由于这种情况下有无穷多个初级场，式 (24) 中的求和便由对动量 p 的积分取代， p 标记了所有初级场。该积分中出现的所有函数都是关于 p 的驯服函数，因此 §4.1 的猜想 1 推出四点关联函数也是驯服函数。

最后我们指出，利用 AdS/CFT对偶来收集支持猜想 4的证据，是另一条可行路径。这里会出现若干新的挑战，因为要对应对偶两侧的参数并非易事。例如，考虑反德西特空间$_d$ 中的克莱因-戈尔登场，其二点函数为（20）。根据对偶性，粒子的质量对应于算符维数。此外，这个算符维数是共形场论的一个自然参数。因此，式（20）关于质量的非温和性似乎构成了猜想 4的一个反例。然而，仔细考察后会发现，对于反德西特空间中的粒子，我们不能简单地取极限 $m \to \infty$ ，因为我们预期，当粒子的史瓦西半径超过反德西特空间的半径时，理论就会失效。在反德西特空间一侧，这对应于理论的一个自然截断，但我们可以同时缩放质量 m 和反德西特半径。它

结果表明，在共形场论一侧，这会使算符维数有界，因此并未违反温和性。这显然只是一个可能颇有趣、值得未来进一步探索的故事的开端。

4.5 与猜想 4 相关的先前猜想

现在我们假设猜想 4 成立，并用 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d}$ 表示该 o-极小结构。系统研究其蕴含的结论超出了本文的范围；这里我们就共形维数的分离以及共形微扰理论的收敛性作几点评论。

算符维数不存在参数化分离

猜想 4 成立的一个潜在威胁已在 §4.4 中出现。我们看到，如果在一组共形场论中，有可能使相互作用算符的共形维数之差$\Delta_{12} = \Delta_1 - \Delta_2$ [19] $\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$以参数化方式趋于无穷大，那么猜想 4 就可能被违反。假如情况如此，涉及这些算符的各个共形块就会是参数的非温和函数。[20]如果完整的关联函数（对所有共形块求和）也是非温和的，这就会与猜想 4 矛盾。可以设想一些化解方式，例如，对有限多个或无穷多个非温和共形块求和，可能会得到一个温和函数，但这仍然颇具启发性。尤其是，如果只有有限多个共形块，那么必定存在某种内在原因，使非温和贡献相互抵消。

一个例子是半径为 R 的圆上紧化自由玻色子理论，其中额外对称性的出现导致有限多个共形块中的非温和行为相互抵消。由于这是一个自由理论，关联函数可以用维克定理计算，且都是温和函数。但在四点关联函数中，仍然会出现非温和的共形块。关联函数的一个具体例子为

$$\langle \partial X(x_1) e^{\frac{n}{R}}(x_2) \partial X(x_3) e^{-\frac{n}{R}}(x_4) \rangle \ . \tag{33}$$

这个关联函数可以按图 1 所示的两种不同方式展开为共形块。首先，可以将 ∂X 算符彼此收缩；也可以先将 ∂X 与一个指数算符收缩。在第一种情况下，只有真空后裔会有贡献，因此立即得到预期的温和结果。在第二种情况下，指数算符的维数为

[19]这里所说的相互作用，意味着存在一个非零的融合系数 $C_{\mathcal{O}_1,\ \mathcal{O}_2,\ \mathcal{O}_3}$，满足$\mathcal{O}_3 \neq 1$。[20]例如，在二维且中心荷较大时，相关函数为${}_2F_1(x,\ y,\ z;\ u)$，它出现在式（25）中，并且对于固定的 $y,\ z,\ u$，会随 x 振荡。

$\Delta = \frac{n^2}{4R^2}$，从而产生非温和贡献。这些贡献恰好相互抵消；正如交叉对称性所预期的，结果与第一种展开等价。这是一个由外部态的对称性导致简单抵消的例子，但可以设想，在更复杂的情形中也会发生类似的抵消。

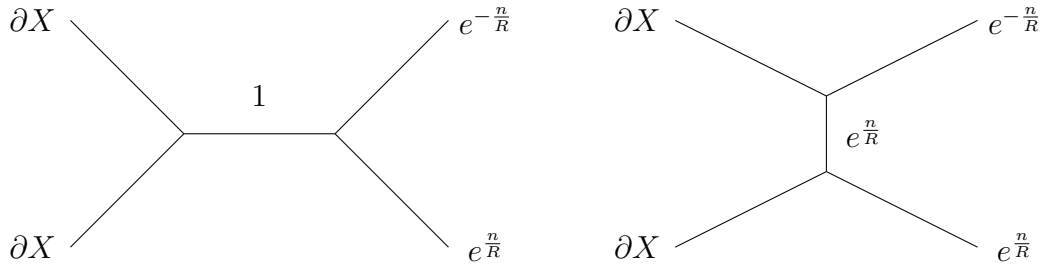

图 1：展开四点关联函数 (33) 的两种不同方式。左侧只有真空后裔作出贡献，右侧则是绕行模的后裔作出贡献。由于交叉对称性，这个例子中的非温和函数相互抵消。

在态的数目有限时，这种抵消需要对称性。而在初级场的数目无限时，即使没有这种对称性，求和也可能抵消非温和性。函数按某组基函数展开，就是这种行为的一个类比。若将温和函数展开为无限个傅里叶模，展开中的各个项看起来都非温和。这与只有有限个正交非温和函数的情形形成对比；在后一种情形中，温和性要求系数相互抵消，因而需要对称性。

值得注意的是，这一推论与 [21], 中讨论的一个沼泽地猜想相呼应。该猜想认为，一组有限的算符（其算符维数为 $\Delta_2 \leq \Delta$ ）与一组维数以参数方式递增的无限算符集 Δ_1 之间，不存在参数上很大的能隙。

除了一些注意事项外，猜想 4 蕴含了这一猜想。一点需要注意的是，猜想 4 涉及对参数的连续依赖，而 [21] 也认为这一结论适用于离散参数。另一点需要注意的是，我们提到过一种可能性：完整的关联函数可能是温和的。还要注意，存在涉及自由度数量发散的极限的反例（详见 §5.1）。例如，在 $N \to \infty$（平面极限） $d = 4$, $N = 4$超杨-米尔斯理论中，Konishi算符（以及其他与弦态对偶的算符）的 $\Delta_1 \sim (g^2 N)^{1/4}$ 会 $g \to \infty$，而受保护算符则保持 Δ_2 不变。不过，在有限的 N下，现有证据与 Δ_1存在有限上界相符。[21]

[21]对此最简单的论证是：如果该算子是一个S对偶单态，但这一点并不完全清楚。关于有限 N 下的各种情形，请参见 [66] §4.3.3。

一个相关但较弱、也更容易论证的主张如下。设$\Delta_1(g)$是一个算符的维数 O_1，人们怀疑它在参数空间中取极限时会发散。假设我们知道 $\Delta_1(g=0)$, 并且该算符与另一个算符 O_3 发生混合，后者的 $\Delta_3 = H > \Delta_1(g=0)$随 g变化时大致保持恒定。那么，量子力学中的能级排斥现象意味着，当我们令 g 穿过简并点 $\Delta_1(g)$ =Δ_3时，态 $O_1|0\rangle$ 会转变为 $O_3|0\rangle$，因此维数 $\Delta_1(g)$将渐近于 H。这是一个普遍性结论，可以通过调节足够多的参数来规避；但在有大量候选 O_3 的量子场论中，不可能规避所有交叉。因此，除非存在某种对称性原因使 O_1 无法发生混合，否则我们预计，仅由于这一原因不会出现参数上的分离。

[21] 的猜想也受到 [67–69] 的研究结果启发；这些结果指出，在对偶的反德西特空间引力背景中不存在尺度分离。如果可以通过调节连续参数实现参数上任意大的尺度分离，[22] 那么猜想 4要么是错误的，要么就应该能在完整的关联函数中看到所需的抵消。对此进行详细研究将会很有意思。

共形微扰理论中的收敛性

另一个长期以来相关的猜想是，共形微扰理论具有非零收敛半径。我们回顾一下，共形微扰理论的定义是：将严格边缘算符加入作用量，对相关耦合常数作级数展开，并重整化发散。这样一来，就能计算一般可观测量对模参数的任意阶导数。这种做法早已为人所知；近期有两篇详细讨论，分别是 [71] 在 $d=2$ 中，以及 [72] 针对一般的 d所作的讨论。与对自由场论中加入一般相互作用的微扰理论不同，人们通常认为，共形微扰理论具有非零收敛半径，因此一般可观测量关于边缘耦合是解析的。[23] 一种流行的说法是，这类微扰不会改变作用量的大场行为。在精确可解模型中，这一点确实成立：改变自由玻色子的半径，以及边缘的正弦-戈登相互作用或流-流相互作用。

如果所有共形场论可观测量都可定义于诸如 $\mathbb{R}_{\text{an、 exp}}$或 $\mathbb{R}_{\mathcal{G}\text{、 exp}}$ 这样的 o-极小结构中，那么由 §2.2 中讨论的解析胞腔分解即可推出收敛半径非零。它们在有限个

[22]请注意， [70] 声称可以通过调节离散参数来实现这一点，而这一论证并不直接适用于这种情况。[23]要将这一点精确化并不容易，因为要改变耦合常数，必须对关联函数中出现的算子进行重整化，处理简并算子的混合，并选择符合对称性的接触项。其主张是，所有这些都可以在保持解析性的方式下完成。

低维区域之外是解析的，例如在它们可能存在奇点的区域之外，因此具有非零的收敛半径。正如我们在 §2.2 中讨论的，解析胞腔分解性质并非在所有 o-极小结构中都成立。不过，这些评论以及关联函数的解析性表明，这一性质应当在 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d}$ 中成立。

5 共形场论空间上的温和性约束

§4 中一项至关重要的要求，是考虑量子场论的驯性集合$\mathcal{T}$。当把这些理论视为参数的函数并改变参数时，只有这样才能对有关其可观测量的任何温和性陈述赋予明确含义。选取这样的驯性集合并非易事，因此，若能有清晰的一阶原则来识别这样的 $\mathcal{T}$及其关联的 o-极小结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$, s，将会很有帮助。对于有效场论，猜想 2 将这一点具体化了：它指出，与量子引力相容且在固定截断尺度以下有效的有效理论集合是一个驯性集合。在本节中，我们将探讨是否还有其他自然准则可以筛选出驯性量子场论集合。我们首先列出定义此类驯性 $\mathcal{T}$所面临的一些挑战，并提出可能的应对方法。随后，对于共形场论，我们将列出一组具体条件，使这些共形场论$\mathcal{T}$驯性。我们的想法总结在最后的猜想中：

猜想5——共形场论空间的温和性。

(a) 设 $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}2}$ 为中心荷小于某个固定值$\hat{}c > 0$ 且最低$\hat{}$非零算符维数大于某个固定值 $\Delta > 0$的二维幺正共形场论参数空间。那么， $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}2}$ 在某个 *o*-极小结构中是可定义的。

(b) 设 $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d}$ （ $d > 2$ ）为如下方式得到的 d 维幺正共形场论参数空间：(1)对自由度的某种适当度量作统一上界约束（例如， $d = 4$中的 a ，或 $d = 3$中的自由能）；(2) 将通过对离散对称性进行规范化而相关的理论对识别为同一类。那么， $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d}$ 在某个 *o*-极小结构中是可定义的。

我们根据维数将这一猜想分为两部分。正如我们将在下文解释的那样，由于二维共形场论与几何之间的联系，我们确信（a）部分成立。事实上，（a）部分可以被视为对 [73, 74] 中一个猜想的推广。在维数大于二时，会出现新的现象，因此（b）部分可能需要进一步完善。特别是，我们在（b）部分纳入了一种等价关系，将相差一个规范化离散对称性的理论视为等价。这个条件很可能可以放宽；未来若能重新审视这一猜想的表述，将是值得的。

5.1 定义与量子场论集合相关的 o-极小结构

下面我们总结一些一般性观察，这些观察有助于确保 $\mathcal{T}$ 是 o-极小结构 $\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\,s}$ 中的一个可定义集。我们先谈谈需要面对的一些挑战，然后概述我们应对这些挑战的总体思路。

定义温和理论空间所面临的挑战

为了了解在尝试识别量子场论的温和集时会遇到哪些困难，我们列举一些至少从直观上看会违反温和性的情形。为此，我们考虑一个标量场空间为 M 的拉格朗日量子场论。这些理论也可能具有标量势 $V:\ M \to \mathbb{R}$，以及定义在 M 上的其他耦合函数。即使对 M 和耦合函数施加一致性条件，仍有以下挑战需要应对：

- 存在无穷多个拓扑类的流形，M 可以取值于其中。

- M 允许存在某些奇点，因此还会有更多类别。允许的奇点取决于 d 和量子场论的类型。始终允许的一类奇点，是将 M 对其等距变换群的离散子群 G 取商而产生的轨形奇点。第一部分 §4.2 已讨论过这种对离散对称群 G 进行的规范化。现在，若 M 具有连续阿贝尔等距变换，例如 $U(1)$，那么子群$\mathbb{Z}_p \subset U(1)$的无穷级数会产生无穷多个商空间 $M/\mathbb{Z}_p$，以及无穷多个彼此不同的量子场论。

- 给定一个 M，即使固定纤维维数，其上通常也存在无穷多个拓扑上不同的纤维丛。例如，S^2 上的 $U(1)$丛由第一陈类分类，而第一陈类是任意整数。在物理上，这对应于磁通量，这种选择会产生无穷多个量子力学系统。

- 出于其他拓扑原因，一些耦合常数是量子化的，例如 $d = 3$中的陈-西蒙斯耦合。这些也可能产生无穷序列。
- 存在一组无穷多个哈密顿量为零的拓扑场论（TFT）。给定一个量子场论 T，将其与这些拓扑场论张量积，就能得到一组无穷多个理论。

- 可能存在具有物理意义的非驯性连续参数空间，例如第一部分讨论的精确重整化群中使用的参数空间。

虽然许多这类问题可以在与量子引力相容的有效场论中得到处理（例如，见 [57, 58]），从而进一步支持猜想 2，但接下来我们希望提出一些思路，以便更直接地施加条件，使 $\mathcal{T}$ 具有驯性。

自由度数量的界

让我们考虑 $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d}$ 所有自洽的 d 维共形场论构成的集合。尽管我们对它所知不多，但它很可能并不驯服。给定一个理论 T，我们可以通过将两份理论的希尔伯特空间作张量积，并将它们的哈密顿量相加，来定义张量积 $T \otimes T$；类似地，我们也可以定义 n 重张量积$T^{\otimes n}$。这为我们带来了许多离散的共形场论无穷级数，没有理由相信它们都处于某个更大的连通结构之中。

我们可以通过给自由度数量的某种度量设定上界，来处理这种特殊的无穷性。这种度量对于非平凡理论为正，并且在张量积下具有可加性，记作 $F(T)$。对于二维共形场论，我们可以取 F中心荷 c作为该度量；而对于四维理论，则应使用 a 函数。于是

$$\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d,C} \equiv \{T \in \widehat{\mathcal{T}}_{\mathrm{CFT}d} \,|\, F(T) \leq C\} \,, \tag{34}$$

其中 C 是一个固定的正数。我们也可以对量子场论作类似定义，将中心荷的紫外极限作为 $F(T)$。

利用这些理论集合，定义结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d,C}$。显然，提高上界会扩大理论集合，$\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d,C} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d,C'}$ 对于 $C < C'$。然而，这并不意味着相应的结构也会扩大；新增理论的关联函数或许可以用同一组函数表示。我们只能确定，对于 $C < C'$，有 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d,C} \subseteq \mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d,C'}$。

对于当 $C \to \infty$ 时的极限行为，可以提出各种假设。最简单的假设是，存在某个有限的 $C_{\mathrm{threshold}}$，使得极限在此处达到，

$$\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d,C} = \mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d,C'} \qquad \forall C, C' \geq C_{\mathrm{threshold}} \,. \tag{35}$$

由于没有理由相信情况并非如此，我们猜想事实确实如此，并用 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d}$ 表示这一极限结构。上界仍然存在，但其确切取值（不小于 $C_{\mathrm{threshold}}$）并不重要。

5.2 不同维数下的温和性条件

现在，我们想更仔细地讨论必须施加哪些条件，才能使 $\mathcal{T}$ 在某个 o-极小结构中可定义。一个必要条件是，$\mathcal{T}$必须只有有限个连通分支。这立即引出了若干问题，下面我们将逐一阐明并探讨。

量子力学： $\mathcal{T}_{\mathbf{QFT}1}$

考虑粒子在流形 M 上运动、处于势 V 中的量子力学： $M \to \mathbb{R}$ ，并且可能还涉及规范场、自旋及其他耦合。这里不存在重整化带来的约束，因此这些数据自然属于无限维函数空间。我们预计，要获得温和性，还需要对其施加更多条件。我们尚无精确的猜想，但可以探讨一些候选条件。

作为对 $\mathcal{T}$ 中候选量子场论的一项基本要求，我们将坚持要求它们的径向哈密顿量具有离散的非负谱（对于每个 r）。[24] 这意味着（根据离散谱的定义），本征值只能具有有限简并度。此外，由于谱有下界，这意味着对于任意 $\Delta_{\max} \in \mathbb{R}$ ，具有 $\Delta \leq \Delta_{\max}$ 的态只能有有限多个。[25]

若要求 $\mathcal{T}$ 的闭包中的每个理论都具有离散谱，则可以得到更强的要求。换言之，对一列理论取极限不会产生稠密谱。这类极限行为很常见，例如去紧化中就会出现。

通过简单条件即可保证谱是离散的：例如，要求 V 有下界，并且对于任意 E，子集 $\{x \in M | V(x) \leq E\}$ 的体积 [75] 有限。另一种可能的条件（我们在 $d \geq 2$ 中肯定会需要）是前两个本征值之间存在能隙。这个条件较难落实，但已有许多研究给出了充分条件 [76, 77]。[26]

在第一部分中，我们引用了关于精确 WKB 的研究；这种方法假设能够定义一类量子周期。如果这些函数定义了一种驯性结构，那么从一个驯性 $\mathcal{T}$ 出发，我们就能知道哪些可观测量是驯性的。什么条件能够保证 $\mathcal{T}$ 是驯性的？一个非常强的猜想是：对于任何只有有限个参数（实数或整数）的族，任何满足其中每个 $T \in \mathcal{T}$ 都有离散谱的闭子集 $\mathcal{T}$ 都是驯性的。这似乎方向正确，但还不够。让我们考虑一个可能的反例，它带有一个整数参数：粒子在 S^2 上运动，并与通量为 n 的磁场耦合（即第一陈类为 n）。这不是一个驯性集合，但当 $|n| \to \infty$ 时，基态可能会近似简并。对于常量 F 和 $V = 0$ ，情况确实如此，因为这是最低朗道能级。更一般地，随着 $|F| \sim n$ 变大，该理论在半经典意义上成立：波函数局域于大小为 $1/\sqrt{n}$ 的区域内，其能量大致等于该区域内 V 的值。 V 的连续性将

—

[24]有一些重要的共形场论具有连续谱，例如 $d = 2$ Liouville理论，但我们将留待今后研究。[25]否则就会存在一个极限点（博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理），谱也就不再是离散的。[26]另请注意这项非常有趣的研究 [78, 79] ，它表明对于自旋链而言，能隙是否存在可能是不可判定的！这些是具有无限多个场的零维系统的极限，因此不在我们的定义范围内。

进而给出我们想要的结果，但问题在于，人们可以选择让 F 在 V的极小值附近为零。不过，也许类似这样的条件能够奏效。

另一种方法是联系几何中的有限性结果。给定一个通过对 M 上的粒子进行量子化而得到的理论 Tin $d=0$，1，并且有足够多的可观测量，就可以重构 M 及其度量和其他数据。这一观察是非交换几何的出发点，相关内容在 [80, 81] 及相关著作中有所阐述。为了说明其中的一些直觉，完整的三点函数集合决定了函数代数；对于交换代数而言，这也就决定了 M （至少可将其视为测度空间）。从拉普拉斯算子可以确定度量：首先从 $\Delta(fg)-\Delta(f)g-\Delta(g)f=2\partial f\cdot\partial g$出发，然后将点 x， y之间的距离定义为对所有满足 $||\partial f||^2\leq 1$的 f，取 $f(x)-f(y)$ 的最大值。

现在，已有一些已知的几何条件能够保证 M 有限性，例如 [13] 中讨论的条件；我们将在 §5.3 中再次谈到这些条件。这些条件可以转化为对 T 的限制。例如，切格定理 [82]所要求的直径上界加上曲率条件，等价于谱隙的下界。或许可以将这些条件推广到涵盖所有拉格朗日量，并将其转化回量子力学术语。

$d\geq 2$中的量子场论和共形场论： $\mathcal{T}_{\mathbf{QFT}d}$ 与 $\mathcal{T}_{\mathbf{CFT}d}$

首先，我们要求基态是非简并的（许多公理化定义也有此要求）。这排除了与拓扑场论张量积的情形。

接下来，我们要求紫外极限要么是弱耦合的（渐近自由），要么是一个非平凡的不动点（共形场论）。由于我们可以列出弱耦合理论，却并不真正了解所有共形场论，因此或许可以区分两类量子场论：较小的一类记作 AQFTd，包含渐近自由的量子场论；较大的一类记作 QFTd ，由共形场论d以及从这些理论流出得到的理论组成。

最后，我们回顾一下 $d\leq 2$与 $d>2$中的量子场论之间一个重要的物理差异。直观来说，标量场的常数模在 $d\leq 2$中是量子的，而在 $d>2$中是经典的。因此， $d=2$ 中的能量本征态是离域的，就像量子力学中的情形一样。这些离域态还可以进一步分解为具有确定动量的态（若存在平移对称性）、群表示矩阵元所对应的态（若存在群对称性），或者更一般地，分解为与 M上拉普拉斯算子的本征函数相关的态。相比之下，在 $d>2$ 中，标量场的涨落会随距离增大而衰减，因此可以通过使用源或边界条件来固定零模。于是，真空分解为由标量场期望值标记的超选择扇区；此外，这些期望值必须是有效势 $V'_{\text{eff}}(\langle\phi\rangle)=0$ 的临界点。这些临界点构成的空间如今是理论空间 $\mathcal{T}_{\text{QFT}d}$ 的一部分，我们将称之为真空模空间。因此

在 $d > 2$ 中，要完整定义“量子场论空间”，必须将这一点纳入考量。不过，在 $\mathcal{T}_{\mathrm{QFT}d}$ 中移动会破坏共形不变性（因为根据幺正性，算符维数必须为正），而且我们对更一般量子场论的讨论不会深入到需要了解这些细节的程度。

下面我们将利用与这种差异相关的几何直觉。在 $d \leq 2$ 中，有些量子场论是流形的推广（西格玛模型，带有 $V = 0$），有些则是在 $V(\phi)$ 具有孤立临界点时对奇点的推广，还有一些是混合理论（$V(\phi)$ 非零，且具有高维临界点流形）。在 $d > 2$ 中则只有奇点。

5.3 共形场论空间的温和性

接下来，我们将考察 d维共形场论$\mathcal{T}_{\mathrm{CFT}d}$ 及全息共形场论 $\mathcal{T}_{\mathrm{AdS}_{d+1}}$空间的温和性。这些理论可以通过其时空对称性和Osterwalder-Schrader公理[27] 得到相当令人满意的严格定义（近期讨论见 [83] ）。挑战在于以某种方式限制共形场论的集合，使其能够在某个o-极小结构$R^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ 中可定义。因此，本节旨在进一步阐明猜想5的假设。

$d = 2$ 共形场论中的温和性

首先，我们讨论二维共形场论。这些理论已得到极为广泛的研究，也已被相当深入地理解。此外，关于这些理论的共形场论空间，已有一些先前猜想 [84] ，我们将探讨它们与我们的猜想 5（a）之间的关系。

首先，我们来说明猜想 5（a）中的约束为何能确保 $\mathcal{T}_{\mathrm{CFT2}}$ 具有温和性。首先，我们讨论的是中心荷有上界$\hat{}c$ 的共形场论集合，正如 §5.1 中所述。但即使满足这一条件，仍有明显的温和性反例，例如 $c < 1$幺正极小模型集合。这些模型具有 $c = 1 - 6/(p+1)(p+2)$，显然在共形场论空间中并不连通。另一个无穷级数 $d = 2$ 的例子是 $SU(2)_k$ WZW模型，其满足 $c = 3 - 6/(k+2)$。

通过对非平凡算子的维数施加正下界，可以截断这两个无穷级数。对于最小模型，最低的非零算符维数为 $\Delta_1 = 3/4(p+1)(p+2)$（对于 $p \geq 2$），而对于 $SU(2)_k$

[27]这些公理定义了欧几里得时空理论，其中包括反射正性（用物理学术语来说即幺正性）和关联函数的单值性。我们还将假设径向量子化中的态-算符对应，以及单位算子的存在。

WZW模型则为 $\Delta_1 = 3/4(k+2)$。因此，这适用于任何正下界。

为什么这一特定界限通常会导致有限性？要理解这一点，首先注意到，我们的两个例子都与靶空间直径变大的极限有关。WZW模型的无穷级数源于一个取值于 $\mathbb{Z}$的拓扑选择（WZW系数 k 的量子化是拓扑性的）。事实上，共形不动点处的度量与WZW项成正比，因此这是一个靶空间变大的极限。至于最小模型，它们可以被认定为实标量场 ϕ理论的多临界点；换句话说，我们取一个 V_p 次数为 $2p$的多项式势，并调节低阶系数，使红外不动点处的中心荷达到最大值。直观地说，我们可以将势看作把标量场限制在一个长度为 L 的区间内（该长度由场空间上的度量定义）。此时，最相关算符就是 ϕ。现在，随着 $c \to 1$ 理论变得半经典， ϕ 的维数趋近于自由玻色子的维数 $\Delta \sim 1/L^2$。同样，我们需要 $L \sim p \to \infty$ 来重现这一维数级数。我们猜想，这种关系更为普遍，因此任何无穷级数都将与靶空间直径变大的极限相关。

这就把有限性问题转化为：对一列维数有界的目标空间，考察其有限性。正如 [13], 中所讨论的，在曲率有上界（因此微扰理论良好）且直径有下界的假设下，切格定理保证了这种有限性。现在，最低非零算符维数的主导微扰估计是标量拉普拉斯算子 λ_1的最低非零特征值，而它与目标空间的直径 $\lambda_1 \sim 1/$直径^{2}有关。因此，如果这个算子属于谱，那么任意正下界 $\Delta_1 \geq \Delta_{min} > 0$ 都适用。[28] 请注意，施加这一界限会使猜想变弱。例如，它并不能直接推出卡拉比–丘三折叠的数量有限，但确实意味着：如果这类空间存在无穷级数，那么能隙 $\Delta \to 0$。由于里奇平坦条件具有尺度不变性，我们无法断言直径会趋于无穷大（毕竟，直径受一个 K¨ahler 模数控制）。不过，我们大概可以认为，如果考虑一列直径有界的空间，其最大黎曼曲率将无限增大。

这也与文献 $[85, 86]$ （以及其中引用的更早期工作）中的距离猜想有关。若接受这些猜想，则算符维数的下界排除了沿共形流形（改变边缘耦合）趋向无限距离极限的可能性。这与我们先前的讨论相呼应，也很有启发性，因为这种无限距离极限可能是非驯化行为的来源。文献 $[85, 86]$ 中提出的猜想并未直接涉及理论的离散序列，不过或许可以通过更一般的定义来处理，

[28]如果相应的算子不在谱中，例如理论经过了 GSO投影，这个界限就不成立。不过，我们之前引用的公理不允许这种情况。

距离，如 [18] 中所述。

正如我们在 §5.1 中猜想的那样，结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT2}}$ 不依赖于中心荷的具体（足够大的）上界；同样，我们也猜想，对于任意（足够小的）下界 $\Delta_{\min} > 0$，得到的结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT2}}$ 都相同。一个物理上的论据是，大体积极限是弱耦合的（从二维的角度来看），因而具有弱耦合极限的简单性。虽然我们在第一部分中看到，$\mathbb{R}_{\mathrm{CFT2}}$ 的一种可能选择是$\mathbb{R}_{\mathrm{an},\ \exp}$，但我们在 §4.4 中也看到了证据，表明需要超越这种结构。我们将此作为一个开放问题留待未来研究。

$d = 2$中的边界共形场论

我们可以对固定二维共形场论中的边界条件作类似的讨论。此时，对边界熵设置上界是很自然的做法。这会直接控制时空体积，同时也解决了 §5.1 中提到的问题：规范场存在无限多个拓扑类，因为边界熵会随场强增大（用 D膜的语言来说，它就是世界体积张力，由 Born-Infeld作用量给出）。

$d \geq 3$ 问题——离散规范对称性

现在我们来讨论猜想 5(b)。对于高维共形场论，我们可以提出一个与 $d = 2$ 情形非常相似的猜想，但我们对这些共形场论空间的了解较少。我们来讨论几个例子，以说明由此产生的新问题。

首先，考虑一个具有 $U(1)$整体对称性群 G的理论。为明确起见，我们考虑两个例子：具有平移对称性 $\phi \to \phi + \theta$的 $M_1 = S^1$，以及具有旋转对称性 $\phi \to e^{i\theta}\phi$的 $M_2 = \mathbb{C}$。现在 $\mathbb{Z}_p \subset G$，因此我们可以将 M 除以 $\mathbb{Z}_p$（离散规范化）。那么这些无穷级数又如何呢?

当然，这些商空间 $S^1/\mathbb{Z}_p$ 并不新鲜——它们是半径缩小后的圆 $R \to R/p$。因此，它们属于一个连通模空间的一部分，不会带来任何问题。但由于新的靶空间更小，这个无穷级数似乎不符合我们的直觉：无穷级数应当与不断扩大的靶空间和趋于零的能隙相关。$d = 2$ 中对此的解释很熟悉：存在算符维数为 R^2/p^2（以适当单位计）的绕弦态，而且能隙确实趋于零。即使没有这种几何直觉，我们也会在加入扭曲扇区以得到一个模不变理论时发现这一点。一般而言，离散规范对称性会导致这样的扇区：其中的周期边界条件受到规范变换的扭曲；在这个例子中，这些扇区就是绕弦态。

在 $d > 2$ 中，这个论证会如何发展？ $d = 2$的直接对应物——扭曲扇区——确实存在，但只适用于定义在不可缩空间切片上的态，例如 $S^1 \times X$。这些扇区与余维为 2 的算子相关，并且在 $d > 2$中是非局域的，因此不会直接参与能隙的定义。虽然 $M_1 = S^1/\mathbb{Z}_p$ 这个例子仍然没有问题，但现在， $M_2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_p$ 理论序列似乎提供了一个能隙并未趋于零的无穷级数（ M_2 的非紧性在 $d > 2$ 中不是问题）。

如果情况确实如此，那么为了挽救这个猜想，我们需要再增加一个条件，以处理这些理论中出现的无穷级数。我们已在猜想 5(b) 中这样做了。或者，也可以对相关的 $d = 2$ 理论增加一个条件：该理论通过在 S^1 上紧化得到，并且其中也会存在低维的常规点状算符。这样做的问题在于，紧化后的理论只有在红外下才是共形场论，因此这个方案隐含地使用了重整化群。这会使该方案难以运用，而且听起来也不太妥当。

一个有希望的方向是替换猜想 5(b) 中的等价关系，加入关于扩展态的条件。更具体地说，我们可以将扭曲算符解释为产生扩展态；这些态在通常的微扰讨论中并不存在。然后研究这些态的维数（径向能量）。这些态的能量实际上可能很小 $\Delta = (d-2)/2 + \mathcal{O}(1/p)$，在这种情况下，再次只需一个能隙条件，就足以排除非驯服的理论无穷级数。

$d = 3$ –陈-西蒙斯项中的问题

另一种特定于 $d = 3$ 的无穷级数，是陈-西蒙斯耦合的整数值序列。如果在 S^3 上对自由能设定上界后只剩下有限个理论，那么根据我们的定义，这样一组理论仍可能是温和的。文献中似乎尚未明确探讨过这个问题，我们将在附录 A 中通过实例加以研究。

我们发现，确实如此，原因有二。首先，尽管看起来 $F \sim N^2$ 显然可以限制 N的允许取值，但人们可能会担心 k中的无穷级数。然而，在固定 N时，$U(1)_k$和 $SU(N)_k$纯 CS 理论具有 $F \sim \log k$。更一般地，我们将看到，其主导行为为$F \sim \min(N, k)^2 \log(N + k)$ 。

其次，一旦我们知道纯 CS 理论的数量有界，那么如果物质场对 F 的额外贡献为正，加入物质场只会减少满足给定上界的理论数量。根据 F 定理，未规范化物质理论必须具有正的自由能。对于相互作用理论，这一点不那么显然，但根据猜想得到的精确结果 [87]确实如此。

$d \geq 3$中的几何图景

如前所述，与 $d > 2$ 量子场论相关的几何图景是奇点理论。真空模空间通常是空间 X上的锥，因此可以考察 X的几何。这在 AdS/CFT 中尤为如此，因为其真空模空间是 X^N/S_N，或是对它的变形。

如果我们只关注具有几何对偶的理论，就可以联系到有关这些理论的有限性结果。文献 [13] 中有一些一般性论证，与我们讨论过的若干例子相关。一个基本现象是，减小 X 的体积会增大反德西特半径，从而增加对偶共形场论的自由度。这会消除由对离散对称性取商所产生的无穷级数。

以最大超杨-米尔斯理论的超对称轨形为例，例如 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ 轨形，这些轨形在 [88] 中及其后续的许多研究中都有探讨。它们是具有8个超荷的箭图理论，在弱耦合下显然具有 $O(N^2p)$ 个自由度，在强耦合下通过AdS/CFT也如此。

另一个例子是，许多具有几何对偶的三维共形场论可以理解为探测奇点的M2膜理论。例如，ABJM理论 [89]是对 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 的探针，并与 $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$对偶。参数 k 在对偶理论中变为陈-西蒙斯能级 k；此时，取商对中心荷的影响，是我们在上一小节讨论过的现象的另一个例子。

从另一个方向来看，我们可以进一步猜想，对于 $d > 2$，每个此类共形场论的真空模空间 $\mathcal{S}$ 都可在某个 o-极小结构中定义。由于一般的期望值会破坏共形对称性，这就引出了我们的下一个主题。

5.4 来自微观定义的论证

ˆ 理想情况下，我们会从一个定义简单的“前 ˆ 理论”空间 $\mathcal{T}$出发，将理论空间 $\mathcal{T}$嵌入 $\mathcal{T}$，然后 ˆ 证明 $\mathcal{T}$及该嵌入都是温和的。

为了说明这种方法，我们来概述一种证明共形场论空间具有温和性的策略，该策略基于 [18] 的猜想 2。该猜想指出，所有中心荷小于给定上界 c 的 $d = 2$ 共形场论，都可以通过重整化群流从自由共形场论与 WZW模型之和得到，其中至多包含 $N(c)$ 个 ˆ 因子。对 $d \geq 2$ 的一种推广，是将 $\mathcal{T}$ 取为一族渐近自由理论，它们可以在紫外利用重求和微扰论、通过固定数目 N 的紫外场来定义。这个空间由紫外拉格朗日量中的耦合常数 g 参数化，因此我们有理由认为可以定义一个温和的

ˆ区域 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$，其区域（示意性地）为 $||g|| < 1$。接下来，我们需要证明每个具有 $c \leq c(N)$ 的共形场论都可以通过从 $\mathcal{T}$ 出发的重整化群流得到，并且该重整化群流映射是温和的。

另一种策略或许可以基于共形自举。因此，我们假设（如 [18] 中的猜想 1）对于给定的 c，存在某个 $h(c)$，使得所有维数不超过 $h(c)$ˆ 的算符的谱和三点函数能够唯一确定该理论；这些数据随后定义 $\mathcal{T}$ 中的一个点。进一步假设这些算符的数量存在上界 $N(c)$，我们或许可以ˆ以某种方式证明 $\mathcal{T}$ 是温和的；于是，自举不等式（由于数量有限）便在真正的共形场论 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ 中刻画出一个温和子集。

6 结论

在本文中，我们制定了一套程序：给定一族（或一组）量子场论$\mathcal{T}$，以及对其一组确定的可观测量（即配分函数和关联函数）所进行的“计算”，便可以导出一个结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$（如第 3 节所定义）。这一新视角运用了来自一阶逻辑的基本思想：结构提供了一种用于表述逻辑陈述的语言；在我们的情形中，这些陈述涉及物理理论及其可观测量组成的族。结构 $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$ 可以具有各种一般性的数学性质。本研究的核心是一个称为 o-极小性或温和性的性质，它对结构施加了复杂的有限性条件。特别是，o-极小结构中的可观测量不会表现出过于复杂的行为，而关于这些可观测量的非常一般的问题都具有有限答案。证明由一组量子场论定义的结构是 o-极小的，是回答物理学中所研究的有限性问题的一种非常一般的方法——例如参数空间和真空空间的连通分支数量、临界点的数量，或可观测量的其他结构。

上文“计算”一词加上引号，是为了表明，推导出量子场论的结构并不需要精确结果，只需对会出现何种类型的关联函数，以及它们属于何种结构，作出一般性论述。在某些情况下，只需知道这些函数的定义域（换言之，即其奇点的位置），就足以识别一种结构。数学文献中有许多关于有趣结构类的实例，论述了大量函数属于特定结构，并证明了某些结构是 o-极小的。这个框架具有组合性，因此，如果已知关联函数的若干子集各自属于特定结构，就可以利用这些信息来约束甚至推导出它们的并集结构。基于所有这些原因，尤其是因为数学中许多颇具挑战性的问题已借助这些技术得到解决，我们相信，推导出特定类别量子场论所对应的结构

将比精确求解这些理论，或采用其他现有方法研究“理论空间”，容易得多。

我们对结构的定义包含两个步骤。首先，我们谨慎地选取理论空间和欧几里得时空集合，它们可以用某个 o-极小结构的驯性集合与函数来描述$\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{S}$。其次，我们通过加入这些驯性理论在驯性时空上的可观测量来扩展该结构，并声称所得的更大结构仍保留 o-极小性。在一种广为人知的拉格朗日量子场论研究方法中，可观测量是对中间构型求和的某些路径积分。计算这类积分是一门艺术，而且往往需要复杂的物理推理。要执行这些积分所需的全部概念都可在某个 o-极小结构中定义，这种可能性不大。我们的主张有所不同；具体而言，我们声称，在某些情形下，我们预计可以将物理答案加入一个 o-极小结构$\mathbb{R}^{\mathrm{def}}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{S}$，从而得到一个（可能更大的）o-极小结构$\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{S}$。请注意，这一主张可视为一个数学猜想的推广（见猜想 1）：将普通积分加入一个 o-极小结构后，该结构仍保持 o-极小性。

正如我们在第一部分和 [9] 中已经强调的，我们预期，温和性取决于所研究理论的紫外性质。共形场论为温和性普遍实现提供了一个自然的框架。因此，我们提出了两个具体的猜想。第一个猜想，即猜想 4，断言温和集上的共形场论的可观测量是温和的；第二个猜想，即猜想5，则认为满足某些精确条件（最显著的是对自由度数量的限制）的 d 维共形场论集合是温和的。我们通过考察特定共形场论实例中出现的空间函数，以及关联函数的一般共形部分波展开，阐述了共形场论可观测量的温和性。对于共形场论集合的温和性，我们着重讨论了一些特别具有挑战性的实例，例如三维陈-西蒙斯理论，并表明可以避免无限多个离散选择。尽管我们的证据颇有分量，但仍有必要更系统地研究实例，甚至运用共形场论的公理化方法证明这些猜想。是否存在一种极大 o-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{CFT}d}$，能够定义猜想 5 中所指定的所有共形场论集合及其可观测量，仍是未来研究中另一个值得关注的开放问题。尽管这一可能性颇具吸引力，o-极小结构的一般理论也允许存在复杂的结构网络，而这些结构未必能统一于一个极大结构之中。

在研究共形场论时，我们强调，若将所提出的温和性与可观测量的已知性质结合起来，便可能得出有趣的结论。我们的推理是：如果我们知道共形场论可观测量（例如它们对算符共形维数的函数依赖关系），并且能够论证，在自由探测这些函数的定义域时会出现非温和行为，那么必定是我们遗漏了

确保温和性的约束。例如，我们已经看到，在某些假设下，两个算符维数之间的参数化分离可能导致非温和行为，因此应当禁止这类情况。此类论证可以成为未来许多研究的基础，并有助于建立与先前提出的沼泽地猜想之间的联系。乍看之下，温和性或许并不十分强大，但我们预计，将它与理论的其他性质（可能是已知性质）结合后，会产生丰富的推论。

我们还在猜想 2 和猜想 3 中考虑了能够与量子引力一致耦合的有效理论。同样，我们对理论空间和可观测量空间的温和性都提出了主张。在这种情况下，一个 d 维理论所对应的统一 o-极小结构记为$\mathbb{R}_{\mathrm{EFT}d}$，至少在定义上，它取决于所考虑的理论在 $\mathcal{T}_{\mathrm{EFT}d}$ 中有效的截断能量。与所有涉及量子引力一致性的猜想一样，猜想 2 和猜想 3 也具有高度推测性，其最终证明取决于我们能否更深入地理解量子引力本身。不过，如果例如弦理论中导出的有效理论违反了温和性，就可以证伪该猜想。虽然我们尚未知晓这类例子，但仍有必要扩大搜索范围，尤其是在弦理论中寻找可能不具温和性的可观测量。显然，是否存在一种能够涵盖所有源自弦理论的有效理论的极大 o-极小结构，也是一个开放问题。

最后，让我们提及这一构造可能具有的一些进一步应用。正如第一部分的结论中所强调的，我们预计，近期一些运用 o-极小结构的数学定理将直接应用于物理系统。特别是，近期的一些结果（例如 $[2, 5, 90, 91],$ ）可以理解为揭示了一种联系：理论中可观测量之间的关系与其表述方式的对称性相联系。聚焦于理论空间，我们可以尝试将 $[8]$ 的有限性结果推广到更广泛的量子场论、有效场论、弦紧致化和量子引力理论类别。另一种可能是提供一种不变量，用以区分不同的量子场论集合，方法是证明它们会导出不同的 o-极小结构。还有一个相关的想法是，论证某种给定的计算技术不足以求解某一类量子场论：只要说明该技术所能生成的所有函数构成的结构，无法定义这些量子场论的全部关联函数即可。

致谢

我们谨此感谢 Ofer Aharony、Ben Bakker、Matthias Gaberdiel、Matt Kerr、Tobias Kaiser、Bruno Klingler、Maxim Kontsevich、Eran Palti、Julio Parra- Martinez、Erik Plauschinn、Volker Schomerus、Zohar Komargodski、Stefan Van- doren 和 Mick van Vliet 提供有益的讨论和意见。

TG 和 LS 的研究部分得到了荷兰研究理事会（NWO）通过启动基金和 Vici 基金的资助。

驯性几何中的细胞分解

在本附录中，我们简要介绍细胞分解定理，内容取自 [23]。以下结论对任意 o-极小结构 $\mathcal{S}$ 均成立；我们将讨论可定义性，但不会总是提及 $\mathcal{S}$。

细胞分解定理所需的一个基础结果是单调性定理。考虑一个可定义函数 $f: (a, b) \to \mathbb{R}$，其中 a, b 也可以是 $\pm\infty$。该定理指出，(a, b) 可作有限细分，即分割为

$$a =: a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m := b \,, \tag{36}$$

使得 f 要么为常数，要么在开区间 (a_k, a_{k+1}) 上严格单调且连续。因此，f 只能有有限个间断点。该定理的一个更强版本保证，f 在有限分解中的开区间上是 C^p。注意，应将 (a, b) 的划分理解为分割成有限个“胞腔”，即点 $\{a_k\}_{k=1,\ldots,m-1}$ 和开区间$\{(a_k, a_{k+1})\}_{k=0,\ldots,m-1}$。单调性定理约束了 f 在这些胞腔上的行为。

接下来我们介绍 $\mathbb{R}^n$ 的细胞分解。对于 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$，我们希望以一种可推广到更高维的方式描述分割（36）。从 $\mathbb{R}^0$（一个点 p）出发，我们定义一组函数 $f_m: \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$，使得 $f_m(p) = a_m$。于是，$\mathbb{R} = \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}$ 的细胞分解由胞腔 $\{(p, a_m)\}$（即函数 f_m 的图像）以及作为带状区域的胞腔 $\{(p, y): y \in (f_m(p) \; f_{m+1}(p))\}$ 给出。函数 f 显然是可定义且连续的。现在可以迭代地推广这一构造，从而给出 **的细胞分解** 的定义：

- 对于 $\mathbb{R}^0$，存在唯一的胞腔，即点 p。
- 对于 $n > 0$，我们记作 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$。给定 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的细胞分解 $\{\mathcal{C}_\alpha\}$，对每个胞腔 $\mathcal{C}_\alpha$，引入一个整数 $m_\alpha > 0$ 和一组可定义连续函数 $f_{(\alpha)\,k}: \mathcal{C}_\alpha \to \mathbb{R}$，其中 $0 < k < m_\alpha$，使得

$$-\infty =: f_0^{(\alpha)} < f_1^{(\alpha)} < \ldots < f_{m_\alpha - 1}^{(\alpha)} < f_{m_\alpha}^{(\alpha)} := \infty \,, \tag{37}$$

在所有 $\mathcal{C}_\alpha$ 上均成立。给定这样一组函数，$\mathbb{R}^n$ 中的胞腔为：
（1）函数图像：$\{(x, f_k^{(\alpha)}(x)) \subset \mathbb{R}^n: \text{对每个 } \mathcal{C}_\alpha, \; x \in \mathcal{C}_\alpha\}$；（2）函数之间的带状区域：$\{(x, y) \subset \mathbb{R}^n: \; x \in \mathcal{C}_\alpha, \; y \in (f_{(\alpha)\,k}(x) \; f_{k+1}^{(\alpha)}(x))\}$.

请注意，按照构造，细胞分解会将 $\mathbb{R}^n$ 分成有限个两两不相交的可定义子集。根据定义，这些胞腔由连续的可定义函数构成。也可以要求它们位于C^p中，这样便得到一个 C^p-细胞分解。

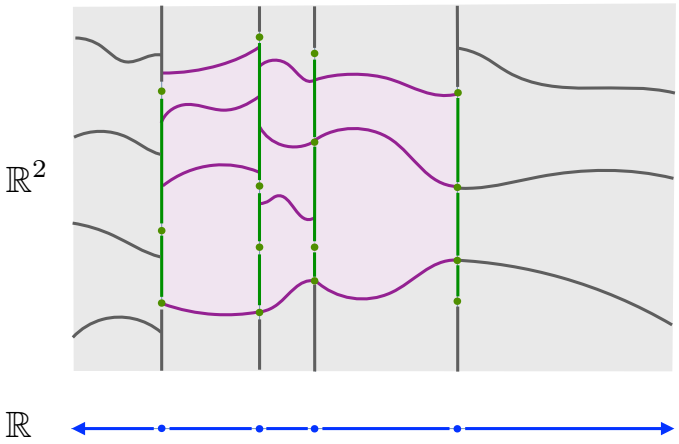

图 2：图中展示了由 $\mathbb{R}$ （下半部分）的细胞分解构造出的 $\mathbb{R}^2$ （上半部分）的细胞分解。新的 $\mathbb{R}^2$-胞腔是定义在 $\mathbb{R}$-胞腔上的可定义函数的图像和带状区域。$\mathbb{R}$ 中开区间上方的新胞腔以紫色表示，而 $\mathbb{R}$ 中点上方的新胞腔以绿色表示。所有延伸至 $\pm\infty$ 的胞腔都以灰色标出。

我们还要强调，细胞分解具有特殊方向，沿这些方向可以简单地投影到低维细胞分解。图2展示了 $\mathbb{R}^2$ 的细胞分解及其底层的 $\mathbb{R}$ 分解。

细胞分解定理现在指出，可定义细胞足以描述任意可定义集。该定理指出

(1) 对于任意有限集族的可定义集 A_1、……、 $A_k \in \mathbb{R}^n$，都存在一种细胞分解，使得每个 A_i 都是有限个胞腔的并集；(2) 对于每个可定义函数 f：$A \to \mathbb{R}$、 $A \subset \mathbb{R}^n$，都存在 $\mathbb{R}^n$ 的一种细胞分解，将 A 按照第 (1) 部分进行划分，使得 f 在每个胞腔上的限制都是连续的。

正如 §2.2 中已经强调的那样，可以将“连续”替换为属于 C^p，从而推广该定理。在这种情况下，要使用 C^p-细胞分解，并由定理的第 (2) 部分推得，每个可定义函数都可分解为 C^p 个片段。

细胞分解定理允许为每个可定义集赋予一个维数和一个欧拉示性数。设 A 是这样一个可定义集， C_i是将 A划分开的胞腔的有限数量。于是， A 的维数 $\dim(A)$ 定义为出现的胞腔的最大维数 $\max\{\dim(C_i)\}$ 。欧拉

示性数定义为

$$E(A)=\sum_{C_i}(-1)^{\dim(C_i)}=n_0-n_1+...+(-1)^{\dim(A)}k_{\dim(A)}\ , \tag{38}$$

其中， n_s 是 $\{C_i\}$中的 s维胞腔的数量。注意，dim(A)和E(A)与所选的细胞分解无关，因此与集合 A 相关，而非与分解相关。

B 三维切恩–西蒙斯理论 S

在本附录中，我们讨论一些含有物质场的三维切恩–西蒙斯理论的理论空间。根据超对称性的多少，我们将讨论分为几个部分。对于一般的参数， β函数不为零。由于我们最关注共形场论，因此将参数空间限制在共形不动点上。我们还聚焦于较大但有限的 N，并忽略 U(N)理论与 SU(N)理论之间的差异，因此 U(1)因子的能级无关紧要。

我们关注的问题是：在具有切恩–西蒙斯能级 k 且物质场任意的无穷级数理论中，自由能在 S^3上的普适项 F(N， k)是什么？对 $F\ \leq\ F_{max}$ 加以界定，能否使理论的数量有限？利用宇称，我们可以取 $k>0$。在定义 k 时有一个重要的细节：它会因费米子的单圈效应而发生位移，且位移方式取决于所选的紫外调节器。详细说明请参阅 [92]和 [93]的附录D。务必使用正确的约定。

大 N 极限理论由 N 或 k 之一以及一个 't Hooft 耦合常数来参数化

$$\lambda=\frac{N}{k}\in(0,\infty);\qquad \lambda'=\frac{N}{k+N}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\in(0,1). \tag{39}$$

这些定义域假定了朴素界限 N， $|k|>0$。但正如我们将在下文看到的，一致性可能会施加更严格的界限。

纯陈-西蒙斯理论

我们先从纯 CS 理论开始，其中包含一个 U(N) 规范场， SU(N) 和 U(1) 因子的 CS˜能级分别为 k和 k。自由能

$F=-$在 S^3上的对数 Z为

$$F_{CS}(N,k,\tilde{k}=k+N)=\frac{N}{2}\log(k+N)-\sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\log(2\sin\frac{\pi j}{k+N}) \tag{40}$$

$$F_{CS}(N,k,\tilde{k})=F_{CS}(N,k,\tilde{k}=k+N)+\frac{1}{2}\log\frac{\tilde{k}}{k+N}\ . \tag{41}$$

它满足层级-秩对偶

$$F_{CS}(N,k,\tilde{k})=F_{CS}(k,N,\tilde{k})\ . \tag{42}$$

~ ~对 F进行求和会去除 $k\to\infty$ U(1)无穷级数，因此我们取 $k=1$ （这也是 $SU(N)$的结果）。

我们需要检查，当 $N\to\infty$在固定 λ、 $F(N,\ \lambda)$下 $\to\infty$时，$N\to\infty$ 和 $k\to\infty$ 的极限未必可交换，因此我们还应检查$k\to\infty$ 在固定 N下的情况。对于 $N=2$，这很容易验证，其中

$$F_{CS}(N=2,k,\tilde{k}=1)=\frac{1}{2}\log(k+2)-\log(2\sin\frac{\pi}{k+2}). \tag{43}$$

当 k较大时，这按 (3/2) log(k+2) 发散，因此 $SU(2)_k$无穷级数也会趋向较大的 F。

完整的 $1/N$ 展开（先取 $k\to\infty$ ，再取 $N\to\infty$）可以使用 Barnes G 函数进行解析计算，结果为 [94]

$$\begin{aligned}F_{CS,k\to\infty}(N)=&\frac{1}{2}\log(\lambda')+N^2(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log(2\pi\lambda'))+\frac{B_1}{2}\log(N)\\&+\sum_{l=2}^{\infty}N^{2-2l}(-1)^l\frac{B_l}{2l(2l-2)},\end{aligned} \tag{44}$$

其中 B_l 是伯努利数。注意，对于固定的 N， $k\to\infty$ 极限对应于 $\lambda'\to 0$。因此，自由能在此极限下对 N的任意取值都发散，从而截断了理论塔。

在保持 λ' 固定的情况下，式 40 的大 N 和 k 渐近行为为

$$F_{CS}=N^2F_{CS}^{(0)}+\mathcal{O}(\log N) \tag{45}$$

$$F_{CS}^{(0)}(\lambda')=-\int_0^1 dx(1-x)\log 2\sin(\pi\lambda' x) \tag{46}$$

$$=\frac{1}{8\pi^2(\lambda')^2}\left(2\zeta(3)-Li_3(e^{2i\pi\lambda'})-Li_3(e^{-2i\pi\lambda'})\right) \tag{47}$$

函数 $\Re Li_3(z)$ 在单位圆上有界，其取值介于$Li_3(-1)=-3\zeta(3)/4$ 和 $Li_3(1)=\zeta($3) 之间。当 $\lambda'\to 0$ (同样地，1) 时，

$$F_{CS}^{(0)}(\lambda')\sim\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log 2\pi\lambda'+\frac{\pi^2(\lambda')^2}{72}+\dots \tag{48}$$

因此，当 λ' 较小时，它的值很大。如果 $F_{(0)\,CS}(\lambda')$ 在 (0，1) 内有一个正的最小值，那么我们就可以得出有限性。然而，图 3 中的图形表明事实并非如此。利用对偶性，写作

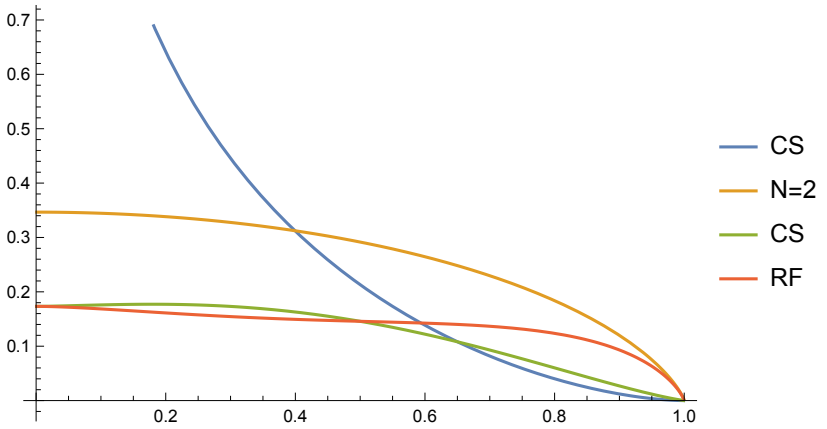

图 3：自由能 F_{CS}、 $B_{N=2}$、 B_{CB} 和 B_{RF} 作为 λ 或 λ'的函数。

$$F_{CS}^{(0)}(1-z)=\frac{z^2}{(1-z)^2}F_{CS}^{(0)}(z)=z^2\left(1+\mathcal{O}(z)+\ldots\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log 2\pi z+\mathcal{O}(z)\right), \tag{49}$$

我们看到它在 $\lambda'\to 1$处为零。因此，我们需要更仔细地考察这个极限，看看对 F_{CS} 的上界能否使理论的数量有限。恢复 N 和 k后，

$$F_{CS}(N,k)=k^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log\frac{2\pi k}{N+k}+\ldots\right) \tag{50}$$

因此， $k\to\infty$ 极限受到整体 k^2 依赖关系的截断，而在固定 k 时， $N\to\infty$ 极限则受到对数的截断。第二个极限与式 43 中考察的极限对偶，因此这与我们先前看到的有限性相同，只是采用 $1/N$ 展开后稍微不那么明显。还要注意，$\lambda'\to 0$，1 的极限分别为 $|k|\gg N$ 和$|k|\ll N$，因此这表明了上文指出的 $F\sim \min(k,\ N)^2\log(k+N)$行为。

总之，通过限制球面自由能，纯 CS 理论的无穷级数会受到截断。换句话说，不存在F有界的无穷级数。

$\mathcal{N}=2$ 含有 N_f 多重态

我们从单个手征超场的情形开始，即 $N_f=1$。该理论是一个$\mathcal{N}=2$ 超共形理论，不存在边缘形变。存在三种

超对称性破缺的相关形变。在这种情况下，理论在映射下呈现自对偶性

$$U(N)_k \to U(k+\frac{1}{2}-N)_{-k}\ . \tag{51}$$

这种对偶性作用于 't Hooft 耦合 $\lambda = \frac{N}{k}$，表现为 $\lambda \to 1-\lambda$。请注意，这不会保持定义域 $\lambda \in (0,\ \infty)$。换言之，它可能导致 N为负值，这是没有意义的。 [92] 提出的解决方案是，不存在具有 $N > |k|$ 的 $\mathcal{N}=2$理论（它们会破坏超对称性，而且可能不是共形的）。因此，我们将假设 $\lambda \in (0,\ 1)$。这仍允许 k 中出现无穷级数，但这会将我们带到控制得更好的 $\lambda \to 0$ 极限。

文献 [87], 通过局域化计算了自由能，得到了一个关于 N 本征值的积分形式的精确表达式。它具有一个大N极限

$$F_{\mathcal{N}=2} = N^2 F_{CS}^{(0)} + N B_{susy} + \dots \tag{52}$$

$$B_{susy}(\lambda) = \frac{i}{4\pi\lambda}\left(Li_2(-e^{i\pi\lambda}) - Li_2(-e^{-i\pi\lambda})\right) \tag{53}$$

$$= \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi^2\lambda^2}{48} + \dots . \tag{54}$$

现在，如文献 [87]所述，我们承认这个 F_{CS} 就是式 46 中的那个；在这种情况下，在 $\lambda \to 1$ 极限下，有限性并不明显。然而，对偶性 $\lambda \to 1-\lambda$再次表明，这个困难只是表面上的。由于对于 $\lambda \le 1/2$，物质场对自由能的贡献为正，因此，在对 F 设定固定上限的条件下，这类理论的数量不超过纯 CS 理论的数量。

$\mathcal{N}=0$

非超对称情形中的对偶性更加复杂。超对称理论的自对偶源于多重态中玻色部分和费米部分的重新排列。在非超对称情形中，这会导致费米理论和玻色理论之间的对偶。这里我们将聚焦于一对特定的此类理论：临界玻色子理论（CB）和无质量（或"常规"）费米子理论（RF）。它们的作用量为

$$S_{\mathrm{CB}} = S_{CS} + \int \mathrm{d}^3x \left(D_\mu \overline{\phi} D^\mu \phi + \frac{\lambda_4}{4N}(\overline{\phi}\phi)\right)$$

$$S_{\mathrm{RF}} = S_{CS} + \int \mathrm{d}^3x \overline{\psi} \not{D} \psi$$

因此，对偶性可写为

$$U(N)_{\mathrm{CB},k} \ \Leftrightarrow\ U(k)_{\mathrm{RF},-n+1/2} \tag{55}$$

这对应于 $\lambda_{CB} = 1 - \lambda_{RF}$。这些理论没有边缘形变（因此额外的耦合 λ_4 是固定的）。我们可以再次写出大 N 展开

$$F_{CB} = N^2 F_{CS}^{(0)} + N B_{CB} + \dots \tag{56}$$

$$F_{RF} = N^2 F_{CS}^{(0)} + N B_{RF} + \dots \tag{57}$$

文献 [87] 猜想了 B_{CB} 和 B_{RF} 的精确表达式。根据其中的公式 (3.11)，尽管它们在 $\lambda \to 1$ 时都趋于零，但当 $\lambda < 1$ 时仍为正。图 3 显示，偏离这一极限时它们均为正。

现在，我们可以利用对偶性论证，这些理论的完整集合由 CB 的 $\lambda \leq 1/2$ 区域和 RF 的 $\lambda \leq 1/2$ 涵盖。对于这两者，F 的物质贡献均为正，因此同样的论证也适用。由此可知，这些集合也不会产生有界 F 的无穷级数。

在 $[95, 96]$ 中，研究了另一对对偶理论 RB 和 CF，并论证它们也有不动点。他们还指出，这些不动点理论可以流向具有相同 $(N,\ k)$ 的 CB 或 RF 理论。根据 F 定理 $[97]$，它们必须具有更大的 F，因此不包含有界 F 的无穷级数。

C 自由量子场论中的结构

在本附录中，我们给出另一个由量子场论产生的结构示例。我们研究 d 维欧几里得时空中的自由标量场。由于我们讨论的是自由理论，n 点关联函数可以利用维克定理计算，结果为二点函数的乘积。因此，整个结构将由二点跃迁函数乘积的和给出

$$W^d(x, y) = \langle x | \, e^{-Ht} \, | y \rangle \ . \tag{58}$$

我们从平直空间中质量为m 的克莱因-戈尔登场的二点跃迁函数开始。对于一个 d 维理论，它由 [54] 给出

$$W^d(x, y) = (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{(x-y)^2}{\sqrt{m}} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(\sqrt{m}(x-y)^2) \ . \tag{59}$$

$K_a(x)$ 表示第二类修正贝塞尔函数。正如 §4.1 和第一部分中所讨论的那样，这些函数在一般情况下都是指数周期。§4.1 中提出的猜想 1 意味着它们在某个 o-极小结构中是可定义的。只有在 $d = 1$ 或 $d = 3$ 的特殊情况下，该函数才会简化为

$$K_{1/2}(x) = e^{-x} \sqrt{\pi/(2x)} \, , \tag{60}$$

而在 $\mathbb{R}_{\exp}$ 中，其可定义性显而易见。

反德西特时空中的克莱因-戈尔登场的二点函数最早由 [56] 计算得出，结果为

$$W^d(x,y) = \frac{e^{-i\pi(d-1)/2}}{(2\pi)^{(d+1)/2}}((x\cdot y)^2-1)^{-\frac{d-1}{4}} Q^{\frac{d-1}{2}}_{\sqrt{d^2/4+m^2}-1/2}(x\cdot y). \tag{61}$$

这里， $Q^b_a(x)$ 表示第二类勒让德函数。请注意，度量的符号仅影响 $x\cdot y$ 可能取的符号。勒让德函数可以用超几何函数表示为

$$Q^\mu_\lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma[\lambda+\mu+1]}{2^{\lambda+1}\Gamma[\lambda+\frac{3}{2}]}\frac{e^{i\pi\mu}(x^2-1)^{\mu/2}}{x^{\lambda+\mu+1}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\lambda+\mu+1}{2},\ \frac{\lambda+\mu+2}{2}\\ \lambda+\frac{3}{2}\end{matrix}\middle|\ \frac{1}{x^2}\right] \tag{62}$$

质量的影响仅体现在勒让德函数的下参数 $\lambda = \sqrt{d^2/4+m^2}-1/2$ 中。这些参数的温和性取决于维数以及距离 $x\cdot y$ 的符号。在偶数维中，它始终不温和；而在奇数维中，当 $x\cdot y>0$ 时不温和。

但具有一般耦合的有质量克莱因-戈尔登场并非共形场。共形极限由 $\lambda\to 0$ 给出。在这种情况下，勒让德函数会化为代数函数。正曲率时空的情况类似，唯一的区别是勒让德 Q 函数被勒让德 P 函数取代。

参考文献

[1] J. Pila 和 J. Tsimerman, 《Ax-Lindemann for Ag》, 数学年刊 s (2014) 659–681.[2] B. Bakker 和 J. Tsimerman, 《霍奇结构变分的 Ax–Schanuel 猜想》, 《数学新进展》**217** (2019) 77–94, arXiv:1712.05088 [math.AG].[3] G. Baldi、B. Klingler 和 E. Ullmo, 《霍奇轨迹的分布》, arXiv:2107.08838 [math.AG].[4] J. Pila、A. N. Shankar、J. Tsimerman、H. Esnault 和 M. Groechenig, 《Shimura簇上的典范高度与Andr´e-Oort猜想》, arXiv:2109.08788 [math.NT].[5] B. Bakker 和 J. Tsimerman, 《周期的函数超越性与几何 Andr´e–Grothendieck 周期猜想》, arXiv:2208.05182 [math.AG]。

[6] U. Zannier 和 J. Pila，《周期解析集中的有理点与 Manin–Mumford猜想》，*Rendiconti Lincei* **19** 第 2 期，(2008) 149–162.[7] B. Bakker、B. Klingler 和 J. Tsimerman，《算术商空间的驯性拓扑与霍奇轨迹的代数性》，美国数学会杂志 **33** 第 4 期，(2020) 917–939, arXiv:1810.04801 [math.AG].[8] B. Bakker、T. W. Grimm、C. Schnell 和 J. Tsimerman，《整霍奇结构变分中自对偶类的有限性》，arXiv:2112.06995 [math.AG].[9] T. W. Grimm，《驯化有效理论景观》，高能物理学杂志 **11**(2022) 003, arXiv:2112.08383 [hep-th].[10] T. W. Grimm、S. Lanza 和 C. Li，《温和性、弦与距离猜想》，高能物理学杂志 **09** (2022) 149, arXiv:2206.00697 [hep-th].[11] M. R. Douglas、T. W. Grimm 和 L. Schlechter，《量子场论的温和性，第一部分——振幅》，arXiv:2210.10057[hep-th].[12] M. R. Douglas，《弦/M理论真空态的统计》，高能物理学杂志 **05**(2003) 046, arXiv:hep-th/0303194.[13] B. S. Acharya 和 M. R. Douglas，《有限景观？》，arXiv:hep-th/0606212.[14] S. B. Giddings、S. Kachru 和 J. Polchinski，《弦紧化中由通量产生的层级结构》，《物理评论*D*辑》**66** (2002) 106006,arXiv:hep-th/0105097.[15] A. Tarski，《初等代数与几何的判定方法》，载于《量词消去与柱面代数分解》，B. F. Caviness 和 J. R. Johnson 编，第 24–84 页。Springer Vienna，维也纳，1998年。[16] A. Grothendieck，《Esquisse d'un Programme（1984）》，*Schneps and Locha*

k

I (1997) 4–48.
http://matematicas.unex.es/~navarro/res/esquisseeng.pdf.[17] C. Vafa，《弦景观与沼泽地》，arXiv:hep-th/0509212.[18] M. R. Douglas，《量子场论空间》，物理学杂志：会议系列**462** 第1期，(2013) 012011, arXiv:1005.2779 [hep-th]。

[19] J. J. Heckman 和 C. Vafa，《精细调节、隔离机制与沼泽地》，物理快报B辑 798 (2019年) 135004，arXiv:1905.06342 [hep-th]。[20] Y. Hamada、M. Montero、C. Vafa 和 I. Valenzuela，《有限性与沼泽地》，物理学杂志A辑 55 第22期，(2022年) 224005，arXiv:2111.00015 [hep-th]。[21] D. L¨ust、E. Palti 和 C. Vafa，《反德西特空间与沼泽地》，物理快报B辑 797 (2019年) 134867，arXiv:1906.05225 [hep-th]。[22] A. Wilkie，《o-极小结构》，S´eminaire Bourbaki 985 (2007年) 982–996。[23] L. van den Dries，《驯性拓扑与o-极小结构》，伦敦数学会讲义系列第248卷。剑桥大学出版社，英国，1998年。[24] J.-M. Lion 和 P. Speissegger，《o-极小结构的Pfaffian闭包中的解析分层》，《杜克数学杂志》103 第2期，(2000年) 215–231。[25] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《驯性复分析与o-极小性》，载于《2010年国际数学家大会论文集（ICM 2010）（共4卷）第一卷：全体会议演讲与典礼；第二至第四卷：特邀演讲》，第58–81页，世界科技出版公司，2010年。[26] A. J. Wilkie，《实数有序域扩张受限Pfaffian函数与指数函数所得结构的模型完备性结果》，美国数学会杂志 9 (1996年) 1051–1094。[27] J. Denef 和 L. van den Dries，《p进与实次解析集》，数学年刊 128 第2期，(1988年) 79–138。[28] L. van den Dries、A. Macintyre 和 D. Marker，《带指数运算的受限解析域的初等理论》，数学年刊 140 第1期，(1994年) 183–205。[29] P. Speissegger，《o-极小结构上的Pfaffian闭包》，https://arxiv.org/abs/math/9710220。[30] J.-P. Rolin、P. Speissegger 和 A. J. Wilkie，《拟解析Denjoy-Carleman类与o-极小性》，美国数学会杂志 16 第4期，(2003年) 751–777。

[31] L. V. D. Dries 和 P. Speissegger, 《具有多重可求和级数和指数函数的实数域》, 伦敦数学会会刊**81** 第 3 期, （2000年）513–565。[32] A. Fischer, 《o-极小结构中的光滑函数》, 数学进展**218** 第 2 期, （2008）496–514。 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870808000133.[33] L. S. Krapp, 《o-极小指数域的代数与模型论性质》。博士论文, 康斯坦茨大学, 康斯坦茨, 2019年。[34] A. J. Wilkie, 《以受限 Pfaffian 函数和指数函数扩张实数有序域的模型完备性结果》, 美国数学会杂志**9** （1996年）1051–1094。[35] A. Jaffe 和 G. Ritter, 《弯曲背景上的量子场论。一、欧几里得泛函积分》, 数学物理通讯**270** （2007年）545–572, arXiv:hep-th/0609003.[36] K. Costello 和 O. Gwilliam, 《量子场论中的因子化代数》, 第 2 卷。剑桥大学出版社, 2021年。[37] A. M. Polyakov, 《玻色弦的量子几何》, 物理快报*B*辑**103** （1981）207–210。[38] R. Cluckers、G. Comte、D. J. Miller、J.-P. Rolin 和 T. Servi, 《积分

n

振荡函数与次解析函数”, 《杜克数学杂志》**167**第7期, （2018）1239–1309, arXiv:1601.01850 [math.AG].[39] S. Alexakis 和 V. Schlue, “时间周期真空时空的不存在性”, 《微分几何杂志》**108** 第1期, （2018）1–62, arXiv:1504.04592[gr-qc].[40] G. J. Galloway, “空间闭合时空的分裂定理”, 《数学物理通讯》**96** 第4期, （1984）423–429。[41] P. T. Chru´sciel, “关于非线性波动方程的周期解, 包括带负宇宙学常数的爱因斯坦方程”, arXiv:1711.11261 [gr-qc].[42] J. M. Maldacena, “超共形场论与超引力的大N极限”, 《理论与数学物理进展》**2** （1998）231–252, arXiv:hep-th/9711200。

[43] O. Aharony、S. S. Gubser、J. M. Maldacena、H. Ooguri 和 Y. Oz，“大 e N个场理论、弦理论与引力，”《物理报告》**323** (2000) 183–386, arXiv:hep-th/9905111.[44] S. Giombi，“高自旋——共形场论对偶”，载于理论高级粒子物理研究所：场与弦的新前沿，第137–214页。2017年。arXiv:1607.02967 [hep-th].[45] I. Heemskerk、J. Penedones、J. Polchinski 和 J. Sully，“从共形场论看全息”，高能物理学杂志**10** (2009) 079, arXiv:0907.0151[hep-th].[46] S. Caron-Huot、D. Mazac、L. Rastelli 和 D. Simmons-Duffin，“由精确共形场论界限导出的反德西特体局域性”，高能物理学杂志**11** (2021) 164,arXiv:2106.10274 [hep-th].[47] J.-M. Lion 和 J.-P. Rolin，“次解析函数的积分与次解析子集的体积”，《傅里叶研究所年刊》**48** 第3期，(1998) 755–767.[48] P. Speissegger，“o-极小结构的Pfaffian闭包”，*Journalf¨ur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **1999年**(1997) 189 – 211, arXiv:math/9710220 [math.RA].[49] T. Kaiser 和 J. Ruppert，“由全局次解析集上的布朗运动给出的参数化指数积分的渐近行为”，arXiv:1710.07085 [math.CA].[50] T. Kaiser，“调和测度与次解析温和测度”，《逻辑与分析杂志》**2:7** (2010年) 1–29.[51] L. van den Dries，“o-极小结构与实解析几何”，*B. Mazur* 等（编），《数学当前进展》，*1998*年。会议论文集，美国马萨诸塞州剑桥105–152.[52] T. Kaiser，“测度的一阶温和性”，*Annals of Pure and Applie*

d

逻辑 **163** 第12期，（2012）1903–1927。[53] F. Gasparotto、A. Rapakoulias和S. Weinzierl，《通过微分方程非微扰计算格点关联函数》，《物理评论*D*辑》**107** 第1期，（2023）014502, arXiv:2210.16052 [hep-th]。[54] M. Bertola、J. Bros、U. Moschella和R. Schaeffer，《n点函数的反德西特空间/共形场论对应》，arXiv:hep-th/9908140。[55] T. W. Grimm、L. Schlechter和M. van Vliet，《温和量子理论中的复杂性》，即将发表。

[56] C. Fronsdal, 《弯曲时空中的基本粒子：II》，《物理评论D辑》10（1974）589–598。[57] E. Palti, 《沼泽地：引言与综述》，物理进展67第6期,（2019年）1900037, arXiv:1903.06239 [hep-th]。[58] M. van Beest、J. Calder´on-Infante、D. Mirfendereski和I. Valenzuela, 《弦紧化中的沼泽地计划讲义》，arXiv:2102.01111 [hep-th]。[59] M. R. Douglas, 《量子场论空间》，物理学杂志：会议系列462第1期, （2013）012011, arXiv:1005.2779 [hep-th]。[60] A. A. Belavin、A. M. Polyakov和A. B. Zamolodchikov, 《二维量子场论中的无限共形对称性》，核物理B 241（1984）333–380。[61] E. Perlmutter, 《Virasoro 共形块的封闭形式》，高能物理学杂志08（2015）088, arXiv:1502.07742 [hep-th]。[62] V. S. Dotsenko和V. A. Fateev, 《二维统计模型中的共形代数与多点关联函数》，核物理B 240（1984）312。[63] A. Mironov、A. Morozov和S. Shakirov, 《作为Dotsenko-Fateev积分判别式的共形块》，现代物理国际杂志A 25（2010年）3173–3207, arXiv:1001.0563 [hep-th]。[64] H. Dorn和H. J. Otto, 《Liouville理论中的二点函数和三点函数》，核物理B 429（1994年）375–388, arXiv:hep-th/9403141。[65] A. B. Zamolodchikov和A. B. Zamolodchikov, 《Liouville场论中的结构常数与共形自举》，核物理B 477（1996年）577–605, arXiv:hep-th/9506136。[66] C. Beem、L. Rastelli和B. C. van Rees, 《更多超共形自举》，《物理评论D辑》96第4期,（2017）046014, arXiv:1612.02363[hep-th]。[67] M. R. Douglas和S. Kachru, 《通量紧致化》，现代物理评论79（2007年）733–796, arXiv:hep-th/0610102。[68] D. Tsimpis, 《超对称AdS真空与尺度分离》，高能物理学杂志08（2012）142, arXiv:1206.5900 [hep-th]。[69] F. F. Gautason、M. Schillo、T. Van Riet和M. Williams, 《关于通量真空中尺度分离的评述》，高能物理学杂志03（2016）061, arXiv:1512.00457 [hep-th]。

[70] O. DeWolfe、A. Giryavets、S. Kachru 和 W. Taylor，《IIA 型模量稳定化》，高能物理学杂志 07 (2005) 066, arXiv:hep-th/0505160.[71] M. R. Gaberdiel、A. Konechny 和 C. Schmidt-Colinet，《超越最低阶的共形微扰理论》，物理学杂志A辑 42 (2009) 105402, arXiv:0811.3149 [hep-th].[72] K. Sen 和 Y. Tachikawa，《边缘算符的一阶共形微扰理论》，arXiv:1711.05947 [hep-th].[73] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman，《同调镜像对称与环面纤维化》，载于 KIAS 年度辛几何与镜像对称国际会议，203–263 页。11，2000年。arXiv:math/0011041.[74] B. S. Acharya 和 M. R. Douglas，《一个有限的景观？》，arXiv:hep-th/0606212.[75] B. Simon，《具有纯离散谱的 Schr¨odinger 算子》，《方法：泛函分析与拓扑》15 第 1 期，(2009) 61–66。http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=495.[76] I. Singer、B. Wong、S.-T. Yau 和 S. S.-T. Yau，《关于 Schr¨odinger 算子前两个本征值间隙的估计》，比萨高等师范学校科学部年刊 12 第 2 期，(1985) 319–333。[77] J. Ling 和 Z. Lu，《黎曼流形上本征值的界》，ALM 10 (2010) 241–264。[78] T. Cubitt、D. Perez-Garcia 和 M. M. Wolf，《谱隙的不可判定性（简版）》，《自然》528 (2015) 207–211, arXiv:1502.04135 [quant-ph].[79] T. Cubitt、D. Perez-Garcia 和 M. M. Wolf，《谱隙的不可判定性》，《Forum Math. Pi》10 (2022) e14, arXiv:1502.04573[quant-ph].[80] A. Connes，《非交换几何》。爱思唯尔科学出版社，1995年。https://books.google.com/books?id=QofCkAJjreYC.[81] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman，《同调镜像对称与环面纤维化》，载于 KIAS 年度辛几何与镜像对称国际会议，203–263 页。11，2000 年。arXiv:math/0011041.[82] J. Cheeger，《黎曼流形的有限性定理》，《美国数学杂志》92 第 1 期，(1970) 61–74。

[83] P. Kravchuk、J. Qiao 和 S. Rychkov，《共形场论中的分布。第二部分：闵可夫斯基时空》，高能物理学杂志 08 (2021) 094, arXiv:2104.02090 [hep-th].[84] E. Perlmutter、L. Rastelli、C. Vafa 和 I. Valenzuela，《共形场论距离猜想》，高能物理学杂志 10 (2021) 070, arXiv:2011.10040 [hep-th].[85] F. Baume 和 J. Calder´on Infante，《借助共形场论攻克反德西特空间中的距离猜想》，高能物理学杂志 08 (2021) 057, arXiv:2011.03583 [hep-th].[86] E. Perlmutter、L. Rastelli、C. Vafa 和 I. Valenzuela，《共形场论距离猜想》，高能物理学杂志 10 (2021) 070, arXiv:2011.10040 [hep-th].[87] S. Giombi，《在三维球面上检验玻色子/费米子对偶》，arXiv:1707.06604 [hep-th].[88] S. Kachru 和 E. Silverstein，《四维共形场论与轨形上的弦》，《物理评论快报》80 (1998) 4855–4858。[89] O. Aharony、O. Bergman、D. L. Jafferis 和 J. Maldacena，《N=6超共形陈-西蒙斯物质理论、M2膜及其引力对偶》，高能物理学杂志 10 (2008) 091, arXiv:0806.1218 [hep-th].[90] Z. Gao 和 B. Klingler，《混合霍奇结构变分的 Ax-Schanuel猜想》，arXiv:2101.10938 [math.NT].[91] K. C. T. Chiu，《混合霍奇结构变分的 Ax-Schanuel猜想》，arXiv:2101.10968 [math.AG].[92] O. Aharony，《陈-西蒙斯物质理论中的重子、磁单极子与对偶》，高能物理学杂志 02 (2016) 093, arXiv:1512.00161 [hep-th].[93] O. Aharony、S. Jain 和 S. Minwalla，《陈-西蒙斯物质理论中的流、不动点与对偶性》，高能物理学杂志 12 (2018) 058, arXiv:1808.03317[hep-th].[94] V. Periwal，《陈-西蒙斯理论的拓扑闭弦解释》，《物理评论快报》71 (1993) 1295–1298, arXiv:hep-th/9305115.[95] S. Jain、S. Minwalla 和 S. Yokoyama，《具有基本玻色子和费米子的陈-西蒙斯对偶》，高能物理学杂志 11 (2013) 037, arXiv:1305.7235[hep-th].[96] O. Aharony、S. Jain 和 S. Minwalla，《陈-西蒙斯物质理论中的流、不动点与对偶性》，高能物理学杂志 12 (2018) 058, arXiv:1808.03317[hep-th]。

[97] D. L. Jafferis、I. R. Klebanov、S. S. Pufu 和 B. R. Safdi，“迈向 F 定理：三维球面上的 N=2场理论”，高能物理学杂志 **06** (2011) 102, arXiv:1103.1181 [hep-th]。