arXiv:2302.04309v1 [math.DS] 8 Feb 2023

# 多值半流隔离块的存在性

ESTEFANI M. MOREIRA 和 JOSÉ VALERO

摘要。本文证明了作用于度量空间（非局部紧）的多值半流存在隔离块。隔离块是孤立不变集的一种特殊邻域。隔离块在单值半流的 Conley 指数理论中发挥着重要作用，并用于定义同调指标的概念。尽管 Conley 指数已推广至多值（半）流的情形，但相关方法跳过了 Conley 及后来的 Rybakowski 所采用的传统构造。

我们的目标是提出一套多值半流隔离块理论，在该理论中，我们将弱孤立不变集的这类邻域理解为与单值情形下理解不变集相同的方式。

之后，我们将把这一抽象结果应用于一个微分包含，以证明可以为该问题的每个平衡点构造隔离块。

## 1. 引言

上个世纪是非线性动力系统理论发展的核心时期。人们需要理解来自物理学、生物学、化学等不同领域的问题的解的渐近行为。然而，模型可能只是现实系统的一个缩影，不一定能够对其进行全面而准确的描述。在此背景下，了解模型中某些在扰动下保持稳定的结构——也就是说，在足够接近的问题中同样存在的结构——对于理解动力学至关重要。

在研究非线性系统时，我们可能会发现有界或无界区域，其动力学是自成一体的，也就是说，不受外部动力学的影响。这类集合称为不变区域。孤立不变集是在某种意义上被“孤立”的不变区域。

2020年数学主题分类：37B30、37B35、35K55和35B51。第一作者获得了CAPES、FAPESP项目资助（编号：2018/00065-9和2020/00104-4）。第二作者获得了西班牙科学、创新与大学部项目PGC2018-096540-B-I00、西班牙科学与创新部项目PID2019-108654GB-I00、安达卢西亚自治区与FEDER项目P18-FR-4509，以及瓦伦西亚自治区项目PROMETEO/2021/063的部分资助。

它们之所以受到关注，是因为在扰动下仍能保持不变。一些特殊的孤立不变集包括双曲平衡点和双曲周期解。证明某个平衡点或周期解具有双曲性可能极具挑战性，因为这需要深入理解此类元素邻域内轨道的几何性质。

因此，在上个世纪，学者们开始探索一种新方法，寻找在扰动下具有稳健性的性质。在这方面，Conley 提出了 Conley 指数的概念，这是一种从拓扑学角度研究孤立不变集邻域的方法。这个概念推广了 Morse 指数的概念；只有在我们充分了解几何局部渐近行为时，才能计算 Morse 指数。

Conley 指数的概念最初见于 [5], ，其定义适用于局部紧度量空间上半流作用下的紧孤立不变集。后来，Rybakowski [18] 将这一概念推广到度量空间上定义的半流，且这些空间不一定是紧的。这一定义的拓扑学意义，可从上述文献之后大量涌现的研究中看出。仅举几例，该概念被用于应用研究（例如，参见 [18, 15]），也被推广到 Hilbert 空间上的流（参见 [10, 4, 11]）、Banach 空间上的非自治半流 [12] 以及多值半流（参见 [8, 16]）。

多值问题在上世纪的文献中便已出现。对于这类方程，柯西问题的解不具有唯一性。此类系统的吸引子理论极具挑战性，近年来已得到发展，并应用于多种方程（例如参见 [1, 2, 7, 14,25] 及其中的参考文献，还有许多其他相关文献）。

在 [18] 所发展的 Conley 指数理论中，隔离块的概念起着基础性作用。隔离块是孤立不变集的一种特殊邻域，其边界在某种意义上具有完全确定的方向，从而刻画稳定子集与不稳定子集。据我们所知，多值情形下尚未给出这样的构造。本文在相当一般的假设下，证明了定义在度量空间上的多值半流存在隔离块。这并非简单的推广，因为多值情形中有许多微妙之处截然不同。随后，我们将这一结果应用于由含不连续非线性项的反应扩散问题所生成的微分包含。

## 2. 基本定义

设 $(X, d)$ 为一个度量空间，并记 $P(X) = \{B \subset X : B \neq \emptyset\}$，而 $C(\mathbb{R}^+, X)$ 是从 $\mathbb{R}^+$ 到 $X$ 的所有连续函数的集合。

考虑一个多值映射 $G : \mathbb{R}^+ \times X \to P(X)$，即一个将每个 $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$ 关联到非空子集 $G(t, x) \subset X$ 的函数。

定义 2.1. 如果 G 满足以下条件, 则称 G 为多值半流:

i) 对所有 $x \in X$, $G(0, x) = x$; ii) 对所有 $x \in X$ 以及 $t, s \geq 0$, $G(t + s, x) \subset G(t, G(s, x))$。

此外, 若对所有 $x \in X$ 以及 $t, s \geq 0$, $G(t + s, x) = G(t, G(s, x))$, 则称该多值半流是严格的。

若函数 $\phi : \mathbb{R} \to X$ 满足 $\phi(0) = x$ 且对所有 $t, s \in \mathbb{R}$ 满足 $t \geq 0$, 有 $\phi(t + s) \in G(t, \phi(s))$, 则称其为经过 $x \in X$ 的 G 的完全轨道。

我们将 $\mathscr{R} \subset C(\mathbb{R}^+, X)$ 定义为满足以下性质的函数集:

(K1) 对任意 $x \in X$, 存在 $\phi \in \mathscr{R}$ 使得 $\phi(0) = x$; (K2) 平移性质: 若 $\phi \in \mathscr{R}$, 则对所有 ~~$\tau \in \mathbb{R}^+$, $\phi_\tau(\cdot) = \phi(\tau + \cdot) \in \mathscr{R}$~~。(K3) 拼接性质: 给定任意 $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{R}$, 若对~~某个 $s \geq 0$ 有 $\phi_1(s) = \phi_2(0)$~~, 则由下式给出的函数 $\phi \in C(\mathbb{R}^+, X)$

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t), \text{ if } t \in [0, s], \\ \phi_2(t - s), \text{ if } t \in (s, +\infty), \end{cases}$$

也属于 $\mathscr{R}$。

(K4) 设 $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{R}$ 是一个序列, 且 $\phi_n(0) \to x \in X$。于是, 我们可以找到 $\phi \in \mathscr{R}$、$\phi(0) = x$, 并且使得 $\phi_n \to \phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致。

来自 $\mathscr{R}$ 的函数生成严格多值半流 $G : \mathbb{R}^+ \times X \to P(X)$, 定义为

$$G(t, x) = \{y \in X : y = \phi(t), \phi \in \mathscr{R}, \phi(0) = x\}.$$

函数 $\phi \in \mathscr{R}$ 称为解。

定义 2.2. 若点 $x \in X$ 是 $\mathscr{R}$ 的不动点, 则 $\phi \in \mathscr{R}$, 其中 $\phi(t) = x$, 对所有 $t \geq 0$ 都成立。函数 $\phi : \mathbb{R} \to X$ 是 $\mathscr{R}$ 的完全轨道, 若对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 都有 $\phi(\tau + \cdot)|_{[0, +\infty)} \in \mathscr{R}$。

注 2.3. $\mathscr{R}$ 的任意完全轨道都是 G 的完全轨道。若该轨道连续, 则反之亦然, 见 [13]。

在多值情形下, 不变性的定义方式有很多种。

定义 2.4. 设集合 $A \subset X$。我们称:

(1) 若对所有 $t \geq 0$, 均有 $G(t, A) = A$, 则称 A 不变; (2) 若对所有 $t \geq 0$, 均有 $G(t, A) \subset A$ ($A \subset G(t, A)$), 则称 A 负不变(正向不变)。(3) 若对所有 $x \in A$, ~~都能找到一个~~ $\mathscr{R}$ 的完全轨道 $\phi$, 使得 $\phi(0) = x$ 且对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有 $\phi(t) \in A$, 则称 A 弱不变。(4) 若对每个 $x \in A$ 和 $t \geq 0$, 均有 $G(t, x) \cap A \neq /0$, 则称 A 弱正不变。(5) 若对所有 $x \in A$, 都能找到一个 $\mathscr{R}$ 的完全轨道 $\phi$, 使得 $\phi(0) = x$ 且对所有 $t \in \mathbb{R}^-$ 均有 $\phi(t) \in A$, 则称 A 弱负向不变。

以下命题的证明见 [6]。

命题 2.5. 假设条件 (K1)-(K4) 得到验证。对于闭子集 A $\subset$ X，以下陈述等价：

i) A 是弱正不变的；ii) 对于每个 x $\in$ A，存在 $\phi \in \mathscr{R}$，使得 $\phi(0) = x$ 且 $\phi([0,+\infty)) \subset A$。

命题 2.6. 假设条件 (K1)-(K4) 得到验证。设 A $\subset$X 是一个负不变的紧集。则对于每个 x $\in$ A，存在一条完全轨道 $\phi$of$\mathscr{R}$，使得 $\phi(0) = x$ 且 $\phi((-\infty,0]) \subset A$。

考虑 B $\subset$ X 和 $\phi \in \mathscr{R}$。我们将 B 的 ω-极限集定义为

$$\omega(B) = \{y \in X : \exists\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+,\ t_n \to +\infty \text{ and } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X,\\ y_n \in G(t_n, B) \text{ and } y_n \to y\}$$

并将 $\phi$ 的 ω-极限集定义为

$$\omega(\phi) = \{y \in X : \exists\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+,\ t_n \to +\infty \text{ and } \phi(t_n) \to y\}.$$

定义 2.7. 闭子集 A $\subset$X 称为孤立弱不变集，如果 A 是弱不变集，并且存在 A 的一个开邻域 U $\subset$ X，使得 A 是 U 中的极大弱不变集。

假设 (K1)-(K4)，并令 K 为一个闭的、孤立的弱不变集。令 $\mathscr{O}$(K) 为 K 的一个开邻域。对于任意 $\phi \in \mathscr{R}, \phi(0) \in \mathscr{O}$(K)，记

$$t_\phi = \sup\{t : \phi([0,t]) \subset \mathscr{O}(K)\}.$$

对于任意 $\phi \in \mathscr{R}$, $\phi(0) = x \in \mathscr{O}$(K) 以及序列 $x_n \to x$，$\phi_n \in \mathscr{R}$, $\phi_n(0) = x_n \in \mathscr{O}$(K)，收敛 $\phi_n \to \phi$意味着

$$\phi_n(s) \to \phi(s) \text{ uniformly on } [0,t] \text{ for } t < t_\phi.$$

对于我们将要进行的工作，需要对 $\mathscr{R}$ 提出一个附加假设：

(K5) 存在一个开邻域 $\mathscr{O}$(K)，使得对于任意 x $\in \mathscr{O}$(K) 和 $\phi \in \mathscr{R}$，满足 $\phi(0) = x$，以及任意序列 $x_n \to x$，都存在一个子序列 $\phi_{n_k} \in \mathscr{R}, \phi_{n_k}(0) = x_{n_k}$，使得 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在 $[0, t_\phi)$ 的紧集上一致。

给定集合 V $\subset$X，分别将集合 ∂V、clV 和 intV 定义为 V 的边界、闭包和内部。更准确地说：

intV $= \{x \in V$: 存在一个开子集 U $\subset$X，使得 x $\in$U $\subset$V$\}$;
clV $= \{y \in X$: 对于所有满足 y $\in$U 的开子集 U $\subset$X，U $\cap$ V $\neq\emptyset\}$, $\partial V = clV \cap cl(X \setminus V)$。

定义 2.8。给定一个闭集孤立不变集 $A \subset X$，我们称闭集 $N \subset X$ 为相关孤立邻域，如果 $A \subset \text{int}(N)$（N 的内部），且 A 是 N 中最大的孤立弱不变集。

定义 2.9。设 $B \subset X$ 为一个闭集，且 $x \in \partial B$ 为一个边界点。我们有以下定义。

(1) 如果对于每个 $\sigma : [-\delta_1, +\infty) \to X$，$\sigma_{\delta_1} := \sigma(-\delta_1 + \cdot) \in \mathscr{R}$，$x = \sigma(0)$，且满足 $\delta_1 \geq 0$，以下条件成立，则称 x 为出流点：存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得对于 $t \in (0, \varepsilon_2]$，有 $\sigma(t) \notin B$；如果 $\delta_1 > 0$，则对于某个 $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$，当 $t \in [-\varepsilon_1, 0$ 时，$\sigma(t) \in B$。B 的出流点集合记为 $B^e$。(2) 如果对于每个 $\sigma : [-\delta_1, +\infty) \to X$，$\sigma_{\delta_1} \in \mathscr{R}$，$x = \sigma(0)$，且满足 $\delta_1 \geq 0$，以下性质成立，则称 x 为入流点：存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得对于 $t \in (0, \varepsilon_2]$，有 $\sigma(t) \in \text{int}(B)$；如果 $\delta_1 > 0$，则对于某个 $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$，当 $t \in [-\varepsilon_1, 0$ 时，$\sigma(t) \notin B$。B 的入流点集合记为 $B^i$。(3) 如果对于每个 $\sigma : [-\delta_1, +\infty) \to X$，$\sigma_{\delta_1} \in \mathscr{R}$，$x = \sigma(0)$，且满足 $\delta_1 \geq 0$，以下性质成立，则称 x 为反弹点：存在 $\varepsilon_2 > 0$ 使得对于 $t \in (0, \varepsilon_2]$，有 $\sigma(t) \notin B$；如果 $\delta_1 > 0$，则对于某个 $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$，当 $t \in [-\varepsilon_1, 0$ 时，$\sigma(t) \notin B$。B 的反弹点集合记为 $B^b$。

我们通常记作 $B^- = B^e \cup B^b$，并称其为 B 的出口集。

定义 2.10. 设 K 是一个闭孤立弱不变集。K 的隔离块是一个闭集 $B \subset X$，它是 K 的一个孤立邻域，且满足 $\partial B = B^- \cup B^i$，并且 $B^-$ 是闭集。

考虑由相应集合 $\mathscr{R}_n$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{R}$ 生成的多值半流 $\{G_n(t) : t \geq 0\}, n \in \mathbb{N}$ 以及 $\{G(t) : t \geq 0\}$。假设 K 是 X 的一个闭集，同时也是半流 G 的一个孤立弱不变集。在这种情况下，我们可以施加以下附加假设：

(KK4) 设 $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个满足 $\phi_n \in \mathscr{R}_n$、$n \in \mathbb{N}$ 且 $\phi_n(0) \to x$ 的序列，其中某个 $x \in X$。则存在 $\phi \in \mathscr{R}, \phi(0) = x$，使得 $\phi_n \to \phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上的一切紧集上一致。(KK5) 存在 K 的一个开邻域 $\mathscr{O}(K)$，使得对于任意 $x \in \mathscr{O}(K)$ 和 $\phi \in \mathscr{R}$（满足 $\phi(0) = x$），以及任意序列 $x_n \to x$，都存在一个子序列 $\phi_{n_k} \in \mathscr{R}_{n_k}, \phi_{n_k}(0) = x_{n_k}$，使得 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在 $[0, t_\phi)$ 的紧集上一致。

注意，如果我们考虑满足 (KK4)（分别为 (KK5)）的 $\mathscr{R}_n \equiv \mathscr{R}, n \in \mathbb{N}$，那么 $\mathscr{R}$ 满足 (K4)（分别为 (K5)）。

定义 2.11. 若闭集 $N \subset X$ 满足以下条件，则称其为 $\{G_n\}$–可容许：给定序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，其中 $t_n \to +\infty$，以及满足 $\phi_n \in \mathscr{R}_n$, $\phi_n(0) = x_n$, $\phi_n([0,t_n]) \subset N$, $n \in \mathbb{N}$ 的 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，则 $\{\phi_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个收敛子列。

若 $N \subset X$ 是 G-容许的，则称其为 $\{G_n\}$–可容许，其中 $G_n = G$，对所有 $n \in \mathbb{N}$。

注 2.12. 如果将分析范围限制在有界隔离邻域 N 内，那么可以用集体渐近紧性替代半流的可容许性假设。事实上，集体渐近紧性强于可容许性。

我们回顾一下，若给定任意序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\phi_n \in \mathscr{R}_n$，满足 $\{\phi_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界且 $t_n \to +\infty$，则 $\{\phi_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子列；此时称 $\{G_n(t) : t \geq 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ 集体渐近紧。

## 3. 多值情形下隔离块的存在性

在多值情形下，可能存在多条解经过同一个点，因此，我们需要对与隔离块存在性相关的结果作出调整，因为这些结果无法直接应用。

本节中，为了构造隔离块，我们将沿用 Rybakowski 在 [18], 中采用的构造方法，并作必要的调整。这意味着，尽管解不具有唯一性，我们仍然能够构造一个闭邻域，使其边界描述进入与离开方向。

设 K 为闭孤立弱不变集，N 为 K 的闭隔离邻域。记 $U = \mathrm{int}(N)$，并定义集合 $\mathscr{U} = \{\phi \in \mathscr{R} : \phi(0) \in U\}$ and $\mathscr{N} = \{\phi \in \mathscr{R} : \phi(0) \in N\}$. 注意到 $\mathscr{U} \subset \mathscr{N}$。

对于由 $\mathscr{R}$ 生成的多值半流 G，我们将 $A_G^+(N)$ 记为点 $y \in N$ 的集合，其中存在一个 $\phi \in \mathscr{R}$，使得 $\phi([0,+\infty)) \subset N$ 且 $\phi(0) = y$。此外，将 $A_G^-(N)$ 记为点 $y \in N$ 的集合，其中存在 $\mathscr{R}$ 的一条完全轨道 $\phi$，使得$\phi((-\infty,0]) \subset N$ 且 $\phi(0) = y$。显然，$K \subset A_G^+(N) \cap A_G^-(N)$。利用 (K3)，可得反向包含也成立，因此 $K = A_G^+(N) \cap A_G^-(N)$。

以下结果类似于 [18] 中的定理 4.5。

命题 3.1. 设 $N \subset X$ 为闭集，且 G、$G_n$ 为多值半流，$n \in \mathbb{N}$。记 $\mathscr{R}_n$ 为与 $G_n$、$n \in \mathbb{N}$ 相关的函数集，记 $\mathscr{R}$ 为与 G 相关且满足性质 (K1)-(K4) 并共同满足 (KK4) 的函数集。

考虑 $x \in X$ 以及 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$，其中 $x_n \to x$，如 $n \to +\infty$。假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能找到 $\phi_n \in \mathscr{R}_n$ 和 $t_n \in \mathbb{R}^+$，使得 $\phi_n(0) = x_n$，且 $\phi_n([0,t_n]) \subset N$。由此可得：

(a1) 若 $t_n \to +\infty$，则可找到 $\{\phi_n\}$ 和 $\phi \in \mathscr{R}$ 的一个子序列，使得 $\phi(0) = x$，$\phi(t) \in N$，对所有 $t \in \mathbb{R}^+$ 均成立，且 $\phi_n \to \phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致。(a2) 若对于某个 $t_0 \in \mathbb{R}^+$，有 $t_n \to t_0$, ，则可找到 $\{\phi_n\}$ 和 $\phi \in \mathscr{R}$ 的一个子序列，使得 $\phi(0) = x$ $\phi([0,t_0]) \subset N$，且 $\phi_n \to \phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致。

假设对于 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列，N 都是 $\{G_{n_m}\}-$ 可容许的。那么，(b1) $\{\phi^{(n)}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个极限点都属于 $A_G^-(N)$。(b2) 记 $K_n$ 为 $G_n$ 在 N 中的最大弱不变集，$n\in\mathbb{N}$。如果 $W\subset N$ 且 $K\subset \mathrm{int}W$，那么当 n 充分大时，$K_n\subset \mathrm{int}W$。(b3) 如果 N 是 G-容许的，则集合 K 和 $A_G^-(N)$ 是紧集。

证明。我们分别证明每个陈述。

(a1) 根据 (KK4)，我们找到一个 $\phi\in\mathscr{R}$，使得 $\phi_n\to\phi$ 在 $\mathbb{R}^+$的紧集上一致。反设存在某个 $T>0$，使得 $\phi(T)\notin N$。那么我们可以找到一个 $\varepsilon>0$，满足 $\mathscr{O}_\varepsilon(\phi(T))\subset X\setminus N$，并且当 $n_0\in\mathbb{N}$充分大时，对于所有 $n\geq n_0$，有 $\phi_n(T)\in\mathscr{O}_\varepsilon(\phi(T))$。因此，对于所有 $n\geq n_0$，有 $t_n<T$。这与 $t_n\to+\infty$ 当 n 趋于 $+\infty$时矛盾。因此，对于所有 $t\in\mathbb{R}^+$，都有 $\phi(t)\in N$。

(a2) 根据 (KK4)，存在一个 $\phi\in\mathscr{R}$，使得 $\phi_n\to\phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致。对于任意 $\varepsilon\in(0,t_0)$，采用上述相同论证并令 $T=t_0-\varepsilon$，可得 $\phi([0,t_0-\varepsilon])\subset N$。由于 N 是闭集，我们得出 $\phi([0,t_0])\subset N$。

(b1) 根据 N 的可容许性，我们找到一个子序列 $\{\phi_n^{(0)}(t_n^{(0)})\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{\phi_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得当 $n\to+\infty$ 时，$\phi_n^{(0)}(t_n^{(0)})\to x$。对于序列 $\{\phi_n^{(0)}(t_n^{(0)}-1)\}_{n\geq n_0}$，其中 $n_0\in\mathbb{N}$ 满足 $t_n^{(0)}\geq 1$，且 $n\geq n_0$，我们可以应用相同的论证。然后，我们提取一个子序列 $\{\phi_n^{(1)}(t_n^{(1)}-1)\}_{n\geq n_0}\subset\{\phi_n^{(0)}(t_n^{(0)}-1)\}_{n\geq n_0}$，使得 $\phi_n^{(1)}(t_n^{(1)}-1)\to y_1\in N$。我们按照引理 5 的证明中从 [6] 开始所用的相同构造，构造函数 $\psi^{(1)}:[-1,+\infty)\to X$，使得$\psi^{(1)}(-1)=y_1$ 且 $\psi^{(1)}(0)=x$，并且 $\psi^{(1)}(\cdot-1)\in\mathscr{R}$ 且 $\psi^{(1)}([-1,0])\subset N$。

递归地应用这一论证，对于 $k\in\mathbb{N}$，我们可以找到一个子序列

$$\left\{\phi_n^{(k+1)}(t_n^{(k+1)}-k-1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\left\{\phi_n^{(k)}(t_n^{(k)}-k-1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

使得 $\phi_n^{(k+1)}(t_n^{(k+1)}-k-1)\to y_{k+1}$，并且我们使用引理 5, [6], 中的构造，在 $y_{k+1}$ 与 $y_k$ 之间构造一个连接，再通过拼接构造出 $\psi^{(k+1)}:[-k-1,+\infty)\to X$，其中 $\psi^{k+1}(\cdot-k-1)\in\mathscr{R}$，且满足$\psi^{(k+1)}([-k-1,0])\subset N$，$\psi^{(k+1)}(-k-1)=y_{k+1}$，并且 $\psi^{(k+1)}(0)=x$。此外，$\psi^{k+1}(t)=\psi^k(t)$，对于 $t\geq -k$。

然后我们可以定义 $\psi:\mathbb{R}\to X$，使得当 $t\geq -k$ 时，$\psi(t)=\psi^{(k)}(t)$。根据构造可知，$\psi$ 定义良好，$\psi(0)=x$，并且对于所有 $t\in(-\infty,0]$，都有 $\psi(t)\in N$。此外，$\psi$是 $\mathscr{R}$的一条完全轨道。因此，我们得出结论：$x\in A^-(N)$，如所需。

(b2) 假设我们无法找到满足这些条件的 $n_0\in\mathbb{N}$。那么，不失一般性，我们可以假设对所有 $n\in\mathbb{N}$，都能找到 $x_n\in K_n\cap N\setminus \mathrm{int}W$。根据 $K_n$ 的定义，存在一条完全轨道 $\phi_n:\mathbb{R}\to X$，它属于 $\mathscr{R}_n$，且满足 $\phi_n(0)=x_n$ 和 $\phi_n(\mathbb{R})\subset N$。考虑序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$，使得 $t_n\to+\infty$。定义 $\psi_n:\mathbb{R}^+\to X$ 为 $\psi_n(t)=\phi_n(t-t_n)$，对所有 $t\geq 0$ 均成立。由构造可知，$\psi_n([0,t_n])\subset N$；并且根据

可容许性，我们得到 $\{\psi_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子列收敛到点 $x_0 \in A_G^-(N)$，由 (b1) 可知。

根据 (KK4)，由于 $x_n = \phi_n(0) \to x_0,$，我们可以假设存在一个 $\phi \in \mathscr{R}$，使得 $\phi(0) = x_0$，且对所有 $t \geq 0$，都有 $\phi_n(t) \to \phi(t)$。现在，由于 $\phi_n$ 收敛到 $\phi$，且 N 是闭集，我们很容易得到，对所有 $t \geq 0$，$\phi(t) \in N$。

因此，$x_0 \in A_G^-(N) \cap A_G^+(N) = K$。但与此同时，$x_n \to x_0, x_0 \in \mathrm{cl}(N \setminus \mathrm{int}W) = N \setminus \mathrm{int}W$，这就产生了矛盾，因为 $K \subset \mathrm{int}W$。因此，当 n 充分大时，$K_n \subset \mathrm{int}W$。

(b3) 现在我们要证明，若 N 是 G-容许的，则 $A_G^-(N)$ 和 K 是紧的。

考虑 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A_G^-(N)$。取一个序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，其中 $t_n \to +\infty$ 随 n 趋于 $+\infty$。根据 $A_G^-(N)$ 的定义，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能找到一条完整轨道 $\psi_n$，它属于 $\mathscr{R}$，且满足 $\psi_n((-\infty, 0]) \subset N$ 和 $\psi_n(0) = x_n$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，记 $\xi_n\colon [0,+\infty) \to X$ 为 $\xi_n(\cdot) = \phi_n\big|_{[0,+\infty)}(\cdot - t_n) \in \mathscr{R}$。于是，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\xi_n(t_n) = x_n$ 且 $\xi_n([0,t_n]) \subset N$。由可容许性，并在特例 $G_n \equiv G$、$n \in \mathbb{N}$ 中将（b1）应用于序列 $\{\xi(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，即可推出 $A_G^-(N)$ 的紧性。

现在假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$。我们可以假设 $x_n \to x \in A_G^-(N)$，因为 $K \subset A_G^-(N)$，且 $A_G^-(N)$ 是紧集。我们的目标是证明可以找到 $\phi \in \mathscr{R}$，使得 $\phi(0) = x$ 且 $\phi(t) \in N$，对所有 $t \geq 0$ 都成立。我们只需注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都可以找到 $\phi_n \in \mathscr{R}$，使得 $\phi_n(0) = x_n$ 且 $\phi_n(\mathbb{R}^+) \subset N$。然后，根据性质 (K4)，我们可以找到 $\phi \in \mathscr{R}$，使得 $\phi(0) = x$ 且 $\phi_n(t) \to \phi(t)$，对所有 $t \geq 0$ 都成立。由于 N 是闭集，因此 $\phi(\mathbb{R}^+) \subset N$，从而 $x \in A_G^+(N)$。因此，$x \in K$，且 K 是紧集。

□

在陈述本节的主定理之前，我们需要定义一些辅助函数，它们在块的定义中起着至关重要的作用。因此，我们固定一个多值半流 G、集合 $\emptyset \neq U \subset N$，其中 $U = \mathrm{int}N$，并将 $A_G^-(N)$ 简记为 $A^-(N)$。回忆一下，$\mathscr{U} = \{\phi \in \mathscr{R}\colon \phi(0) \in U\}$ 且 $\mathscr{N} = \{\phi \in \mathscr{R}\colon \phi(0) \in N\}$.

基本上，我们将构造两个函数：一个用于“识别”邻域 N 内的稳定部分，另一个用于“识别”邻域 N 内的不稳定部分。对于这两个函数，我们将证明其单调性和上半连续性，这些性质对于刻画不变集附近的流行为至关重要。

定义如下函数：

(1) 对于 $^+$，$\mathscr{N} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$^+(\phi) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+\colon \phi \text{ 在 } [0,t] \text{ 上有定义，且 } \phi([0,t]) \subset N\}$,

(2) $^+$: $\mathscr{U} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$t^+(\phi) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+$: 定义在 $[0,t]$ 上，且 $\phi([0,t]) \subset U\}$,

(3) $F : X \to [0,1]$, $F(x) = \min\{1, d(x, A^-$

(N))}, (4) $D : X \to [0,1]$, ~~$D(x) = d(x,K)$~~

$d(x,K)+d(x,X\backslash N)$, (5) $g^+ : U \to \mathbb{R}^+$,

$$g^+(x) = \inf_{\phi \in \mathscr{U}, \phi(0)=x} \inf \left\{ \frac{D(\phi(t))}{1+t} : 0 \le t < t^+(\phi) \right\},$$

(6) $g^- : N \to \mathbb{R}^+$,

$$g^-(x) = \sup_{\phi \in \mathscr{N}, \phi(0)=x} \sup \left\{ \alpha(t) F(\phi(t)) : \begin{matrix} 0 \le t \le s^+(\phi), \text{ if } s^+(\phi) < \infty, \\ 0 \le t < +\infty, \text{ otherwise} \end{matrix} \right\},$$

其中 $\alpha : [0,\infty) \to [1,2)$ 是一个单调递增的 $C^\infty$–微分同胚。

注意，函数 F 和 D 是连续的，因为它们可以写成连续函数的复合。在这种情况下，我们得到以下结果。

命题 3.2. 假设 (K1)-(K4) 成立。当轨道位于 U 内时，函数 $g^+$ 沿解递增。更准确地说，给定 $x, y \in U$，若存在 $\varphi \in \mathscr{R}$ 和 $t > 0$，使得 $\varphi(0) = x$，$y = \varphi(t)$，且 $\varphi([0,t]) \subset U$，则可得 $g^+(x) \le g^+(y)$。

此外，若 $g^+(x) \ne 0$，则 $g^+(x) < g^+(y)$。

证明。考虑 $x,y \in U$，使得存在 $\varphi \in \mathscr{R}$、$t > 0$，满足 $\varphi(0) = x$，$\varphi(t) = y$，且 $\varphi([0,t]) \subset U$。我们要证明 $g^+(x) \le g^+(y)$。

为简化叙述，对任意 $\psi \in \mathscr{U}$，我们定义

$$f^+(\psi) = \inf \left\{ \frac{D(\psi(t))}{1+t} : 0 \le t < t^+(\psi) \right\}$$

以及集合 $\mathscr{U}_z = \{\phi \in \mathscr{U}: \phi(0) = z\}$，其中 $z = x, y$。于是，对每个 $\phi \in \mathscr{U}_y$，我们可以定义一个 $\psi \in \mathscr{U}_x$，它是 $\varphi$ 与 $\phi$ 的拼接；根据 (K3)，该拼接定义良好。这类函数的集合 $\psi$ 记作 $\mathscr{U}_{xy}$。我们将证明 $f^+(\psi) \le f^+(\phi)$。事实上，

$$\begin{aligned} f^+(\psi) &= \inf \left( \left\{ \frac{D(\varphi(s))}{1+s} : s \in [0,t] \right\} \cup \left\{ \frac{D(\phi(s-t))}{1+s} : s \in [t, t^+(\psi)) \right\} \right) \\ &\le \inf \left\{ \frac{D(\phi(s-t))}{1+s} : s \in [t, t^+(\psi)) \right\} = \inf \left\{ \frac{D(\phi(u))}{1+u+t} : u \in [0, t^+(\phi)) \right\} \le f^+(\phi), \end{aligned}$$

根据构造，我们有 $t^+(\psi) = t^+(\phi) + t$。

Thus

$$g^+(x) = \inf_{\phi \in \mathscr{U}_x} f^+(\phi) \le \inf_{\psi \in \mathscr{U}_{xy}} f^+(\psi) \le \inf_{\phi \in \mathscr{U}_y} f^+(\phi) = g^+(y).$$

现在，假设 $g^+(x) \neq 0$。因此，我们找到 $\mu > 0$，使得对于$\phi_t(\cdot) = \phi(t + \cdot)$，$\phi \in \mathscr{U}_x$，有 $f^+(\phi_t) \geq f^+(\phi) \geq \mu$。由于 $f^+(\phi_t) > 0$，存在 $\tau = \tau(\phi) \geq t$，使得 $f^+(\phi_t) = \frac{D(\phi_t(\tau - t))}{1+(\tau-t)}$。

因此，

$$\frac{f^+(\phi_t) - f^+(\phi)}{t} \geq \frac{1}{t}\left(\frac{D(\phi(\tau))}{1+(\tau-t)} - \frac{D(\phi(\tau))}{1+\tau}\right) \geq \frac{D(\phi(\tau))}{(1+\tau)^2} \geq \frac{f^+(\phi)}{1+\tau} \geq \frac{\mu}{1+\tau}.$$

我们断言存在 $\mu_0 > 0$，使得 $\frac{\mu}{1+\tau(\phi)} \geq \mu_0$，对所有 $\phi \in \mathscr{U}_{xy}$ 均成立。若此结论不成立，则可找到一个序列 $\phi^{(n)} \in \mathscr{U}_{xy}$ 和 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [t, +\infty)$，满足 $\tau_n \to +\infty$，并且使得 $f^+(\phi^{(n)}{}_t) = \frac{D(\phi_t^{(n)}(\tau_n - t))}{1+(\tau_n - t)}$。但这样我们就会得到

$$0 < g^+(x) \leq g^+(y) = \inf_{\phi\in\mathscr{U}_{xy}} f^+(\phi_t) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} f^+(\phi_t^{(n)}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{D(\phi_t^{(n)}(\tau_n - t))}{1+\tau_n - t} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\tau_n - t} = 0,$$

这与矛盾相矛盾。因此，我们得到 $\mu_0 > 0$，这意味着 $g^+(x) + \mu_0 t \leq g^+(y)$，进而 $g^+(x) < g^+(y)$，如所需。□

上述命题与单值情形中的 [18, 命题 5.2] 中的第 (2) 项类似。此外，我们将证明 $g^-$ 的单调性。

命题 3.3. 假设 (K1)-(K4) 成立。设闭集 N 是 G-容许的。当轨道停留在 N 上时，函数 $g^-$ 沿解递减。更准确地说，如果 $x、y \in N$，且存在 $\varphi \in \mathscr{R}$和 $s > 0$，满足 $\varphi(0) = x、y = \varphi(s)$，并且 $\varphi([0,s]) \subset N$，那么 $g^-(x) \geq g^-(y)$。

*Moreover, if $g^-(x) \neq 0$, then $g^-(x) > g^-(y)$.*

证明。设 $x、y \in N$，$\varphi \in \mathscr{R}$并且 $s > 0$如假设中所述。对任意 $\phi \in \mathscr{N}$，考虑

$$f^-(\phi) = \sup\left\{\alpha(t)F(\phi(t)) : \begin{matrix} 0 \leq t \leq s^+(\phi), \text{ if } s^+(\phi) < \infty, \\ 0 \leq t < +\infty, \text{ otherwise} \end{matrix}\right\}$$

以及集合 $\mathscr{N}_z = \{\phi \in \mathscr{N} : \phi(0) = z\}$，其中 $z = x、y$；还有集合 $\mathscr{N}_{xy} = \{\phi \in \mathscr{N} : \phi(0) = x$ 且$\phi(s) = y\}$。

对于每个 $\phi \in \mathscr{N}_y$，根据 (K3)，我们可以将 $\psi \in \mathscr{N}_{xy}$ 定义为 $\varphi$ 与$\phi$的拼接。类似于此前对函数 $f^+$所作的处理，可以容易地证明 $f^-(\psi) \geq f^-(\phi)$。因此，

$$g^-(x) = \sup_{\phi\in\mathscr{N}_x} f^-(\phi) \geq \sup_{\psi\in\mathscr{N}_{xy}} f^-(\psi) \geq \sup_{\phi\in\mathscr{N}_y} f^-(\phi) = g^-(y),$$

即，$g^-(x) \geq g^-(y)$。

我们希望证明，如果 $g^-(x)\neq 0$，则有 $g^-(y)<g^-(x)$。根据定义，$g^-(x)=\sup_{\phi\in\mathcal{N}_x} f^-(\phi)$，这意味着至少存在一个 $\phi\in\mathcal{N}_x$，使得 $f^-(\phi)\neq 0$。特别地，对于某个 $\mu>0$，$x=\phi(0)\notin A^-(N)$，且 $F(x)>\mu$。

为了得到所需结果，我们将证明存在 $\delta>0$，使得对于所有$\phi\in\mathcal{N}_x$，都有 $f^-(\phi)>\delta+f^-(\phi_s)$。如果能够证明这一点，我们就可以对两边取上确界，并得到对于 $y=\phi(s)$，

$$g^-(x)\geq \sup_{\phi\in\mathcal{N}_{xy}} f^-(\phi)\geq \sup_{\phi\in\mathcal{N}_{xy}} f^-(\phi_s)+\delta=g^-(y)+\delta,$$

这意味着 $g^-(x)>g^-(y)$。

如果不存在 这样的 $\delta>0$，那么，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都能找到 $\phi^{(n)}\in\mathcal{N}_x$，使得

$$f^-\left(\phi^{(n)}\right)\leq f^-\left(\phi_s^{(n)}\right)+\frac{1}{1+n}.$$

由 (K4)，由于 $\{\phi^{(n)}(0)=x\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，我们可以假设对于所有 $t\geq 0$，都有 $\phi^{(n)}(t)\to\phi(t)$，其中某个 $\phi\in\mathcal{N}_x$。因此，取一个收敛子列后，我们得到

$$0<\mu\leq\beta:=\lim_{n\to+\infty} f^-(\phi^{(n)})\leq\lim_{n\to+\infty} f^-(\phi_s^{(n)}).$$

注意，对每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都可以找到 $t_n$、$r_n,\gamma_n,\eta_n\in\mathbb{R}^+$ 使得

$$\begin{aligned}
f^-(\phi^{(n)})&=\alpha(t_n)F(\phi^{(n)}(t_n))+\gamma_n,\\
f^-(\phi_s^{(n)})&=\alpha(r_n)F(\phi_s^{(n)}(r_n))+\eta_n=\alpha(r_n)F(\phi^{(n)}(r_n+s))+\eta_n
\end{aligned}$$

并且 $\gamma_n,\eta_n\to 0$. 不失一般性，我们可以假设当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，$t_n\to t_0$ 且 $r_n\to r_0$，其中某个 $t_0,r_0\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$。

首先假设当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时 $t_n\to+\infty$。由于 N 是可容许的，且 $\phi^{(n)}([0,t_n])\subset N$，根据命题 3.1，我们可以找到 $y\in A^-(N)$，使得在取一个子序列后，$\phi^{(n)}(t_n)\to y$ 当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时成立。因此，$F(\phi^{(n)}(t_n))\to F(y)=0$，并且由于 $\alpha(t_n)\to\overline{\alpha}\leq 2$，我们得出 $\beta=0$，这就构成了矛盾。

另一方面，假设 $t_n\to t_0<+\infty$。由于 $\beta\neq 0$，我们也有 $r_n\to r_0<+\infty$。由此可得 $\beta=\alpha(t_0)F(\phi(t_0))\leq\alpha(r_0)F(\phi(r_0+s))$。

但现在，对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，根据 $t_n$, $\alpha(r_n+s)F(\phi^{(n)}(r_n+s))\leq\alpha(t_n)F(\phi^{(n)}(t_n))+\gamma_n$ 的定义，取极限后可得

$$\alpha(r_0+s)F(\phi(r_0+s))\leq\alpha(r_0)F(\phi(r_0+s))\implies\alpha(r_0+s)\leq\alpha(r_0),$$

因为 $F(\phi(r_0+s))\neq 0$。这与 $\alpha$ 是严格递增函数相矛盾。因此，我们可以找到 $\delta>0$，如所要求的那样，并且该假设成立。□

上述结果类似于 [18, 命题 5.2] 中单值情形下的第 (3) 项。命题 3.2 和 3.3 已证明，同一轨道上的点所对应的 $g^{\pm}$ 具有单调性。

下面的结果描述了 $g^{+}$ 和 $g^{-}$ 在识别弱不变区域中的作用。

命题 3.4。假设 (K1)-(K4) 成立。设 $K \neq /0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 N 是 K 的一个闭隔离邻域。则有：

i) 考虑 $x \in U$。若 $g^{+}(x) = 0$，则 $x \in A^{+}(N)$。ii) 考虑 $x \in N$。我们有，$g^{-}(x) = 0$ 当且仅当 $x \in A^{-}(N)$。若 $x \in N$ 且 $g^{-}(x) = 0$，则对于所有满足 $\phi \in \mathscr{R}$ 且 $\phi(0) = x$、$t \in [0, s^{+}(\phi)$ 的 $y = \phi(t)$，均有 $g^{-}(y) = 0$。若 $s^{+}(\phi) < +\infty$，则对于 $t = s^{+}(\phi)$，此结论也成立。

证明。考虑 i) 项。若 $g^{+}(x) = 0$，则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到 $\phi_n \in \mathscr{R}$，满足 $\phi_n(0) = x$ 且 $f^{+}(\phi_n) < \frac{1}{1+n}$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到 $t_n \in [0, t^{+}(\phi_n))$，使得

$$\frac{D(\phi_n(t_n))}{1+t_n} < \frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

由 (K4)，不妨假设当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\phi_n \to \phi$ 在紧集上一致地收敛于某个 $\phi \in \mathscr{R}$，且 $\phi(0) = x$，并且 $t_n \to t_0$, 对某个 $t_0 \in \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$成立。特别地，由于 N 是闭集，可得 $\phi([0, t_0)) \subset N$。现在，若 $t_0 = +\infty$，则可得 $x \in A^{+}(N)$。另一方面，若 $t_0 < +\infty$，由 (1) 可知 $D(\phi(t_0) = 0)) 1+t$。这意味着 $\phi(t_0) \in K$。特别地，存在 $\psi \in \mathscr{R}$，使得 $\psi(0) = \phi(t_0)$ 且 $\psi(\mathbb{R}^{+}) \subset N$。考虑 $\eta \in \mathscr{R}$，即 $\phi$ 与 $\psi$ 的拼接；由性质 (K3)，该拼接是良定义的。于是，对所有 $t \geq 0$，均有 $\eta(t) \in N$，因此 $x \in A^{+}(N)$。

对于第 ii) 项，首先假设对于某个 $x \in N$，有 $g^{-}(x) = 0$。因此，对于任意 $\phi \in \mathscr{R}$，若$\phi(0) = x$，则有 $f^{-}(\phi) = 0$。特别地，$F(x) = 0$，这意味着 $x \in A^{-}(N)$。

现在考虑 $x \in A^{-}(N)$ 且 $\phi \in \mathscr{R}$，其中 $\phi(0) = x$。固定 $t \in [0, s^{+}(\phi))$，并令 $y = \phi(t)$。我们要证明 $y \in A^{-}(N)$。事实上，由于 $x \in A^{-}(N)$，存在一条 $\mathscr{R}$ 的完全轨道 $\psi$，使得 $\psi(0) = x$ 且 $\psi((-\infty, 0]) \subset N$。利用 (K2) 和 (K3)，函数 $\psi(t+\cdot)$ 与 $\phi(t+\cdot)$ 的拼接可表示为

$$\varphi(s) = \begin{cases} \psi(s+t) \text{ if } s \leq -t, \\ \phi(s+t) \text{ if } s \geq -t, \end{cases}$$

是 $\mathscr{R}$ 的一条完全轨道，并满足 $\varphi((-\infty, 0]) \subset N$，且 $\varphi(0) = y$。因此，对于任意 $y \in \phi([0, s^{+}(\phi))$，我们有 $y \in A^{-}(N)$ 且 $f^{-}(\phi) = 0$，因为 $t \in [0, s^{+}(\phi))$ 是任意的。因此，根据定义，$g^{-}(x) = 0$。如果 $s^{+}(\phi) < +\infty$，那么对于 $t = s^{+}(\phi)$，这也成立。

第二部分由上述内容可得，因为我们已经证明，假设中的点 $y \in N$ 也属于 $A^{-}(N)$。□

We w希望证明，当我们限制其定义域时，函数 $g^+$、$g^-$ 是连续的 ns.

引理 3.5. 假设 (K1)-(K4) 成立。设 $K \neq /0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 N 是 K 的闭隔离邻域，且 $g^+$ 在 $x \in U = \text{int } N$ 处不是下半连续的。那么存在序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U$，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{R}$,$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ 和 $\phi \in \mathscr{U}_x$，满足 $x_n \to x$ $\phi_n \to \phi$，当 $n \to +\infty$ 时，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\phi_n(0) = x_n$，$t^+(\phi) < t_n < t^+(\phi_n)$，且 $D_{(\phi_n(t_n))}{}_{1+t_n} < g^+(x)$。

证明. 如果 $g^+$ 在 $x \in U$ 处不是下半连续的，则存在 $\mu > 0$ 和 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$g^+(x_n) < \mu < g^+(x)$，且当 $n \to +\infty$ 时 $x_n \to x$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们找到 $\phi_n \in \mathscr{R}$, $\phi_n(0) = x_n$，以及 $t_n \in (0, t^+(\phi_n))$，使得

$$\mu > \frac{D(\phi_n(t_n))}{1+t_n}.$$

现在，根据 (K4)，我们可以假设 $\phi_n \to \phi$，其中 $\phi \in \mathscr{U}_x$。注意，$t^+(\phi) < +\infty$，因为 $f^+(\phi) \geq g^+(x) \neq 0$。按照命题 3.1 的证明，我们有$\{t^+(\phi_n)\}_{n\geq n_0}$ 在 $n_0$ 充分大时有界，这保证了序列 $\{t_n\}_{n\geq n_0}$也是有界的。不失一般性，我们可以假设存在一个 $t_0 \in \mathbb{R}^+$，使得当 $n \to +\infty$ 时，$t_n \to t_0$。

由于 ~~$D(\phi_n(t_n))_{1+t_n} \to$~~ $D(\phi(t_0))_{1+t_0}$，当 $n \to +\infty$ 时~~，可得~~ $D(\phi(t_0))_{1+t_0} \leq \mu$。必然有 $t_0 > t^+(\phi)$，进而当 n 充分大时，$t_n > t^+(\phi)$。

因此，我们只需用适当选取的子序列替换 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，结论便得证。□

现在，我们要证明，如果将这些函数的定义域限制在 K 的一个适当邻域内，$g^+$ 和 $g^-$ 将是连续函数。

命题 3.6。假设 (K1)-(K4) 成立。设 $K \neq /0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 N 是 K 的一个闭 G-容许隔离邻域。以下陈述成立：

1) 假设我们有 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\phi \in \mathscr{R}$，且对于 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上的 s，$\phi_n(s) \to \phi(s)$ 一致地成立。若对于某个 $\mu > 0$，$t^+(\phi) > \mu$，则存在 $n_0 \in \mathscr{N}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq n_0$，都有 $t^+(\phi_n) > \mu$。若对于某个常数 $\tau > 0$，$s^+(\phi) < \tau$，则存在 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq n_1$，都有 $s^+(\phi_n) < \tau$。2) 假设 (K5) 成立，我们可以证明 $g^+$ 在 $U \cap \mathscr{O}$(K) 中上半连续。此外，映射 $g^+$ 在 $\mathscr{O}$(K) $\cap$U 中 K 的某个邻域内连续。3) 映射 $g^-$ 在 N 中上半连续。假设 (K5) 成立，则对于 $U \cap \mathscr{O}$(K) 中 K 的任意邻域 W，只要对任意满足 $\phi(0) \in W$ 的 $\phi \in \mathscr{U}$，有 $t^+(\phi) = s^+(\phi)$，$g^-$ 就连续。

证明。1) 由于 $\mu < t^+(\phi)$，我们有 $\phi([0,\mu]) \subset U$。现在，U 是开集，并且根据 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一致收敛，我们可找到 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\phi_n([0,\mu]) \subset U, \text{ for all } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1.$$

因此，对于所有 $n \geq n_1$，$\mu < t^+(\phi_n)$。严格不等式是因为 $t^+(\phi_n) = +\infty$ 或 $t^+(\phi_n) < +\infty$，并且 $\phi_n(t^+(\phi_n)) \in \partial U$。

对于第二部分，假设存在一个 $\tau > 0$，使得 $s^+(\phi) < \tau$。那么，根据 $s^+(\phi)$ 的定义，我们可以找到 $T \in (s^+(\phi)\ \tau)$，使得 $\phi(T) \in X \setminus N$。集合 $X \setminus N$ 是开集，因为 N 是闭集。因此，存在一个开集 $W \subset X \setminus N$，使得 $\phi(T) \in W$。由于当 $n \to +\infty$ 时，$\phi_n(T) \to \phi(T)$，我们可以找到一个 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq n_1$，$\phi_n(T) \in W$。因此，对于所有 $n \geq n_1$，$s^+(\phi_n) \leq T < \tau$。

2) 设 $x_0 \in \mathscr{O}(K) \cap U$ 且 $\mu > g^+(x_0)$。我们要证明，可以找到 $x_0$ 在 $\mathscr{O}(K) \cap U$ 中的一个邻域 W，使得对每个 $z \in W$，都有 $g^+(z) < \mu$。若此结论不成立，则可找到一个序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{O}(K) \cap U$，使得 $y_n \to x_0$ 且 $g^+(y_n) \geq \mu$。

设 $\phi \in \mathbb{R}$，其中 $\phi(0) = x_0$ 且 $f^+(\phi) < \mu$。利用 (K5)，我们可找到一个子序列 $y_{n_k}$ 和 $\phi_k \in \mathscr{R}$，其中 $\phi_k(0) = y_{n_k}$ 且 $\phi_k \to \phi$。由于 $f^+(\phi) < \mu$，存在 $t_0 \in \mathbb{R}^+$，满足 $t_0 < t^+(\phi)$，使得 $\frac{D(\phi(t_0))}{1+t_0} \leq \mu$。根据第 1) 项，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k \geq k_0$，均有 $t_0 < t^+(\phi_k)$ 且 $\frac{D(\phi_k(t_0))}{1+t_0} < \mu$。因此，对于 $k \geq k_0$，，有

$$\mu \leq g^+(y_{n_k}) \leq f^+(\phi_k) \leq \frac{D(\phi_k(t_0))}{1+t_0} < \mu$$

这就产生了矛盾。因此，$g^+$ 在 $x_0 \in \mathscr{O}(K) \cap U$ 处是上半连续的。

我们还想证明，存在 K 的一个开邻域 W，使得 $W \subset \mathscr{O}(K) \cap U$，并且 $g^+$ 在 W 中下半连续。如果这一事实不成立，我们就可以找到一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{O}(K) \cap U$，使得

$$d(x_n, K) \to 0, \text{ as } n \text{ goes to } +\infty, \tag{2}$$

并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$g^+$ 在 $x_n$ 处都不是下半连续的。根据命题 3.1，集合 K 是紧的，因此我们可以假设，当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个 $x_0 \in K$。

利用引理 3.5，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到：i) 一个序列 $\{x_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{O}(K) \cap U$，其中 $x_n^m \to x_n$，当 m 趋于 $+\infty$ 时；ii) 一个解序列 $\phi_n^m \in \mathscr{R}$，满足 $\phi_n^m(0) = x_n^m$，$m \in \mathbb{N}$，且使得 $\phi_n^m \to \phi_n$，其中某个 $\phi_n \in \mathscr{R}$ 满足 $\phi_n(0) = x_n$；iii) 一个序列 $\{t_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，其中 $t^+(\phi_n) < t_n^m < t^+(\phi_n^m)$，并且 $\frac{D(\phi_n^m(t_n^m))}{1+t_n^m} < g^+(x_n)$。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们记 $y_n = x^{m_{n_n}}$、$t_n = t^{m_{n_n}}$、$\psi_n = \phi^{m_{n_n}}$，其中某个 $m_n \in \mathbb{N}$满足

$$d(y_n, x_n) < 2^{-n},\ d(\psi_n(t^+(\phi_n)), \partial U) < 2^{-n},$$

$t^+(\phi_n) < t_n < t^+(\psi_n)$ 以及

$$\frac{D(\psi_n(t_n))}{1+t_n} < g^+(x_n). \tag{3}$$

这是可能的，因为 $\phi_n(t^+(\phi_n)) \in \partial U$，$n \in \mathbb{N}$，并且当 $m$ 趋于 $+\infty$ 时，$\phi_n^m(t^+(\phi_n)) \to \phi_n(t^+(\phi_n))$。

我们有两种可能性：当 $n \to +\infty$ 时，$t^+(\phi_n) \to +\infty$，或者 $t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。首先，假设当 $n \to +\infty$ 时，$t^+(\phi_n) \to +\infty$。

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $s_n = t^+(\phi_n)$ 2，并且有 $\phi_n(s_n) \in N$，且当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时 $s_n \to +\infty$。由 $N$ 的可容许性和命题 3.1，我们可以假设 $\phi_n(s_n)$ 收敛于某个 $y_0 \in A^-(N)$。另一方面，根据 (K4)，我们可以假设由 $\eta_n(\cdot) = \phi_n(s_n + \cdot)$（$n \in \mathbb{N}$）给出的 $\eta_n \in \mathscr{R}$ 收敛于某个 $\eta \in \mathscr{R}$，其中 $\eta(0) = y_0$。如上所述，由于 $t^+(\eta_n) = s_n \to +\infty$，我们有 $s^+(\eta) = +\infty$，并且 $\eta(\mathbb{R}^+) \subset N$。因此 $y_0 \in A^+(N)$，这意味着 $y_0 \in K$。

由 (3) 及 $g^+$ 的定义可知，对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$D(\psi_n(t_n)) < \frac{(1+t_n)D(\phi(s_n))}{1+s_n}. \tag{4}$$

注意，我们对 $\psi_n$ 的选择意味着，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\psi_n([0, t^+(\phi_n)]) \subset N$；又由于 $N$ 是可容许的，根据命题 3.1，有 $\psi_n(t^+(\phi_n)) \to z_0 \in N$，且 $z_0 \in A^-(N)$。

还有另外两种可能：$\{t_n - t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，或无界。

– 假设 $\{t_n - t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，并且不失一般性地，假设当 $n$ 趋于 $+\infty$时，有 $t_n - t^+(\phi_n) \to \tau_0$，其中 $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$。在这种情况下，

$$\frac{1+t_n}{1+s_n} = \frac{(1+t^+(\phi_n)) + t_n - t^+(\phi_n)}{1 + \frac{t^+(\phi_n)}{2}}$$

对 $n \in \mathbb{N}$一致有界。注意，当 $n \to +\infty$ 时，$D(\phi_n(s_n)) \to D(y_0) = 0$，于是 (4) 推出

$$D(\psi_n(t_n)) \to 0 \text{ as } n \to +\infty. \tag{5}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\varphi_n$：$\mathbb{R}^+ \to X$，由 $\varphi_n(\cdot) = \psi_n(t^+(\phi_n) + \cdot)$ 给出。根据 (K2)，它属于 $\mathscr{R}$。由 (K4)，不妨设 $\varphi_n \to \varphi$在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致，其中某个 $\varphi \in \mathscr{R}$ 满足 $\varphi(0) = z_0$。因此，当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时，$\psi_n(t_n) = \varphi_n(t_n - t^+(\phi_n)) \to \varphi(\tau_0)$。利用 $D$ 的连续性和 (5)，可得 $D(\varphi(\tau_0)) = 0$，因而 $\varphi(\tau_0) \in K$。此外，$\varphi([0, \tau_0]) \subset N$,

由 $\varphi_n([0,t_n - t^+(\phi_n)]) \subset N$ 以及命题 3.1 中的论证可得。利用性质 (K3)，容易看出 $z_0 \in A^+(N)$。因此，$z_0 \in K \cap \partial U = /0$，这就产生了矛盾。– 如果 $\{t_n - t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界，不妨设当 $n \to +\infty$ 时 $t_n - t^+(\phi_n) \to +\infty$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，如上定义 $\varphi_n \in \mathscr{R}$，于是 $\varphi_n([0,t_n - t^+(\phi_n)]) \subset N$。同样，由 (K4)，不妨设 $\varphi_n \to \varphi$在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致，其中某个 $\varphi \in \mathscr{R}$ 满足 $\varphi(0) = z_0$。由命题 3.1 中的论证可得 $\varphi(\mathbb{R}^+) \subset N$。因此，$z_0 \in A^+(N)$，并且由于 $z_0 \in A^-(N) \cap \partial U$，便得到矛盾。

因此，唯一剩下的可能性是序列 $\{t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。因此，不失一般性，我们可以假设 $t^+(\phi_n) \to t_0,$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}^+$。

我们还可以证明 $\{t^+(\psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。事实上，若此结论不成立，根据 (K4)，我们可以假设 $\psi_n \to \psi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧集上一致收敛；对 $\psi \in \mathscr{R}, \psi(0) = x_0$ 且 $s^+(\psi) = +\infty$ 的情形，可参照命题 3.1 中的论证。由于 $x_0 \in K, \psi([0,+\infty)) \subset N$，且 K 是该邻域中的最大弱不变集，我们利用 (K3) 得出 $\psi([0,+\infty)) \subset K$。另一方面，根据 $y_n \in X, n \in \mathbb{N}$ 的选取以及 $\psi_n$ 到 $\psi$ 的一致收敛，我们发现 $\psi(t_0) \in \partial U$。这是一个矛盾。

因此，$\{t^+(\psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也是有界的，并且可以假设它收敛到某个点 $t_1 \in \mathbb{R}^+$。由于 $t^+(\phi_n) < t^+(\psi_n)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $t_0 \le t_1$。因此，$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，且我们可以假设 $t_n \to \tau$，其中某个 $\tau \in [t_0,t_1]$。由 (2) 可得 $g^+(x_n) \to 0$，结合 (3) 可推出 $D(\psi(\tau)) = 0$。

我们将证明 $\psi(t_0) \in A^+(N) \cap A^-(N) = K$，但 $\psi(t_0) \in \partial U$，这就导致矛盾。容易看出，$\psi(t_0) \in A^-(N)$，因为 $\psi(0) = x_0 \in K \subset A^-(N)$，且 $\psi([0,t_0]) \subset N$。此外，$\psi(\tau) \in K \subset A^+(N)$，这意味着我们找到$\psi_1 \in \mathscr{R}$, $\psi_1(0) = \psi(\tau)$，且 $\psi_1(\mathbb{R}^+) \subset K$。因此，由 (K2) 和 (K3)，映射$\xi$: $\mathbb{R}^+ \to X$ 定义为

$$\xi(t) = \begin{cases} \psi(t_0 + t), \text{ if } t \in [0, \tau - t_0] \\ \psi_1(t - \tau + t_0) \text{ if } t \ge \tau - t_0 \end{cases}$$

属于 $\mathscr{R}$, $\xi(0) = \psi(t_0)$，且 $\xi(\mathbb{R}^+) \subset N$。因此，$\psi(t_0) \in A^+(N)$。所以，我们得到一个矛盾。

因此，存在 K 的一个开邻域 W，使得 $W \subset \mathscr{O}(K) \cap U$，并且 $g^+$ 在 W 上的限制也是下半连续的。

3) 反设 $g^-$ 在 N 中不是上半连续的。那么，对于某个 $x_0 \in N$，我们可以找到 $\mu > 0$ 以及一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$，使得 $x_n \to x_0$ 且 $g^-(x_0) < \mu < g^-(x_n)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\phi_n \in \mathscr{N}$, $\phi_n(0) = x_n$，使得 $f^-(\phi_n) > \mu$。我们还可以找到 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，使得 $t_n \in [0, s^+(\phi_n))$ 且 $\alpha(t_n)F(\phi_n(t_n)) > \mu$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。不失一般性，我们可以假设，对于某个 $\phi \in \mathscr{N}$（满足 $\phi(0) = x_0$），当 t 取自 $\mathbb{R}^+$ 的紧子集时，$\phi_n(t) \to \phi(t)$。

存在两种可能：$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，或者 $t_n \to +\infty$。

在第一种情况下，我们可以假设 $t_n$ 收敛到某个 $t_0 \in \mathbb{R}^+$，当 n 趋于 $+\infty$ 时。因此，$\mu \le \alpha(t_0)F(\phi(t_0))$。由假设可知，$\phi(t_0) \notin N$，这不可能发生，因为 N 是闭集，且 $\{\phi_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in N$ 在 $n \to +\infty$ 时收敛到 $\phi(t_0)$。

现在，若我们假设 $t_n \to +\infty$，则 $s^+(\phi) = +\infty$。必要时取一个子序列，由命题 3.1 可知，对于某个 $y \in A^-(N)$，有 $\phi_n(t_n) \to y$。由此可得，当 $n \to +\infty$ 时，$\alpha(t_n)F(\phi_n(t_n)) \to 0$。但这与假设 $\mu < \alpha(t_n)F(\phi_n(t_n))$ 矛盾，该假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

因此，我们证明了 $g^-$ 在 N 中是上半连续的。

现在，我们要证明，对于 $\mathscr{O}(K) \cap U$ 中 K 的任意邻域 W，只要对所有满足 $\phi(0) \in W$ 的 $\phi \in \mathscr{U}$，都有 $t^+(\phi) = s^+(\phi)$，则 $g^-$ 在 W 中下半连续。任取一个满足所需条件的邻域 W。反设存在 $\mu > 0$、$x \in W$ 以及一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in W$，使得当 $n \to +\infty$ 时，$x_n \to x$，并且

$$g^-(x_n) \le \mu < g^-(x). \tag{6}$$

因此，存在 $\phi \in \mathscr{R}$, $\phi(0) = x$，使得 $\mu < f^-(\phi)$。根据 $f^-$ 的定义以及 $t^+(\phi) = s^+(\phi)$，我们可找到 $\tau \in (0, s^+(\phi))$，使得 $\phi([0,\tau]) \subset U$，且 $\alpha(\tau)F(\phi(\tau)) > \mu$。利用 (K5)，不妨假设存在一个序列 $\phi_n \in \mathscr{R}$, $\phi_n(0) = x_n$，使其在 $\mathbb{R}^+$ 的紧子集上一致地 $\phi_n \to \phi$。F 的连续性保证我们可以找到 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n0$，均有 $\phi_n([0,\tau]) \subset U$，并且

$$\alpha(\tau)F(\phi_n(\tau)) > \mu.$$

另一方面，由 (6) 可知

$$\mu < \alpha(\tau)F(\phi_n(\tau)) \le f^-(\phi_n) \le g^-(x_n) \le \mu,$$

这就产生了矛盾。

□

引理 3.7. 假设 (K1)-(K4) 成立。设 $K \neq /0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 N 是 K 的一个闭 G-容许隔离邻域。设存在一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U$，使得 $g^+(x_n) \to 0$ 且 $g^-(x_n) \to 0$，当 $n \to +\infty$ 时成立。那么存在一个子序列 $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $x \in K$，使得 $x_{n_m} \to x$，当 $m \to +\infty$ 时成立。

证明。根据 $g^+$ 的定义，我们可以找到 $\phi_n \in \mathscr{U}_{x_n}$，使得当 $n \to +\infty$ 时，$f^+(\phi_n) \to 0$ .

现在，根据 $g^-$ 的定义，$f^-(\phi_n) \to 0$，因此，当 $n \to +\infty$ 时，$d(x_n, A^-(N)) = F(x_n) \to 0$。由于 $A^-(N)$ 是紧集，根据命题 3.1，我们可以假设 $x_n \to x$，其中某个 $x \in A^-(N)$。

我们有两种可能：$\{t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，或者无界 .

i) 假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $t^+(\phi_n) < M$，且某个 $M > 0$。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $t_n \in [0, t^+(\phi_n)]$，使得

$$f^+(\phi_n) \geq \frac{\inf\{D(\phi_n(t)) : t \in [0, t^+(\phi_n)]\}}{1+M} = \frac{D(\phi_n(t_n))}{1+M}. \tag{7}$$

不失一般性，$t_n \to t_0 < \infty$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}^+$。由 (K4) 和命题 3.1，存在 $\phi \in \mathscr{N}_x$，使得 $\phi([0,t_0]) \subset N$，且 $\phi_n \to \phi$ 在 $\mathbb{R}^+$ 的紧子集上一致。由于根据 (7)，当 $n \to +\infty$ 时，$D(\phi_n(t_n)) \to D(\phi(t_0))$，我们得到 $D(\phi(t_0)) = 0$，且 $\phi(t_0) \in K$。

特别地，可得 $x \in A^+(N)$。因此 $x \in K$。

ii) 如果 $\{t^+(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界。我们可以假设 $t^+(\phi_n) \to +\infty$，并且根据命题 3.1 中的 (a2)，有 $x \in A^+(N)$。因此，$x \in A^-(N) \cap A^+(N) = K$，证毕。

□

引理 3.8. 设 $K \neq /0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 (K1)-(K5) 成立。设 N 是 K 的一个闭 G-容许隔离邻域。考虑 $\varepsilon > 0$ 以及集合

$$H_\varepsilon = \{x \in U \cap \mathscr{O}(K) : g^+(x) < \varepsilon,\ g^-(x) < \varepsilon\}.$$

那么 $H_\varepsilon$ 在 $U \cap \mathscr{O}(K)$ 中是开集。我们可以将 $\varepsilon > 0$ 取得足够小，使得 $clH_\varepsilon \subset U \cap O(K)$，$g^+$ 在 $clH_\varepsilon$ 上连续，并且 $clH_\varepsilon$ 是 K 的一个隔离邻域。

证明. 由于根据命题 3.6，$g^+$ 和 $g^-$ 在 $U \cap \mathscr{O}(K)$ 中均为上半连续，因此对每个 $\varepsilon > 0$，$H_\varepsilon$ 都是开集。注意，$K \subset H_\varepsilon$，因为对所有 $x \in K$，都有 $g^+(x) = g^-(x) = 0$。

考虑 $W \subset U \cap \mathscr{O}(K)$，它是 K 的一个开邻域，且 $g^+$ 在 W 中连续；根据命题 3.6，这样的邻域必然存在。我们要证明存在 $\varepsilon > 0$，使得 $clH_\varepsilon \subset W$。如果这不成立，那么我们就能找到序列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$，其中 $y_n \in clH_{\varepsilon_n} \setminus W$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$都成立，且 $\varepsilon_n \to 0$随着 $n \to +\infty$趋于 0。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，取 $x_n \in H_{\varepsilon_n}$，使得 $d(x_n, y_n) < \varepsilon_n$。由此可知，$g^+(x_n)$ 和 $g^-(x_n)$ 随 $n \to +\infty$趋于 0。根据引理 3.7，我们可以假设 $x_n \to x \in K$，进而 $y_n \to x$。于是得到 $x \in K$，但 $x \notin W$，这与 $K \subset W$ 矛盾。因此，$g^+$ 在 $clH_\varepsilon$中连续。

最后，由于 $K \subset H_\varepsilon \subset N$，$H_\varepsilon$ 的最大弱不变子集包含 K，且必定包含于 N 中，因此它必定是 K。□

定理 3.9. 设 K $\neq/0$ 是一个闭孤立弱不变集。假设 $\mathscr{R}$ 满足 (K1)-(K5)，且存在 K 的一个 G-容许闭隔离邻域 N。那么存在一个隔离块 B，使得 K $\subset$B $\subset$ N。

~ ~证明。取引理 3.8 中给出的数 $\varepsilon>0$，并令 U $=$H$\varepsilon$ 且 N $=$clH$_\varepsilon$ $\subset$U $\cap\mathscr{O}$(K)。

按前述方式定义函数 ~t$^+$、 ~s$^+$ 以及 ~g$^+$、 ~g$^-$，其中用 ~U（相应地，用 ~N）替代 U（相应地，N）。

注意，前面的所有结果都可以应用于上述定义的函数。还~很容易看出，N 是可容许的。

我们要证明，对于每个 $\phi\in\mathscr{R}$，若 $\phi(0)\in$ ~U，则 ~t$^+(\phi)=$ ~s$^+(\phi)$。显然，对于每个 $\phi\in\mathscr{R}$，若 $\phi(0)\in$ ~U，则 ~t$^+(\phi)\leq$~s$^+(\phi)$。反设，存在 x $\in$ ~U 和 $\psi\in\mathscr{R}$，使得 $\psi(0)=$x，且 ~t$^+(\psi)<$ ~s$^+(\psi)$。

我们有 y $=\psi($~t$^+(\psi))\in\partial$ ~U $\subset$U $\cap\mathscr{O}$(K)。因此，要么 g$^+$(y) $\geq\varepsilon$，要么 g$^-$(y) $\geq\varepsilon$。由于 x $\in$ ~U 且 g$^-$(x) $\geq$g$^-$(y)，根据命题 3.3，可知上述最后一种情形不可能发生。因此，必然有 g$^+$(y) $\geq\varepsilon$。现在，由于 y $\in\partial$ ~U，我们找到一个序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in$ ~U，使得当 n $\to+\infty$ 时 $y_n\to$y。因此，g$^+(y_n)<\varepsilon$，于是根据 g$^+$ 在 clH$\varepsilon$ 中的连续性，有 g$^+$(y)$=\varepsilon$。

选择 t $\in$(~t$^+(\psi)$ ~s$^+(\psi)$)，使得 $\phi([0,t])\subset$ ~N。于是，我们有 g$^+(\phi(t))\leq\varepsilon$。另一方面，g$^+$ 沿 U 中轨道的严格不等式性质意味着 g$^+(\phi(t))$ $>$g$^+$(y)$=\varepsilon$，这就产生了矛盾。

因此，对所有 $\phi\in\mathscr{R}$， ~t$^+(\phi)=$ ~s$^+(\phi)$，且 $\phi(0)\in$ ~U。由此，根据命题~3.6，我们得出 ~g$^-$ 在 U 中连续。

对于 $\delta\in(0,\varepsilon)$，定义

$$B=cl\tilde{H}_\delta=cl\{x\in\tilde{U}:\tilde{g}^+(x)<\delta,\ \tilde{g}^-(x)<\delta\}.$$

将引理 3.8 应用于 ~U 和 ~N，我们得到 $\delta<\varepsilon$，使得：

- ~H$_\delta$ 是 U $\cap\mathscr{O}$(K) 中的开集，K $\subset$ ~H$_\delta$，且 cl ~H$_\delta\subset$U $\cap\mathscr{O}$(K)；
- ~g$^+$、 ~g$^-$ 在 cl ~H$_\delta$. 上连续

我们来证明 B $\subset$ H$\varepsilon$。事实上，若 x $\in$B，则存在一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in$ H$_\delta$，满足 $x_n\to$x，其中 n $\to\infty$。因此， ~g$^+(x_n)<\delta$且 ~g$^-(x_n)<\delta$。 ~g$^+$ 和 ~g$^+$ 的连续性意味着 ~g$^+$(x) ~g$^-$(x) $\leq\delta<\varepsilon$。

现在，注意到 $\partial$B $=$b$^-\cup$b$^+\cup$b$^\star$，其中

$$b^-=\{x\in\partial B:\tilde{g}^+(x)=\delta,\ \tilde{g}^-(x)<\delta\},$$
$$b^+=\{x\in\partial B:\tilde{g}^+(x)<\delta,\ \tilde{g}^-(x)=\delta\},$$
$$b^\star=\{x\in\partial B:\tilde{g}^+(x)=\delta,\ \tilde{g}^-(x)=\delta\}.$$

考虑一个点 x $\in\partial$B 和一个函数 $\phi:[-\gamma_1,+\infty)\to$X，使得 $\phi(\cdot-\gamma_1)\in\mathscr{R}$，且 $\phi(0)=$ x，其中 $\gamma_1\geq0$。我们可以选择常数 $\tau_1\geq0$ 和 $\tau_2>0$，使得$\phi([-\tau_1,\tau_2])\subset$ ~U。

• 假设 $x \in b^-$。根据 $b^-$ 的定义以及 $\tilde{g}^+$ 和 $\tilde{g}^-$ 沿轨道的单调性，对于 $t \in (0,\tau_2]$,

$$\tilde{g}^+(\phi(t)) > \tilde{g}^+(x) = \delta \text{ and } \tilde{g}^-(\phi(t)) \leq \tilde{g}^-(x) < \delta.$$

然后 $\phi((0,\tau_2]) \subset X \setminus B$.

另一方面，如果 $\gamma_1 > 0$，那么 $\tau_1$ 也可以取为正值。由于 $\tilde{g}^+$ 连续且 $\phi(\cdot - \tau_1) \in \mathscr{R}$，我们可找到 $\sigma_1 \in (0,\tau_1)$，使得 $\tilde{g}^+(\phi(\sigma_1)) \neq 0$；并且根据 $\tilde{g}^+$的单调性，对于所有 $t \in [-\sigma_1, 0)$，有 $\tilde{g}^+(\phi(t)) < \tilde{g}^+(x) = \delta$。$\tilde{g}^-$ 的连续性保证存在一个 $\tau \in [-\sigma_1, 0)$，使得对于所有 $t \in [\tau, 0)$，均有 $\tilde{g}^-(\phi(t)) < \delta$。

因此，$\phi([\tau, 0)) \subset \text{int}B$.

因此，$b^-$ 中的每个点都是出流点，见定义 2.9。

• 设 $x \in b^+$。根据 $\tilde{g}^-$ 沿 $\tilde{U}$ 中轨道的单调性，对于 $t \in (0,\tau_2]$，我们有

$$\tilde{g}^-(\phi(t)) < \tilde{g}^-(x) = \delta,$$

并且，由于 $\tilde{g}^+(x) < \delta$，根据 $\tilde{g}^+$的连续性，我们可以找到 $\tau \in (0,\tau_2]$ 使得$\tilde{g}^+(\phi(t)) < \delta$ 对于 $t \in (0,\tau]$。因此，$\phi((0,\tau]) \subset \text{int}B$。

此外，如果 $\tau_1 > 0$，根据 $\tilde{g}^-$ 和 $\tilde{g}^+$ 沿轨道的单调性，对于 $t \in [-\tau_1, 0)$，我们有 $\tilde{g}^+(\phi(t)) \leq \tilde{g}^+(x) < \delta$ 以及 $\tilde{g}^-(\phi(t)) > \tilde{g}^-(x) = \delta$。于是 $\phi([-\tau_1, 0)) \subset X \setminus B$。

这意味着 $b^+$ 的每个点都是入流点。

• 假设 $x \in b^\star$。根据 $\tilde{g}^+$ 和 $\tilde{g}^-$ 沿 $\tilde{U}$ 中轨道的单调性，对于所有 $t \in (0,\tau_2]$, $\delta = \tilde{g}^+(x) < \tilde{g}^+(\phi(t))$ 以及 $\delta = \tilde{g}^-(x) > \tilde{g}^-(\phi(t))$。

此外，如果 $\tau_1 \neq 0$, $\delta = \tilde{g}^+(x) \geq \tilde{g}^+(\phi(t))$ and $\delta = \tilde{g}^-(x) < \tilde{g}^-(\phi(t))$，对于所有 $t \in [-\tau_1, 0)$。

因此，对于所有 $t \in [-\tau_1, 0) \cup (0,\tau_2]$，$\phi(t) \in X \setminus B$。

这意味着 $b^\star$ 中的每个点都是反弹点。

因此，B 是一个隔离块，因为 $B^- = b^- \cup b^\star$ 是闭集。 □

定理 3.10。设 $\widetilde{\mathscr{R}} \supset \mathscr{R}$ 为满足 (K1) – (K4) 的函数集，并设 $\tilde{G} \supset G$ 为其关联的多值半流。假设 K 是 G 的一个闭孤立弱不变集，并具有闭隔离的 G-容许邻域 N。此外，设 $\tilde{K}$ $\tilde{}$是 G 的一个闭孤立弱不变集，满足 $K \subset \tilde{K}$，并且 N 同样是 K 的隔离的 G-容许邻域。此外，我们假设 $\mathscr{R}$ 对 $\tilde{K}$ 满足 (K5)。那么存在一个 K 的隔离块 B。

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\overline{\quad\quad}$ $\tilde{}$证明。由于 $\mathscr{R}$ 满足 K 的 (K1)-(K5)，集合 $M = N \cap O(K)$（其中 O(K) 是条件 (K5) 中的邻-$\tilde{}$域）是 K 的一个闭的隔离可容许邻域。因此，$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$根据定理 3.9，K 对 G 有一个隔离块 B。由于任意 $\varphi \in \mathscr{R}$ 都属于 $\mathscr{R}$，B 也是 K 对 G 的一个隔离块。□

## 4. 条件 (K5) 的例子

本节将介绍一个例子和一个反例，它们有助于阐明性质（K5）的相关理念。

### 4.1. 一个不具有唯一性的常微分方程。考虑方程

$$x' = \sqrt{|x|}. \tag{8}$$

相空间为 $\mathbb{R}$。当 $x(0) = x_0 > 0$ 时，唯一解为

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2,$$

而当 $x_0 < 0$ 时，唯一解为

$$x(t) = -\left(-\frac{t}{2} + \sqrt{-x_0}\right)^2.$$

当 $x(0) = 0$ 时，我们有无穷多个解，给定为

$$\overline{x}(t) \equiv 0,$$

$$x_\tau^+(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le \tau, \\ \frac{(t-\tau)^2}{4}, t \ge \tau, \end{cases}$$

$$x_\tau^-(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le \tau, \\ -\frac{(t-\tau)^2}{4}, t \ge \tau, \end{cases}$$

对所有 $\tau \ge 0$。我们注意到，$x_0^+(t)$ 是 $x_0 = 0$ 的最大解，而 $x_0^-(t)$ 是 $x_0 = 0$ 的最小解。另外，

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2 \to x_0(t) = \frac{t^2}{4}, \text{ if } x_0 \to 0^+,$$

$$x(t) = -\left(-\frac{t}{2} + \sqrt{-x_0}\right)^2 \to x_0(t) = -\frac{t^2}{4}, \text{ if } x_0 \to 0^-.$$

因此，当 $x_0 \to 0^+$ 时，唯一解收敛于 0 的最大解；而当 $x_0 \to 0^-$ 时，唯一解收敛于 $x_0 = 0$ 的最小解。

Th因此，在不动点 0 的任何邻域内，条件 (K5) 均不成立 .

4.2. 具有利普希茨非线性的微分包含。设 X 为巴拿赫空间，令 $C_v(X)$ 表示 X 的所有非空、有界、闭、凸子集组成的集合。

考虑以下边值问题

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in f(u) + q, \text{ on } \Omega \times (0,T), \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ on } \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有光滑边界的开有界集，且 $q \in L^2(\Omega)$。我们假设多值映射 f 满足以下条件：

(f 1) $f: \mathbb{R} \to C_v(\mathbb{R})$。(f 2) f 在多值意义下是利普希茨的，即存在 $C \geq 0$ 使得

$$\text{(10)}\qquad dist_H(f(x), f(z)) \leq C|x-z|, \ \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

定义多值映射 $F: D(F) \subset L^2(\Omega) \to P(L^2(\Omega))$，其定义为

$$\text{(11)}\qquad F(y(\cdot)) = \{\xi(\cdot) \in L^2(\Omega) : \xi = \widetilde{\xi} + q, \ \widetilde{\xi}(x) \in f(y(x)) \text{ a.e. on } \Omega\}.$$

已知 [14,引理 11, 12]：

(F1) $F: L^2(\Omega) \to C_v(L^2(\Omega))$；(F3) F 具有与 f 相同的利普希茨常数，即，

$$dist_H(F(u), F(v)) \leq C\|u-v\|_{L^2}, \ \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

算子 $A = -\Delta: H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是极大单调的。因此，包含式（9）可以写成抽象形式

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \in F(u), \ t > 0, \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

如果我们进一步假设存在 $M \geq 0, \varepsilon > 0$ 使得

$$\text{(13)}\qquad zs \leq (\lambda_1 - \varepsilon)|s|^2 + M, \ \forall s \in \mathbb{R}, \forall z \in f(s),$$

其中，$\lambda_1$ 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值，则该问题在 $L^2(\Omega)$ 中生成一个具有全局紧吸引子 $\mathscr{A}$ [14] 的严格多值半流。

让我们验证（12）的解满足性质（K5）。

函数 $u \in C([0,+\infty), L^2(\Omega))$ 是问题 (12) 的强解，如果存在一个选择 $h \in L^2_{loc}(0,+\infty; L^2(\Omega))$，使得 $h(t) \in F(u(t))$ 对几乎处处的 t 成立，且 $u(\cdot)$ 是问题的唯一强解

$$\text{(14)}\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = h(t), \ t > 0, \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

这意味着，u(·) 在 (0, T ) 的任意紧子集上绝对连续，在 (0, T ) 上几乎处处（a.e.）可微，并且 u(·) 在 (0, T ) 上几乎处处满足方程 (14)。将问题 (14) 的解记为 u (·) = I(u$_0$)h(·)。已知 [3] 对于任意 u$_i$(·) = I(u$_0^i$)h$_i$(·)，i = 1, 2，下列不等式成立：

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^2} \le \|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^2} + \int_s^t \|h_1(\tau)-h_2(\tau)\|_{L^2}\, d\tau,\ t \ge s. \tag{15}$$

若固定 T > 0，则已知 [21] 对任意 z(·) = I(z$_0$)g(·) 以及任意 u$_0 \in$ L$^2$(Ω)，都存在问题 (12) 的一个解 u(·) = I(u$_0$)h(·)，使得

$$\|u(t)-z(t)\|_{L^2} \le \xi(t), \forall t \in [0,T], \tag{16}$$

$$\|h(t)-g(t)\| \le \rho(t) + 2C\xi(t), \text{ a.e. on } (0,T), \tag{17}$$

其中

$$\rho(t) = 2dist\,(g(t), F(z(t))),$$

$$\xi(t) = \|u_0 - z_0\|_{L^2}\exp(2Ct) + \int_0^t \exp(2C(t-s))\rho(s)ds.$$

通过拼接解，我们很容易得到一个满足这些不等式的解，且对任意 T > 0 均成立。

引理 4.1. 设 u (·) = I(u$_0$)h (·) 是问题 (12) 的一个解。那么，对任意序列 u$_0^n \to$ u$_0$ in L$^2$ (Ω)，都存在问题 (12) 的一个解序列 u$_n$(·) = I(u$_0^n$)h$_n$(·)，使得对每个 T > 0.，u$_n \to$ u 在 C([0,T ], L$^2$ (Ω)) 中收敛。

证明. 由于对几乎处处的 t，h (t) ∈F(u(t))，因此我们有

$$\rho(t) = 2dist\,(h(t), F(u(t))) = 0 \text{ for a.a. } t,$$

因此，由（16）可知，对于每个 u$_0^n$，都存在问题（12）的解 u$_n$(·) = I(u$_0^n$)h$_n$(·)，使得

$$\|u(t)-u_n(t)\|_{L^2} \le \|u_0-u_0^n\|_{L^2}\exp(2Ct), \forall t \ge 0.$$

于是结论得证。 □

推论4.2. L$^2$(Ω) 中满足性质（K5）。

引理4.3. 设 u(·) = I(u$_0$)h (·) 是问题（12）的一个解，且 u$_0 \in$ H$_0^1$(Ω)。那么，对于 H$_0^1$(Ω) 中的任意序列 u$_0^n \to$ u$_0$，存在问题（12）的一个解序列 u$_n$(·) = I(u$_0^n$)h$_n$(·)，使得对每个 T > 0.，u$_n \to$ u 在 C([0,T ],H$_0^1$(Ω)) 中成立

证明. 由引理4.1可得序列 u$_n$(·) = I(u$_0^n$)h$_n$(·)。由于 u$_0^n \to$ u$_0$ 属于 H$_0^1$(Ω)，我们可以用标准方法证明 u$_n \to$ u 在 C([0,T], H$_0^1$(Ω)). □ 中成立

推论 4.4. 性质（K5）在 H$_0^1$ (Ω) 中成立。

## 5. 应用

考虑微分包含

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H_0(u) + \omega u, \text{ on } (0,\infty)\times\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{18}$$

其中 $\Omega = (0,1)$、$0 \le \omega < \pi^2$，并且

$$H_0(u) = \begin{cases} -1, & \text{if } u < 0, \\ [-1,1], & \text{if } u = 0, \\ 1, & \text{if } u > 0 \end{cases}$$

是 Heaviside函数。当我们有一个带有不连续非线性项的反应扩散方程，并用一条竖线补全函数在不连续点处的像时，就会出现这类微分包含。这类方程出现在具有物理意义的模型中（例如，参见 [9, 17, 19, 20]）。

在本节中，我们将利用第3节的结果，证明问题（18）的不动点（但不包括0）存在隔离块。此外，我们还将证明某类初始条件的唯一性定理。

### 5.1. 前人的结果。我们回顾一下关于问题（18）动力学的已知结果 ).

问题（18）可以写成泛函形式。事实上，我们定义如下适当的凸下半连续函数 $\psi^i$：$L^2(\Omega) \to (-\infty,+\infty]$:

$$\psi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \text{ if } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty, \text{ otherwise,} \end{cases}$$

$$\psi^2(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left(\omega\frac{u^2}{2} + |u|\right) dx, \text{ if } |u(\cdot)| \in L^1(\Omega), \\ +\infty, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

众所周知（例如参见 [3]），这些函数的次微分 $\partial\psi^1$ 和 $\partial\psi^2$ 为

$$\partial\psi^1(u) = \left\{ y \in L^2(\Omega) : y(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x), \text{ a.e. on } \Omega \right\},$$

$$\partial\psi^2(u) = \left\{ y \in L^2(\Omega) :\ y(x) \in H_0(u(x)) + \omega u(x), \text{ a.e. on } \Omega \right\}.$$

因此，问题（18）可以改写为抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \partial\psi^1(u) - \partial\psi^2(u) \ni 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{19}$$

我们观察到 注意， $|u| = \int_0^u H_0(s)\, ds$ 且 $D(\partial\psi^1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$D(\partial\psi^2) = L^2(\Omega$ ).

定义 5.1. 对于 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $T > 0$，函数 $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$ 称为问题（18）在 $[0,T]$ 上的强解，若：

(1) $u(0) = u_0$；(2) $u(\cdot)$ 在 $(0, T)$ 上绝对连续，且对几乎所有 $t \in (0, T)$，$u(t) \in D(\partial\psi^1)$；(3) 存在函数 $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$，使得对 $(0, T)$ 上几乎处处的 t，$g(t) \in \partial\psi^2(u(t))$，并且

$$\frac{du(t)}{dt} - \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} - g(t) = 0, \text{ for a.a. } t \in (0,T), \tag{20}$$

其中等式是在空间 $L^2(\Omega)$ 的意义下理解的。

注 5.2. 或者，等式 (20) 可以写成

$$\frac{du(t)}{dt} - \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} - h(t) = \omega u(t), \text{ for a.a. } t \in (0,T), \tag{21}$$

其中 $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$，且对几乎处处的 $t > 0$、$x \in \Omega$，$h(t, x) \in H_0(u(t, x))$。

由 [22, 定理 4、引理 1 和 2] 可知以下事实。对于每个 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $T > 0$，至少存在一个方程 (18) 的强解 $u(\cdot)$，且每个解都可以延拓到整个半直线 $[0,\infty)$，因此它们都是全局解。此外，任意解 $u(\cdot)$ 都属于空间 $C((0,+\infty), H_0^1(\Omega))$；并且若 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$，则 $u \in C([0,+\infty), H_0^1(\Omega))$。

令 $\mathscr{D}(u_0)$ 为初始条件 $u_0$ 下定义在 $[0,+\infty)$ 上的所有强解构成的集合，并令 $\mathscr{R} = \cup_{u_0 \in L^2(\Omega)} \mathscr{D}(u_0)$。令 $G: \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) \to P(L^2(\Omega))$ 为映射

$$G(t, u_0) = \{u(t) : u \in \mathscr{D}(u_0)\},$$

这是一个严格多值半流。此外，$\mathscr{R}$满足性质（K1）–（K3）。另外，[6, 引理 31]证明了（K4）成立。

关于解的长期渐近行为，G 存在一个全局紧不变吸引子 $\mathscr{A}$ [22, 定理 4]，，该吸引子由所有有界全轨道的并集刻画。此外，对于所有 $\delta > 0$、$p \geq 1$ 以及，$\mathscr{A}$在 $W^{2-\delta, p}(\Omega)$ 中是紧的

$$dist_{W^{2-\delta,p}}(G(t,B), \mathscr{A}) \to 0, \text{ as } t \to +\infty,$$

对于任意有界集 B [1]。因此，$\mathscr{A}$在 $C^1([0,1])$ 中是紧的，并且当 $t \to +\infty$ 时，$dist_{C^1}(G(t, B), \mathscr{A}) \to 0$。此外，[23] 证明了 $\mathscr{A}$是一个连 通集 .

文献 [1]详细研究了吸引子的结构。我们总结主要结果。问题（18）有无穷多个（但可数个）不动点：$v_0 \equiv 0$、$v_1^+$、$v_1^-$、$v_2^+$、$v_2^-$、.....（对于所有 k，$v_k^+(x) = -v_k^-(x)$）。它们满足以下性质：

(1) $v_k^{\pm}$在 $(0, 1)$ 中恰有 $k-1$ 个零点；(2) $v_1^+$、$v_1^-$渐近稳定（因此对于 $u_0 = v_1^{\pm}$，解是唯一的）；

(3) 0、$v_k^{\pm}$、$k \geq 2$均不稳定；

(4) $v_k^{\pm} \to 0$ 当 $k \to \infty$.

我们定义连续函数 $E : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \int_0^1 \left(|u| + \frac{\omega}{2}u^2\right) dx = \psi^1(u) - \psi^2(u). \tag{22}$$

文献 [1] 证明了 E 是一个李雅普诺夫函数，并进一步证明，对于任意 $u \in \mathscr{D}(u_0)$，$u_0 \in L^2(\Omega)$，存在一个不动点 z，使得当 $t \to +\infty$时，$u(t) \to z$。我们注意到，根据解的正则性，$E(u(t)) : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$是连续函数。我们还注意到，若 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$，则 E (u (t)) 在 $[0,+\infty)$上连续。此外，如果$\phi$ 是有界完全轨道，则存在一个不动点 z，使得当 $t \to -\infty$时，$\phi(t) \to z$。因此，全局吸引子由平衡点及其异宿连接构成。文献 [1] 已建立其中一些连接，但确定全部连接的问题仍未解决。不动点按照李雅普诺夫函数 E 的值按如下方式排序：

$$E(v_1) = E\left(v_1^-\right) < E(v_2) = E\left(v_2^-\right) < \ldots < E(v_k) = E\left(v_k^-\right) < \ldots < E(0) = 0.$$

特别是，这意味着当 $k \leq j$ 时，不存在从 $v_k^{\pm}$ 到 $v_j^{\pm}$ 的异宿连接。最后，我们注意到不动点 0 很特殊，因为对于任何其他不动点 $z = v_k^+$（或 $v_k^-$），都存在一个从 0 出发的解 u (·)，使得当 $t \to +\infty$ 时，$u(t) \to z$。结论有两方面：一方面，对于初始条件 $u_0 = 0$，存在无穷多个解；另一方面，对于任何 $z = v_k^+$（或 $v_k^-$），都存在从 0 到 z 的异宿连接。

5.2. 隔离块。为了理解全局吸引子内部的动力学，了解每个不动点邻域内发生的情况很重要。按照 [6, p.32] 中的推理，我们可以证明每个不动点 $v_k^+$（或 $v_k^-$），$k \geq 1$，都是一个孤立弱不变集。点 0 并非孤立，因为 $v_k^{\pm} \to 0$，当 $k \to \infty$. 。应用上一节的结果，我们将得到每个 $v_k^+$（$v_k^-$），$k \geq 1$ 都存在一个隔离块。

不能直接应用定理 3.9，因为 (18) 的解不满足条件 (K5)，如下述引理所示。

引理 5.3. 存在一个序列 $\{u_0^n\}$ 以及一个解 $u(\cdot) \in \mathscr{D}(0)$，使得 $u_0^n \to 0$，并且不存在解的子序列 $\{u^{n_k}(\cdot)\}$，其满足 $u^{n_k}(0) = u_0^{n_k}$，且使得 $u^{n_k} \to u$（按 (K5) 的意义）。

证明。设 $u_0^n \in V^{2r}$，$\frac{3}{4} < r < 1$，其中按惯例，$V^{2r} = D(A^r)$，且 $A, D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 是带狄利克雷边界条件的算子 $-d^2/dx^2$。我们选择 $u_0^n$，使得 $\frac{d}{dx}u_0^n(0) > 0$，$\frac{d}{dx}u_0^n(0) < 0$，且 $u_0^n(x) > 0$ 对于 $x \in (0,1)$ 成立（注意到 $V^{2r} \subset C^1(\overline{\Omega})$），并且

$u_0^n \to 0$。由 [24, 引理 13] 可知，存在唯一解 $u^n(\cdot) \in \mathscr{D}(u_0^n)$，满足对于任意 $x \in (0,1)$ 和 $t \geq 0$，均有 $u^n(t,x) > 0$。此外，当 $t \to +\infty$ 时，它收敛于 $v_1^+$。根据 [1, 定理 6.7]，存在一个解 $v(\cdot)$，使得 $v(0) = 0$，并且当 $t \to +\infty$ 时，$v(t) \to v_1^-$ 在 $C^1(\overline{\Omega})$ 中成立。显然，$u^n(\cdot)$ 的任何子序列都不可能收敛于 $v(\cdot)$，因为对于任意 $t \geq 0$，$u^n(t)$ 都是正的，而当 $t$ 足够大时，$v(t)$ 取负值。□

~因此，我们将应用定理 3.10。为此，我们需要定义一个包含 $G$ 且满足 (K1) – (K5) 的半流 $G_\varepsilon$。

对于任意 $\varepsilon > 0$，我们定义由下式给出的多值函数 $g_\varepsilon$：

$$g_\varepsilon(u) = \begin{cases} -1 \text{ if } u \leq -\varepsilon, \\ [-1, \frac{2}{\varepsilon}u + 1] \text{ if } -\varepsilon \leq u \leq 0, \\ [\frac{2}{\varepsilon}u - 1, 1] \text{ if } 0 \leq u \leq \varepsilon, \\ 1 \text{ if } u \geq \varepsilon. \end{cases}$$

容易看出，映射 $f_\varepsilon(u) = g_\varepsilon(u) + \omega u$ 满足问题（9）的条件 (f 1)-(f 2)。于是，取 $f = f_\varepsilon$ 且 $q = 0$ 的问题（9）对每个 $\varepsilon > 0$ 生成一个严格多值半流 $G_\varepsilon$，它包含问题（18）的半流 $G$（因为问题（18）的每个解显然都是问题（9）的解）。

我们用 $\mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$ 表示定义在 $[0, +\infty)$ 上、初始条件为 $u_0$ 的所有强解构成的集合。令 $\mathscr{R}_\varepsilon = \cup_{u_0 \in L^2(\Omega)} \mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$。由 [14] 中引理6的证明可知，(K1) – (K3) 成立。根据推论4.2，(K5) 得以满足。我们证明 (K4) 也成立。

引理 5.4. 性质 (K4) 得证。

证明. 令 $u_0^n \to u_0$。根据 (16)，对于任意 $u^n(\cdot) \in \mathscr{D}_\varepsilon(u_0^n)$，存在 $u_n(\cdot) \in \mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$，使得

$$\|u^n(t) - u_n(t)\|_{L^2} \leq \|u_0^n - u_0\|_{L^2} \exp(2Ct), \forall t \geq 0. \tag{23}$$

固定 $T > 0$。令 $\pi_T \mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$ 为 $\mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$ 在 $C([0,T], L^2(\Omega))$ 上的限制。由于集合 $\pi_T \mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$ 在 $C([0,T], L^2(\Omega))$ 中是紧的，[14, p.100], 取一个子序列可得 $u_n \to u \in \mathscr{D}_\varepsilon(u_0)$ 在 $C([0,T], L^2(\Omega))$ 中。因此，由 (23) 可得 $u^n \to u$ 在 $C([0,T], L^2(\Omega))$ 中。通过对角线论证，我们推得存在某个子序列，使得对任意 $T > 0$ 都成立，从而证明性质 (K4). □

由 [14] 可知，$G_\varepsilon$ 具有一个全局紧不变吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$。显然，

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\varepsilon_1} \subset \mathscr{A}_{\varepsilon_2} \text{ for all } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2,$$

其中 $\mathscr{A}$是问题（18）的吸引子。此外，由于（K1）–（K4）成立，$\mathscr{A}_\varepsilon$ 可由所有有界全局轨道 [13]的并集刻画：

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \{\phi(0):\ \phi\text{是 } \mathscr{R}_\varepsilon\}.\text{的有界完全轨道}$$

引理 5.5. 若 $\varepsilon_n \to 0^+$、$u_{\varepsilon_n} \in \mathscr{D}_{\varepsilon_n}\left(u_0^n\right)$ 和$u_0^n \to u_0,$，则取一个子序列后，$u_{\varepsilon_n} \to u \in \mathscr{D}(u_0)$在 $[0,+\infty$的有界集上一致收敛。

证明. 固定 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $\varepsilon_n < \varepsilon_0$。由于对所有 n 都有$u_{\varepsilon_n} \in \mathscr{D}_{\varepsilon_0}\left(u_0^n\right)$，由引理 5.4可知，取一个子序列后，$u_{\varepsilon_n} \to u \in \mathscr{D}_{\varepsilon_0}(u_0)$在$[0,+\infty$的有界集上一致收敛。因此，u (·) 是问题 (14) 的一个强解，其中 $h \in L^2_{loc}(0,+\infty; L^2(\Omega))$，且对几乎处处的 t，h (t) $\in F_{\varepsilon_0}(u(t))$，其中 $F_{\varepsilon_0}$ 是 $f_{\varepsilon_0}$对应的映射 (11)。

为了证明 $u \in \mathscr{D}(u_0)$，还需证明对于几乎处处的 (t, x)，h (t, x) $\in H_0(u(t,x)) + \omega u(t,x)$。

等式 (14) 中与 $u_{\varepsilon_n}(\cdot)$ 对应的选取 $h_n(\cdot)$ 在每个区间 [0,T ] 上都由常数 $C_T$ 有界：

$$\|h_n(t)\|_{L^2} \le C_T \text{ for a.a. } t \in (0,T).$$

特别地，这意味着 $h_n$ 在每个区间上都可积有界，并且取一个子序列后，$h_n \to \tilde{h}$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱收敛，其中 $T > 0$ 任意。我们需要验证 $\tilde{h} = h$。令 $v_n(\cdot) = I(u_0) h_n(\cdot)$。那么，由不等式 (15) 可知，对于任意 $T > 0$，$v_n \to u$ 在 $C([0,T], L^2(\Omega))^{\sim}$ 中成立。由 [21] 中的引理 1.3，我们推得 $u(\cdot) = I(u_0) h(\cdot)$，这成立当且仅当 $h = h$。

记 $g(t) = h(t) - \omega u(t)$，且 $g_n(t) = h_n(t) - \omega u_n(t)$。我们需要证明，对几乎处处的 (t, x)，g (t, x) $\in H_0(u(t,x))$。对几乎处处的 (t, x)，存在 N (t, x)，使得当 $n \ge N(t,x)$ 时，$g_n(t,x) \in H_0$ (u (t, x))。事实上，由于对几乎处处的 (t, x)，$u_n(t,x) \to u(t,x)$，我们定义集合 B，使其补集 $B^c$的测度为 0，并且对于 u (t, x) $\in B$，有 $u_n(t,x) \to u(t,x)$。如果 u (t, x) $\in B$ 且 u (t, x) $> 0$( $< 0$)，那么存在 N (t, x)，使得当 $n \ge N(t,x)$ 时，$u_n(t,x) > 0 (< 0)$。因此，$g_n(t,x) \in H_0(u_n(t,x)) = H_0(u(t,x)) = 1(-1)$。如果 u (t, x) $\in B$ 且 u (t, x) $= 0$，那么对所有 n，$g_n(t,x) \in [-1,1] = H_0(u(t,x))$。根据 [21, 命题 1.1]，对几乎处处的 t，存在一个凸组合序列

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j g_{k_j}(t),\ \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j = 1,\ k_j \ge n,$$

使得 $y_n(t) \to g(t)$ 属于 $L^2(\Omega)$。那么，由于 $H_0(u(t,x))$ 是闭集且凸的，对几乎处处的 (t. x). □，g (t, x) $\in H_0(u(t,x))$

推论 5.6. 若 $\{\phi_{\varepsilon_n}\}$ 是 $\mathscr{R}_{\varepsilon_n}$ 和 $\varepsilon_n \to 0^+$ 的有界全局轨道序列，则存在一个子序列 $\{\phi_{\varepsilon_{n_k}}\}$ 和一个 $\mathscr{R}$ 的有界完全轨道 $\phi$，使得

$$\phi_{\varepsilon_{n_k}} \to \phi \text{ in } C([-T,T], L^2(\Omega)) \text{ for all } T > 0. \tag{24}$$

证明. 应用引理 5.5 和对角线论证，我们得到 $\mathscr{R}$ 的一个完全轨道及一个子序列，使得 (24) 成立。由于对于 $\varepsilon_0 > 0$，完全轨道 $\phi$ 属于 $\mathscr{A}_{\varepsilon_0}$，且 $\mathscr{A}_{\varepsilon_0}$ 有界，因此我们得到 $\phi$ 是 $\mathscr{R}$ 的一个有界完全轨道。□

我们将 $O_\delta(v_0) = \{v \in X : \|v - v_0\|_{L^2} < \delta\}$ a $\delta$-邻域记为点 $v_0 \in L^2(\Omega)$ 的邻域。

我们选择 $\delta > 0$，使得 $v_k^+$ 是 $O_\delta(v_k^+)$ 中的极大弱不变集，因此 $O_\delta(v_k^+)$ 是平衡点 $v_k^+$ 的隔离闭邻域，$k \geq 1$（对于 $v_k^-$，证明相同）。对于半流 $G_\varepsilon$，我们按以下方式定义与 $v_k^+$ 相关的弱不变集：

$$K_\varepsilon = \{\phi(0) : \phi(\cdot) \text{ 是 } \mathscr{R}_\varepsilon \text{ 的一条有界完全轨道，满足 } \phi(t) \in \overline{O_\delta(v_k^+)} \text{ 对所有 } t \in \mathbb{R}\}.$$

引理 5.7. 集合 $K_\varepsilon$ 是紧的。

证明。由于 $K_\varepsilon \subset \mathscr{A}_\varepsilon$，它显然是相对紧的。因此，我们只需证明它是闭集。设 $y_n \to y$，其中 $y_n \in K_\varepsilon$。那么，对某个有界完全轨道$\phi_n$，$y_n = \phi_n(0)$。由引理 5.4，并仿照推论 5.6 的论证，我们得到，取一个子序列后$\phi_n \to \phi$，对所有 $T > 0$，都有在 $C([-T, T], L^2(\Omega))$ 中的收敛，其中 $\phi$ 是$\mathscr{R}_\varepsilon$的一个有界完全轨道。显然，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\phi(t) \in \overline{O_\delta(v_k^+)}$。因此，$y \in K_\varepsilon$. □

引理 5.8. 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \leq \varepsilon_0.$，$K_\varepsilon \subset O_{\delta/2}(v_k^+)$

证明。反设结论不成立，则存在 $\mathscr{R}_{\varepsilon_n}$的一列有界全局轨道 $\phi_{\varepsilon_n}$，其中 $\varepsilon_n \to 0^+$，以及时刻 $t_n$，使得 $\phi_{\varepsilon_n}(\mathbb{R}) \subset O_\delta(v_k^+)$，且 $\phi(t_n) \notin O_{\delta/2}(v_k^+)$。利用推论 5.6，以及对于 $\mathscr{R}$，$v_k^+$是 $O_\delta(v_k^+)$ 中唯一有界完全轨道这一事实，我们得出，对所有 $T > 0$，$\phi_{\varepsilon_n} \to v_k^+$在 $C([-T, T], L^2(\Omega))$ 中收敛。设某个子序列收敛到 $+\infty$。于是定义序列 $v^{\varepsilon_n}(\cdot) = \phi_{\varepsilon_n}(\cdot + t_n)$；再次由推论 5.6，它在 $C([-T, T], L^2(\Omega))$ 中收敛到 $\mathscr{R}$ 的一个有界全局轨道 $\phi$，且 $\phi(\mathbb{R}) \subset O_\delta(v_k^+)$，因此 $\phi = \overline{v_k^+}$。但这样一来，$v^{\varepsilon_n}(0) = \phi_{\varepsilon_n}(t_n) \to v_k^+$，这就构成矛盾。但若 $\{t_n\}$ 有界，则用类似的论证也会得到矛盾。□

引理 5.9. 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $K_\varepsilon$ 是 $O_\delta(v_k^+)$ 中的极大弱不变集，且对任意 $\overline{\varepsilon} \leq \varepsilon_0.$，因此，$O_\delta(v_k^+)$ 是 $K_\varepsilon$ 的孤立邻域。

证明。根据引理 5.7 和引理 5.8，$K_\varepsilon$ 是闭集，且 $O_\delta(v_k^+)$ 是 $K_\varepsilon$的一个邻域，使得 $K_\varepsilon \subset \mathrm{int}(O_\delta(v_k^+))$。显然，$K_\varepsilon$ 是 $O_\delta(v_k^+)$. □中的极大弱不变集。

注 5.10。由于半流 G、Gε具有紧全局吸引子，显然任何邻域（特别是 $O_\delta\left(v_k^+\right)$）都是可容许的。

现在我们可以证明隔离块的存在性了。

定理 5.11。平衡点 $v_k^\pm$、$k \geq 1$ 存在一个隔离块。

证明。这是引理 5.9、注 5.10 和定理 3.10 的推论。 □

5.3. 解的唯一性。本节将证明一个关于解唯一性的一般结果，由此可知，在不动点 $v_k^\pm$、$k \geq 1$ 的某个适当邻域内，只要解仍处于其中，解就是唯一的。特别地，从不动点 $v_k^\pm$ 出发的解是唯一的。

函数 $v \in H_0^1(\Omega)$ 是非退化的，如果存在 $C > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$ 使得

$$\mu\{x \in (0,1) : |v(x)| \leq \alpha\} \leq C\alpha \text{ for all } \alpha \in (0,\alpha_0), \tag{25}$$

其中 μ 表示 ℝ中的勒贝格测度。若强解 $u: [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ 满足：存在 $C > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$（与 t 无关），使得

$$\mu\{x \in (0,1) : |u(t,x)| \leq \alpha\} \leq C\alpha \text{ for all } \alpha \in (0,\alpha_0) \text{ and } t \in [0,T]. \tag{26}$$

对于 $z \in \mathbb{R}$，记 $z^+ = \max\{0,z\}$.

引理5.12. 设 $u_1, u_2 \in L^\infty(0,1)$，且 $u_1$或 $u_2$是非退化的。则对于任意满足 $z_i(x) \in H_0(u_i(x))$（对几乎处处的 $x \in (0,1)$，$i = 1,2$）的 $z_1, z_2 \in L^\infty(0,1)$，有

$$\int_0^1 (z_1(x) - z_2(x))(u_1(x) - u_2(x))^+ dx \leq 2D \left\|(u_1 - u_2)^+\right\|_{L^\infty}^2,$$

其中 $D = \max\{C, 1/\alpha_0\}$，而 $C$ $\alpha_0$是 $u_1$在 (25) 中的常数。

证明. 若 $\|u_1 - u_2\|_{L^\infty} \geq \alpha_0$，则

$$\int_0^1 (z_1(x) - z_2(x))(u_1(x) - u_2(x))^+ dx \leq 2\left\|(u_1 - u_2)^+\right\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{\alpha_0}\left\|(u_1 - u_2)^+\right\|_{L^\infty}^2,$$

因此 $\|u_1 - u_2\|_{L^\infty} < \alpha_0$。我们令

$$\begin{aligned} A^i &= \{x \in (0,1) : u_i(x) = 0\}, \\ \Omega_+^i &= \{x \in (0,1) : u_i(x) > 0\}, \\ \Omega_-^i &= \{x \in (0,1) : u_i(x) < 0\}, \\ I &= \{x \in (0,1) : u_1(x) > u_2(x)\}. \end{aligned}$$

因此，对于 $x \in I_2 = ((\Omega_+^1 \cap \Omega_+^2) \cup (\Omega_-^1 \cap \Omega_-^2)) \cap I$，有 $z_1(x) = z_2(x)$。令 $I_1 = I \backslash I_2,$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (z_1(x)-z_2(x))(u_1(x)-u_2(x))^+ dx &= \int_{I_1} (z_1(x)-z_2(x))(u_1(x)-u_2(x))^+ dx \\ &\le 2\left\|(u_1-u_2)^+\right\|_{L^\infty} \mu(I_1).\end{aligned}$$

我们注意到 $I_1 = (A^1 \cup A^2 \cup (\Omega_+^1 \cap \Omega_-^2)) \cap I$。由于

$$0 \le u_1(x) \le u_2(x) + \|u_1-u_2\|_{L^\infty} \le \|u_1-u_2\|_{L^\infty} \text{ for } x \in I_1,$$

若 $u_1$ 是非退化的，则可得

$$\mu(I_1) \le \mu\{x : |u_1(x)| \le \|u_1-u_2\|_{L^\infty}\} \le C\|u_1-u_2\|_{L^\infty}.$$

同理，若 $u_2$ 是非退化的，则

$$\mu(I_1) \le \mu\{x : |u_2(x)| \le \|u_1-u_2\|_{L^\infty}\} \le C\|u_1-u_2\|_{L^\infty}.$$

因此，

$$\int_0^1 (z_1(x)-z_2(x))(u_1(x)-u_2(x))^+ dx \le 2C\|u_1-u_2\|_{L^\infty}^2.$$

令 $D = \max\{C, 1/\alpha_0\}$，结论即得。 □

注5.13. 若将 (0, 1) 替换为任意区间 $(0,\gamma)$，引理5.12仍然成立。

对于 $z_1, z_2 \in H_0^1(\Omega)$，若对所有 $x \in [0,1]$，均有 $z_1(x) \le z_2(x)$，则称 $z_1 \le z_2$。

定理5.14. 设 $u_0 \le v_0, u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$。若 $u, v : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ 是两个强解，且 u 或 v 在 [0,T], 上退化，则对于任意 $t \in [0,T].$，有 $u(t) \le v(t)$

证明. 例如，设 u 非退化。将 (21) 乘以 $(u(t) - v(t))^+$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u-v)^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|(u-v)^+\right\|_{H_0^1}^2 \\ &= \int_0^1 (f_u(t,x)-f_v(t,x))(u(t,x)-v(t,x))^+ dx + \omega\left\|(u-v)^+\right\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

其中 $f_u, f_v \in L^\infty((0,T) \times (0,1))$，且对几乎处处的 (t, x)，$f_u(t,x) \in H_0(u(t,x))$，$f_v(t,x) \in H_0(v(t,x))$。设 $L_\infty > 0$ 满足：对于 $z \in H_0^1(\Omega)$，有 $\|z\|_{L^\infty} \le L_\infty \|z\|_{H_0^1}$。因此，由引理5.12和$\omega < \pi^2$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u-v)^+\right\|_{L^2}^2 \le (K-\beta^2)\|u-v\|_{L^\infty}^2,$$

其中 $\beta = (\underline{\ }^1_{L_\infty})\left(1-\frac{\omega}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$K = 2D > 0$，且 D 是解 u 在（26）中的常数。

如果 $K \le \beta^2$，则结论立即成立。因此，假设 $K > \beta^2$.

我们引入重标度 $y = \gamma x$，其中 $\gamma > 0$。令 $u^\gamma(t, y) := u(t, y/\gamma)$，于是$\left(u^\gamma\right)_{yy}(t\gamma y) := (u)_{xx}(t, y/\gamma)/\gamma^2$。由于

$$u_t(t,\frac{y}{\gamma}) - u_{xx}(t,\frac{y}{\gamma}) = f_u(t,\frac{y}{\gamma}) + \omega u(t,\frac{y}{\gamma}), \text{ for a.a. } t \in (0,T),\ 0 < y < \gamma,$$

我们有

$$\left(u_\gamma\right)_t(t,y) - \gamma^2\left(u_\gamma\right)_{yy}(t,y) = f_{u_\gamma}(t,y) + \omega u_\gamma(t,y), \text{ for a.a. } t \in (0,T), 0 < y < \gamma,$$

其中 $f^{u_\gamma}(t, y) := f_u(t, y/\gamma)$，对于 $v\gamma(t,y) = v(t,y/\gamma)$ 也同样成立。因此，$u\gamma, v\gamma : [0, T] \to H_0^1(0,\gamma)$ 是该问题的强解

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H_0(u) + \omega u, \text{ on } (0,\infty)\times(0,\gamma), \\ u(t,0) = u(t,\gamma) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

下文中，我们将使用以下记号

$$\|v\|_{H^1(I_\gamma)} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2(I_\gamma)} + \left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L^2(I_\gamma)}}.$$

如果 $C\gamma$ 是解 $u\gamma$ 在（26）中的常数，我们需要分析它如何依赖于 $\gamma$。对于 $u$ 的非退化常数 $C$，我们有

$$\mu\{x \in (0,1) : |u(x)| \le \alpha\} \le C\alpha,$$

so

$$\mu\{y \in (0,\gamma) : \left|u_\gamma(y)\right| \le \alpha\} = \int_{|u_\gamma(y)|\le\alpha} 1\, dy = \int_{|u(y/\gamma)|\le\alpha} 1\, dy$$

$$\text{(28)} \qquad = \int_{|u(x)|\le\alpha} \gamma\, dx = \gamma\mu\{x \in (0,1) : |u(x)| \le \alpha\} \le \gamma\alpha C = C_\gamma\alpha,$$

其中 $C_\gamma = \gamma C$。

Let $I_\gamma = [0,\gamma]$。我们将证明存在 $L_\infty$（与 $\gamma \overline{\ge} 1$ 无关），使得 t

$$\text{(29)} \qquad \|w\|_{L^\infty(I_\gamma)} \le \overline{L}_\infty \|w\|_{H^1(I_\gamma)}, \text{ for any } w \in H^1(I_\gamma).$$

根据 [Brezis 定理 VIII.7]，存在一个正常数 $C$，使得

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \ge \overline{C}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \text{ for all } v \in H^1(\mathbb{R}).$$

根据 [Brezis 的第 VIII.5] 定理，存在一个延拓算子 $P\gamma: H^1(I\gamma) \to H^1(\mathbb{R})$，满足

$$\left\|P_\gamma w\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \le 4\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\|w\|_{H^1(I_\gamma)} \text{ for all } w \in H^1(I_\gamma).$$

此外，根据构造可知，$\left\|P_\gamma w\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$。因此，对于 $\gamma \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(I_\gamma)} &\geq \frac{\gamma}{4(1+\gamma)}\left\|P_\gamma w\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{8}\left\|P_\gamma w\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \\ &\geq \frac{\overline{C}}{8}\left\|P_\gamma w\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{\overline{C}}{8}\|w\|_{L^\infty(I_\gamma)},\end{aligned}$$

因此 (29) 在 $L_\infty = \frac{8}{\overline{C}}$下成立

两边乘以 $(u_\gamma(t) - v_\gamma(t))^+$，等式

$$\frac{d}{dt}\left(u_\gamma - v_\gamma\right) - \gamma^2\frac{\partial^2\left(u_\gamma - v_\gamma\right)}{\partial x^2} = f_{u_\gamma}(t) - f_{v_\gamma}(t) + \omega\left(u_\gamma - v_\gamma\right),$$

其中 $f_{u_\gamma}, f_{v_\gamma} \in L^\infty((0,T)\times(0,1))$ 满足 $f_{u_\gamma}(t,x) \in H_0(u_\gamma(t,x))$，$f_{v_\gamma}(t,x) \in H_0(v_\gamma(t,x))$ 对几乎处处的 $(t,x)$ 成立，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} + \gamma^2\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{H_0^1(I_\gamma)} \\ &\leq \int_0^\gamma (f_{u_\gamma}(t,x) - f_{v_\gamma}(t,x))(u_\gamma(t,x) - v_\gamma(t,x))^+ dx + \frac{\omega\gamma^2}{\pi^2}\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{H_0^1(I_\gamma)}.\end{aligned}$$

因此，由注5.13和 (28) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} + \gamma^2\left(1 - \frac{\omega}{\pi^2}\right)\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{H^1(I_\gamma)} \\ &\leq 2D_\gamma\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^\infty(I_\gamma)} + \gamma^2\left(1 - \frac{\omega}{\pi^2}\right)\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)},\end{aligned}$$

其中 $D_\gamma = \max\{C\gamma, 1/\alpha_0\}$，因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} \\ &\leq \gamma^2\left(1 - \frac{\omega}{\pi^2}\right)\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} + \left(2C\gamma - \frac{\gamma^2\left(\pi^2 - \omega\right)}{\overline{L}_\infty^2\pi^2}\right)\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^\infty(I_\gamma)} \\ &\leq \gamma^2\left(1 - \frac{\omega}{\pi^2}\right)\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+\right\|^2_{L^2(I_\gamma)},\end{aligned}$$

对于足够大的 $\gamma$。因此，

$$\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+(t)\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} \leq e^{\delta t}\left\|(u_\gamma - v_\gamma)^+(0)\right\|^2_{L^2(I_\gamma)} = 0,$$

$\delta = 2\gamma^2\left(1 - \frac{\omega}{\pi^2}\right)$。因此，对所有 $t \in [0,T]$，$u_\gamma(t) \leq v_\gamma(t)$，进而 $u(t) \leq v(t)$ for 。 □

推论 5.15. 若 $u, v: [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ 是两个强解，且满足 $u(0) = v(0) = u_0$，并且 $u$ 或 $v$ 在 $[0,T]$, 上退化，则对所有 $t \in [0,T]$，$u(t) = v(t)$。

引理 5.16. $v_k^{\pm}$是不动点且非退化。

证明。首先考虑点 $v_1^+$，并记 $(v_1^+)'(0) = \gamma_0 > 0$。我们选取 $0 < x_0 < \frac{1}{2}$，使得对于任意 $x \in [0, x_0]$，都有 $(v_1^+)'(x) \geq \frac{\gamma_0}{2}$。于是，对于 $0 < \alpha_0 \leq v_1^+(x_0)$，我们有

$$v_1^+(x) \geq \alpha_0 \ \forall x \in [x_0, 1-x_0],$$

$$v_1^+(1-x) = v_1^+(x) = (v_1^+)'(\overline{x})x \geq \frac{\gamma_0}{2}x \ \forall x \in [0, x_0].$$

因此，对于 $0 < \alpha < \alpha_0$，以及满足 $v_1^+(x) \leq \alpha$ 的 $x \in [0, x_0]$，我们得到

$$\frac{\gamma_0}{2}x \leq \alpha,$$

所以由对称性,

$$\mu\{x \in (0,1) : v_1^+(x) \leq \alpha\} \leq \frac{4}{\gamma_0}\alpha.$$

因此，$v_1^+$是非退化的，$v_1^-$.也如此

由对称性，我们很容易推出

$$\mu\{x \in (0,1) : |v_k^+(x)| \leq \alpha\} \leq \frac{4k}{\gamma_0}\alpha,$$

其中 $(v_k^+)'(0) = \gamma_0$且 $x0, \alpha_0$满足 $0 < x^0 < \frac{1}{2k}$，对于任意 $x \in [0, x_0]$,，都有 $(v_k^+)'(x) \geq \frac{\gamma_0}{2}$和 $0 < \alpha_0 \leq v_k^+(x_0)$。

因此，$v_k^{\pm}$是非退化的。 □

由前面的推论以及不动点 $v_k^{\pm}$是非退化的这一事实，我们得到以下结果。

推论 5.17。对于任意不动点 $v_k^{\pm}$，$k \geq 1$，具有初始条件 $u(0) = v_k^{\pm}$的解 $u(\cdot)$ 在 $[0, +\infty)$ 上唯一。

最后，我们将定义点 $v_k^{\pm}$的一个合适邻域，在该邻域内所有解都有唯一确定的定义。我们考虑空间 $X = V^{2r} = D(A^r)$，其中 $\frac{3}{4} < r < 1$。我们知道 $X$ 连续嵌入空间 $C^1([0,1])$。记 $O_\delta(v_0) = \{v \in X : \|v - v_0\|_X < \delta\}$ a $\delta$-邻域为点 $v_0 \in X$ 的邻域。

引理 5.18. 对于任意 $v_k^{\pm}$，存在 $\delta$、$C$ $\alpha_0 > 0$ 使得

$$\mu\{x \in (0,1) : |v(x)| \leq \alpha\} \leq C\alpha \ \forall v \in O_\delta(v_k^{\pm}),\ \alpha \in (0, \alpha_0).$$

注 5.19. 该结果意味着，这些函数在某个邻域 $O\delta(v_k^{\pm})$ 中一致非退化。

证明。我们将分析函数 $v_2^-$。对于其他点，证明过程相当类似。

记 $\gamma_0 = (v_2^-)'(\frac{1}{2}) > 0$。由于 $X \subset C^1([0,1])$，我们可以选取 $\delta > 0, 0 < x_0 < \frac{1}{2}$，使得任意满足 $v \in O\delta_1(v_2^-)$ 的点都满足：

- $v$ 在 (0, 1) 中只有一个零点 $x_v$，且 $x_v \in (\frac{1}{2} - x0, \frac{1}{2} + x_0)$；
- $v'(x) \geq \frac{\gamma_0}{2}$对所有 $x \in [\frac{1}{2} - x0, \frac{1}{2} + x_0]$;
- $v'(x) \leq -\frac{\gamma_0}{2}$对所有 $x \in [0, x_0] \cup [1 - x_0, 1]$;
- $|v(x)| \geq \alpha_0$对所有 $x \in [x0, \frac{1}{2} - x_0] \cup [\frac{1}{2} + x0, 1 - x_0]$,

其中 $\alpha_0 < v_2^-(\frac{1}{2} + x_0)$。因此，

$$v(x) = v'(x_1^v)(x - x_v) \geq \frac{\gamma_0}{2}(x - x_v), \text{ for } x \in [x_v, \frac{1}{2} + x_0],$$
$$v(x) = v'(x_2^v)(x - x_v) \leq \frac{\gamma_0}{2}(x - x_v), \text{ for } x \in [\frac{1}{2} - x_0, x_v],$$
$$v(x) = v'(x_3^v)x \leq -\frac{\gamma_0}{2}x, \text{ for } x \in [0, x_0],$$
$$v(x) = v'(x_4^v)(x - 1) \geq \frac{\gamma_0}{2}(1 - x), \text{ for } x \in [1 - x_0, 1].$$

因此，

$$\mu\{x \in (0,1) : |v(x)| \leq \alpha\} \leq \frac{8}{\gamma_0}\alpha.$$

□

设 $u_0 \in O_\delta(v_k^{\pm})$ 且 $u(\cdot) \in \mathscr{D}(u_0)$。令 $T_{max}$ 为最大时间，使得对于所有 $t \in [0, T_{max})$，$u(t) \in O\delta(v_k^{\pm})$。由引理 5.15、5.18 可推得，$u(\cdot)$ 在 $[0, T_{max})$ 上是唯一解（若 $T_{max} < \infty$，则它在 $[0, T_{max}]$ 上是唯一解）。

注 5.20. 对于定义在 $O_\delta(v_k^{\pm})$ 上的半群，我们可以应用定理 5.1 from[18]，以获得隔离块的存在性。

## 6. 结论

本文提出了一项抽象结果，证明了多值半流的隔离块存在。因此，对于满足 (K1)-(K5) 的多值半流所定义的孤立弱不变集，我们可以找到一个特殊邻域，使其边界在某种意义上具有完全确定的方向。我们认为，我们构造多值半流隔离块的方法是首创的，对微分包含的应用也是如此。

在单值情形中，孤立弱不变集的这类邻域至关重要，并为 Conley 指数的定义提供了灵感。可以证明，隔离块及其边界具有余纤维化性质。事实上，以隔离块对其边界取商所定义的商空间就是 Conley 指数。这一结论对于不一定局部紧的度量空间也成立，见[18, 定理 5.1]。

鉴于隔离块的概念与 Conley 指数密切相关，我们不禁会问，能否为多值半流定义同调指标。这是一个有待进一步研究的课题。值得指出的是，已有一些非常出色且有趣的研究提出了多值情形下 Conley 指数的若干定义，参见例如[16] 和 [8]。一旦我们找到 Conley 指数定义的一个候选方案，便会尝试弄清楚能否基于该定义提出新的内容，以及这一新概念与先前研究中提出的概念有何关系。我们希望将来能够回答这些问题。

## 致谢

本研究是在第一作者访问埃尔切 UMH 的运筹学研究中心（CIO）期间完成的。她谨向 CIO 的工作人员表达谢意，感谢他们的热情接待与友善相待。

## 参考文献

[1] José M. Arrieta、Aníbal Rodríguez-Bernal 和 José Valero。具有不连续非线性项的反应扩散方程的动力学。《国际分岔与混沌应用科学与工程杂志》，16(10):2965–2984，2006。[2] John Ball。广义半流及纳维–斯托克斯方程的连续性性质与全局吸引子。《非线性科学杂志》，7:475–502，1997。[3] Viorel Barbu。巴拿赫空间中的非线性半群与微分方程。罗马尼亚社会主义共和国科学院出版社，布加勒斯特；Noordhoff International Publishing，莱顿，1976。由罗马尼亚语译出。[4] Zbigniew Błaszczyk、Anna Gołebiewska 和 Sławomir Rybicki。Hilbert 空间中的 Conley 指标与广义拓扑度。《微分方程进展》，22(11-12):963–982，2017。[5] Charles Conley。孤立不变集与 Morse 指数，数学区域会议系列第 38 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1978。[6] Henrique B. da Costa 和 José Valero。动力学梯度多值半流的 Morse 分解与 Lyapunov 函数。《非线性动力学》，84:19–34，2016。[7] Sergey Dashkovskyi、Oleksiy Kapustyan 和 Yuriy Perestyuk。脉冲多值半流的一致吸引子的稳定性。《非线性分析：混合系统》，40，2021。[8] Zdzisław Dzedzej 和 Grzegorz Gabor。Hilbert 空间中多值流的同伦 Conley 指标。《非线性分析的拓扑方法》，38(1):187–205，2011。[9] Eduard Feireisl 和 John Norbury。具有不连续非线性项的抛物型方程解的若干存在性、唯一性及非唯一性定理。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，119(1-2):1–17，1991。

[10] K. G.eba、M. Izydorek 和 A. Pruszko。Hilbert 空间中的 Conley 指标及其应用。《数学研究》，134(3):217–233，1999。[11] Marek Izydorek、Thomas O. Rot、Maciej Starostka、Marcin Styborski 和 Robert C. A. M. Van- dervorst。Hilbert 空间中 Conley 指标的同伦不变性与局部Morse同调。《微分方程杂志》，263(11):7162–7186，2017。[12] Axel Jänig。非自治 Conley指标理论：同调指标与吸引子–排斥子分解。《非线性分析的拓扑方法》，53(1):57–77，2019。[13] Oleksiy V. Kapustyan、Pavlo O. Kasyanov 和 José Valero。具有非光滑非线性项的反应扩散方程全局吸引子的结构与正则性。《离散与连续动力系统》，34(10):4155–4182，2014。[14] Valery S. Melnik 和 José Valero。多值半流与微分包含的吸引子。《集值分析》，6:83–111，1998。[15] Konstantin Mischaikow。梯度型双稳态方程的全局渐近动力学。《SIAM 数学分析杂志》，26(5):1199–1224，1995。[16]Marian Mrozek。多值可容许流的 Conley 型上同调指标。《微分方程杂志》，84(1):15–51，1990。[17] Gerald R. North 和 Robert F. Cahalan。可解随机气候模型中的可预测性。《SIAM 数学分析杂志》，《大气科学杂志》:504–513，1982。[18]Krzysztof P. Rybakowski。同伦指标与偏微分方程。Universitext。Springer-Verlag，柏林，1987。[19] David Terman。源于双稳态反应扩散方程的自由边界问题。《SIAM 数学分析杂志》，14(6):1107–1129，1983。[20] David Terman。源于神经传导模型的自由边界。《微分方程杂志》，58(3):345–363，1985。[21] A. A. Tolstonogov。演化包含的解 I。《西伯利亚数学杂志》，33(3):161–174，221，1992。[22] José Valero。无唯一性的抛物型方程的吸引子。《动力学与微分方程杂志》，13(4):711–744，2001。[23] José Valero。关于某些抛物型问题的 Kneser性质。《拓扑学及其应用》，153(5-6):975–989，2005。[24] José Valero。具有不连续非线性项的非自治反应扩散方程吸引子的刻画。《微分方程杂志》，275:270–308，2021。[25]Mikail Z. Zgurovsky、Kasyanov Pavlo O.、Oleksiy V. Kapustyan、José Valero 和 Nina V. Zadoianchuk。地球数据处理中的演化包含与变分不等式 III，第 211 卷。Springer-Verlag，柏林，2012。

圣保罗大学圣卡洛斯校区数学与计算机科学研究所数学系，邮政信箱668，圣卡洛斯，13560-970，巴西。电子邮件地址：estefani@usp.br

埃尔切米格尔·埃尔南德斯大学运筹研究中心，大学大道S/N，03202 埃尔切，西班牙。电子邮件地址：jvalero@umh.es