arXiv:2302.04316v2 [math.GR] 6 Feb 2024

伪簇 ECOM 中半群的行列式

M.H. SHAHZAMANIAN

摘要。本文旨在计算这样一类有限半群的非零半群行列式：其中任意两个幂等元都可交换。该类严格包含具有中心幂等元的有限半群类以及有限逆半群类。这一计算对于将麦克威廉斯定理推广至半群代数上的码具有重要意义。

1. 引言

19 世纪 80 年代，Dedekind 引入了有限群的群行列式概念，并与 Frobenius 一起开始对其进行深入研究。与此同时，Smith 也以不同的方式研究了这一概念，具体如 [15] 中所述。这项研究涉及对 $G \times G$ 矩阵的行列式进行考察，其中 (g,h) 位置的元素为 x_{gh}， G 为有限群，而 x_k 为变量，且对 G中的所有 k 均成立。此外，这项研究还扩展到有限半群，并涉及各种研究目标 [19, 11, 21]。有限半群的半群行列式的一个应用，是将有限域上线性码的麦克威廉斯定理推广至链环。有限 Frobenius 环上的线性码具有扩展性质（见 [20]）。非零半群行列式是这一应用中的重要组成部分。仅当 $\mathbb{C}S$为 Frobenius 代数时，它才非零，这也意味着该代数具有单位元。这一事实由 [17] 中的定理 2.1 或[12]第 16 章中的命题 18 得到证明。

在 Steinberg 的论文 [17] 中，他给出了交换半群的半群行列式的分解。半群行列式要么为零，要么可分解为线性多项式。Steinberg 明确描述了各因子及其重数。这项工作延续了 Ponizovskiĭ [13] 和 Wenger [18]此前对具有 Frobenius 半群代数的交换半群所进行的研究。Steinberg 还证明，逆半群的半群行列式可以通过计算一个有限广群的半群行列式得到。

2010 年数学主题分类。主要分类号：20M25、16L60、16S36。关键词和短语：Frobenius 代数、半群行列式、拟副行列式、半群代数。

本文旨在探究属于伪簇 ECOM 的半群，其行列式在什么条件下非零，并研究其分解。本文的核心目标是发展 Steinberg 论文 [17]中的思想。 [17], 中考察了具有中心幂等元的半群的行列式，目的是给出交换半群的分解。根据 Ash 的一项著名结果，伪簇 ECOM 恰好是由有限逆半群生成的伪簇。与具有中心幂等元的半群以及 [17]中讨论的逆半群相比，这一类更大。因此，这一事实使 ECOM 成为一个值得研究的对象。

我们为这类有限半群定义了一个偏序关系。该关系扩展了半群内幂等元的自然偏序。这个偏序关系对于考察这些半群的行列式至关重要。随后，我们确定了该类中行列式非零的半群，并研究了它们的分解。对于这类半群，我们的刻画更加具体。

本文的组织如下。我们首先在预备知识部分介绍半群和半群行列式。接着，我们在伪簇 ECOM 的半群上给出一个偏序关系，并研究其性质。然后，我们计算该伪簇中有限半群的行列式。为说明这一方法，文中给出了几个示例，并使用以 C# 编写的程序完成计算。这些示例将在文章末尾的附录中讨论。

2. 预备知识

2.1. 半群。 关于半群的标准记号和术语，请参阅 [1, 第 5], [5, 各章第 1-3] 章及 [14, 附录 A]。

设 S 是一个有限半群。设 a、$b \in S$。我们称 $a \mathscr{R} b$，若 $aS^1 = bS^1$；称 $a \mathscr{L} b$，若 $S^1a = S^1b$；称 $a \mathscr{H} b$，若 $a \mathscr{R} b$ 且 $a \mathscr{L} b$。此外，我们称 $a \mathscr{J} b$，若 $S^1aS^1 = S^1bS^1$。请注意，记号 S^1 中的符号 1 并不表示 S 中的任何特定元素。若 S 有单位元，则 $S^1 = S$。然而，若 S 没有单位元，则 $S^1 = S \cup 1$，从而构成一个以 1 为单位元的半群。关系 $\mathscr{R}$、$\mathscr{L}$、$\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{J}$ 是 Green 关系，以 Green [9] 命名。我们分别称 R_a、L_a、H_a 和 J_a、$\widetilde{\ }$ 为包含 a 的 $\mathscr{R}$、$\mathscr{L}$、$\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{J}$-类。此外，当且仅当 a 和 b 具有相同的幂等右单位元集合时，$a\mathscr{L}b$ 成立，也就是说，$\sim ae = a$ 当且仅当 $be = b$，其含义见 Fountain 等人 [6]。关系 $\mathscr{R}$ 是对偶定义的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，且 $\mathscr{H} = \mathscr{L} \wedge \mathscr{R}$。我们分别用 L_s、R_s 和 H_s 表示这些关系中 s 的等价类。关于这一对象的更多结果，请参见 [10]。

e 属于 S 的元素称为幂等元，如果 $e^2 = e$。S 的所有幂等元组成的集合记作 $E(S)$。S 中的幂等元 e 是幺半群eSe的单位元。eSe 的单位群 G_e 称为 S 在 e处的极大子群。

半群 S 的左理想是 S 的非空子集 A，满足$SA \subseteq A$。 S 的右理想对偶定义，条件为 $AS \subseteq A$。 S 的理想是 S 的一个子集，同时也是左理想和右理想。半群 S 是逆的，如果对于所有 $s \in S$，都存在唯一的元素 $s^{-1} \in S$，使得 $ss^{-1}s = s$ 且 $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$。对于元素 $s \in S$， s^{ω} 是序列$(s^{n!})_n$的极限。

半群的一个 伪簇 是一类在取子半群、同态像和有限直积运算下封闭的有限半群。伪簇 S 由所有有限半群组成，而伪簇 G 是所有有限群构成的类；Sl 和 Com 分别是所有有限半格和交换半群的伪簇。算子 E 将伪簇 V 关联到这样一类有限半群：其中，由该半群的幂等元生成的子半群属于 V。这可以写成

$$\mathsf{EV} = \{S \in \mathsf{S} \mid \langle E(S) \rangle \in \mathsf{V}\}.$$

如果有限半群 S 是 ECom 的成员，那么由 S 的幂等元生成的子半群等于 S 的幂等元集合。因此，伪簇 ESl 等于伪簇 ECom。根据 Ash [2]，的著名结果，由有限逆半群生成的伪簇正是伪簇 ECOM。

2.2. 关联代数与莫比乌斯函数。 设 $(P, \leq)$ 为一个有限偏序集。 P 上的关联代数（记作 $\mathbb{C}[\![P]\!]$）是由所有满足以下条件的函数 $f : P \times P \to \mathbb{C}$ 构成的代数

$$f(x, y) \neq 0 \Rightarrow x \leq y$$

配备卷积积

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

卷积单位元 是由 δ 给出的狄拉克函数

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

偏序集 P 的ζ函数（记作 ζ_P）是 $\mathbb{C}[\![P]\!]$ 中由下式给出的一个元素

$$\zeta_P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

函数 ζ_P 相对于任何扩展 P的线性序都是对角线上元素为 1 的上三角矩阵。因此， ζ_P 在整数环上有逆，称为莫比乌斯函数，记作 μ_P。在上下文已明确偏序集P 的情况下，将省略下标 P。

设 f 是从 P 到 $\mathbb{C}$的函数。应用莫比乌斯反演，若 g 是从 P到 $\mathbb{C}$的函数，定义为 $g(x) = \sum_{y\leq x} f(y)$，则对每个 $x \in P$，都有 $f(x) = \sum_{y\leq x} \mu_P(y,x)g(y)$，

我们建议读者参阅 [16] ，以获取本节的更多信息。

2.3. 半群行列式。 关于有限维代数的标准记号和术语，请参阅 [3] 和[4]。

带基代数是一个有限维复代数 A ，并带有一个指定的基 B。我们常将代数及其基这一对称为(A,B)。代数中的乘法由相对于基 B 定义的结构常数决定，其定义方程如下:

$$bb' = \sum_{b''\in B} c_{b'',b,b'}b''$$

其中 b、$b' \in B$ 和$c_{b'',\ b,\ b'} \in \mathbb{C}$。设 $X_B = \{x_b \mid b \in B\}$为一个与 B一一对应的变量集。这些结构常数可以表示在一个称为凯莱表的矩阵中，该矩阵是一个元素取自多项式环 $\mathbb{C}[X_B]$的 $B \times B$ 矩阵。它被定义为一个以 $\mathbb{C}[X_B]$ 为元素的 $B \times B$ 矩阵，其各项如下:

$$C(A,B)_{b,b'} = \sum_{b''\in B} c_{b'',b,b'}x_{b''}.$$

该矩阵的行列式记为 $\theta_{(A,B)}(X_B)$，它要么恒等于零，要么是次数为 $|B|$ 的齐次多项式。

设 S 是一个有限半群。半群 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}S$ 由所有形如 $\sum \lambda_s s$ 的形式和构成，其中 $\lambda_s \in \mathbb{C}$ 且 $s \in S$，其乘法 $_{s\in S}$ 由下式定义

$$(\sum_{s\in S} \lambda_s s)\cdot(\sum_{t\in S} \mu_t t) = \sum_{u=st\in S} \lambda_s\mu_t u.$$

注意， $\mathbb{C}S$ 是一个有限维 $\mathbb{C}$-代数，其基为 S。若 $A = \mathbb{C}S$ 且$B = S$，则 $C(S)$ $= C(\mathbb{C}S, S)$ 的凯莱表是一个以$\mathbb{C}[X_S]$ 为系数的 $S \times S$ 矩阵，其中 $C(S)_{s,}$ $_{s'} = x_{ss'}$ 这里 $X_S = \{x_s \mid s \in S\}$ 是与 S 一一对应的一组变量。我们将行列式 C $(\mathbb{C}S, S)$ 记为 $\theta_S(X_S)$，并称其为 S 的（Dedekind-Frobenius）半群行列式 。若半群S 固定，我们常用 X 代替 X_S。关于这一主题的更多信息，请参阅 [7], [12, 第16] 章和 [17]。

半群 S 在复数域上的收缩半群代数 定义为 $\mathbb{C}_0S = \mathbb{C}S/\mathbb{C}0$；注意， $\mathbb{C}0$ 是一个一维双边理想。这个代数可以看作以 S 的非零元素为基，并且其乘法扩展了 S的乘法，但将半群的零元与代数的零元等同起来。 S的收缩半群行列式 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$记作 θ_S，是 $C(S) = C(\mathbb{C}_0S, S\setminus\{0\})$ 的行列式，其中 $C(S)_{s,\ t}\widetilde{\ }$在 $st \neq 0$ 时等于 x_{st} ，否则为 0。若 S 已知，则记作 $X = X_{S\setminus\{0\}}$。

Steinberg 在 [17] 中给出了一个关于同构（或基变换）下抛物型行列式行为的定理。现将其列述如下。

定理 *2.1*。设 (A, B) 和 (A', B') 是带基代数，且 $f: A \to A'$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同态。设 P 是 f 相对于基 B 和 B' 的 $B' \times B$ 矩阵。设 $\widetilde{f}: \mathbb{C}[X_B] \to \mathbb{C}[X_{B'}]$ 是由 f 诱导的同态 $x_b \mapsto \sum_{b' \in B'} P_{b',b} x_{b'}$（注意，$f(x_b)$ 是一个线性齐次多项式）。那么 $\widetilde{f}(C(A, B)) = P^T C(A', B') P$。因此，如果 f 是一个同构，则 $\theta_{(A,B)} = \det(P)^2 \widetilde{f}^{-1}(\theta_{(A',B')})$。

根据 [17] 中的命题 2.7（[21] 中提到的想法），对于带零元的半群 S，其收缩半群行列式与半群行列式之间存在联系。$\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}S$ 与积代数 $\mathbb{C}_0 S \times \mathbb{C}0$ 之间存在一个 $\mathbb{C}$-代数同构，它将 $s \in S$ 映射到 $(s,0)$。令 $y_s = x_s - x_0$ 表示 $s \neq 0$，并令 $\sim$ $\sim$ $\sim Y = \{y_s \mid s \in S \setminus \{0\}\}$。那么 $\theta_S(X) = x_0 \theta_S(Y)$。因此，可以通过将 x_0 替换为 0，从 $\theta_S(X)/x_0$ 得到 $\theta_S(X)$。

3. 关系 $\ll$

文中给出了半群 S 具有非零 $\theta_S(X)$ 的必要条件，如 [17] 所述。根据 [17] 中的定理 2.1，若 $\theta_S(X)$ 不等于 0，则半群代数 $\mathbb{C}S$ 是含幺代数。此外，根据 [17] 中的推论 2.4，若 $\theta_S(X)$ 不等于 0，则 S 满足下述条件 $(\star)$:

$(\star)$ 对于 S 中的每个元素 s，在左乘和右乘 s 作用下，S 中被固定的元素个数相同。

设 S 为半群。我们定义从 S 到 $E(S)$ 的幂集的函数 φ^* 和 φ^+ 如下:

$$\varphi^*(s) = \{e \in E(S) \mid se = s\} \text{ and } \varphi^+(s) = \{e \in E(S) \mid es = s\}.$$

引理 3.1. 若 S 有限且 $\mathbb{C}S$ 是含幺代数，则对于每个 $s \in S$，子集 $\varphi^*(s)$ 和 $\varphi^+(s)$ 均非空。

证明。令 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ 和 $s \in S$。令 $1_S = c_1 s_1 + \cdots + c_n s_n$（其中某个 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$）为代数 $\mathbb{C}S$ 的单位元。由于 $s1_S = s$，存在一个整数 $1 \leq i \leq n$，使得 $c_i \neq 0$ 且 $ss_i = s$。于是，我们有 $ss_i^\omega = s$。由此可得 $s_i^\omega \in \varphi^*(s)$，进而得到 $\varphi^*(s) \neq \varnothing$

同理，我们有 $\varphi^+(s) \neq \varnothing$。 □

本节余下部分中，我们假设 S 属于伪簇 ECom，且 S 满足以下条件，记为（$\star\star$）：

(1) S 满足条件（$\star$）；(2) 半群代数 $\mathbb{C}S$ 是含幺代数。

$E(S)$ 的元素彼此可交换，因此有 $E(S)$ $=E(S)$。因此，$E(S)$ 关于序关系 $e \leq f$构成交半格，若 $ef = e$。根据引理 3.1，子集 $\varphi^*(s)$ 和 $\varphi^+(s)$ 均非空。由于 $E(S)$ 是交半格， $\varphi^*(s)$ 和 $\varphi^+(s)$ 关于序关系 $\leq$ 均有唯一的最小元素，分别记为 s^* 和 s^+。

注意， $s^* = t^*$ 当且仅当 $\varphi^*(s) = \varphi^*(t)$，并且 $s^+ = t^+$ 当且仅当 $\varphi^+(s) = \varphi^+(t)$。那么，等价关系 $\mathscr{L}$、 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{H}$ 可描述如下:

(1) $s\mathscr{L}t$ 当 $s^* = t^*$;

(2) $s\mathscr{R}t$ 当 $s^+ = t^+$;

(3) $s\mathscr{H}t$ 当 $s^* = t^*$ 且 $s^+ = t^+$。

设 e 是 L_s的一个幂等元。我们有 $e = e^* = s^*$。那么 s^* 是 L_s中的唯一幂等元。此外， s^+ 是 R_s中的唯一幂等元。注意，对于一个幂等元 $s \in S$， $s^* = s^+$ 未必成立（如例 5.1 所示）。

设 s 和 t 是 S中的元素。若 $s = ts^*$ ，则定义 $s \leq^* t$ ；若$s = s^+t$，则定义 $s \leq^+ t$ 。此外，若 $s = s^+ts^*$，则定义 $s \ll t$。由于集合$E(S)$中的元素彼此可交换，关系 $\leq^*$、 $\leq^+$ 和 $\ll$ 是扩张序关系 $\leq$的偏序。此外，关系 $\leq^*$ 和 $\leq^+$ 可交换。

命题 3.2. 以下条件成立:

(1) $s \leq^* t$ 当且仅当存在某个 $e \in E(S)$使得 $s = te$ ； 而 $s \leq^+ t$ 当且仅当存在某个 $e \in E(S)$使得 $s = et$ 。*(2)* 若 $s \leq^* t$ 或 $s \leq^+ t$, 则 $s^+ \leq t^+$ 且 $s^* \leq t^*$。*(3)* $s \ll t$ 当且仅当存在 S 中的元素 u , 使得 $s \leq^* u \leq^+ t$ 或 $s \leq^+ u \leq^* t$。*(4)* 若 $s \ll t$, 则 $s^+ \leq t^+$ 且 $s^* \leq t^*$。

证明。 (1) 假设存在一个幂等元 $e \in E(S)$，使得 $s = te$。因此，我们有 $se = s$ ，从而 $s^* \leq e$。所以，我们有 $s = ss^* = tes^* = ts^*$。因此， $s \leq^* t$。反过来也是成立的，因为 $s^* \in E(S)$。

同样，该命题对关系 $\leq^+$ 也成立。

(2) 首先，假设 $s \leq^* t$。那么，我们有 $s = ts^*$。因此，若 $e \in \varphi^+(t)$，则 $e \in \varphi^+(s)$，从而 $s^+ \leq t^+$。此外，若 $e \in \varphi^*(t)$，则 $se = ts^*e = tes^* = ts^* = s$。因此， $s^* \leq t^*$。

同样，若 $s \leq^+ t$，则 $s^+ \leq t^+$ 且 $s^* \leq t^*$。

(3) 首先，假设存在一个元素 u in S ，使得 $s \leq^* u \leq^+ t$or $s \leq^+ u \leq^* t$。根据对称性，我们不妨假设 $s \leq^* u \leq^+ t$。由于 $s \leq^* u$，我们有 $s = us^*$ ；根据 (2)，可得 $s^+ \leq u^+$。由于 $u \leq^+ t$，我们有$u = u^+t$ ，因此 $s = u^+ts^*$。由此可得 $s = u^+ts^* = s^+u^+ts^* = s^+ts^*$。于是可知 $s \ll t$。

现在，假设 $s = s^+ts^*$。因此，我们有 $s \leq^* s^+t \leq^+ t$ and $s \leq^+ ts^* \leq^* t$。结论得证。

(4) 由于 $s \ll t$，我们有 $s = s^+ts^*$。现在，由于 $t = tt^*$，我们有 $st^* = s^+ts^*t^* = s^+tt^*s^* = s^+ts^* = s$。因此， $s^* \leq t^*$。同理，我们有 $s^+ \leq t^+$。□

如果 $s' \ll s$ 且 $t' \ll t$，这并不意味着 $s't' \ll st$。如例5.2和例5.3所示，半群的行列式可以为零元，也可以非零。

对于幂等元 $e \in E(S)$，我们定义子集 $I_e^* = \{s \mid s^* < e\}$ 和 $I_e^+ = \{s \mid s^+ < e\}$。注意，若 $s \in I_e^*$，则有 $e \in \varphi^*(s)$；若 $s \in I_e^+$，则有 $e \in \varphi^+(s)$。我们有 $Se = \{s \in S \mid se = s\}$，并且$\sim eS = \{s \in S \mid es = s\}$。子集 Se 和 I_e^* 是若干 $\mathscr{L}$-类的并，其中$\sim Se \setminus L_e = I_e^*$。此外，子集 eS 和 I_e^+ 是若干 $\mathscr{R}$-类的并，其中$\sim eS \setminus R_e = I_e^+$。

命题3.3. 以下性质成立：

(1) I_e^* 和 I_e^+ 分别是 S的左理想和右理想。*(2)* 当且仅当 $I_e^+ = \varnothing$时，我们有 $I_e^* = \varnothing$ 。*(3)* 当且仅当 $Se = L_e = L_e$ 时，我们有 $I_e^* = \varnothing$，其中 L_e 是 S中元素 e的 $\mathscr{L}$-类。*(4)* 当且仅当 $eS = R_e = R_e$ 时，我们有$I_e^+ = \varnothing$，其中 R_e 是 S中元素 e的 $\mathscr{R}$-类。

证明。(1) 设 $s \in I_e^*$ 和 $t \in S$。那么，我们有 $tss^* = ts$，因此$(ts)^* \leq s^* < e$。类似地，I_e^+ 是 S的一个右理想。

(2) 如果 $I_e^* \neq \varnothing$，那么存在一个幂等元 $f \in I_e^*$。那么，我们有 $f < e$。由此可得 $I_e^+ \neq \varnothing$。类似地，如果 $I_e^+ \neq \varnothing$，那么我们有 $I_e^* \neq \varnothing$。

(3) 若 $Se \neq L_e$，则存在一个元素 $s \in S$，使得 $se \notin L_e$，因此，$(se)^\omega \neq e$。所以，我们有 $(se)^\omega < e$。由于 $((se)^\omega)^* = (se)^\omega$，我们有 $(se)^\omega \in I_e^*$。于是，$I_e^* \neq \varnothing$。此外，若 $I_e^* \neq \varnothing$，则存在一个幂等元$f \in I_e^*$。所以，我们有 $f < e$，因此，$fe = f$。现在，由于 $f \neq e$，我们有$f \in Se \setminus L_e$。于是，$I_e^* = \varnothing$ 当且仅当 $Se = L_e$。

现在，我们证明 $I_e^* = \varnothing$ 当且仅当 $\widetilde{Se} = \widetilde{L_e}$。假设 $I_e^* \neq \varnothing$。那么，同样存在一个幂等元 f，属于 I_e^*，因此，我们有 $f < e$。于是 $f \in \widetilde{Se} \setminus \widetilde{L_e}$。现在，假设 $\widetilde{Se} \setminus \widetilde{L_e} \neq \varnothing$。令 $se \in \widetilde{Se} \setminus \widetilde{L_e}$。那么，我们有 $(se)^* \neq e$，因此，我们有 $(se)^* < e$。所以，我们有 $I_e^* \neq \varnothing$。

(4) 与 (3) 类似，该结论成立。 □

命题 3.4. 我们有 $E(I_e^*) = E(I_e^+)$ 以及 $|I_e^*| = |I_e^+|$。此外，我们还有 $|\widetilde{L}_e| = |\widetilde{R}_e|$。

证明. 设 $f \in E(I_e^*)$。那么，我们有 $f < e$。因此 $f \in E(I_e^+)$。类似地，我们有 $E(I_e^+) \subseteq E(I_e^*)$。

令 n 为满足存在一条链 $e_1 < e_2 < \cdots < e_n = e$且有 $e_1, \ldots\ldots, e_n \in E(I_e^*)$ 的最大整数。我们对 n作归纳法，证明 $|I_e^*| = |I_e^+|$。若$n = 1$，则有 $I_e^* = \varnothing$，由命题3.3.(2)可得 $I_e^* = I_e^+$。现在假设 $n > 1$。令 $f \in E(I_e^*)$。根据归纳假设，有$|I_f^*| = |I_f^+|$。由于 $Sf = \{s \in S \mid sf = s\}$，$fS = \{s \in S \mid fs = s\}$，且$S$满足条件（$\star$），因此有 $|Sf| = |fS|$。由此可得$|\widetilde{L}_f| = |\widetilde{R}_f|$。

~ ~由于$I_e^* = \bigcup_{f\in E\ (I_e^*)} L_f$且$I_e^+ = \bigcup_{f\in E\ (I_e^*)} R_f$，因此有 $|I_e^*| = |I_e^+|$。此外，还有$|\widetilde{L}_e| = |\widetilde{R}_e|$。 □

~注意，我们还可以得出：$I_e^* = \varnothing$ 当且仅当 $eSe = G_e = H_e$，其中 G_e 是 S 在 e 处的极大子群，e是 eSe的单位群。

一般而言，对于幂等元 $e \in E(S)$，子集 I_e^*并不一定是理想（参见例5.4）。此外，对于幂等元 $e \in E(S)$，子集 I_e^*也不一定是 eSe 的子集（参见例5.5）。

4. 伪簇 ECOM 中有限半群的行列式

当 S 具有中心幂等元时，关系 $\leq^+$、$\leq^*$ 和 $\ll$都相同。它们都可以表示为 $\leq$，其中，若存在幂等元 $e \in E(S)$ 使得 $s = te$，则 $s \leq t$。此外，对于幂等元 e，我们有 $I_e^* = I_e^+$。我们可以将记号 I_e^*简化为 I_e。在这种情况下，对于幂等元 $e \in E(S)$，若 I_e 非空，我们将 $\widetilde{H}_e^0$ 定义为 Rees 商 eSe/I_e。根据命题3.3，若 I_e 为空，则$\widetilde{H}_e^0 = G_e \cup \{z\}$，其中 z 是附加的零元。注意，$\widetilde{H}_e^0$ 构成一个以 e 为单位元的幺半群，并且可以识别为~ ~ $H_e \cup \{z\}$，其中 z 是零元；对于 a、$b \in H_e$，我们有

$$a \cdot b = \begin{cases} ab, & \text{if } ab \in \widetilde{H}_e \\ z, & \text{else.} \end{cases}$$

当 S 具有中心幂等元时，S 的行列式（如 [17], 的定理 6.6 所述）计算如下：

定理 4.1. 设 S 是一个具有中心幂等元的有限幂等半群。对于 $s \in S$，令 $y_s = \sum_{t\leq s} \mu_S(t,s)x_t$。则 $\theta_S = \prod_{e\in E\ (S)} \theta_{\widetilde{H}_e^0}(Y_e)$ 其中 $Y_e = \{y_s \mid s \in \widetilde{H}_e\}$.

本文旨在计算 ECOM 中半群的非零行列式。我们采用与 [17] 中针对具有中心幂等元的半群相似的方法。接下来，在本节中令 $S \in$ 为 ECom，使其满足条件 **(⋆⋆)**。

设 $Z\colon \mathbb{C}S \to \mathbb{C}S$ 是一个映射，由 $Z(s) = \sum s'$ 在 $s \in S$ 上给出，并具有线性 $_{s'\ll s}$ 扩张。通过应用莫比乌斯反演，我们可以为 Z 建立一个逆映射，使其成为双射。如下述命题所述。

命题 4.2。映射 Z 是双射。

对于 s 和 t 中的 S，递归定义两个序列 s_n 和 t_n 如下：

$$s_0 = s, t_0 = t$$

and

$$s_{n+1} = s_n t_n^+, t_{n+1} = s_n^* t_n.$$

命题4.3。 我们有 $s_{n+1} = st_n^+$ 和 $t_{n+1} = s_n^* t$。此外，我们有s_{n+1}^*， $t_{n+1}^+ \le s_n^*$，t_n^+。

证明。 首先，我们证明 s_{n+1}^*、 $t_{n+1}^+ \le s_n^*$、 t_n^+。由于

$$s_{n+1}s_n^* = s_n t_n^+ s_n^* = s_n s_n^* t_n^+ = s_n t_n^+ = s_{n+1},$$

我们有 $s_{n+1}^* \le s_n^*$。此外，由于

$$s_{n+1}t_n^+ = s_n t_n^+ t_n^+ = s_n t_n^+ = s_{n+1},$$

我们有 $s_{n+1}^* \le t_n^+$。类似地，我们有 $t_{n+1}^+ \le s_n^*$、 t_n^+。

我们用 n 归纳法证明 $s_{n+1} = st_n^+$ 和 $t_{n+1} = s_n^* t$ 。 $n = 0$ 的情形显然。于是，假设 $n > 0$，并且结论对 n 的较小取值成立。我们有 $s_{n+1} = s_n t_n^+$。根据归纳假设，我们有 $s_n = st_{n-1}^+$。由此可得 $s_{n+1} = st_{n-1}^+ t_n^+$。现在，由于 $t_n^+ \le t_{n-1}^+$，我们有 $s_{n+1} = st_n^+$。类似地，我们有 $t_{n+1} = s_n^* t$。□

命题4.4. 对于每个整数 $n \ge 0$，我们有 $s_n t_n = st$。此外，对于每个幂等元 e，我们有 $s_n e t_n = set$。

证明. 由命题4.3，我们有 $s_n = st_{n-1}^+$ 和 $t_n = s_{n-1}^* t$。

让我们对 $m \le n-1$ 使用归纳法证明 $st_m^+ s_m^* t = st$ 。首先假设 $m = 0$。因此，我们有

$$st_0^+ s_0^* t = ss_0^* t_0^+ t = st.$$

接下来假设 $m > 0$，并且结论对 m 的较小取值成立。由归纳假设和命题4.3，我们有

$$\begin{aligned} st_m^+ s_m^* t &= st_{m-1}^+ t_m^+ s_m^* s_{m-1}^* t = s_m t_m^+ s_m^* t_m \\ &= s_m s_m^* t_m^+ t_m = s_m t_m = st_{m-1}^+ s_{m-1}^* t \\ &= st. \end{aligned}$$

因此，我们有 $s_n t_n = st_{n-1}^+ s_{n-1}^* t = st$。

与上面类似，我们有 $s_n e t_n = set$。 □

由于 S 是有限的，根据命题4.3，存在一个整数 m，使得如果 $m \ne 0$，那么 $t_m^+ = s_m^*$ 和$t_{m-1}^+ \ne s_{m-1}^*$；否则 $t_0^+ = s_0^*$。接下来，我们定义一个映射

$$\varepsilon : S \times S \to E(S)$$

定义如下:

$$\varepsilon(s,t) = t_m^+ (= s_m^*).$$

于是，我们有

$$s_{m+1} = s_m = s\varepsilon(s,t) \text{ and } t_{m+1} = t_m = \varepsilon(s,t)t.$$

由此可得$(s\varepsilon(s,t))^* = (\varepsilon(s,t)t)^+ = \varepsilon(s,t)$。

设 $E^{st} = \{e \in E(S) \mid set = st\}$。由于幂等元 s^* 和 t^+ 都属于集合 E^{st}，因此 E^{st} 非空。由命题 4.3 和 4.4可得 $s\varepsilon(s,t)t = st$和 $\varepsilon(s,t) \le t^+, s^*$。子集 E^{st} 可能有多个极小元（见例 5.6 ）。

我们定义乘法 $\sharp:\mathbb{C}S\times\mathbb{C}S\to\mathbb{C}S$ 如下：

$$s\sharp t=\begin{cases}st, & \text{if } s^+=(st)^+, t^*=(st)^* \text{ and } s^*=t^+;\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

对于任意 $s,t\in S$。乘法运算 $\sharp$ 并不总是满足结合律（如例 5.7 所示）。此外，对于某些 $e\in E(S)$，我们定义乘法 $\overset{e}{\sharp}:\mathbb{C}S\times\mathbb{C}S\to\mathbb{C}S$ 如下：

$$s\overset{e}{\sharp}t=\begin{cases}st & \text{if } s^+=(st)^+, t^*=(st)^* \text{ and } s^*=t^+=e;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

根据命题 4.2，映射 Z 是一一对应。我们在 $\mathbb{C}S\times\mathbb{C}S$ 上定义如下乘法。

$$Z(s)*Z(t)=\sum_{\substack{s'\ll s,\\ t'\ll t}} s'\overset{\varepsilon(s'^+s,tt'^*)}{\sharp}t'$$

通过应用莫比乌斯反演，我们得到

$$u=\sum_{u'\ll u}\mu_S(u',u)Z(u') \text{ and } v=\sum_{v'\ll v}\mu_S(v',v)Z(v'),$$

对于任意 $u,v\in S$。于是

$$u*v=\sum_{u'\ll u,v'\ll v}\mu_S(u',u)\mu_S(v',v)Z(u')*Z(v').$$

命题 4.5。我们有

$$Z(s)*Z(t)=Z(st)$$

对于每个 $s,t\in S$。

证明。设 $s'\ll s$ 和 $t'\ll t$。首先要证明，若 $s'\overset{\varepsilon(s'^+s,tt'^*)}{\sharp}t'\neq 0$，则 $s't'\ll st$。显然，以下条件成立：

$$s'^+=(s't')^+, t'^*=(s't')^* \text{ and } s'^*=t'^+. \tag{1}$$

由于 $s'\ll s$ 和 $t'\ll t$，我们有 $s'=s'^+ss'^*$ 和 $t'=t'^+tt'^*$。现在，由于 $s'\overset{\varepsilon(s'^+s,tt'^*)}{\sharp}t'\neq 0$，$s'^*=t'^+=\varepsilon$，$s'^+s\ tt'^*=s't'=s'^+ss'^*t'^+tt'^*=s'^+s\varepsilon\ s'^+s\ tt'^*\ tt'^*=s'^+stt'^*$，$s'^+=s't'^+$，$t'^*=$ 我们有 (,)。因此，我们有 (,)。由于 ( ) 和 $(s't')^*$，我们有 $s't'\ll st$。

其次，我们需要证明：如果 $u\ll st$，对于某个 u in S，存在唯一的一对 (s°,t°)，使得 $s^\circ\ll s, t^\circ\ll t, s^\circ\overset{\varepsilon(s^{\circ+}s,tt^{\circ*})}{\sharp}t^\circ\neq 0$，且 $s^\circ t^\circ=u$。由于 $u\ll st$，我们有 $u=u^+stu^*$。令 $s'=u^+s$ and $t'=tu^*$。容易得出 $s'^+=u^+$ and $t'^*=u^*$。令 $s''=s'\varepsilon(s',t')$ 和 $t''=\varepsilon(s',t')t'$。显然，我们

有 $s'' \ll s,\ t'' \ll t$ and $s''^* = t''^+ = \varepsilon(s',t')$。由于 $s'\varepsilon(s',t')t' = s't' = u$，我们有 $s''^+ = u^+$ and $t''^* = u^*$。于是，我们有

$$s'' \overset{\varepsilon(s''^+s=s',tt''^*=t')}{\natural} t'' = s''t'' = s'\varepsilon(s',t')t' = u.$$

于是，我们得到了所需的一对。现在，我们证明这种存在的唯一性。设 $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ 满足 $s_1, s_2 \ll s,\ t_1, t_2 \ll t,\ s_1t_1 = s_2t_2 = u$，且 $s_1 \overset{\varepsilon}{(s_1^+s, tt_1^*)\natural}\ t_1$, $s_2 \overset{\varepsilon}{(s_2^+s, tt_2^*)\natural}\ t_2 \neq 0$。那么，数对 (s_1,t_1) 和 (s_2,t_2) 满足条件（1），因此我们有 $s_1^+ = s_2^+ = u^+$ 和 $t_1^* = t_2^* = u^*$。此外，我们有 $s_1^* = s_2^* = t_1^+ = t_2^+ = \varepsilon(u^+s, tu^*)$。因此，我们有 $s_1 = u^+s\varepsilon(u^+s,tu^*) = s_2$，并且 $t_1 = \varepsilon(u^+s,tu^*)su^* = t_2$。

结论由此得出。 □

以下定理推广了 Steinberg 在 [17] 中关于具有中心幂等元的有限半群的结果，并采用了类似的构造。

定理4.6。 映射 Z 是 $\mathbb{C}$-代数的同构。

证明。 由命题 4.2 和 4.5，结论得证。 □

引理 4.7。 设 $s'' \ll \underset{\varepsilon\ s''^+s'}{s'} \ll \underset{t't''^* = \varepsilon\ s''^+s\ tt''^*}{s} \ll t$。若 $s'' \overset{\varepsilon}{(s''^+s, tt''^*)\natural}\ t'' \neq 0$ 那么，我们有 $(,)\,(,)$。

证明。 设 $a = s''^+s$、 $b = tt''^*$、 $c = s''^+s'$ 和 $d = t't''^*$。

我们对 n 使用归纳法证明，

$$c_n^* \leq a_n^* \text{ and } d_n^+ \leq b_n^+, \tag{2}$$

对每个 $0 \leq n$ 都成立。我们有

$$\begin{aligned} c_0a_0^* &= s''^+s'(s''^+s)^* = s''^+s'^+ss'^*(s''^+s)^* = s'^+s''^+s(s''^+s)^*s'^* = s'^+s''^+ss'^* \\ &= s''^+s'^+ss'^* = s''^+s' = c_0. \end{aligned}$$

由此可得 $c_0^* \leq a_0^*$。类似地，我们有 $d_0^+ \leq b_0^+$。于是，假设 $n \geq 1$。根据归纳假设，我们有 $c_{n-1}^* \leq a_{n-1}^*$ 和 $d_{n-1}^+ \leq b_{n-1}^+$。由于

$$\begin{aligned} c_na_n^* &= c_0d_{n-1}^+(a_0b_{n-1}^+)^* = c_0(a_0b_{n-1}^+)^*d_{n-1}^+ = c_0(a_0b_{n-1}^+)^*b_{n-1}^+d_{n-1}^+ \\ &= s''^+s'(a_0b_{n-1}^+)^*b_{n-1}^+d_{n-1}^+ = s''^+s'^+ss'^*(a_0b_{n-1}^+)^*b_{n-1}^+d_{n-1}^+ \\ &= s'^+s''^+sb_{n-1}^+(a_0b_{n-1}^+)^*d_{n-1}^+s'^* = s'^+a_0b_{n-1}^+(a_0b_{n-1}^+)^*d_{n-1}^+s'^* \\ &= s'^+a_0b_{n-1}^+d_{n-1}^+s'^* = s'^+a_0d_{n-1}^+s'^* = s'^+s''^+sd_{n-1}^+s'^* \\ &= s''^+s'^+ss'^*d_{n-1}^+ = s''^+s'd_{n-1}^+ = c_0d_{n-1}^+ = c_n, \end{aligned}$$

我们有 $c_n^* \leq a_n^*$。类似地，我们有 $d_n^+ \leq b_n^+$。

Since $s'' \overset{\varepsilon(s''^+s,tt''^*)}{\natural}\ t'' \neq 0$, we have

$$s''^* = t''^+ = \varepsilon(s''^+s, tt''^*). \tag{3}$$

现在，我们通过对 n 作归纳法来证明:

$$s''^* \leq c_n^*, d_n^+, \tag{4}$$

对每个 $0 \leq n$。由于

$$s''c_0^* = s''^+s's''^*(s''^+s')^* = s''^+s'(s''^+s')^*s''^* = s''^+s's''^* = s'',$$

我们有 $s''^* \leq c_0^*$。类似地，我们有 $s''^* \leq d_0^+$。

现在，假设 $n \geq 1$。根据归纳法的假设，我们有 $s''^* \leq c_{n-1}^*, d_{n-1}^+$。由于

$$\begin{aligned} s''c_n^* &= s''(c_0d_{n-1}^+)^* = s''(c_0d_{n-1}^+)^*d_{n-1}^+ = s''^+s's''^*(s''^+s'd_{n-1}^+)^*d_{n-1}^+ \\ &= s''^+s'd_{n-1}^+(s''^+s'd_{n-1}^+)^*s''^* = s''^+s'd_{n-1}^+s''^* = s''^+s's''^*d_{n-1}^+ = s''d_{n-1}^+ \\ &= s''s''^*d_{n-1}^+ = s''s''^* = s'', \end{aligned}$$

我们有 $s''^* \leq c_n^*$。类似地，我们有 $s''^* \leq d_n^+$。

由 (2)、(3)、(4)，存在一个整数 m，使得 $a_m = b_m = c_m = d_m = s''^*$。结论得证。□

在引理 4.7 中，反向结论未必成立：$s'' \overset{\varepsilon}{\underset{(s''^+s',t't''^*)\natural}{}} t'' \neq 0$ 和 $s'' \overset{\varepsilon}{\underset{(s''^+s,tt''^*)\natural}{}} t'' = 0$（见例 5.8）。此外，也可能出现这种情况

$$s''^* = t''^+ = \varepsilon(s''^+s', t't''^*)$$

且 $s'' \natural t'' = 0$，但 $\varepsilon(s''^+s, tt''^*) \neq s''^*$（见例 5.9）。

引理 4.8. 设 $s, t \in S$ 和 $e, f \in E(S)$ 满足 $t^+ \leq e$ 和 $s^* \leq f$。我们有

$$\varepsilon(s,t) = \varepsilon(se,t) = \varepsilon(s,ft) = \varepsilon(se,ft).$$

证明. 设 $a_0 = s, b_0 = t, c_0 = se$ 和 $d_0 = t$。由于

$$ed_n = ec_{n-1}^*t = c_{n-1}^*et = c_{n-1}^*et^+t = c_{n-1}^*t = d_n,$$

对每个 $n \geq 0$，我们有 $d_n^+ \leq e$。我们对 n 使用归纳法，证明对每个 $n \geq 0$，都有 $a_{2n+1} = c_{2n+1}$ 和 $b_{2n} = d_{2n}$。我们有 $a_1 = st^+$ 和 $c_1 = set^+$。由于 $t^+ \leq e$，我们有 $a_1 = c_1$。现在假设 $n > 0$，且结论对小于 $2n+1$ 的值成立。我们有 $a_{2n+1} = sb_{2n}^+$ 和 $c_{2n+1} = sed_{2n}^+$。由于 $d_{2n}^+ \leq e$ 和 $b_{2n}^+ = d_{2n}^+$，我们有 $a_{2n+1} = c_{2n+1}$。现在，由于 $a_{2n+1} = c_{2n+1}$，我们有 $b_{2n+2} = a_{2n+1}^*t = c_{2n+1}^*t = d_{2n+2}$。

因此，我们有 $\varepsilon(s,t) = \varepsilon(se,t)$。类似地，我们有 $\varepsilon(s,t) = \varepsilon(s,ft)$。

由于 $s^* \leq f$，我们得到 $sf = s$。因此，我们有 $sef = se$，从而 $(se)^* \leq f$。现在，如上所述，我们有 $\varepsilon(se,t) = \varepsilon(se,ft)$。

结论得证。□

根据引理 4.8，有如下推论成立。

推论 4.9. 设 $s' \ll s$ 和 $t' \ll t$ 满足 $s'^* = t'^+$。我们有

$$\varepsilon(s'^+s, t') = \varepsilon(s', tt'^*) = s'^*.$$

设 $s,t \in S$。我们有

$$s = \sum_{s' \ll s} \mu_S(s',s) Z(s') \text{ and } t = \sum_{t' \ll t} \mu_S(t',t) Z(t').$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned} s * t &= \sum_{\substack{s' \ll s, \\ t' \ll t}} \mu_S(s',s)\mu_S(t',t) Z(s') * Z(t') \\ &= \sum_{\substack{s' \ll s, \\ t' \ll t}} \mu_S(s',s)\mu_S(t',t) \Big(\sum_{\substack{s'' \ll s', \\ t'' \ll t'}} \big(s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t''\big) \Big) \\ &= \sum_{\substack{s'' \ll s, \\ t'' \ll t}} \Big[\sum_{\substack{s'' \ll s' \ll s, \\ t'' \ll t' \ll t,}} \big(\mu_S(s',s)\mu_S(t',t)\big) \Big] s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t'' \neq 0 \\ &= \sum_{\substack{s'' \ll s, \\ t'' \ll t}} \Big[\sum_{t'' \ll t' \ll t} \Big(\sum_{\substack{s'' \ll s' \ll s, \\ s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t'' \neq 0}} \mu_S(s',s)\Big)\mu_S(t',t) \Big] s''t''. \end{aligned}$$

我们定义函数 $\xi : S^{(s)} \times S^{(t)} \to \mathbb{C}$，其中 $S^{(s)} = \{s'' \in S \mid s'' \ll s\}$，对每个 $s \in S$，如下所示：

$$\begin{aligned} \xi(s'',t'') &= \sum_{t'' \ll t' \ll t} \Big(\sum_{\substack{s'' \ll s' \ll s, \\ s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t'' \neq 0}} \mu_S(s',s)\Big)\mu_S(t',t) \\ &= \sum_{s'' \ll s' \ll s} \Big(\sum_{\substack{t'' \ll t' \ll t, \\ s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t'' \neq 0}} \mu_S(t',t)\Big)\mu_S(s',s), \end{aligned}$$

对每个 $s'' \in S^{(s)}$ 和 $t'' \in S^{(t)}$。

引理 4.10. 设 $s'' \in S^{(s)}$ 和 $t'' \in S^{(t)}$ 满足 $s'' \natural t'' \neq 0$。若 $s^* \neq t^+$，则 $\xi(s'', t'') = 0$。

证明. 由于 $s^* \neq t^+$，我们有 $s^* \not\leq t^+$ 或 $t^+ \not\leq s^*$。根据对称性，不妨设 $s^* \not\leq t^+$。因此，我们有 $st^+ \neq s$。由于 $s'' \natural t'' \neq 0$，可得 $s''^* = t''^+$。现在，由于 $t'' \ll t$，我们有 $s''^* \leq t^+$，因此得到 $s'' \ll st^+ \ll s$。所以，我们有 $s'' \neq s$。

设 $t'' \ll t' \ll t$。我们证明 $\Big(\sum_{\substack{s'' \ll s' \ll s, \\ s''^{\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*)}_{\natural} t'' \neq 0}} \mu_S(s',s) \Big) = 0$，从而完成引理的证明。

如果对于所有 $s'' \ll s' \ll s$，$\varepsilon(s''^+ s', t' t''^*) = s''^*$，并且考虑到 $s'' \neq s$，则可得 $\sum_{s'' \ll s' \ll s} \mu_S(s',s) = 0$。

接下来，假设存在一个元素 $s'' \ll x \ll s$ 使得 $\varepsilon(s''^+ x, t' t''^*) \neq s''^*$。根据引理 4.7，存在两两不同的元素 $s'' \ll s_1, \ldots, s_n \ll s$，使得满足以下条件：

(1) 对每个 $1 \le i \le n$, $\varepsilon(s''^{+}s_i, t't''^{*}) \neq s''^{*}$; (2) 若 $u \ll s_i$ 且 $u \neq s_i$, 则对所有 $s'' \ll u \ll s$, $\varepsilon(s''^{+}u, t't''^{*}) = s''^{*}$; (3) 若对于某个 $s'' \ll u \ll s$, $\varepsilon(s''^{+}u, t't''^{*}) \neq s''^{*}$, 则存在一个整数 i 使得 $s_i \ll u$。

由于 $t' \ll t$, 我们有 $t'^{+} \le t^{+}$。然后, 根据引理 4.8, 我们有

$$\varepsilon(s''^{+}s_i, t't''^{*}) = \varepsilon(s''^{+}s_i, t^{+}t't''^{*}) = \varepsilon(s''^{+}s_it^{+}, t't''^{*}).$$

现在, 由于 $s_it^{+} \ll s_i$, 应用上文提到的第二个条件, 我们可以得出 $s_it^{+} = s_i$。因此, 对于每个 $1 \le i \le n$, 都有 $s_i \ll st^{+}$。

对于每个 $1 \le i \le n$, 令 $X_i = \{s'' \ll x \ll s \mid s_i \ll x\}$。考虑整数$i_1$、……、$i_m$以及元素 x、$y \in X_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap X_{i_m}$。令 $u = x^{+}y^{+}sx^{*}y^{*}$。由于$x, y \ll s$, 我们有 $u \ll x, y$。令 $1 \le j \le m$。由于 $s_{i_j} \ll x, y$, 我们有 $s_{i_j}^{+} \le x^{+}, y^{+}$以及 $s_{i_j}^{*} \le x^{*}, y^{*}$。因此, 我们得到 $s_{i_j}^{+}x^{+}y^{+}sx^{*}y^{*}s_{i_j}^{*} = s_{i_j}^{+}ss_{i_j}^{*} = s_{i_j}$。然后, 我们有 $s_{i_j} \ll u$。因此, 子集 $X_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap X_{i_m}$在关于关系 $\ll$时有一个最小元素 $x_{i_1,\ldots,i_m}$。现在, 由于不同元素 s和 st^{+}属于子集 $X_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap X_{i_m}$, 我们有

$$\sum_{\substack{s'' \ll x \ll s \\ x \in X_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap X_{i_m}}} \mu_S(x, s) = \sum_{x_{i_1,\ldots,i_m} \ll x \ll s} \mu_S(x, s) = 0.$$

因此, 我们得出 $(\sum_{\substack{s'' \ll x \ll s \\ \varepsilon(s''^{+}x, t't''^{*}) \neq s''^{*}}} \mu_S(x, s)) = 0$, 从而我们得到 $\xi(s'', t'') = 0$。 □

现在, 考虑引理 4.10, 我们继续给出以下定理。

定理 4.11。令 s, $t \in S$。如果 $s^{*} \neq t^{+}$, 则有 $s * t = 0$。

令 $X_e = \{x_s \in X \mid s \in L_eR_e\}$。令 $\theta_e(X_e)$ 表示凯莱表 $(Z(S), *)$ 的子矩阵 $L_e \times R_e$ 的行列式, 其中每个幂等元为 $e \in S$。

定理 4.12。令 $S \in$ ECOM。对于 $s \in S$, 置 $y_s = \sum \mu_S(t, s)x_t$。于是, $t \ll s$有

$$\theta_S(X) = \pm \prod_{e \in E(S)} \widetilde{\theta}_e(Y_e)$$

其中 $Y_e = \{y_s \mid s \in L_eR_e\}$。此外, 对于每个幂等元 e, 当且仅当 时, S 的行列式非零。

证明。由于 $\mathbb{C}S \cong Z(\mathbb{C}S)$, 根据定理4.6, 我们可以取集合

$$X = \{x_1, \ldots, x_{|S|}\}$$

作为 $Z(\mathbb{C}S)$ 的基。令 M 为一个矩阵, 它由重排并移动 $C(X)$ 的行和列得到, 使得对于每个幂等元 $e \in E(S)$, 子集 L_e 中的元素成为相邻的行, 子集 R_e 中的元素成为相邻的列 。若 $s \in L_e$ 且 $t \in R_{e'}$, 对于某些不同的

幂等元 e 和 e'，则有 $x_s * x_t = 0$。于是，矩阵 M 的行列式 $\widetilde{}$ 等于 $\prod_{e\in E(S)} \theta_e(X_e)$，因此有

$$\theta_{(Z(\mathbb{C}S),X)} = \pm \prod_{e\in E(S)} \widetilde{\theta}_e(X_e).$$

令 P 为相对于 $\mathbb{C}S$ 和 $\mathbb{C}Z(S)$ 的基而言的 Z 的 $S\times S$ 矩阵。由于关系 $\ll$ 是一个偏序，P 的行列式等于 1。现在，我们应用定理 2.1。由于 Z 是一个同构，并且如上所述，我们有

$$\theta_S(X) = \widetilde{Z}^{-1}(\theta_{(\widetilde{Z}(\mathbb{C}S),X)}) = \widetilde{Z}^{-1}(\pm \prod_{e\in E(S)} \widetilde{\theta}_e(X_e)) = \pm \prod_{e\in E(S)} \widetilde{Z}^{-1}(\widetilde{\theta}_e(X_e)).$$

应用莫比乌斯反演，我们有 $Z(y_s) = x_s$。因此，我们得到

$$\theta_S(X) = \pm \prod_{e\in E(S)} \widetilde{\theta}_e(Y_e).$$

□

$\widetilde{}$请注意，在定理 4.12 中，$\prod \theta_e(Y_e)$ 的符号取决于：为构造 M 而对 $C(X)$ 的行和列进行的重排与移位次数是奇数还是偶数 $(e\in E)$。例 5.11 应用定理 4.12 证明半群 S_9 的行列式非零。

5. 附录 A

在附录中，我们给出了本文讨论的半群的例子。对于每个半群，我们都提供了详细信息，包括其凯莱表和缩约半群行列式。在所给的例子中，凯莱表的行和列中不包含零元。如果凯莱表中两个非零元素相乘的结果为零元，则用一个点表示。

例 5.1。

S_1	y	z	u	t
y	.	.	.	y
z	.	.	z	z
u	y	.	u	u
t	y	z	u	t

$\widetilde{\theta}_{S_1}(X_{S_1}) = -x_y^2 x_z^2$。我们有 $y^* = t$ 和 $y^+ = u$。

例 5.2。

S_2	y	z	u	t	w	v	q
y	.	.	.	.	.	y	y
z	.	.	.	.	.	.	z
u	.	.	.	y	y	y	u
t	.	.	z	.	z	t	t
w	.	.	z	y	y	t	w
v	y	.	u	y	u	v	v
q	y	z	u	t	w	v	q

$\widetilde{\theta}_{S_2}(X_{S_2}) = x_y^3 x_z^4$。
我们有 $t \ll w$, $u \ll w$ 和 $z = tu \not\ll ww = y$。

例5.3。

S_3	a	b	s'	t'	s	t	e	f
a	.	.	.	.	.	.	a	a
b	.	.	.	.	.	.	b	b
s'	.	.	.	a	.	a	s'	s'
t'	.	.	.	.	.	.	t'	t'
s	.	.	.	a	.	b	s'	s
t	.	.	.	.	.	.	t	t
e	a	b	s'	t'	s	t'	e	e
f	a	b	s'	t'	s	t	e	f

$\theta_{S_3}(X_{S_3}) = 0$。
我们有 $s' \ll s$, $t' \ll t$, $s't' = a$, $st = b$ 和 $a \not\ll b$。

例5.4。 在半群 S_1 *(例 5.1)*中，我们有 $I_t^* = \{0, z, u\}$和 I_t^* 不是理想。

例5.5。

S_4	y	z	u	t	w	v
y	.	.	.	.	.	y
z	.	.	.	.	z	.
u	.	.	.	u	u	u
t	.	z	.	t	t	t
w	y	z	.	t	w	t
v	.	z	u	t	t	v

$\widetilde{\theta}_{S_4}(X_{S_4}) = -x_y^2 x_z^2 x_u^2$。我们有 $wS_4w = \{0, z, t, w\}$、 $vS_4v = \{0, u, t, v\}$、 $I_w^* = \{0, u, t\}$、 $I_v^+ = \{0, z, t\}$、$I_w^* \not\subseteq wS_4w$ 以及 $I_v^+ \not\subseteq vS_4v$。

例 5.6. 设 S_5 是如下定义的半群。

$$\begin{aligned} S_5 = \langle 0, s, t, e, f, g, h, 1 \mid\ & se = s, ft = t, e^2 = e, f^2 = f, g^2 = g, h^2 = h, \\ & ef = fe, gh = hg = 0, ge = eg = g, gf = fg = g, \\ & he = eh = h, hf = fh = h, sgt = sht = st, \\ & 0 \textit{ is the zero of } S_5 \textit{ and } 1 \textit{ is the identity of } S_5 \rangle, \end{aligned}$$

$\theta_{S_5}(X_{S_5}) = 0.$

我们有 $s^* = e$、 $t^+ = f$、 $E^{st} = \{g,\ h,\ ef\}$ 以及 $g,\ h$ 在 E^{st} 中是极小的。此外，我们有

$$(st)^* = t^* = (et)^* = (ht)^* = (gt)^* = 1$$

and

$$(st)^+ = s^+ = (sf)^+ = (sh)^+ = (sg)^+ = 1.$$

例 5.7。

S_6	y	z	u	t	w	v	q
y	.	.	z	z	z	y	y
z	.	.	.	.	.	z	z
u	z	.	y	y	y	u	u
t	z	.	y	y	y	u	t
w	z	.	y	y	y	w	w
v	y	z	u	t	u	v	v
q	y	z	u	t	w	v	q

$\theta_{S_6}(X_{S_6}) = 0$。

我们有 $(u \sharp t) \sharp w \neq u \sharp (t \sharp w)$，因为 $u \sharp t = 0$ 和 $u \sharp (t \sharp w) = utw$。

例 5.8. 令 S_7 为由以下字母生成的半群

$$0, s, s_1, s_2, t, t_1, t_2, s_3, t_3, s_4, s_5,$$

定义如下

$$\begin{aligned}
&\langle xy = yx \text{ and } x^2 = x, \text{ for all } x, y \in \{s_1, s_2, t_1, t_2, s_3, t_3, s_4, s_5\},\\
&s_3 < s_1, t_3 < t_2, s_4 < s_5 < s_2, s_5 < t_1,\\
&s_1 s = s, s s_2 = s, t_1 t = t, t t_2 = t, s_3 s s_5 = s_3 s, s_5 t t_3 = t t_3,\\
&\{s_2, s_4, s_5, t_1, t_2, t_3\} s, s\{s_1, s_3, t_2, t_3\}, \{s_1, s_3, t_2, t_3\} t, t\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, t_1\} = 0,\\
&ss, ts, tt = 0, \text{ and } 0 \text{ is the zero of } S_7\rangle.
\end{aligned}$$

借助 *GAP* [8]，，已确定半群 S_7，并验证了以下条件。

$$\begin{aligned}
&s_1 = s^+, s_2 = s^*, t_1 = t^+, t_2 = t^*,\\
&s_3 = s'^+, t_3 = t'^*, s_4 = s'^* = t'^+, \text{ where } s' = s_3 s s_4 \text{ and } t' = s_4 t t_3,\\
&s_5 = (s'^+ s)^* = (t t'^*)^*.
\end{aligned}$$

于是，我们有 $s' \ll s$ 和 $t' \ll t$。我们推得 $s' \sharp t' \neq 0$, $\varepsilon(s'^+ s, t t'^*) = (s'^+ s)^*$, 以及 $\varepsilon(s', t') = s'^*$ 满足 $(s'^+ s)^* \neq s'^*$。

例 5.9.

S_{10}	y	z	u	t	w	v	q
y	.	.	.	.	.	y	y
z	.	.	.	.	z	z	z
u	.	.	.	.	z	u	u
t	.	.	.	.	z	u	t
w	y	.	y	y	w	w	w
v	y	z	u	u	w	v	v
q	y	z	u	t	w	v	q

$\theta_{S_8}(X_{S_8}) = 0$。

我们有 $z \leq u$, $y \leq t$ 和

$$\varepsilon(z^+z, yy^*)(= z^* = y^+ = w) \neq \varepsilon(z^+u, ty^*)(= v).$$

此外，我们有 $z \sharp y = 0$。

例5.10。

S_9	y	z	u	t	w	v	q
y	.	.	.	.	.	y	y
z	.	.	.	.	.	.	z
u	.	.	.	y	y	.	u
t	.	.	z	.	z	t	t
w	.	.	z	y	y	t	w
v	y	.	u	.	u	v	v
q	y	z	u	t	w	v	q

关系 $t \ll w$ 和 $u \ll w$ 是不可约的， $t^* = u^+(= v)$ 和 $w^* = w^+(=q)$。我们有 $\varepsilon(t^+w, wu^*)(= q) \neq t^*$。

例 5.11。 考虑例 *5.10* 中的半群 S_9 。半群 $Z(S_9)$ 的乘法 $*$ 如下：

$(Z(S_9), *)$	y	z	u	t	$u+t+w$	v	$v+q$
y	.	.	.	.	.	y	y
z	.	.	.	.	.	.	z
u	.	.	.	y	y	.	u
t	.	.	z	.	z	t	t
$u+t+w$	.	.	z	y	y	t	$u+t+w$
v	y	.	u	.	u	v	v
$v+q$	y	z	u	t	$u+t+w$	v	$v+q$

根据定理*4.6*，左侧的表格可用于 $Z(S_9)$。

$(Z(S_9)\ *)$	y	z	u	t	w	v	q
y	.	.	.	.	.	y	.
z	.	.	.	.	.	.	z
u	.	.	.	y	.	.	u
t	.	.	z	.	.	t	.
w	.	.	.	.	$-z$	.	w
v	y	.	u	.	.	v	.
q	.	z	.	t	w	.	q

M	y	u	v	z	t	w	q
y	.	.	y	.	.	.	.
t	.	z	t	.	.	.	.
v	y	u	v	.	.	.	.
z	.	.	.	.	.	.	z
u	.	.	.	.	y	.	u
w	.	.	.	.	.	$-z$	w
q	.	.	.	z	t	w	q

右侧的表格 M 是通过对 $Z(S_9)$ 的行$\widetilde{\ }$和列重新排列并移位得到的，使得对于每个幂等元 $e \in E(S_9)$，子集 L_e 的元素所在的行彼此相邻$\widetilde{\ }$，且子集 R_e 的元素所在的列彼此相邻。于是，很容易算出矩阵 M 的行列式非零，且等于 $-x_y^3x_z^4$。因此， $\widetilde{\theta}_{S_9}(X_{S_9})$ 的行列式也非零，其值为 $x_y^3x_z^4$。

致谢

作者获得了 CMUP 的部分资助。该机构由国家资金通过科学与技术基金会（FCT）提供资助，项目编号为 UIDB/00144/2020。作者还感谢 FCT 通过依据《科学就业法》（DL 57/2016）签订的合同提供的支持。

参考文献

[1] J. Almeida。《有限半群与泛代数》，代数丛书第 3 卷。世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，1994年。由作者从 1992 年葡萄牙语原版翻译并修订。[2] C. J. Ash。具有交换幂等元的有限半群。《澳大利亚数学会杂志 A 辑》，43(1):81–90，1987年。[3] I. Assem、D. Simson 和 A. Skowroński。《结合代数表示论基础。第 1 卷》，伦敦数学会学生教材第 65 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006年。表示论方法。[4] D. J. Benson。《表示与上同调。I》，剑桥高等数学研究丛书第 30 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版，1998年。有限群与结合代数的基础表示论。[5] A. H. Clifford 和 G. B. Preston。《半群代数理论。第 I 卷》。数学调查，第 7 号。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961年。[6] J. Fountain、G.M.S. Gomes 和 V. Gould。扩张、半丰裕性与幂零元幺半群。《代数通讯》，27(2):595–614，1999年。[7] F. G. Frobenius。超复数量理论。《莱比锡普鲁士科学院会议录》，24:504–537，1903年。[8] GAP 小组。《GAP——群、算法与编程，4 2 版》，2022*12*..。[9] J. A. Green。论半群的结构。《数学年刊》（第 2 辑），54:163–172，1951年。[10] M. V. Lawson。半群与有序范畴。I. 约化情形。《代数杂志》，141(2):422–462，1991年。[11] B. Lindström。半格上的行列式。《美国数学会会刊》，20 208，1969 207: – 。[12] J. Okniński。《半群代数》，纯粹与应用数学专著和教材第 138 卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1991年。[13] I. S. Ponizovskiĭ。有限交换半群的半群代数的弗罗贝尼乌斯性。《苏联科学院学报：数学辑》，32:820–836，1968年。[14] J. Rhodes 和 B. Steinberg。《The q有限半群的 -理论》。施普林格数学专著。Springer，纽约，2009年。[15] H. J. S. Smith。论某个算术行列式的值。《伦敦数学会会刊》，7:208–212，1875/76年。

[16] E. Spiegel 和 Christopher J. O'Donnell。《关联代数》，纯粹与应用数学专著和教材第 206 卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1997年。[17] B. Steinberg。半群 Dedekind-Frobenius 行列式的因式分解。《代数杂志》，605:1–36，2022年。[18] R. Wenger。具有拟 Frobenius 代数的某些半群。II.《加拿大数学杂志》，21:615–624，1969年。[19] H. S. Wilf。Hadamard 行列式、莫比乌斯函数与图的色数。《美国数学会通报》，74:960–964，1968年。[20] J. A. Wood。有限环上模的对偶性及其在编码理论中的应用。《美国数学杂志》，121(3):555–575，1999年。[21] J. A. Wood。有限交换链环的半群行列式的因式分解。载于《编码理论、密码学及相关领域（瓜纳华托，1998）》，第 249–259 页。Springer，柏林，2000年。

M.H. Shahzamanian，CMUP，数学系，理学院，波尔图大学，Rua do Campo Alegre s/n，4169–007 波尔图（葡萄牙）。电子邮箱地址：m.h.shahzamanian@fc.up.pt