arXiv:2302.04314v1 [math.AP] 8 Feb 2023

非局部拟线性抛物问题的分岔与双曲性

JOSÉ M. ARRIETA、ALEXANDRE N. CARVALHO、ESTEFANI M. MOREIRA 和 JOSÉ VALERO

摘要。在本文中，我们研究形如 $u_t = a(\|u_x\|^2)u_{xx} + \nu f(u)$ 的一维非局部拟线性问题，其在区间 $[0,\pi]$ 上满足狄利克雷边界条件，其中 $0 < m \le a(s) \le M$ 对所有 $s \in \mathbb{R}^+$ 成立，且 f 满足适当条件。我们全面刻画了相应平衡态的分岔与双曲性。关于分岔，我们将现有结果从函数 $a(\cdot)$单调不减的情形推广到一般光滑非局部扩散函数的情形，并表明分岔可能是叉形分岔或鞍结分岔，也可能是次临界或超临界。我们还全面刻画了双曲性，给出了其存在或不存在的充要条件。我们还探讨了一些例子，以展示随着参数 ν 变化，可能出现的各种情形，这些情形取决于函数 a。

1. 引言

本文致力于研究以下非局部拟线性抛物问题的平稳解

$$\begin{cases} u_t = a(\|u_x\|^2)u_{xx} + \nu f(u), \ x \in (0,\pi), \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \ge 0, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in H_0^1(0,\pi), \end{cases} \tag{1}$$

2020 数学学科分类。35B32, 35K57, 35K58, 35K59, 37B30, 35K55, 37B35。关键词和短语。平衡态的双曲性、吸引子、分岔。JMA 部分获 MICINN（西班牙）的 PID2019-103860GB-I00 和 CEX2019-000904-S 项目资助，后者为“塞韦罗·奥乔亚卓越研发中心计划”。此外还获西班牙 UCM 的“研究组920894——CADEDIF”资助。ANC 部分获 FAPESP 资助（项目编号 2020/14075-6）和 CNPq 资助（项目编号 306213/2019-2）。EMM 获 CAPES、FAPESP 项目 2018/00065-9 和 FAPESP 项目 2020/00104-4 资助。JV 部分获西班牙科学、创新与大学部项目 PGC2018-096540-B-I00、西班牙科学与创新部项目 PID2019- 108654GB-I00、安达卢西亚自治区政府和 FEDER 项目 P18-FR-4509，以及瓦伦西亚自治区政府项目 PROMETEO/2021/063 资助。

其中 $\nu > 0$ 是参数， $a:\ \mathbb{R}^+ \to [m, M] \subset (0,\ +\infty)$ 是连续可微函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$，且

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(u)u < 0,\ \forall\, u \neq 0,\ \text{and}\ \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{f(u)}{u} < 0. \tag{2}$$

这里， $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(0,\ \pi)$中的通常范数。

对于方程 (1) 的平稳解，我们分析平衡态的分岔及其双曲性。在特定情形下，即当 a 为递增函数且 f 为奇函数时， [6, 2] 已开展了这项分析（关于 f 不一定为奇函数时的分岔研究，另见 [1]）。这两个条件大大简化了分岔结构。在这种情况下，分岔仅从零解发生，且全都是超临界叉形分岔，与局部情形 a =const 相同。本文证明了双曲性，并确定了更一般情形下的分岔，其中 a 不一定递增，且 f 不一定为奇函数。我们将看到，在这一一般情形下，除了超临界叉形分岔外，还可能出现亚临界叉形分岔以及鞍结分岔（次临界和超临界）。

与[2]中的证明相比，这里给出的双曲性证明相当简单。尽管如此，分析中的一个重要部分依赖于 [2] 中的分析，以便将拟线性非局部问题 (1) 视为半线性非局部问题。我们简要回顾这一分析，以便加以利用。

考虑以下辅助半线性非局部抛物型问题

$$\begin{cases} w_\tau = w_{xx} + \dfrac{\nu f(w)}{a(\|w_x\|^2)},\ x \in (0,\pi),\ \tau > 0, \\ w(0,\tau) = w(\pi,\tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \\ w(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in H_0^1(0,\pi). \end{cases} \tag{3}$$

按照 [2, 6], (3) 中的方法，可知该问题局部适定，且解关于时间和初始条件联合连续。将时间变量替换为$t = \int_0^\tau a(\|w_x(\cdot,\theta)\|^2)^{-1} d\theta$， 可知 $u(x,t) = w(x,\tau)$ 是方程 (1) 的唯一解。因此，方程 (1) 整体适定。若定义 $S(t): H_0^1(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$ 为 $S(t)u_0 = u(t,u_0)$， $t \geq 0$，其中 $u(\cdot,u_0):\ \mathbb{R}^+ \to H_0^1(0,\pi)$ 是方程 (1) 的解，则$\{S(t):\ t \geq 0\}$ 是一个具有全局吸引子 $\mathcal{A}$ 的半群。若连续函数 $v: \mathbb{R} \mapsto H_0^1(0,\pi)$ 满足对所有 $t \geq 0$ 和所有 $s \in \mathbb{R}$，均有 $v(t+s) = S(t)v(s)$，则称其为半群 $\{S(t):\ t \geq 0\}$ 的全局解。全局吸引子可以通过全局解按如下方式刻画

$$\mathcal{A} = \{v(0) : v : \mathbb{R} \to H_0^1(0,\pi) \text{ is a global bounded solution for } \{S(t) : t \geq 0\}\}.$$

此外，半群 $\{S(t): t \geq 0\}$ 是梯度型的，其李雅普诺夫函数为

$$V(u) = \frac{1}{2}A(\|u_x\|^2) - \nu \int_0^\pi F(u(x))dx, \tag{4}$$

其中 $A(s) = \int_0^s a(\theta)d\theta$ 且 $F(s) = \int_0^s f(\theta)d\theta$。记 $\mathcal{E}$ 为方程 (1) 的平衡态集合，即其解的集合

$$\begin{cases} a(\|\varphi_x\|^2)\varphi_{xx} + \nu f(\varphi) = 0, \ x \in (0,\pi), \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

那么，对于每个 $u \in H_0^1(0,\pi)$，$S(t)u_0 \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}$ 且

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}) = \Big\{ u \in H_0^1(0,\pi): \text{存在一个全局解 } \xi: \ \mathbb{R} \to H_0^1(0,\pi)$$

$$\text{satisfying } \xi(0) = u \text{ and } \inf_{\varphi\in\mathcal{E}} \|\xi(t) - \varphi\|_{H_0^1(0,\pi)} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}.$$

特别地，若 $\mathcal{E}$ 是有限集

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\phi\in\mathcal{E}} W^u(\phi). \tag{6}$$

此外，对于任意 $u_0 \in H_0^1(0,\pi)$，存在一个 $\phi \in \mathcal{E}$，使得 $S(t)u_0 \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \phi$；并且，对于任意有界全局解 $v: \ \mathbb{R} \to H_0^1(0,\pi)$，存在 $\phi_-, \phi_+ \in \mathcal{E}$，使得

$$\phi_- \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_+.$$

我们回顾局部稳定流形与不稳定流形的定义，以及适用于 (1) 的双曲性概念（见 [2]）。

定义 1.1。给定 ϕ 的一个邻域 $\mathcal{V}_\delta(\phi) = \{u \in H_0^1(0,\pi): \|u - \phi\|_{H_0^1(0,\pi)} < \delta\}$，与 $\mathcal{V}_\delta(\phi)$相关联的 ϕ 的局部稳定集与不稳定集定义如下

$$W_{loc}^{s,\delta}(\phi) = \{u \in H_0^1(0,\pi) : S(t)u \in \mathcal{V}_\delta \text{ for all } t \geq 0, \text{ and } S(t)u \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\},$$

$$W^{u}_{,loc}{}^{\delta}(\phi) = \{u \in H_0^1(0,\pi): \text{存在一个 } \{S(t) \ t \geq 0\}\text{的全局解 } v$$

$$\text{with } v(0) = u, \ v(t) \in \mathcal{V}_\delta \text{ for all } t \leq 0 \text{ and } v(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \phi\}.$$

当 ϕ 是其某个邻域内的极大不变集，且 $W^{u}_{,loc}{}^{\delta}(\phi) = \{\phi\}$时，它是渐近稳定的；否则是不稳定的。在这种情况下，所有对任意 $t \geq 0$ ($t \leq 0$) 都始终处于 $\mathcal{V}_\delta(\phi)$ 中的解，必定在正向（反向）时间趋于 ϕ。我们将这一性质称为拓扑双曲性。

定义 1.2 (严格双曲性， [2])。 若平衡态 ϕ 满足：存在 $H_0^1(0,\pi)$ 的闭线性子空间 X_u 和 X_s，使得 $H_0^1(0,\pi) = X_u \oplus X_s$，则称方程 (1) 的该平衡态是**双曲的**，并且

- $\{\phi\}$是拓扑双曲的。
- 局部稳定集与不稳定集可表示为利普希茨映射 $\theta_u{:}X_u \to X_s$ 和 $\theta_s : X_s \to X_u$ 的图，其利普希茨常数为 L_s、 L_u ，且属于 $(0,1)$，并满足 $\theta_u(0) = \theta_s(0) = 0$；此外存在 $\delta_0 > 0$ ，使得对于给定的$0 < \delta < \delta_0$，存在 $0 < \delta'' < \delta' < \delta$ ，使得

$$\begin{aligned}\{\phi+(x_u,\theta_u(x_u)) : x_u \in X_u, \|x_u\|_{H_0^1} < \delta''\} &\subset W_{loc}^{u,\delta'}(\phi)\\ &\subset \{\phi+(x_u,\theta_u(x_u)) : x_u \in X_u, \|x_u\|_{H_0^1} < \delta\},\\ \{\phi+(\theta_s(x_s),x_s) : x_s \in X_s, \|x_s\|_{H_0^1} < \delta''\} &\subset W_{loc}^{s,\delta'}(\phi)\\ &\subset \{\phi+(\theta_s(x_s),x_s) : x_s \in X_s, \|x_s\|_{H_0^1} < \delta\}.\end{aligned}$$

按照 [2], 中的方法，我们将以下述方式证明 (1) 的平衡态具有严格双曲性。首先注意到，(1) 和 (3) 的平衡态相同。接着，我们考虑半线性问题 (3) 在某个平衡态附近的线性化，并证明其双曲性（即证明零不属于线性化自伴非局部算子的谱）。然后，我们利用依赖于解的时间尺度变换，得出 (1) 具有双曲性。

在 [1, 6, 2], 中，作者证明了如下结论：

定理 *1.3.* 假设函数 $a(\cdot)$ 是递增的，且 f 为奇函数。如果$a(0)N^2 < \nu \le a(0)(N+1)^2$, ，那么方程 *(1)* 有 $2N+1$ 个平衡态；$\{0\} \cup \{\phi_j^{\pm} : j = 1、\ldots\ldots、N\}$，其中 ϕ_j^+ 和 ϕ_j^- 在 $[0,\pi]$ 中有 $j+1$ 个零点，并且对所有 $x \in [0,\pi]$， $\phi_j^-(x) = -\phi_j^+(x)$；对所有 $x \in (0, \frac{\pi}{j})$， $\phi_j^+(x) > 0$。上述给出的分岔序列满足：

> 稳定性：如果 $\nu \le a(0)$，则0 是(7) 的唯一平衡态，并且它是稳定的。如果$\nu > a(0)$，则正平衡态 ϕ_1^+ 和负平衡态 ϕ_1^- 是稳定的，而任何其他平衡态都不稳定。双曲性：对于所有 $\nu > 0$，平衡态都是双曲的，但在 $\nu = a(0)$ ~~N^2 ($N \in \mathbb{N}^*$)~~ 的情形下的0 除外。

众所周知（参见 [3]），对于每个 $\nu \in (N^2, \infty)$，问题 (1) 在 $a \equiv 1$ 下恰有两个平衡态 $\phi_{N,\nu}^{\pm}$，它们在 $(0,\pi)$ 内恰好有 $N-1$ 个零点，并且 $(\pm 1)(\phi_{N,\nu}^{\pm})'(0) > 0$。因此，问题 (1) 在 $a \equiv 1$ 下有 $2N+1$ 个平衡态，由 $\{0\} \cup \{\phi_{j,\nu}^+, \phi_{j,\nu}^-$ 给出： $j = 1, \ldots, N\}$，其中

- $\phi_{j,\nu}^{\pm}$ have $j-1$ zeros in $(0,\pi)$, $j = 1, \ldots, n$.

本文的主要结果受到 [3] 的工作的启发，旨在说明非局部扩散为分岔问题带来了许多有趣的新特征。结果表述如下。

定理 1.4. 对每个正整数 j，存在两个连续、严格递减的函数 $c_j^+, c_j^-: \mathbb{R}^+ \to (0, \frac{1}{j^2}]$，满足 $c_j^{\pm}(r) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0:$ —

对于 $\nu > 0$ 和 $r > 0$，*(1)* 存在一个平衡态 ϕ，其在区间 $(0,\pi)$ 内有 $j-1$ 个零点，且满足 $\phi_x(0) > 0$（分别地，$\phi_x(0) < 0$），当且仅当 $\nu c_j^+(r) = a(r)$（分别地，$\nu c_j^-(r) = a(r)$）。此外，该平衡态是双曲的，当且仅当，$a'(r) \neq \nu(c_j^+)'(r)$（分别地，$a'(r) \neq \nu(c_j^-)'(r)$）。

注 1.5。注意，定理 *1.4* 刻画了 (1) 的所有平衡态。此外，只要求函数 $a: \mathbb{R}^+ \to [m, M] \subset (0, +\infty)$ 连续可微，也就是说，$a(\cdot)$ 不一定是递增的。

研究平衡态的存在性只要求 $a(\cdot)$ 连续。对 $a(\cdot)$ 的可微性分析用于研究平衡态附近的行为。

仅假设 f 和 a 连续，且对所有 $s \in \mathbb{R}^+$ 都有 $a(s) \geq m$，并且 $\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = \beta < +\infty$，文献 [1] 已证明，方程 (1) 存在一个解，该解对所有 $t \geq 0$均有定义；对每个 $u_0(\cdot) \in H_0^1(0,\pi)$，方程 (1) 定义了一个多值半流。此外，如果 a 单调不减或有上界，且 f 满足某些增长条件和耗散性条件，作者证明该多值半流存在一个全局吸引子，其特征为平衡态的不稳定集。在一些附加假设下，文献 [1] 还证明，若 $\lambda > a(0)N^2$，则平衡态集合至少有 $2N+1$ 个点；若 a 单调不减且 $a(0)(N+1)^2 \geqslant \lambda > a(0)N^2$，则恰有 $2N+1$ 个点。本文着重研究在假设 a 和 f 光滑的情况下，平衡态的分岔、稳定性和双曲性。

本文关注函数 $a(\cdot)$ 不一定单调递增的情形。注意，式 (1) 中的扩散系数 $a(\|u_x\|^2)$ 取决于解的梯度的 L^2 范数。这意味着，粗略地说，如果函数 $a(\cdot)$ 单调递增，那么梯度较大的状态将具有较大的扩散系数，从某种意义上说，扩散机制在平滑解方面会更加有效，当然也更有利于系统的稳定。因此，至少就正平衡态的稳定性而言，其动力学预期会与扩散不依赖于状态的经典情形相似，参见 [2]。另一方面，如果函数 $a(\cdot)$ 在参数的某个范围内单调递减，系统可能会偏好梯度较大的状态，并可能因此失稳。实际中确实可能出现这种情况，而且正如我们将要看到的，某些情形下

一些不变号的平衡态可能会变得不稳定，见下文定理 4.3。

本文组织如下。第2节中，我们研究带有 $a \equiv 1$的 Chafee-Infante模型 (1) 的解的精细性质。第3节中，我们说明如何从带有 $a \equiv 1$的 (1) 的解中恢复 (1) 的解。第4节中，我们全面刻画关于参数λ 和函数 a 的分岔，并确定平衡态可能失去双曲性的确切位置。最后，在第5节中，我们给出一些示例，展示针对不同函数 a可以识别出的各种行为。

2. Chafee-Infante模型平衡态的性质

考虑问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f(u),\ x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in H_0^1(0,\pi), \end{cases} \tag{7}$$

其中，$\lambda > 0$ 是参数，$f \in C^2(\mathbb{R})$满足 (2)。

该问题称为 Chafee-Infante问题，是一个研究得非常透彻的非线性动力系统。事实上，在关于刻画无限维问题的非平凡吸引子的文献中，可以说它是理解得最透彻的例子。Chafee 和 Infante 开始描述 [4, 3] 中的吸引子，指出该问题仅有有限个平衡态，且这些平衡态随着参数 $\lambda > 0$ 增大而从零处分岔。此外，除 $\lambda = N^2$ 时的零平衡态外，这些平衡态均为双曲的，对于 $N \in \mathbb{N}$。

注 2.1. 耗散性条件(2) 可以放宽（只需做很少改动），允许不等式取等号。为尽可能简化分析，我们选择保留原条件。

定理 *2.2.* 对每个 $\lambda \in (N^2, +\infty)$，$N \in \mathbb{N}$，问题 *(7)* 恰有两个平衡态 $\phi_{N,\lambda}^+$ 和 $\phi_{N,\lambda}^-$，它们在区间 $(0,\pi)$ 中恰好分别有 $N-1$ 次零点，并且满足 $(\phi_{N,\lambda}^+)'(0) > 0$ 以及 $(\phi_{N,\lambda}^-)'(0) < 0$。因此，若 $\lambda \in (N^2, (N+1)^2]$，则 *(7)* 恰有以下 $2N+1$ 个平衡态：$\{0\} \cup \{\phi_{j,\lambda}^+, \phi_{j,\lambda}^- : j = 1, \ldots, N\}$。

对于每个 $1 \leq j \leq N$，由 $L_{j}^{\lambda,\pm} u = u_{xx} + \lambda f'(\phi_j^{\pm},\lambda)u$, $u \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ 定义的线性算子 $L_{j}^{\lambda,\pm} : H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ 是一个具有紧预解式的自伴无界算子。$L_{j}^{\lambda,\pm}$ 的所有特征值都是单特征值，零不是特征值，且恰有 $j-1$ 个正特征值，$j = 1, \ldots, N$。

若 j 是正整数，则 (7) 的平衡态 $\phi_j^{\pm}{}_{,\lambda}$ 的许多性质可通过时间映射的性质证明；我们在此简要回顾这些性质，以供后文使用。

由于，对于 $\lambda \in (j^2, +\infty)$, $\phi_j^{\pm}{}_{,\lambda}$ 是方程 (7) 的解，它们在区间 $(0, \pi)$ 内有 $j-1$ 个零点，且 $i(\phi^i_{j,\lambda})'(0) > 0, i \in \{+,-\}$，因此它们是以下初值问题的解

$$\begin{aligned} &u_{xx} + \lambda f(u) = 0,\ x > 0,\\ &u(0) = 0,\ u'(0) = v_0, \end{aligned} \tag{8}$$

其中，适当选取 $v_0 > 0$，使得 $u(\pi) = 0$。对于给定的 v_0，令 $\lambda E = \frac{v_0^2}{2} \in [0, \min\{F(z^+), F(z^-)\}]$，其中 $F(u) = \int_0^u f(s)ds$, z^+（分别为 z^-）是 f 的正（分别为负）零点，并注意到方程 (8) 的解必须满足

$$\frac{u'(x)^2}{2} + \lambda F(u) = \lambda E.$$

令 $U^+(E) > 0$ 和 $U^-(E) < 0$ 分别定义为 $[0, z^+]$ 和 $[z^-, 0]$ 中的唯一数，且满足 $F(U^{\pm}(E)) = E$。那么，如果

$$\tau_\lambda^i(E) = i\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{U^i(E)} (E - F(u))^{-\frac{1}{2}} du,\ i \in \{+,-\}, \tag{9}$$

当 j 为奇数时，

$$\mathcal{T}_\lambda^+(E) = \frac{j+1}{2}\tau_\lambda^+(E) + \frac{j-1}{2}\tau_\lambda^-(E), \quad \mathcal{T}_\lambda^-(E) = \frac{j+1}{2}\tau_\lambda^-(E) + \frac{j-1}{2}\tau_\lambda^+(E)$$

或者，当 j 为偶数时，

$$\mathcal{T}_\lambda^{\pm}(E) = \frac{j}{2}\tau_\lambda^+(E) + \frac{j}{2}\tau_\lambda^-(E).$$

使我们得到解 $\phi_j^+{}_{,\lambda}$ 的 E 取值为 $\mathcal{T}_\lambda^+(E_{j\lambda}^+) = \pi$。

为完整起见，我们给出一个简单证明，说明 Chafee-Infante 方程 (7) 的平衡态除了平衡态 $\phi_0 \equiv 0$ 之外全都是双曲的（参见 [7, 第 24F 节]），而且仅当 $\lambda = N^2$ 为 N 个正整数时，该平衡态才不是双曲的。这尤其表明，分岔只会从 ϕ_0 发生。

我们只证明 $\phi_{j\lambda}^+{}_{,}$ 的双曲性，另一种情况类似。我们考虑该问题解的族 $u(\cdot, E)$

$$\begin{aligned} &u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0,\\ &u(0,E) = 0,\ u'(0,E) = \sqrt{2\lambda E} \ \text{ and } \ u(\tau_\lambda^+(E)) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

因此，$\eta = (\phi_j^+{}_{,\lambda})_x$ 和 $\psi = \frac{\partial u}{\partial E}(x, E)\big|_{E=E_j^+}$（$\lambda$）是以下方程的解

$$v''(x) + \lambda f'(\phi_{j,\lambda}^+)v(x) = 0 \tag{11}$$

其中 $\eta(0) \neq 0$、$\eta'(0) = 0$ 以及 $\psi(0) = 0$、$\psi'(0) = -\sqrt{\lambda}$ $(\lambda) \neq 0$。这证明了 η 和ψ 线性无关，且方程（11）的任意解都必须具有以下形式

$$\omega = c_1\eta + c_2\psi, \quad \text{for } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

我们来证明，若 $\omega(0) = \omega(\mathcal{T}_\lambda^+ (E_j^+ (\lambda))) = 0$，则必有 $w \equiv 0$。事实上，$\psi(0) = 0$，$\eta(0) \neq 0$，且 $c_1\eta(0)+c_2\psi(0) = 0$，这意味着 $c_1 = 0$。现在，由于对所有 E，$u(\mathcal{T}_\lambda^+ (E)\ E) = 0$，我们有 $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\mathcal{T}_\lambda^+(E)\ E)(\mathcal{T}_\lambda^+(E))'(E) + \frac{\partial u}{\partial E}(\mathcal{T}_\lambda^+(E)\ E)$。显然，$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathcal{T}_\lambda^+(E)\ E) \neq 0$；又因为 $(\mathcal{T}_\lambda^+(E))'(E) \neq 0$（见 [3]），所以 $\psi(\mathcal{T}_\lambda^+(E_j^+(\lambda))) = \frac{\partial u}{\partial E}(\mathcal{T}_\lambda^+(E_j^+(\lambda)\ E_j^+(\lambda)) \neq 0$。因此，我们还有 $c_2 = 0$，而满足 $\omega(0) = \omega(\pi) = 0$ 的方程 (11) 的唯一解 ω 是 $\omega \equiv 0$。这证明了，围绕 ϕ 的线性化的谱中不含 0。

现在我们研究函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^{\pm} \in H_0^1(0, \pi) j = 1, 2, 3\cdots$ 的性质。

定理 *2.3*．对于每个正整数 j，两个函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^+ \in H_0^1(0, \pi)$、$(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^- \in H_0^1(0, \pi)$ 是连续可微的，因此两个函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \|(\phi_{j,\lambda}^{\pm})_x\|^2 \in (0, +\infty)$ 是严格递增的、连续可微的，并且 $\|(\phi_{j,\lambda}^{\pm})_x\|^2 \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$。

证明。考虑 $i \in \{+, -\}$。为证明 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^i \in H_0^1(0, \pi)$ 在点 λ_0 连续可微，我们回顾一下：对于每个 $\lambda \in (j^2, +\infty)$，我们已知 $\phi_{j,\lambda}^i$ 是双曲的。因此，为了得到在 $\lambda = \lambda_0 \in (j^2, +\infty)$ 处的可微性，我们回顾一下，对于接近 λ_0 的 λ，$\phi_{j,\lambda}^i = \phi_{j,\lambda_0}^i + v$，其中 v 是映射的唯一不动点

$$T_{j,\lambda}^i v := -\phi_{j,\lambda_0}^i - (L_j^{\lambda_0,i})^{-1}\left(\lambda f(v + \phi_{j,\lambda_0}^i) - \lambda_0 f'(\phi_{j,\lambda_0}^i)v - \lambda_0 f'(\phi_{j,\lambda_0}^i)\phi_{j,\lambda_0}^i\right)$$

在 $H_0^1(0, \pi)$ 的零点小邻域内。现在，由于 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto T_{j,\lambda}^i \in \mathcal{C}(H_0^1(0, \pi))$ 连续可微，因此 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^i \in H_0^1(0, \pi)$ 连续可微，结论得证。

根据引理 5] 的结果以及下文的分析，可证明 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \|(\phi_{j,\lambda}^i)_x\|^2 \in (0, +\infty)$ 严格递增，且 $\|(\phi_{j,\lambda}^i)_x\|^2 \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$。

文献 [3] 已证明，定义于 (9) 的时间映射 $\tau_\lambda^{\pm}(\cdot)$ 是严格递增函数。此外，对于固定的 E，显然 $\lambda \mapsto \tau_\lambda^{\pm}(E)$ 严格递减。因此，由于 $\mathcal{T}_\lambda^+(E_j^+, \lambda) = \pi$，我们必有 $iU^i(E_j^i(\lambda))$ $i \in \{+, -\}$ 严格递增。

由此可得

$$g(\lambda) := \int_0^{\tau_\lambda^+(E_j^\pm(\lambda))} ((\phi_{j,\lambda}^\pm)_x)^2 dx = \sqrt{2\lambda} \int_0^{U^+(E_j^\pm(\lambda))} \sqrt{E_j^\pm(\lambda) - F(v)} dv$$

and

$$\int_0^{U^+(E_j^\pm(\lambda))} \sqrt{E_j^\pm(\lambda) - F(v)} dv$$

是关于 λ 的严格递增函数。因此， $g(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to +\infty} +\infty$ ，且必有 $\|(\phi_{j,\lambda}^i)_x\|^2 \xrightarrow{\lambda \to +\infty} +\infty$，证明完毕。□

下面给出该定理的另一种简单直接的证明，不使用不动点的可微性结果。首先，我们证明 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_{j,\lambda}^i \in H_0^1(0, \pi)$ 在 $H_0^1(0, \pi)$（或 $C^1(0, \pi)$）上连续。为简化记号，我们用 ϕ_λ 表示 $\phi_{j,\lambda}^i$。

下面证明，若 $\lambda_n \to \lambda_0 \in (j^2, +\infty)$，则必有 $\|\phi_{\lambda_n} - \phi_{\lambda_0}\|_{H_0^1(0,\pi)} \to 0$。因为

$$(\phi_\lambda)_{xx}(r) + \lambda f(\phi_\lambda) = 0 \tag{12}$$

根据（2）中的耗散性条件，我们有存在常数 $M > 0$ ，使得

$$\int_0^\pi ((\phi_\lambda)_x)^2 dx = \lambda \int_0^\pi f(\phi_\lambda)\phi_\lambda dx \le \lambda M.$$

因此，族 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 在 $(j^2, +\infty)$ 的有界子集上有界。由于 $H_0^1(0, \pi) \hookrightarrow C([0,\pi])$，它在 $C([0,\pi])$ 中的有界子集上也一致有界，并且这种有界性关于 $(j^2, +\infty)$ 的有界子集是一致的。由 f 的连续性可知，对于 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto f \circ \phi_\lambda \in C([0,\pi])$，同样的结论成立；再利用（12），对于 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto (\phi_\lambda)_{xx} \in C([0,\pi])$，该结论也成立。

由 $H^2(0, \pi)$ 到 $H_0^1(0, \pi)$ 的紧嵌入可知， $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个子序列 $\{\lambda_{n_k}\}$，使得 $\phi_{\lambda_{n_k}} \xrightarrow{k \to +\infty} w$ 在 $H_0^1(0, \pi)$ 中。现在，由于

$$\int_0^\pi (\phi_{\lambda_{n_k}})_x v_x dx = \lambda_n \int_0^\pi f(\phi_{\lambda_{n_k}}) v dx,$$

对所有 $v \in H_0^1(0,\pi)$，令 $k \to +\infty$ 趋于极限，我们得到

$$\int_0^\pi w_x v_x dx = \lambda_0 \int_0^\pi f(w) v dx,$$

且 w 是（12）的弱解。因此，由于 w 也在 $C^1(0, \pi)$ 范数下收敛， $w \equiv 0$ 或 $w = \phi_{\lambda_0}$。为证明 $w \neq 0$，我们回顾一下，$(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \int_0^\pi ((\phi_\lambda)_x)^2$是关于 λ 的严格递增函数。这表明函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 的连续性。

现在我们来证明 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 或 $C_0^1(0, \pi)$ 连续可微。取定 $\lambda \in (j^2, +\infty)$，并考虑满足以下条件的 $\delta > 0$：对所有 $h \in (-\delta, \delta)$，均有 $\lambda + h \in (j^2, +\infty)$。记 $w(h) = \frac{\phi_{\lambda+h} - \phi_\lambda}{h}$。

Now

$$w(h)_{xx} + f(\phi_{\lambda+h}) + \lambda\left(\frac{f(\phi_{\lambda+h}) - f(\phi_\lambda)}{h}\right)$$
$$= w(h)_{xx} + f(\phi_{\lambda+h}) + \lambda f'(\theta\phi_{\lambda+h} + (1-\theta)\phi_\lambda)w(h) = 0$$

and

$$\|w(h)_x\|^2 \le C\|w(h)\|^2 + C.$$

因此，按照前面的做法，我们证明 $\{w(h) : h \in (0, 1]\}$ 在 $H_0^1(0, \pi)$ 中一致有界，因此它属于 $L^2(0, \pi)$ 和 $C(0, \pi)$。

因此，利用 $f \in C^2(\mathbb{R})$、$h \in (0, \delta]$，我们必有

$$\sup_{h\in(0,\delta]} \sup_{y\in[0,\pi]} |w(h)_{xx}(y)| < +\infty.$$

因此，序列 $\{w(h) : h \in (0, 1]\}$ 在 $H^2(0, \pi)$ 中一致有界。因此，我们可以假设 $w(h) \to \bar{w}$ 在 $H_0^1(0, \pi)$ 中（因而 $C^1[0, \pi]$），当 $h \to 0$ 时。

由于对所有 $v \in H_0^1(0, \pi)$、$h \in (0, \delta)$，我们有

$$\int_0^\pi w(h)_x v_x = \int_0^\pi f(\phi_{\lambda+h})v + \lambda \int_0^\pi \lambda f'(\theta\phi_{\lambda+h} + (1-\theta)\phi_\lambda)w(h)v$$

利用函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 的连续性，我们得到

$$-\langle \bar{w}_x, v_x\rangle + \lambda\langle f'(\phi_\lambda)\bar{w}, v\rangle + \langle f(\phi_\lambda), v\rangle = 0, \tag{13}$$

对所有 $v \in H_0^1(0, \pi)$ 均成立。也就是说，$\bar{w}$ 是.....的唯一解

$$\begin{cases} u_{xx} + \lambda f'(\phi_\lambda)u + f(\phi_\lambda) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

由此可知，函数 $(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 可微。

注 2.4。同样的推理可以用来证明，$(j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_0^1(0, \pi)$ 是二阶连续可微的。

现在定义一个辅助函数，以便将 (7) 的平衡态视为非局部问题的平衡态。正如我们在定理 2.3 中所见，对于每个正整数 j，两个函数 $[j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \phi_j^{\pm}{}_{,\lambda} \in H_0^1(0, \pi)$ 都是连续可微的，并且 $[j^2, +\infty) \ni \lambda \mapsto \int_0^\pi ((\phi_j^{\pm}{}_{,\lambda})_x)^2 dx \in (0, +\infty)$ 严格递增（见 [1]），且连续可微。由于 $\phi_j^{\pm}{}_{,j^2} = 0$ [3]，我们还知道 $\int_0^\pi ((\phi_j^{\pm}{}_{,\lambda})_x)^2 dx \to 0$ 当 $\lambda \to j^2$ 时。

定义 2.5。对于每个正整数 j 和 $r \geq 0$，令 $\lambda_j^{\pm}, r \in [j^2, +\infty)$ 为满足 $\int_0^{\pi} ((\phi_j^{\pm}, \lambda)_x)^2 = r$ 的唯一 λ。令 $c_j^{\pm}: [0, +\infty) \to (0, \frac{1}{j^2}]$ 为由 $c_j^{\pm}(r) = \lambda_{j r}^{\pm}$ 定义的函数，对每个 $r \geq 0$ 均如此。

显然，两个函数 $c_j^{\pm}(\cdot)$ 严格递减且连续可微，并且 $\lim_{r\to 0} c_j^{\pm}(r) = \frac{1}{j^2}$。借助这个辅助函数，我们可以将问题改写为

$$\begin{cases} (\phi_{j,\lambda}^{\pm})_{xx} + \lambda f(\phi_{j,\lambda}^{\pm}) = 0, \\ \phi_{j,\lambda}^{\pm}(0) = \phi_{j,\lambda}^{\pm}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

如下的“非局部”问题

$$\begin{cases} c_j^i(\|(\phi_{j,\lambda}^{\pm})_x\|^2)(\phi_{j,\lambda}^{\pm})_{xx} + f(\phi_{j,\lambda}^{\pm}) = 0, \\ \phi_{j,\lambda}^{\pm}(0) = \phi_{j,\lambda}^{\pm}(\pi) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

为简化记号，我们用 $c(\cdot)$ 表示两个函数 $c_j^{\pm}(\cdot)$ 和 ϕ_λ 中任意一个，其中 $\phi_{j\lambda}^{\pm}$。并且注意到，对于 $r > 0$,

(1) $\|[\phi_{\lambda_r}]_x\|^2 = r$; (2)

$[\phi_{\lambda_r}]_{xx} + f(\phi_{\lambda_r})c(r) = 0$。

设 $\psi(r) = \phi_{\lambda_r}$。对 r 求导，并表示 $\frac{d\psi}{dr}(r) = \dot{\psi}(r)$，可得

$$\dot{\psi}_{xx}(r) + \frac{f'(\psi(r))\dot{\psi}(r)}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)} - \frac{f(\psi(r))c'(\|(\psi(r))_x\|^2)}{[c(\|(\psi(r))_x\|^2)]^2} \frac{d}{dr}\|(\psi(r))_x\|^2 = 0.$$

现在，由于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\|(\psi(r))_x\|^2 &= 2\left\langle (\psi(r))_x, (\dot{\psi}(r))_x \right\rangle = -2\left\langle (\psi(r))_{xx}, \dot{\psi}(r) \right\rangle \\ &= \frac{2}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)} \left\langle f(\psi(r)), \dot{\psi}(r) \right\rangle \end{aligned}$$

我们可以写成

$$\dot{\psi}_{xx}(r) + \frac{f'(\psi(r))\dot{\psi}(r)}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)} - \frac{2c'(\|(\psi(r))_x\|^2)}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)^3} f(\psi(r)) \left\langle f(\psi(r)), \dot{\psi}(r) \right\rangle = 0.$$

现在，若 $L_c: D(L_c) \subset L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ 由 $D(L_c) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ 给出，且

$$L_c v = v'' + \frac{\lambda f'(\psi(r))}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)} v - \frac{2\lambda c'(\|(\psi(r))_x\|^2)}{c(\|(\psi(r))_x\|^2)^3} f(\psi(r)) \int_0^{\pi} f(\psi(r))v, \ v \in D(L_c),$$

我们有 $L_c\dot{\psi}(r) = 0$，并且由于 $\dot{\psi}(r) \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$，可得$0 \in \sigma(L_c)$。

3. 确定非局部问题的平衡态

我们来研究非局部问题 (1) 的分岔序列。

定理 *3.1.* *对于每个正整数 j，考虑 $c_j^+(\cdot)$ 和 $c_j^-(\cdot)$，即上文定义的两个映射。对于 $\nu > 0$ 和 $r > 0$，(1) 存在一个平衡态 ψ，其在区间 $(0,\pi)$ 内有 $j-1$ 个零点，使得 $(\psi)_x(0) > 0$（分别地，$(\psi)_x(0) < 0$），并且当且仅当 $\nu c_j^+(r) = a(r)$（分别地，$\nu c_j^-(r) = a(r)$）时，$\|\psi_x\|^2 = r$。*

证明。如果 ψ 是 (1) 的一个平衡态，在区间 $(0,\pi)$ 内有 $j-1$ 个零点，使得$\psi_x(0) > 0$ 且 $\|\psi_x\|^2 = r$，那么 $\psi = \phi_j^+(\cdot, \lambda_j^+(r))$，并且 $\nu c_j^+(r) = a(r)$。另一方面，由于 $\phi_j^+(\cdot, \lambda_j^+(r))$ 是方程 (15) 的一个解，其中 $\|(\phi_j^+(\cdot, \lambda_j^+(r)))_x\|^2 = r$，且由于 $\nu c_j^+(r) = a(r)$，$\psi = \phi_j^+(\cdot, \lambda_j^+(r))$ 是 (1) 的一个平衡态。对 c_j^- 采用类似的论证。□

注 3.2. 对于每个正整数 k，如果 $\nu > k^2 a(0)$，非局部问题 (1) 至少有 $2k+1$ 个平衡态。这直接源于函数 $c_j^{\pm}\colon [0,+\infty) \to (0, \frac{1}{j^2}]$ 连续，$\nu c_j^{\pm}(0) = \frac{\nu}{j^2} > a(0)$,$c_j^{\pm}(r) \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $1 \le j \le k$，并且 $a\colon [0,+\infty) \to [\underline{m}, M]$ 连续这一事实。特别地，如果 a 单调不减，则 (1) 恰有 $2k+1$ 个平衡态。

4. 平衡态的双曲性和莫尔斯指标

考虑辅助初边值问题 (3)，它通过依赖于解的时间尺度变换与 (1) 相关。如前所述，两个问题具有完全相同的平衡态，并且，正如 [2], 所述，对自伴算子进行谱分析，该算子与 (3) 在某个平衡态附近的线性化相关，将确定其稳定性和双曲性。ψ

方程 (3) 在平衡态 ψ 附近的线性化由下列方程给出

$$v_t = Lv,$$

其中 $D(L) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ 且

$$Lv = v'' + \frac{\nu f'(\psi)}{a(\|\psi_x\|^2)} v - \frac{2\nu^2 a'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3} f(\psi) \int_0^\pi f(\psi) v,\ v \in D(L).$$

给定方程 (3) 的一个平衡态 $\psi \neq 0$，令 $r = \|\psi_x\|^2$，并令 k 为正整数，使得 ψ 在区间 $(0,\pi)$ 内恰好为零 $k-1$ 次。于是，若 $\psi_x(0) > 0$，且考虑 $\lambda_k^+(r) = (c_k^+(r))^{-1}$，则 $\psi = \phi_k^+(\cdot, \lambda_k^+(r))$。类似地，若 $\psi_x(0) < 0$，且考虑

$\lambda_{k,r}^{-} = (c_k^{-}(r))^{-1}$，则 $\psi = \phi_{k,\lambda_{k,r}^{-}}^{-}$。为简化记号，在本节余下部分中，我们将用 $c(\cdot)$ 表示 $c_k^{\pm}(\cdot)$，用 λ_r 表示 $\lambda_{k,r}^{\pm}$，并用 ϕ_{λ_r} 表示 $\phi_{k,\lambda_{k,r}^{\pm}}^{\pm}$。

4.1. 双曲性。 本节旨在刻画下文定理所给出的（3）的平衡态的双曲性。

定理 4.1. 在上述记号下，当且仅当 $a'(\|\psi_x\|^2) = \nu c'(\|\psi_x\|^2)$ 时，（3）的平衡态 ψ 不是双曲的。

证明。($\Leftarrow$) 首先假设 $a'(\|\psi_x\|^2) = \nu c'(\|\psi_x\|^2)$。令 $r = \|\psi_x\|^2$。在上述记号下，我们有 $\psi = \phi_{\lambda_r}$。

回想一下，正如我们在第2节末尾所看到的，$v = \frac{d}{dr}\phi_{\lambda_r}$ 满足

$$v_{xx} + \frac{f'(\phi_{\lambda_r})}{c(r)}v - \frac{2c'(r)}{c(r)^3}f(\phi_{\lambda_r})\int_0^\pi f(\phi_{\lambda_r})v = 0.$$

由定理 3.1 可知 $a(r) = \nu c(r)$。由于 $\|\psi_x\|^2 = r$、$\psi = \phi_{\lambda_r}$ 和 $a'(r) = \nu c'(r)$，我们有

$$v_{xx} + \frac{\nu f'(\psi)}{a(\|\psi_x\|^2)}v - \frac{2\nu^2 a'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3}f(\psi)\int_0^\pi f(\psi)v = 0.$$

因此，0 是 L的一个特征值，这意味着 ϕ 不是双曲平衡态。

($\Rightarrow$) 假设我们找到一个满足以下条件的 $0 \neq u \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$

$$u_{xx} + \frac{\nu f'(\psi)}{a(\|\psi_x\|^2)}u - \frac{2\nu^2\alpha a'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3}f(\psi) = 0$$

对于 $\alpha = \int_0^\pi f(\psi(s))u(s)ds$。

现在，由于 $a(r) = \nu c(r)$ 且 $\phi_{\lambda_r} = \psi$、$v = \frac{d}{dr}\phi_{\lambda_r}$ 满足

$$v_{xx} + \frac{\nu f'(\psi)}{a(\|\psi_x\|^2)}v - \frac{2\nu^3\beta c'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3}f(\psi) = 0,$$

对于 $\beta = \int_0^\pi f(\psi(s))v(s)ds$。

因此，$w = \beta\nu c'(r)u - \alpha a'(r)v$ 是

$$\begin{cases} w_{xx} + \dfrac{\nu f'(\phi_{\lambda_r})}{a(\|\phi_{\lambda_r}\|^2)}w = 0 \text{ or } w_{xx} + \lambda_r f'(\phi_{\lambda_r})w = 0, \\ w(0) = w(\pi) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

这意味着 $w \equiv 0$。因此 $\beta\nu c'(r)u - \alpha a'(r)\phi = 0$ 并且，将等式两边乘以 $f(\phi)$，再从 0 积分到 π，可得

$$\alpha\beta\nu c'(r) = \alpha\beta a'(r).$$

显然，$\alpha\beta \neq 0$。否则，u 或 v 应当是（16）的一个解，即 $u = 0$ 或 $v = 0$，这将导致矛盾。

因此，我们得出 $a'(r) = \nu c'(r)$。

□

4.2. **莫尔斯指标**。现在我们分析（3）的平衡态发生分岔时，不稳定流形的维数会发生什么变化。

对于 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，定义算子 L_ε：$H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \subset L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ b y

$$L_\varepsilon u(x) = u'' + p(x)u + \varepsilon q(x) \int_0^\pi q(s)u(s)ds,$$

其中 p，q：$[0, \pi] \to \mathbb{R}$ 为连续函数，且满足 $q \not\equiv 0$。

当 $\varepsilon = 0$, $L_0 u = u'' + p(x)u$ 是一个斯图姆-刘维尔算子。因此，L_0 是一个自伴且具有紧预解式的算子，其谱由一个递减的单特征值序列构成，即

$$\sigma(L_0) = \{\gamma_j : j = 1, 2, 3 \cdots\}$$

其中，$\gamma_j > \gamma_{j+1}$ 和 $\gamma_j \longrightarrow -\infty$ 分别为 $j \to +\infty$。

注意，对所有 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，我们可以将 L_ε 分解为两个算子的和：

$$L_\varepsilon u = L_0 u + \varepsilon B u,$$

其中，对于所有 $u \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$，$Bu = q(x) \int_0^\pi q(s)u(s)ds$是一个秩一有界算子。容易看出，$L_\varepsilon$ 也是自伴且具有紧预解式的。

接着，我们将 $\{\mu_j(\varepsilon) : j = 1, 2, 3, \cdots\}$ 记作 L_ε的特征值，并按如下方式排序：对于 $j = 1, 2, 3, \cdots$，函数 $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \mu_j(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ 满足$\mu_j(0) = \gamma_j$。

本文将实质性地使用[5]中的定理 3.4 和 4.5。下面总结这些结果。

定理 4.2。设 L_ε 和 $\{\mu_j(\varepsilon)$：$j = 1$、2、3、$\cdots\}$ 如上所述。则有：

i) 对所有 $j = 1$、2、3、$\cdots$，函数 $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \mu_j(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ 均为单调不减。*ii)* 若对某个 $j = 1$、2、$3 \cdots$ 以及 $\varepsilon \in \mathbb{R}$、$\mu_j(\varepsilon) \notin \{\gamma_k$：$k = 1$、2、3、$\cdots\}$成立，则$\mu_j(\varepsilon)$是 L_ε的单特征值。

我们希望通过仔细观察函数 $a(\cdot)$和 $\nu c(\cdot)$的图像交点，来确定平衡态的莫尔斯指标；也就是说，根据两条曲线的相交方式，我们就能确定该

平衡态的莫尔斯指标。回想一下，函数 $c(\cdot)$实际上是$c_j^+(\cdot)$或 $c_j^-(\cdot)$，它们分别与平衡态ϕ_j^+，λ_r^+或ϕ_j^-，λ_r^-相关，并在区间$(0,\ \pi)$内改变符号 $j-1$ 次。 $a(\cdot)$和 $\nu c_j^\pm(\cdot)$的图像交点必然对应一个在(1)中改变符号 $j-1$ 次的平衡态。因此，随着 ν 增大，如果 $a(\cdot)$和$\nu c_j^\pm(\cdot)$的图像首次相交时对应的值为 $r\neq 0$，且该交点先于与 $r=0$的交点，那么至少会有一次鞍结分岔先于从零开始的叉形分岔（例如，参见例 5.3）。

本节的主要结果如下:

定理 4.3. 设 ψ 是 (3) 的一个平衡态，在某个正整数 k对应的 $(0,\pi)$ 中有 $k-1$ 个零点。令 $r=\|\psi_x\|^2$ 和 λ_r 满足 $\psi=\phi_k^+{}_{,\lambda_r}$（分别为 $\psi=\phi_k^-{}_{,\lambda_r}$）。若将 $c_k^\pm(\cdot)$ 记为 c，则

(i) 若 $a'(\|\psi_x\|^2)>\nu c'(\|\psi_x\|^2)$，则 ψ 是双曲的，其莫尔斯指标为 $k-1$。(ii) 若 $a'(\|\psi_x\|^2)<\nu c'(\|\psi_x\|^2)$，则 ψ 是双曲的，其莫尔斯指标为 k。

P顶。 双曲性由定理 4.1 得出。定义算子

$$L_\varepsilon v=v''+\frac{\nu f'(\psi)}{a(\|\psi'\|^2)}v+\varepsilon f(\psi)\int_0^\pi f(\psi)v,$$

$v\in D(L_\varepsilon)=H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$，对每个 $\varepsilon>0$。

注意， L_0 是参数$\nu_0=\frac{}{a'(\|\psi_x\|^2)}$下，式（7）在 ψ 处的线性化。~~L_0~~的谱由一个无界的有序序列 $\{\mu_j(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 构成，其元素均为单特征值，即

$$\mu_1(0)>\mu_2(0)>\cdots>\mu_{k-1}(0)>\mu_k(0)>\mu_{k+1}(0)>\dots$$

由于 $0\notin\sigma(L_0)$，我们可能有 $0>\mu_j(0)$ 对所有 $j=1,\ 2,\ 3\cdots$ 均成立；或者存在一个正整数 k，使得 $\mu_{k-1}(0)>0>\mu_k(0)$。

对于 $\tilde\varepsilon=\frac{2c'}{(\|\psi_x\|^2)\ c(\|\psi_x\|^2)}=-\frac{2\nu^3c'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3}$，由定理 4.2 可知 $0\in\sigma(L_{\tilde\varepsilon})$，且 0 是一个单特征值。采用定理 4.1 第三部分证明中相同的推理，我们可以证明，若 $0\in\sigma(L_\varepsilon)$，则 $\varepsilon=\tilde\varepsilon$。

利用定理 4.2 的第 i 部分，我们推得，对于所有$\varepsilon\geq 0$，$\mu_j(\varepsilon)>0$, $j=1,\ \cdots,\ k-1$。由于 $0\in\sigma(L_\varepsilon)$ 当且仅当 $\varepsilon=\tilde\varepsilon>0$，因此对于所有 $\varepsilon<0$，必有 $\mu_j(\varepsilon)>0$,$j=1,\ \cdots,\ k-1$。这意味着对于所有 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，至少有 $k-1$ 个特征值为正。

此外，由于对于所有 $j>k$，$\mu_k(0)>\mu_j(0)$，$\mu_k(\cdot)$ 是递增的，并且 L_0 在区间 $(\mu_k(0),0]$ 内没有特征值，因此我们有 $\mu_k(\tilde\varepsilon)=0$。否则，$\mu_j(\varepsilon)=\mu_k(\varepsilon)\in(\mu_k(0),0]$ 对某个 $j>k$ 和 $\varepsilon\in(0,\tilde\varepsilon]$，这与定理 4.2 的第 ii 部分矛盾。由于 $0\notin\sigma(L_0)$，对于所有 $\varepsilon\in\mathbb{R}$ 和 $j>k$，$\mu_j(\varepsilon)<0$。

因此，当 $\varepsilon<\tilde\varepsilon$ 时， L_ε 的正特征值个数为 $k-1$；当 $\varepsilon>\tilde\varepsilon$ 时，则为 k（见图 1）。

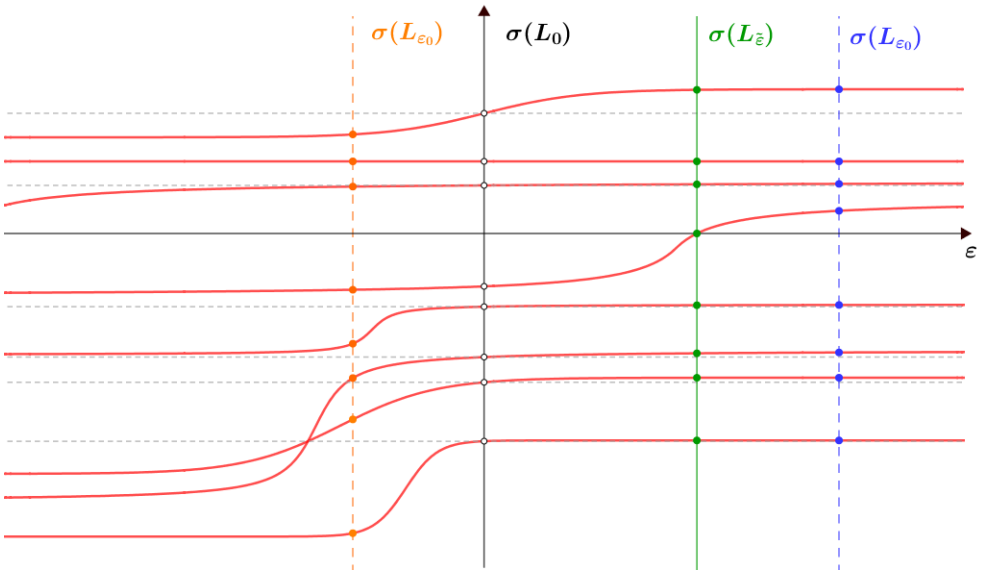


图 1. L_ϵ的谱

令 $\varepsilon_0 = -\frac{2\nu^2 a'(\|\psi_x\|^2)}{a(\|\psi_x\|^2)^3}$。那么，如果 $a'(\|\psi_x\|^2) > \nu c'(\|\psi_x\|^2)$，则有 $\varepsilon_0 < \tilde{\varepsilon}$，且 L_{ε_0} 恰有 $k-1$ 个正特征值，并且 $0 \notin \sigma(L_{\varepsilon_0})$。另一方面，如果 $a'(\|\psi_x\|^2) < \nu c'(\|\psi_x\|^2)$，则有 $\varepsilon_0 > \tilde{\varepsilon}$，且 L_{ε_0} 恰有 k 个正特征值，并且 $0 \notin \sigma(L_{\varepsilon_0})$。□

5. 分析几个例子的吸引子

用 $c^L_{j,\pm}(\cdot)$、$L > 0$、$j \in \mathbb{N}$ 表示与该问题中在 $(0, \pi)$ 内有 $j-1$ 个零点的平衡态相关的函数 $c^{\pm}_j(\cdot)$

$$\begin{cases} u_{xx} + \lambda f(u) = 0, x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

对于参数 $\lambda > 0$。

回忆一下，以下结论成立。

引理 5.1。考虑满足(2)的 $f \in C^2(\mathbb{R})$。若 $j \in \mathbb{N}$、$j \geq 2$和 ϕ_j 是(7)的一个平衡态，且在$(0, \pi)$中有 $j-1$ 个零点，则 ϕ_{2j} 是 $\frac{\pi}{j}$ 周期的。此外，若 f为奇数，则对 $x \in [0, \frac{\pi}{j}]$有 $\phi_j(\frac{\pi}{j} + x) = -\bar{\phi}_j(\frac{\pi}{j} - x)$。

命题 5.2。如果 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 并且满足 (2)，那么：

(i) $c^L_{j,\pm}(r) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 c^{\pi}_{j,\pm}(\frac{Lr}{\pi})$, *for all* $r \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, 3 \cdots$.

(ii) 对于所有 $r \in \mathbb{R}^+$, $c^{\pi}_{2j,\pm}(r) = \frac{1}{j^2} c^{\pi}_{2,\pm}(\frac{r}{j^2})$。

如果我们还假设 f 是奇函数，那么：

(iii) $c^L_j, +(\cdot) = c^L_j, -(\cdot)$以及$c^{\pi}_j, \pm(r) = c^j_1, \pm(\frac{r}{j})$，对所有 $r \in \mathbb{R}^+$和 $j \in \mathbb{N}$均成立。

(iv) $c^L_j, +(\cdot) = c^L_j, -(\cdot)$以及$c^{\pi}_j, \pm(r) = \frac{1}{j^2} c^{\pi}_1, \pm (\frac{r}{j^2})$，对所有 $r \in \mathbb{R}^+$ 和 $j \in \mathbb{N}$均成立。

证明。 证明可通过简单的变量代换得到。

(i) 令 $r \in \mathbb{R}^+$。在下文中，我们固定 $+$ 或 $-$ 中的一个符号，并在记号中省略它。如果 $c^L_j(r) = \frac{1}{\lambda_r}$，则存在 $\phi \in C^2(0, L)$，其中 $\|\phi_x\|^2 = r$，使得 $\phi \neq 0$ 在$(0, \pi)$中，并且满足将 λ 替换为 λ_r后的（17）。

对于 $x \in [0, \pi]$，定义 $\psi(x) = \phi(\frac{Lx}{\pi})$。则 ψ满足

$$\psi_{xx}(s) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \phi_{xx}\left(\frac{Ls}{\pi}\right) = -\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \lambda_r f\left(\phi\left(\frac{Ls}{\pi}\right)\right).$$

换言之，ψ 是方程 (17) 的一个解，其中 L 替换为 π，λ 替换 by $\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \lambda_r$. Also,

$$\|\psi_x\|^2 = \int_0^{\pi} (\psi_x(s))^2 ds = \int_0^{\pi} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \left(\phi_x\left(\frac{Ls}{\pi}\right)\right)^2 ds = \frac{L}{\pi} \int_0^{L} \phi_x(u)^2 du = \frac{Lr}{\pi}.$$

因此，根据 c^{π}_j的定义，我们得出 $c^{\pi}_j(\frac{Lr}{\pi}) = (\frac{\pi}{L})^2 \frac{1}{\lambda_r}$。

因此，$c^L_j(r) = \frac{1}{\lambda_r} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 c^{\pi}_j(\frac{Lr}{\pi})$。由于 $r \in \mathbb{R}^+$是任意的，结论成立。

(ii) 再次固定符号 $+$或 $-$ 中的一个，并在记号中省略它。令 $r > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$。根据定义，$c^{\pi}_{2j}(r) = \frac{1}{\lambda_r}$ 意味着存在一个 ϕ，其在 $(0, \pi)$ 中有 $2j - 1$ 个零点，是 $\lambda = \lambda_r$ 时方程 (7) 的一个平衡态，并满足 $\|\phi_x\|^2 = r$。

根据引理 5.1，我们有 $r = \int_0^{\pi} (\phi_x(s))^2 ds = j \int_0^{\frac{\pi}{j}} (\phi_x(s))^2 ds$。

因此，$\psi = \phi|_{[0, \frac{\pi}{j}]}$是方程 (17) 的解，在 $\psi = \phi|_{[0, \frac{\pi}{j}]}$ 所在处变号一次 $L = \frac{\pi}{j}$和 $\|\psi_x\|_{L^2(0, \frac{\pi}{2})} = \frac{r}{j}$。

因此，$c^{\pi}_{2j}(r) = \frac{1}{\lambda_r} = c^{\pi}_{2j}(r)$。根据前一项，所需结果得证。

(iii) 固定 $j \in \mathbb{N}$和 $r \in \mathbb{R}^+$。若 $c^{\pi}_j(r) = \frac{1}{\lambda_r}$，则存在 $\phi \in C^2(0, \pi)$，其在 $(0, \pi)$ 内有 $j - 1$个零点，满足 $\|\phi_x\|^2 = r$，并且符合 (7)。由于 f 是奇函数，ϕ 具有许多对称性，并且

$$r = \int_0^{\pi} (\phi_x(s))^2 ds = j \int_0^{\frac{\pi}{j}} (\phi_x(s))^2 ds.$$

考虑 $\psi = \phi|_{[0,\frac{\pi}{j}]}$。那么，我们有 $\psi > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{j})$ 内，$\|\psi_x\|^2_{L^2(0,\frac{\pi}{j})} = \frac{r}{j}$，且 ψ 对 $L = \frac{\pi}{j}$ 和 $\lambda = \lambda_r$ 满足 (17)。因此，根据 c_1^j 的定义，我们可以找到 $c_1^j(\frac{r}{j}) = \frac{1}{\lambda_r} = c_j^\pi(r)$。

(iv) 这可由前面的各项推得。

□

命题 5.2 的结果使我们对方程 (1) 的平衡态分岔有了很好的认识，尤其是对适当大的 $j \in \mathbb{N}$ 的情形。我们指出，若 f 是奇函数，则当 j 取较大值时，函数 $j^2 c_j^{\pm}$ 的递减速度非常缓慢。

接下来，我们将展示几个示意性例子，说明根据函数 a 和 f 的不同选择，可能发生的分岔。

例 5.3. 本例考虑图 *2* 中的函数 $a = a_1$：

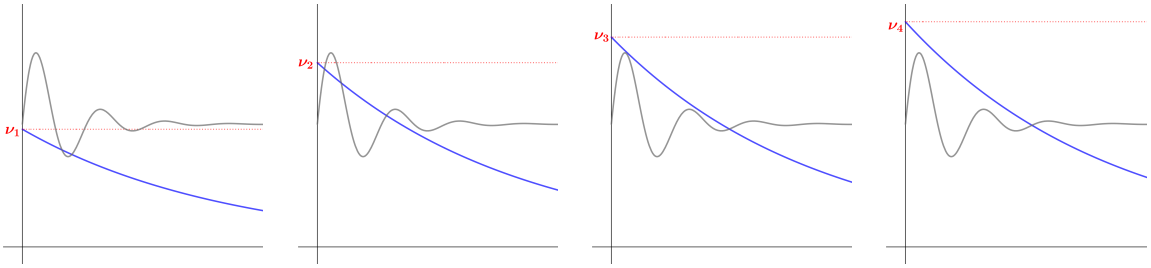
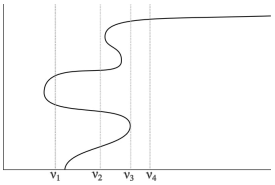


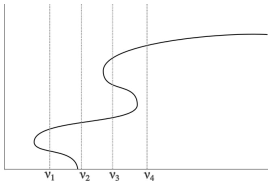
图 2. 不同 ν 取值下 a_1 （灰色）和 $\nu c_1^{\pm}$ （蓝色）的图像

在这种情况下，零解处发生的是超临界叉形分岔，此外还发生四个鞍结分岔，其中两个是次临界的，另外两个是超临界的。分岔曲线如下所示：



例 5.4. 在本例中，考虑函数 $a = a_2$，其图像以灰色绘出，如图*3*所示：

在这种情况下，从零解分岔的是次临界叉形分岔，此外还会发生另外三个鞍结分岔，其中两个是超临界的，一个是次临界的。分岔曲线如下所示：



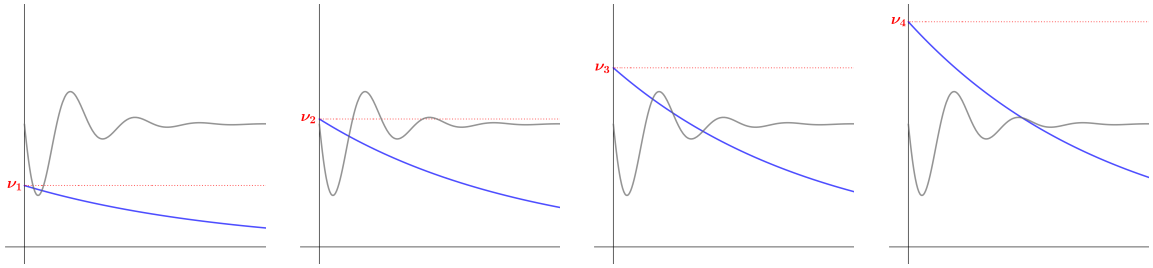


图3. 不同 ν 取值下 a_2 和 $\nu c_1^{\pm}$ 的图像（蓝色）

例5.5. 考虑由 $a = a_3$ 给出的函数，其图像以灰色绘出，如图*4*所示。

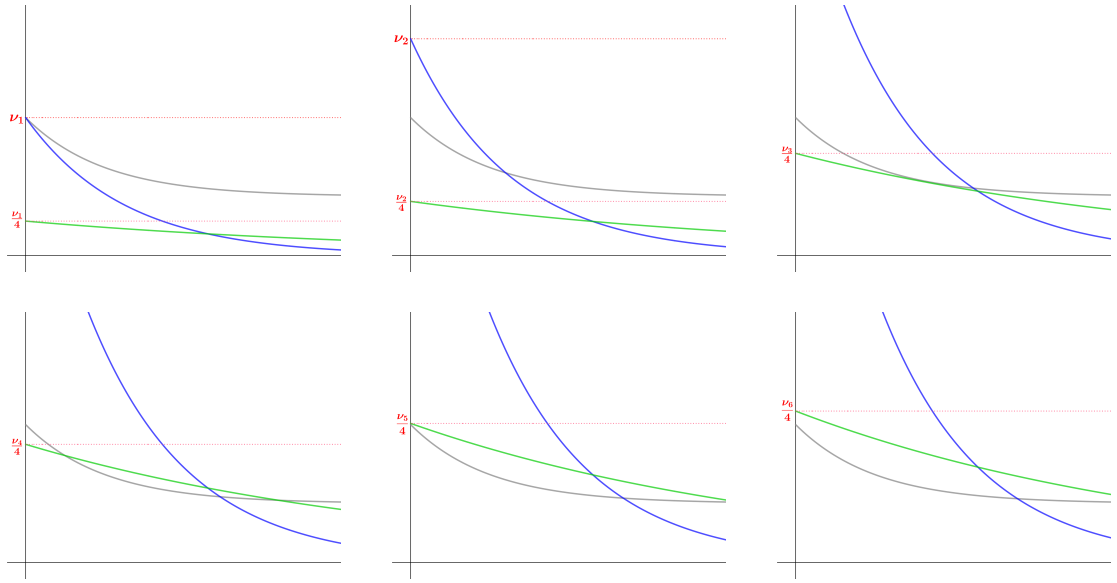
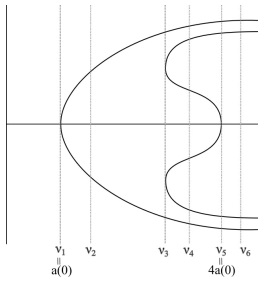


图4. 不同 ν 取值下 a_3 （灰色）、$\nu c_1^{\pm}$（蓝色）和 $\nu c_2^{\pm}$（绿色）的图像

第一个从零解发生的分岔是超临界叉形分岔，第二个从零解发生的分岔是超临界鞍结分岔。在这种情况下，表示这两个从零解发生的分岔的图示与下图相似：



假设 $\nu_3 \in (\nu_1, \nu_5)$ 是区间 $(0, \pi)$ 内恰好改变一次符号的平衡态发生鞍结分岔的时刻。在这种情况下，如果 f 为奇数，全局吸引子的示意图如图*5*所示。

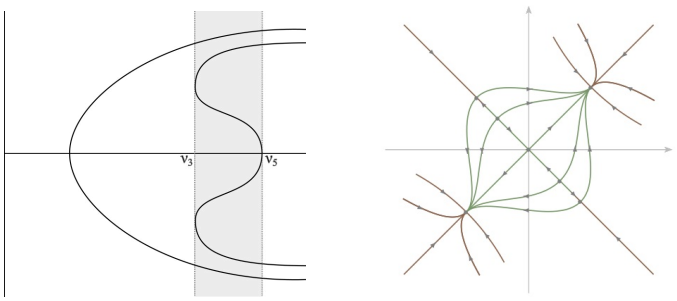


图5. 当 $\nu \in (\nu_3, \nu_5)$ 时，吸引子的预期结构。

对于 $\nu \in (\nu_3, \nu_5)$，还预计两个不稳定性更强的平衡态会在0 处合并，随着 ν 趋近于 $4a(0)$。

致谢

这项工作是在第三作者（EMM）访问埃尔切米格尔·埃尔南德斯大学运筹学研究中心期间完成的。在此期间，她有机会访问马德里康普顿斯大学。她谨向 CIO 和 UCM 的同仁表达谢意，感谢他们的热情接待和友善。

参考文献

[1] Rubén Caballero、Alexandre N. Carvalho、Pedro Marín-Rubio 和 José Valero。关于非局部 Chafee–Infante 问题的吸引子结构。《Mathematics》，9(4)，2021。[2] A. N. Carvalho 和 E. M. Moreira。标量非局部一维拟线性抛物问题的平衡态稳定性与双曲性。已投稿，2020。[3] N. Chafee 和 E. F. Infante。一个抛物型非线性偏微分方程的分岔问题。《Applicable Anal.》，4：17–37，1974/75。[4] Nathaniel Chafee 和 E. F. Infante。非线性抛物偏微分方程的分岔与稳定性。《美国数学会通报》，80：49–52，1974。[5] Fordyce A. Davidson 和 Niall Dodds。非局部微分算子的谱性质。《Appl. Anal.》，85(6-7)：717–734，2006。[6] YananLi、Alexandre N. Carvalho、Tito L. M. Luna 和 Estefani M. Moreira。一个非局部标量一维抛物方程的非自治分岔问题。《Commun. Pure Appl. Anal.》，19(11)：5181–5196，2020。[7] Joel Smoller。激波与反应扩散方程，《数学科学基础丛书》第258卷 [数学科学基本原理]。Springer-Verlag，纽约，第二版，1994。

马德里康普顿斯大学分析与应用数学系，西班牙马德里 28040；以及数学科学研究所 ICMAT-UAM- UC3M-UCM

电子邮箱地址：arrieta@mat.ucm.es

数学系、数学科学与计算机科学研究所，圣保罗大学圣卡洛斯校区，邮政信箱668号，圣卡洛斯，13560-970，巴西

电子邮箱地址：andcarva@icmc.usp.br电
子邮箱地址：estefani@usp.br

运筹学研究中心，埃尔切米格尔·埃尔南德斯大学，大学大道 s/n，03202 埃尔切，西班牙电子邮箱地址：jvalero@umh.es