arXiv:2302.04328v1 [math.AG] 8 Feb 2023

曲线上的卷曲面的割线轨迹

George H. Hitching

Abstract. 给定一条曲线 C 及其上的一个线性系 ℓ，割线轨迹$V_e^{e-f}(\ell)$ 参数化次数为 e、在 ℓ 上施加至多 $e-f$ 个条件的有效除子。对于秩为 r 的向量丛 $E \to C$，我们定义行列式子概形 $H_e^{e-f}(\ell) \subseteq \mathrm{Hilb}^e(\mathbb{P}E)$ 和 $Q_e^{e-f}(V) \subseteq \mathrm{Quot}^{0,\,e}(E^*)$，将 $V_e^{e-f}(\ell)$ 推广，并给出若干例子。我们描述 $Q_e^{e-f}(V)$ 的扎里斯基切空间，并举例说明，$Q_e^{e-f}(V)$ 的光滑性不一定由 Petri 映射的单射性决定。我们将阿贝尔–雅可比映射和线性级数的概念推广到 Quot 概形的情形。

我们给出广义割线轨迹非空的一些充分条件，并在完备情形下给出一个判据，其中 $f=1$ 由塞格雷不变量 $s_1(E)$ 表示。这由此导出一种与 [Hit19] 中类似的半稳定性几何刻画。运用这些想法，我们还部分回答了 Lange 关于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 非常丰性的一个问题，并证明对于任意曲线，当 E 和 V 足够一般时，$Q_e^{e-1}(V)$ 或为空，或具有预期维数。当 $Q_e^{e-1}(V)$ 具有并达到零维的预期维数时，我们利用 Oprea–Pandharipande 和 Stark 的公式枚举 $Q_e^{e-1}(V)$。

我们提及若干值得进一步研究的可能方向。

1. 引言

本文旨在研究曲线上的卷曲面的割线轨迹，并初步探讨 Quot 概形上的广义割线轨迹。

设 C 是一条亏格为 g 的复光滑射影曲线。对于 $e \geq 1$，令 C_e 为 C 的第 e 个对称积。对于 $n \geq 1$，我们考虑如下轨迹

$$C_e^f \;:=\; \{D \in C_e : h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq f+1\} \;=\; \{D \in C_e : h^0(C, K_C(-D)) \geq g-e+f\}.$$

这是 C_e 的一个行列式子簇，其切空间由 Petri 映射定义。关于 C_e^f 的构造及性质，[ACGH85，第四章]中有详细说明。轨迹 C_e^f 是 Brill–Noether 轨迹在阿贝尔–雅可比映射下的原像

$$W_e^f \;:=\; \{L \in \mathrm{Pic}^e(C) : h^0(C, L) \geq f+1\}$$

由阿贝尔–雅可比映射 $C_e \to \mathrm{Pic}^e(C)$ 给出。

C_e^f 中的除子有一个重要的刻画，由几何黎曼–罗赫定理给出；该定理可以解释为：

$$C_e^f \;=\; \{D \in C_e : \dim \mathrm{Span}\,(\varphi_{K_C}(D)) \leq e-f-1\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14H60；14N07；14M12。

更一般地，设 L 为一个线丛， $\ell = (L, V)$ 为一个维数为 n 的线性级数。对于 C 上的一个有效除子 D，我们定义

$$\ell(-D) := \big(L, V \cap H^0(C, L(-D))\big).$$

对于 $0 \leq f \leq e$，我们于是得到一个与 ℓ 相关联的割线轨迹，定义如下:

$$V_e^{e-f}(\ell) := \{D \in C_e : \dim\big(V \cap H^0(C, L(-D))\big) \geq n+1-e+f\}. \tag{1.1}$$

等价地，记 φ 为自然映射 $C \to \mathbb{P}V^*$，则有

$$V_e^{e-f}(\ell) = \{D \in C_e : \dim \mathrm{Span}\,(\varphi(D)) \leq e-f-1\}.$$

注意，$C_e^f = V_e^{e-f}\big(K_C, H^0(C, K_C)\big)$。

轨迹 C_e^f 是曲线的重要不变量，Martens 和 Mumford 的定理 [ACGH85, § IV.5]，以及它们向 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的推广（见 [Baj15]）对此有所体现。C_e^f 的各种情形及性质已在[Cop95], [CM91], [GP82] 等文献中得到研究。C_e^f 的切空间以及 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的切空间已在 [CJ91], [CJ96], [Baj15] 和 [Baj18] 中得到研究。

$V_e^{e-f}(\ell)$ 的计数几何是一个重要的研究主题。C_e^f 的计数几何见 [ACGH85, Chap. VII], , 而 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的计数几何则见[LeB06], [Far08], [Far22], [Cot11], [Ung21a], [Ung21b], [CHZ21], 等文献。与 Brill–Noether 轨迹 W_e^f 不同，即使 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的预期维数非负，它也不一定由一个具有适当丰性性质的映射定义，因此非空性问题可能并非平凡。 [Ung19]，给出了预期维数为正却为空的割线轨迹实例，而[Ung21b] 则探讨了交理论计算何时具有计数意义。

本文旨在研究 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的两个密切相关的推广，分别通过增大 $\dim(C)$ 和 $\mathrm{rk}(L)$ 得到。第一个推广十分常见。设 S 是一个维数为 $r \geq 1$ 的光滑射影簇， $\ell = (\mathcal{L}, V)$ 是 S上的一个维数为 n 的线性级数。令 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) \subseteq \mathrm{Hilb}^e(S)$ 为包含既约子概形的不可约分支。我们定义

$$H_e^{e-f}(\ell) := \{Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) : \dim\big(V \cap H^0(S, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z)\big) \geq n+1-e+f\}.$$

（无需限制在可平滑分支 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 上；见备注 2.3。）显然，当 S 是曲线 C 时，$H_e^{e-f}(\ell)$ 就是 $V_e^{e-f}(\ell)$。当 S 是曲面时， $H_e^{e-f}(\ell)$ 的计数几何已通过对 Segre 类的积分在 [EGL01], [Voi19], [MOP2019] 及其他文献中得到研究。我们主要关注 S为射影丛 $\pi\colon\ \mathbb{P}E \to C$和 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M$ 的情形，此时可以运用关于曲线上向量丛的技术。

对于 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的第二种推广，设 $E \to C$ 是一个秩为r 、次数为 d的向量丛。概形 $\mathrm{Quot}^{0,\,e}(E^*)$ 参数化了 E^* 的长度为 e的挠商；等价地，参数化了秩为 r、次数为 $-d-e$的子层 $F^* \subset E^*$。设 M是一个线丛，并假设 $V \subseteq H^0(C, E^* \otimes M)$ 是一个维数为$n+1$的子空间。我们定义

$$Q_e^{e-f}(E, M, V) := \{[F^* \to E^*] \in \mathrm{Quot}^{0,e}(E^*) : h^0(C, F^* \otimes M) \geq n+1-e+f\}.$$

如果上下文中 E和 M都很明确，我们就简写为 $Q_e^{e-f}(V)$；并将$Q_e^{e-f}\big(H^0(C, E^* \otimes M)\big)$缩写为 Q_e^{e-f}。注意，对于所有线丛L，$\mathrm{Quot}^e(L^{-1}) = C_e$。在这种情况下，我们有

$$Q_e^{e-f}(\mathcal{O}_C, L, V) = Q_e^{e-f}(L, \mathcal{O}_C, V) = V_e^{e-f}(L^*, V).$$

特别要注意的是

$$C_e^f \;=\; Q_e^{e-f}\left(K_C, \mathcal{O}_C, H^0(C, K_C)\right). \tag{1.2}$$

显然（第 2.3 节），$H_e^{e-f}(\ell)$ 和 $Q_e^{e-f}(E, M, V)$ 与 $V_e^{e-f}(\ell)$ 一样，都是预期余维为 $f(n+1-e+f)$ 的行列式簇。此外，$Q_e^{e-f}(H^0(C, E^*))$ 是 Quot 概形中 Brill–Noether 轨迹的一种类似物；参见注 2.8。从许多方面来看，轨迹 $Q_e^{e-f}(V)$ 的性质优于 $H_e^{e-f}(\ell)$。不过，鉴于与 $H_e^{e-f}(\ell)$ 相关的几何直觉颇具启发性，我们尽可能地并行发展了这两个概念。

现在简要概述本文内容。在介绍卷曲面和割线亏格的一些预备知识之后，我们构造轨迹 $H_e^{e-f}(\ell)$ 和 $Q_e^{e-f}(V)$，并给出一些例子。在第 2.5 节中，我们采用 [Sta21a] 和 [Hit20], 中的方法，描述一个自然的满射有理映射 $\alpha\colon H_e^{e-f}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M, V) \dashrightarrow Q_e^{e-f}(E, M, V)$，当 $f = 0$ 时它是双有理的。此映射是下文中的一个实用工具。我们在第 2.5.1 节中简要讨论 α 的不定点轨迹。在第 2.6 节中，我们证明当 $n+1-e+f \geq 0$ 时，$Q_e^{e-f}(V)$ 不包含于 $Q_e^{e-f-1}(V)$，并给出关于 $H_e^{e-f}(\ell)$ 的部分类似结论。在第 2.7 节中，我们讨论一般投影对 $H_e^{e-f}(\ell)$ 型和 $Q_e^{e-f}(V)$ 型割线轨迹的影响。

接下来，假设 $\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 包含一个点 $[F^* \to E^*]$，其中 F 是稳定的。那么，从 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 和 $\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 到稳定向量丛模空间 $U_C(r, d+e)$ 存在有理分类映射，其中稳定向量丛的秩为 r、次数为 $d+e$。这些映射推广了阿贝尔–雅可比映射 $C_e \to \mathrm{Pic}^e(C)$，并将割线轨迹映射到 Brill–Noether 轨迹。在第 3 节中，我们研究这一情形，并将线性级数的概念推广到 Quot 概形的语境中。

在第 4 节中，我们给出两类广义割线轨迹非空性的一些条件，从而推广文献中关于 $V_e^{e-f}(\ell)$ 的各种命题。在第 5 节中，我们描述 $Q_e^{e-f}(E, M, V)$ 的扎里斯基切空间。在完备情形下，我们证明光滑性由一个 Petri 映射控制；然而，一般而言，光滑性的判据并不是 Petri 映射的单射性。事实上，在第 5.4 节中，我们通过例子说明，当 Q_e^{e-f} 具有到某个 Brill–Noether 轨迹的映射时，一般来说，割线轨迹的光滑性既不是 Brill–Noether 轨迹光滑性的必要条件，也不是充分条件。

在本文余下部分，我们聚焦于 $f = 1$ 的情形，将 [Hit19] 中对线性正规卷曲面的拐点轨迹的研究加以推广，并采用类似的方法。在第 6 节中，我们利用 E 的可逆子层的 Quot 概形，为 Q_e^{e-1} 构造一个参数空间。这一构造有若干应用。在命题 7.4 中，我们给出一个判据，用以判断 $\left(H_e^{e-1}\right)_{\mathrm{nd}}$ 和 Q_e^{e-1} 是否非空，该判据以塞格雷不变量 $s_1(E)$ 表述。在定理 7.7 中，我们对 Lange[Lan92] 提出的一个问题给出部分解答，该问题涉及塞格雷不变量与有理曲面上线丛的非常丰性之间的关系；事实上，这一结果对 C 上任意维数的射影丛均成立。在第 7.4 节中，我们用割线轨迹刻画半稳定丛。在第 8 节中，我们证明，对于任意曲线上的一般向量丛 E 以及一般的 $V \subseteq H^0(C, E^* \otimes M)$，轨迹 $Q_e^{e-f}(V)$ 或为空，或具有预期维数。后一部分采用了与 [Hit19, § 6], 类似的方法，并依赖于克莱曼关于平移像横截性的定理。最后，我们说明如何利用 [EGL01], [OP21] 和 [Sta21b] 的结果，在 $Q_e^{e-1}(V)$ 具有且达到预期零维时对其进行计数。

未来研究方向。关于 $U_C(r,d)$ 上的 Brill–Noether 轨迹，或相干系统模空间（例如参见 [GT09] 和 [New22]），可以提出许多问题；这些问题也可以针对 $H^{e-f}_e(\ell)$ 和 $Q^{e-f}_e(V)$ 来表述。例如，关于 $H^{e-f}_e(\ell)$ 和 $Q^{e-f}_e(V)$ 的非空性、分支、维数及光滑性的许多问题仍未解决。值得进一步研究 Q^{e-f}_e 的光滑性与其映射到的 Brill–Noether 轨迹之间的关系，以及半稳定性在整个问题中所起的作用。

$Q^{e-f}_e(V)$的计数几何很有研究价值，因为它是对 $V^{e-f}_e(\ell)$计数几何的自然推广，也是近期研究 [OP21] 和[Sta21b]的一个自然应用。乍看之下，它比 $H^{e-f}_e(\ell)$的计数几何更易处理：由于卷曲包含许多线性空间， $e \geq 3$ 的轨迹 H^{e-f}_e具有超额维数的分支。

另一方面： $H^{e-f}_e(\ell)$和 $Q^{e-f}_e(V)$都自然地出现在对 Mumford 关于 $\mathbb{P}^n$中滚动曲面的线性稳定性概念 [Mum77] 的研究中。这与模空间问题有关；正如 [MS12] 和 [CT-L18], 中所解释的，这也关系到 Butler 著名的猜想。这将是未来研究的一个课题。

某种意义上介于 $H^{e-f}_e(\ell)$与 [Hit19] 中研究的拐点轨迹之间的对象，是 [BC21]中定义的广义 Terracini 轨迹。若能了解本文的技术如何应用于 Terracini 轨迹，将会很有意思。

致谢。感谢华威大学 VBAC 2022 会议的组织者提供经费支持，也感谢他们举办了一场收获颇丰、令人愉快的会议。感谢 Ali Bajravani、Abel Castorena、Gavril Farkas 和 Peter New- stead 与我进行了愉快且有益的交流。感谢 Dragos Oprea 就计数问题给予慷慨的建议。感谢 Samuel Stark 提出定理 8.6 的策略，并详细讲解了论文 [EGL01],[OP21] and [Sta21b]。

2. 构造与基本性质

本节定义广义割线轨迹。在回顾或证明有关线性张成、割线亏格和滚动曲面的一些背景材料之后，我们构造轨迹$H^{e-f}_e(\ell)$ 和 $Q^{e-f}_e(V)$，并给出一些基本结果。我们还给出若干例子。

2.1. 线性张成与割线亏格。设 S 为一个簇， $\mathcal{L} \to S$ 为一个非空线性系的线丛，并记 $\varphi_{\mathcal{L}}\colon S \dashrightarrow |\mathcal{L}|^*$ 为到 $\mathcal{L}$的完全线性系的标准映射。对于任意闭子概形 $Z \subseteq S$，令$r_Z\colon H^0(S,\mathcal{L}) \to H^0(Z,\mathcal{L}|_Z)$ 为限制映射。于是容易看出

$$\operatorname{Span}\varphi_{\mathcal{L}}(Z) = \mathbb{P}\mathrm{Im}\left(H^0(Z,\mathcal{L}|_Z)^* \to H^0(S,\mathcal{L})^*\right) = \mathbb{P}\mathrm{Ker}\left(H^0(S,\mathcal{L})^* \to H^0(S,\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{L})^*\right). \tag{2.1}$$

现在令 $V \subseteq H^0(S,\mathcal{L})$ 为一个非零子空间，并令 $\psi =: S \dashrightarrow \mathbb{P}V^*$ 为自然映射。我们得到一个正合图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S,\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(S,\mathcal{L}) & \xrightarrow{r_Z} & H^0(Z,\mathcal{L}|_Z) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & V\cap H^0(S,\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{L}) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{r_Z} & r_Z(V) \end{array}$$

取对偶并进行射影化后，我们得到一个簇图表

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Span}\varphi_{\mathcal{L}}(Z) & \hookrightarrow & |\mathcal{L}|^* & \dashrightarrow & \mathbb{P}H^0(S,\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{L})^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_V} & & \downarrow \\ \operatorname{Span}\psi(Z) & \hookrightarrow & \mathbb{P}V^* & \dashrightarrow & \mathbb{P}\left(V\cap H^0(S,\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{L})\right)^* \end{array} \tag{2.2}$$

这一关于 $\operatorname{Span}\psi(Z)$ 的描述将在下文中发挥作用。

我们还回顾零维概形的割线亏格这一概念。

DEFINITION 2.1. 设 $Z\subset S$ 是一个零维子概形。设 ℓ 是 S 上的一个线性级数，且 $\psi\colon S\dashrightarrow\mathbb{P}^n$ 是相关映射。亏格 $\operatorname{def}\psi(Z)$ 定义为以下数值

$$\operatorname{length}Z-\dim\operatorname{Span}\psi(Z)-1.$$

（这里约定空集的维数为 -1。）若 $\operatorname{def}\psi(Z)=0$，则称 Z 是 ℓ-非亏格的；否则称其为 ℓ-亏格的。

2.2. 滚动曲面。我们简要回顾曲线上的滚动曲面，它们将是我们的主要研究对象。设 C 是一条亏格为 g 的复光滑射影曲线。设 $E\to C$ 是一个秩为 r、次数为 d 的向量丛，且 $\pi\colon\mathbb{P}E\to C$ 是相关的射影丛。对于 $M\in\operatorname{Pic}(C)$，记 $\mathcal{L}_M$ 为 $\mathbb{P}E$ 上的线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)\otimes\pi^*M$。由投影公式和直接像的定义，我们有一个自然的同一化 $H^0(\mathbb{P}E,\mathcal{L}_M)\xrightarrow{\sim}H^0(C,E^*\otimes M)$。固定一个维数为 $n+1$ 的子空间 $V\subseteq H^0(\mathbb{P}E,\mathcal{L}_M)$，并考虑求值映射

$$\mathcal{O}_C\otimes V\ \to\ E^*\otimes M. \tag{2.3}$$

取对偶、射影化并投影到 $\mathbb{P}V^*$，我们得到一个映射

$$\psi\colon\mathbb{P}E\ \dashrightarrow\ \mathbb{P}V^*\times C\ \to\ \mathbb{P}V^*. \tag{2.4}$$

这自然地与标准映射 $\mathbb{P}E\dashrightarrow|\mathcal{L}_M|^*\dashrightarrow\mathbb{P}V^*$ 相对应。

2.3. 希尔伯特概形上的割线轨迹。我们将要考察的第一个割线轨迹，是轨迹 $C_e^f\subset C_e$ 的一个熟悉且直接的推广。设 S 是一个维数为 $r\geq 1$ 的光滑射影簇。对于 $e\geq 1$，我们将包含可平滑子概形的 $\operatorname{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 的不可约分支记作 $\operatorname{Hilb}^e(S)$；也就是说，它包含 $\operatorname{Sym}^e S$ 的一个开子集。

DEFINITION 2.2. 令 S 如上，并设 $\ell=(\mathcal{L},V)$ 是一个维数为 n 的线性系。假设 $e\geq 1$、$f\geq 0$ 和 $e\geq f$。我们定义

$$H_e^{e-f}(\ell)\ :=\ \{Z\in\operatorname{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S):\dim\left(\operatorname{Span}\psi_V(Z)\right)\leq e-f-1\}$$

或者，等价地，

$$\begin{aligned} H_e^{e-f}(\ell)\ =\ \{Z\in\operatorname{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S):\operatorname{def}\psi(Z)\geq f\}=\\ \{Z\in\operatorname{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S):\dim\left(V\cap H^0(S,\mathcal{L}\otimes\mathcal{I}_Z)\right)\geq n+1-e+f\}. \end{aligned}$$

视上下文而定，我们也可以写作 $H_e^{e-f}(V)$。我们将 H_e^{e-f} 记为 $H_e^{e-f}\left(H^0(S,\mathcal{L})\right)$。

REMARK 2.3. 如果 $r \geq 3$，那么 $\mathsf{Hilb}^e(S)$ 有多个不可约分支。当然，不必局限于特殊分支 $\mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$；研究 $\mathsf{Hilb}^e(S)$ 其他分支上的割线轨迹也同样有趣。目前，我们仅为方便起见而局限于 $\mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$，因为其他分支目前还不甚为人所知。

轨迹 $H^{e-f}_e(\ell)$ 可以用标准方法构造为一个行列式簇。令 p 和 q 分别为 $\mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) \times S$ 到第一因子和第二因子的投影，并令 $\mathcal{Z} \subset \mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) \times S$ 为泛子概形。在 $\mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 上，我们有图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{\mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)} \otimes V & & \\ & & \downarrow & \searrow^{\varepsilon} & \\ p_*\left(\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \otimes q^*\mathcal{L}\right) & \longrightarrow & p_*q^*\mathcal{L} & \longrightarrow & p_*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes q^*\mathcal{L}\right) \end{array} \tag{2.5}$$

由于 $\mathcal{Z}$ 在 $\mathsf{Hilb}^e(S)$ 上是平坦的，层 $p_*(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes q^*\mathcal{L})$ 是秩为 e 的局部自由层。因此，$H^{e-f}_e(\ell)$ 是行列式簇

$$\{Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) : \mathrm{rk}(\varepsilon|_Z) \leq e - f\}$$

由 ε 的第 $(e-f+1)$ 个 Fitting 理想定义。因此，$H^{e-f}_e(\ell)$ 的预期维数为 $re - f(n+1-e+f)$。

EXAMPLE 2.4. 令 L_1、……、L_r 为 C 上的线丛。对于 $1 \leq i \leq r$，令 $V_i \subseteq H^0(C, L_i)$ 为一个维数为 $n_i + 1$ 的子空间。设 $E := \bigoplus_{i=1}^r L_i^{-1}$ 并且

$$V := \bigoplus_{i=1}^r V_i \subseteq H^0(C, E^*) = H^0(\mathbb{P}E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)),$$

并令 $\ell = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)\ V)$。现在对每个 i，我们有一个自然映射

$$\iota_i \colon C \to \mathbb{P}V_i^* \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{i=1}^r V_i^*\right).$$

对每个 i，令 e_i, f_i 满足：$V^{e_i - f_i}_{e_i}(L_i, V_i)$（在 (1.1) 中定义）有一个维数为 s_i 的非空不可约分支。记 $e := \sum e_i$ 和 $f := \sum f_i$。那么

$$\left\{\iota_1(D_1) \cup \cdots \cup \iota_r(D_r) : D_i \in V^{e_i - f_i}_{e_i}(L_i, V_i)\right\} \tag{2.6}$$

是 $H^{e-f}_e(\ell)$ 中一个维数为 $\sum s_i$ 的非空轨迹。

在第 2.5.1 节中，例 2.4 将为某些割线轨迹的猜想的维数界提供启示。

EXAMPLE 2.5. 利用 $\mathbb{P}E$ 是直纹这一事实，我们可以在 $H^{e-f}_e(\ell)$ 中得到具有超额维数的轨迹。设 $e \geq r+1$。若 $Z \in \mathsf{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 是既约的，且其支撑位于纤维 $\mathbb{P}E|_x$ 中，那么 $\mathsf{Span}\,\psi(Z) \subseteq \mathbb{P}E|_x = \mathbb{P}^{r-1}$。因此，任何这样的 Z 对 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 的截面施加至多 r 个条件。因此该轨迹

$$\bigcup_{x \in C} \{Z \text{ reduced of length } e : Z \subset \mathbb{P}E|_x\}$$

属于 $H^r_e(V)$，维数为

$$\dim\left(\mathrm{Sym}^e \mathbb{P}^{r-1}\right) + \dim C = e(r-1) + 1 = re - (e-1).$$

如果 $2r \leq n$，这就超过了 $H^r_e(V)$ 的预期维数 $re - (e-r)(n+1-r)$。

我们将在第 2.5.1 节回到对亏格子概形的研究；这类子概形是由点以这种方式排列在同一个纤维内而产生的。

Remark 2.6. 线性级数是无基点的（分别地，是嵌入），当且仅当$H^0_1(\ell)$（分别地，$H^1_2(\ell)$）为空。我们通常考虑 $\mathbb{P}^n$中的嵌入子簇，但我们的许多结果也适用于任意射影模型。

2.4. Quot 概形上的割线轨迹。现在让我们给出 $V^{e-f}_e(\ell)$的另一种推广。这一次，我们不增加 dim(C)，而是增加 rk(L)。

Definition 2.7. 设 E 是 C上的一个秩为 r 、次数为 d 的向量丛，且 $\pi\colon \mathbb{P}E \to C$是与之关联的 $\mathbb{P}^{r-1}$-丛。设 $V \subseteq H^0(C, E^* \otimes M)$是一个维数为 $n+1$的子空间。我们将广义割线轨迹 $Q^{e-f}_e(E, M, V)$定义为

$$\left\{[F^* \to E^*] \in \mathrm{Quot}^{0,e}(E^*) : \dim(V \cap H^0(C, F^* \otimes M)) \geq n+1-e+f\right\}.$$

这可以用与 $H^{e-f}_e(\ell)$类似的方式构造为一个行列式簇。如果不会引起混淆，我们可以简写为 $Q^{e-f}_e(M, V)$或 $Q^{e-f}_e(V)$。此外，我们常将 $Q^{e-f}_e\left(H^0(C, E^* \otimes M)\right)$ 简写为 Q^{e-f}_e。

Remark 2.8. 如 [HHN21，第 3 节.1], 所述，给定一个线丛 M 和任意一个向量丛族 $\mathcal{V} \to B \times C$，可以定义扭曲 Brill–Noether 轨迹

$$B^k(\mathcal{V}, M) \;=\; \{b \in B : h^0(C, \mathcal{V}_b \otimes M) \geq k\} \;\subseteq\; B.$$

令 $\mathcal{F}^*$ 为 $\mathrm{Quot}^{0,e}(E^*) \times C$上的泛子层。那么我们有

$$Q^{e-f}_e\left(E, M, H^0(C, E^* \otimes M)\right) \;=\; Q^{e-f}_e \;=\; B^{h^0(C, E^* \otimes M)-e+f}(\mathcal{F}^*, M).$$

割线轨迹与 Brill–Noether 轨迹之间的其他关系将在第 3 节中研究。

2.5. $H^{e-f}_e(V)$ 与 $Q^{e-f}_e(V)$ 之间的联系。遵循 [Hit20] 和[Sta21a], 关于 $S = \mathbb{P}E$ 的做法，我们现在描述上述两个广义割线轨迹之间的关系。这将推广如下事实：若 L 是一个线丛，则

$$D \mapsto \left[L^{-1}(-D) \to L^{-1}\right] \text{ defines an isomorphism } C_e \xrightarrow{\sim} \mathrm{Quot}^{0,e}(L^{-1}).$$

令 $Z \subset \mathbb{P}E$ 为一个长度为 e的子概形。对 $0 \to \mathcal{I}_Z(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \to \mathcal{O}_Z(1) \to 0$ 在 C 上的直接像取像，我们得到一个序列

$$0 \;\to\; \pi_*\mathcal{I}_Z(1) \;\to\; E^* \;\to\; \pi_*\mathcal{O}_Z(1) \;\to\; \cdots$$

由于 $\pi_*\mathcal{O}_Z(1)$ 是 C 上的挠层，我们可知 $\pi_*\mathcal{I}_Z(1)$ 是 E^* 的满秩子层。沿用 [Hit20], 的记号，我们将其记为 E^*_Z。取对偶后，对于一般的 $Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$，有 $\deg(E_Z) = \deg(E) + e$; 例如，当 $\pi(Z)$ 由 e 个不同点组成时。

Proposition 2.9. 设 $E \to C$ 为一个向量丛。

(a) 这一对应 $Z \mapsto [E^*_Z \to E^*]$ 定义了一个有理映射 $\alpha\colon \mathrm{Hilb}^e(S) \dashrightarrow \mathrm{Quot}^{0,e}(E^*)$。(b) α 在不可约分支 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 上的限制是满射。此外，α 在开集上是双射

$$\{Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) : \mathrm{Supp}\,\pi(D) \textit{ consists of } e \textit{ distinct points}\}.$$

特别地，$\alpha|_{\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)}$ 是一个双有理等价。

PROOF. (a) Sta21a 的定理 3(i) 证明了存在一个合适的长度为 e 商族 $E^* \to \pi_*\mathcal{O}_Z(1)$，由 $\mathrm{Hilb}^e(\mathbb{P}E)$ 参数化；当 $\mathbb{P}E$ 是曲面上的射影丛时，结论成立，而当基底为曲线时，同样的论证也适用于 $e \geq 1$。在开子集上

$$\{Z \in \mathrm{Hilb}^e(S) : E^* \to \pi_*\mathcal{O}_Z(1) \text{ is surjective}\}$$

我们得到一族次数为 $\deg(E^*) - e$ 的初等变换 $E_Z^* \to E^*$。该轨迹非空，因为它包含所有投影到 C 中 e 个不同点的 Z，因此我们得到所需的有理映射 α。

(b) 这可由 [Hit20 定理 2.6] 的证明得到。 □

REMARK 2.10. 若 $e \geq 2$ 且 $r \geq 2$，则 α 的纤维具有正维数。例如，设 $e = 2$，并令 μ_1 和 μ_2 为纤维 $\mathbb{P}E|_x$ 中张成一个 $\mathbb{P}^1$ 的点。那么对任意 μ_1'，若 μ_2' 张成相同的 $\mathbb{P}^1$，则有 $E_{\{\mu_1',\mu_2'\}} = E_{\{\mu_1,\mu_2\}}$。

2.5.1. 相对亏格子概形。与[Sta21a]，中研究的情形不同，当 $e \geq 3$ 时，映射 α 不是态射。不定点轨迹是由满足 $E^* \to \pi_*(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1))$ 非满射的 $Z \in \mathrm{Hilb}^e(S)$ 构成的集合；等价地，$\deg(E_Z^*) > \deg E^* - e$。例如，若 Z 由 $\mathbb{P}E$ 的一个纤维中的三个共线点构成，则 $\deg(E_Z^*) = \deg E^* - 2$。这引出了以下定义，即 [Hit20, 定义 3.4]:

DEFINITION 2.11. 设 $Z \subset \mathbb{P}E$ 是一个零维子概形。若 $\deg(E_Z^*) = \deg(E^*) - \mathrm{length}(Z)$，则称 Z 为 π-非亏格；否则称其为 π-非亏格。

现在我们可以表述一个重要命题和一个猜想。我们用 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)_{\mathrm{nd}}$ 表示 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 中 π-非亏格子概形的轨迹，并记

$$H_e^{e-f}(V)_{\mathrm{nd}} := H_e^{e-f}(V) \cap \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)_{\mathrm{nd}}.$$

PROPOSITION 2.12. 设 V是一个 $n+1$维子空间

$$H^0(C, E^* \otimes M) \cong H^0(S, \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M).$$

假设 $n + 1 \geq e - f$。设 $Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 为 π-非亏格。则当且仅当 $[E_Z^* \to E^*]$ 属于 $Q_e^{e-f}(V)$ 时，$Z \in H_e^{e-f}(V)$。

PROOF. 由 E_Z的构造可知，

$$H^0(C, E_Z^* \otimes M) \cap V = H^0(S, \mathcal{I}_Z(1) \otimes \pi^* M) \cap V. \tag{2.7}$$

命题得证。 □

鉴于该命题，我们将根据何者更方便或更具启发性，在 $H_e^{e-f}(V)_{\mathrm{nd}}$ 与$Q_e^{e-f}(V)$ 之间灵活切换。关于 π-非亏格缺陷性及其若干等价定义的讨论，参见[Hit20, § 3.1] 。例 2.5 表明，π-亏格缺陷子概形可能导致 $H_e^{e-f}(\ell)$ 出现人为偏大的分支，而这些分支并不能反映 $Q_e^{e-f}(V)$ 的行为。大多数情况下，我们将不考虑 π-亏格缺陷子概形。

接下来，我们简要讨论 $H_e^{e-f}(V)$ 和$Q_e^{e-f}(V)$ 的维数界问题。回到例 2.4：如果对每个 i，数对 (C, L_i) 都是 [Baj15 定理 4.6] 中描述的四种特殊类型之一，并且 $e_i \leq h^0(C, L_i) - 2$，那么我们可以取 s_i 为文献中证明的最大值 $e_i - f_i - 1$，于是

[1]遗憾的是，[Hit20, Theorem 2.6 (a)] 中陈述了这一点，却没有给出充分的论证。

上面的轨迹 (2.6) 的维数为 $e-f-r$。基于这些信息，我们提出以下朴素猜想。

CONJECTURE 2.13. 设 C 是亏格为 $g \geq 9$的非超椭圆曲线。设 $E \to C$是秩为 r、斜率至多为 $g-2$ 的向量丛，且 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 非常丰沛。对于$e \leq h^0(C,E) - 2r$，我们有

$$\dim Q_e^{e-f} \;\leq\; \dim\left(H_e^{e-f}\right)_{\mathrm{nd}} \;\leq\; e-f-r.$$

我们还指出以下事实，它将完备情形中的 [Hit20, 命题 4.4 和注记 4.5 (a)] 推广了。

LEMMA 2.14. 设 $[F^* \to E^*]$ 是 $\mathrm{Quot}^{0,e}(E^*)$ 的一个点。设 $Z \subseteq \mathbb{P}E$ 是任意满足 $F = E_Z$的子概形。那么
张成空间 $\psi(Z) \;=\; \mathbb{P}$核 $\left(V^* \;\to (V \cap H^0(C, E_Z^* \otimes M)^*\right) \;=\; \mathbb{P}\left(V \cap H^0(C, E_Z^* \otimes M)\right)^{\perp}$.
特别地，张成空间 $\psi(Z)$ 仅取决于 F^*，事实上并不要求 Z 是 π-非亏格的，甚至也不要求它是零维的

PROOF. 该命题是 (2.2) 和 (2.7) 的推论。 □

2.6. 分层的互异性。对于固定的 e，行列式簇 $H_e^{e-f}(\ell)$ 和 $Q_e^{e-f}(V)$ 分别定义了 $\mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$ 和 $\mathrm{Quot}^{0,\,e}(E^*)$ 的分层，且这些分层随 f 变化。作为 [Baj15 引理 4、1], [AS15 引理 2 和 2] ACGH85 引理 IV.1 的推广，我们现在将证明，只要 $n+1-e+f \geq 0$, $Q_e^{e-f}(V)$ 就严格大于 $Q_e^{e-f-1}(V)$；类似地，在某个条件下，$H_e^{e-f}(\ell)$ 也成立。关于高维簇的结果基于以下关于曲线的命题，它是 [AS15 引理 2 的直接推广；由于证明基本相同，我们略去证明。

LEMMA 2.15. 设 T 是一条光滑射影曲线，且 $\ell = (\mathcal{L}, V)$ 是 T 上维数为 $n+1$ 的非常丰沛线性系。设 e 和 f 是满足 $0 \leq f \leq e$和 $n+1-e+f \geq 0$的整数。那么， $V_e^{e-f}(\ell)$ 的任何不可约分支都不完全包含在 $V_e^{e-f-1}(\ell)$ 中。

PROPOSITION 2.16. 设 S 是一个光滑射影簇，且 $\ell = (\mathcal{L}, V)$ 是维数为 $n+1$的非常丰沛线性系。设 e 和 f 是满足 $e \geq 1$、$f \geq 0$ 和 $e \geq f$ 的整数，并且满足 $n+1-e+f \geq 0$。

(a) 设 $\mathcal{X}$ 是 $H_e^{e-f}(\ell)$ 的一个不可约分支。假设 $Z_0 \in \mathcal{X}$ 使得子概形 $Z_0 \subset S$ 是曲线式的。那么 $\mathcal{X}$ 不完全包含在 $H_e^{e-f-1}(\ell)$ 中。(b) 设 $E \to C$ 是一个向量丛，且 $\mathcal{L}_M = \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M$。设 $V \subseteq H^0(C, E^* \otimes M)$ 是一个维数为 $n+1$ 的子空间。那么，$Q_e^{e-f}(V)$ 的任何不可约分支都不完全包含在 $Q_e^{e-f-1}(V)$ 中。

PROOF. (a) 由于曲线式是一个开条件，显然我们可以假设Z_0 不属于 $H_e^{e-f}(\ell)$中除 $\mathcal{X}$之外的任何不可约分支。由曲线式可知，对于所有 $\nu \in \mathrm{Supp}(Z_0)$, $T_\nu Z_0$ 的维数为一。因此，通过考察包含于 S某个仿射开子集中的适当仿射曲线的闭包，我们可以假设 Z_0 属于 $\mathrm{Hilb}^e(T) \cong T_e$，其中 $T \subseteq S$ 是一条曲线，其在 $\mathbb{P}V^*$ 中的像是非退化的。于是，我们得到 V与 $H^0(T, \mathcal{L}|_T)$的一个子空间之间的一个对应。令$\ell_T := (\mathcal{L}|_T, V)$，则可以考虑式 (1.1) 中定义的通常割线轨迹 $V_e^{e-f}(\ell_T)$。对于所有 $f \geq 0$，都有自然包含关系 $V_e^{e-f}(\ell_T) \hookrightarrow H_e^{e-f}(\ell)$。由于 Z_0

仅属于 $H_e^{e-f}(\ell)$的不可约分支 $\mathcal{X}$，若 $\mathcal{V}$是 $V_e^{e-f}(\ell_T)$中包含 D_0 的任意不可约分支，则有 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$。

现在假设 $Z_0\in H_e^{e-f-1}(\ell)$。那么 $Z_0\in V_e^{e-f-1}(\ell_T)\cap\mathcal{V}$也成立。由于 $e\leq n+1+f$，根据引理 2.15，我们可以将 Z_0在 $\mathcal{V}$内形变为一点 $Z_1\in\mathcal{V}\setminus V_e^{e-f-1}(\ell)$。于是 Z_1在 $\mathbb{P}V^*$中的亏格恰为 f。但是，由于 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$，我们看到 $\mathcal{X}$ 包含点 $Z_1\in H_e^{e-f}(\ell)\setminus H_e^{e-f-1}(\ell)$。这就证明了 (a)。

(b) 设 $\mathcal{X}$ 是 $Q_e^{e-f}(V)$ 的一个不可约分支。由引理 2.9 (a) 和命题 2.12 可知，$\alpha^{-1}(\mathcal{X})$ 是 $H_e^{e-f}(V)_{\mathrm{nd}}$ 的各个分支的非空开子集的并 $\bigcup_i\widetilde{\mathcal{X}}_i$。根据 Hit20 定理 2.6 (a) 的证明，至少有一个 $\widetilde{\mathcal{X}}_{i_0}$ 包含~一个对应于曲线式子概形的点 Z_0。因此，由 (a) 可知，$\mathcal{X}_{i_0}$不包含于 $H_e^{e-f-1}(V)$。同样由引理 2.12，$\widetilde{\mathcal{X}}_{i_0}\setminus H_e^{e-f-1}(V)$ 中任一点的像都是 $\mathcal{X}\setminus Q_e^{e-f-1}(V)$ 中的一点，由此得到 (b)。□

2.7. 一般投影下的割线轨迹。现在我们将证明，从一般中心进行投影时，割线轨迹 $H_e^{e-f}(V)$ 和 $Q_e^{e-f}(V)$ 会呈现出可预见的行为。其主要工具是克莱曼关于一般平移的横截性定理，下面将多次使用该定理：

THEOREM 2.17（[Kle74，定理 2（i）]）。设 G 为一个连通代数群，Z 为一个允许 G 传递作用的不可约簇。假设 $a\colon X\to Z$ 和 $b\colon Y\to Z$ 是不可约簇之间的映射。对于任意 $s\in G$，记 $\gamma\cdot Y$ 为通过映射 $y\mapsto\gamma\cdot b(y)$ 将 Y 视为 Z-簇。则存在一个稠密开子集 $U\subseteq G$，使得对于所有 $\gamma\in U$，$(\gamma\cdot Y)\times_Z X$ 要么为空，要么是等维的，其维数为 $\dim X+\dim Y-\dim Z$。

我们的结果将由此定理和线性代数推出。为避免重复，在本小节中，我们固定整数 n、m、e 和 f，使得

$$0\leq f\leq e\leq m+1\leq n+1.$$

设 H 是一个簇，且 $\beta\colon\mathcal{E}\to\mathcal{O}_H\otimes V^*$ 是 H 上向量丛的映射，其中 $\operatorname{rk}E=e$ 且 $V^*=\mathbb{C}^{n+1}$。我们考虑退化轨迹

$$D_{e-f}(\beta)=\{h\in H:\operatorname{rk}(\beta|_h)\leq e-f\}\quad\text{and}\quad D^\circ_{e-f}(\beta)=\{h\in H:\operatorname{rk}(\beta|_h)=e-f\}.$$

对于满足 $0\leq f'\leq f$ 的每个 f'，记

$$d_1(f')\coloneqq\dim B-f'(n+1-e+f')\quad\text{and}\quad d_2(f')\coloneqq\dim B-f'(m+1-e+f).$$

注意，$d_1(f')$ 是 $D_{e-f'}(\beta)$ 和 $D^\circ_{e-f'}(\beta)$ 的预期维数。最后，若 $W\subseteq V$ 是一个子空间，滥用记号，我们将投影 $V^*\to W^*$ 和 $\mathcal{O}_H\otimes V^*\to\mathcal{O}_H\otimes W^*$ 记为 p_W，并记 $W^\perp\colon=\ker(p_W)$。

PROPOSITION 2.18. 设 H 和 $\beta\colon\mathcal{E}\to\mathcal{O}_H\otimes V^*$ 如上。假设对于 $0\leq f'\leq f$，我们有

$$\dim D_{e-f'}(\beta)\leq\max\{d_1(f'),d_2(f')\}.\tag{2.8}$$

那么，对于一个维数为 $m+1$ 的一般子空间 $W\subseteq V$，退化轨迹$D_{e-f}(p_W\circ\beta)$ 为空，或者在其非负时具有预期维数 $\dim H-f(m+1-e+f)$。

PROOF. 假设对于某个 $f'\in\{0,\dots,f\}$，有 $h\in D^\circ_{e-f'}(\beta)$。那么 $\operatorname{rk}(p_W\circ\beta|_h)\leq e-f$ 当且仅当

$$\dim\left(W^\perp\cap\operatorname{Im}\beta|_h\right)\geq f-f'.\tag{2.9}$$

首先，假设 $f-f'>n-m=\dim W^\perp$。那么对于任意 $h\in D^\circ_{e-f'}(\beta)$，条件 (2.9) 均不成立，因此对于所有维数为$m+1$的 W， $D_{e-f}(p_W\circ\beta|_h)\cap D^\circ_{e-f'}(\beta)$ 都是空的。

另一方面，假设 $f-f'\le n-m$。（可以证明，这意味着 $d_2(f')\ge d_1(f')$。）令 $a\colon D^\circ_{e-f'}(\beta)\to\mathrm{Gr}(e-f',V^*)$ 为映射$h\mapsto\operatorname{Im}\beta|_h$。考虑舒伯特循环

$$\Sigma^{f-f'}_{W^\perp}\ :=\ \{\Lambda\in\mathrm{Gr}(e-f',V^*):\dim(\Lambda\cap W^\perp)\ge f-f'\}.$$

采用 [GH78，第 194–196]，页中的记号，我们有 $\Sigma^{f-f'}_{W^\perp}=W^*_{\overline{a_1,\dots,a_{f-f'}}}$，其中 $a_1=\cdots=a_{f-f'}=m+1-e+f$。由同上，

$$\dim\Sigma^{f-f'}_{W^\perp}\ =\ \dim\mathrm{Gr}(e-f',V^*)-(f-f')(m+1-e+f). \tag{2.10}$$

对于 $D^\circ_{e-f'}(\beta)$ 的每个不可约分支 Y，我们考虑纤维积图

$$\begin{array}{ccc} Y_W & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a|_Y} \\ \Sigma^{f-f'}_{W^\perp} & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(e-f',V^*). \end{array}$$

若 $h\in Y$，则由 (2.9) 可知， $h\in D_{e-f}(p_W\circ\beta)$ 当且仅当 $h\in Y_W$。

现在，对于所有 ℓ，$\mathrm{GL}(V^*)$ 在 $\mathrm{Gr}(\ell,V^*)$ 上传递作用。对于 $\gamma\in\mathrm{GL}(V^*)$，展开定义可知 $\gamma\cdot\Sigma^{f-f'}_{W^\perp}=\Sigma^{f-f'}_{\gamma\cdot W^\perp}$。因此，由定理 2.17 和 (2.10)，对 W 的一般选择而言，轨迹 Y_W 为空，或为等维，其维数为

$$\dim Y-(f-f')(m+1-e+f).$$

根据假设 (2.8)，我们有 $\dim Y\le d_2(f')$，因此它不超过 $D_{e-f}(p_W\circ\beta)$ 的预期维数。（事实上，由于后者是行列式的，只有当 $\dim Y=d_2(f')$ 时， Y_W 才非空。）□

这对研究割线轨迹有以下应用。下文推广了 [Hit19, 定理 A.1]。这可视为对例如 [GP13] 和 [Ran15] 中所探讨问题的一项初步贡献。对于射影模型ψ：$S\dashrightarrow\mathbb{P}V^*$ 和 $W\subseteq V$，令 ψ_W 为复合映射 $S\dashrightarrow\mathbb{P}V^*\dashrightarrow\mathbb{P}W^*$。

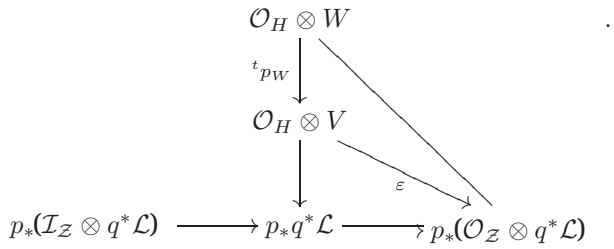
Corollary 2.19. 设 S 为一个射影簇，且 $\psi\colon S\dashrightarrow\mathbb{P}^n=\mathbb{P}V^*$ 是一个射影模型。设 $\mathcal{Z}\subset H\times S$ 是由簇 H 参数化的 S 的长度为 e 的子概形族。对于每个子空间 $W\subseteq V$ 以及每个 f'，我们定义

$$H^{e-f'}_e(H,W)\ :=\ \{h\in H:\operatorname{def}\psi_W(\mathcal{Z}_h)\ge f'\}.$$

假设对于 $0\le f'\le f$，有 $\dim H^{e-f'}_e(H,V)\le\max\{d_1(f')\ d_2(f')\}$。那么，对于一个维数为 $m+1$的一般子空间 $W\subseteq V$，割线轨迹 $H^{e-f}_e(H,W)$ 为空，或者具有预期维数 $\dim H-f(m+1-e+f)$。

Proof. 对于任意的 $W\subseteq V$，轨迹 $H^{e-f'}_e(H,W)$ 都可以完全按照 § 2.3 中的方法构造为一个行列式簇。设 $\mathcal{L}$ 是诱导到 $\mathbb{P}^n$ 的映射的线丛。设 p 和 q 分别是 $H\times S$ 到第一因子和第二因子的投影

。相应地，我们有如下在 $H \times S$ 上的层图表：



由于 $\mathcal{Z}$ 在 H 上是平坦的，层 $p_*(\mathcal{O}_\mathcal{Z} \otimes q^*\mathcal{L})$ 是秩为 e 的局部自由层。现在对于 $h \in H$，由 (2.1) 得 Span $\psi_W(\mathcal{Z}_h) = \mathbb{P}\mathrm{Im}\,(p_W \circ {}^t\varepsilon|_h)$。因此，$H_e^{e-f'}(H, W)$ 是行列式簇

$$\{Z \in H : \mathrm{rk}(p_W \circ {}^t\varepsilon)|_Z \leq e - f'\} = D_{e-f'}(p_W \circ {}^t\varepsilon).$$

现在根据假设，对于 $0 \leq f' \leq f$，条件 (2.8) 对 $D_{e-f'}({}^t\varepsilon)$ 成立。因此，根据命题 2.18，当维数非负时，$H_e^{e-f}(H, W) = D_{e-f}(p_W \circ {}^t\varepsilon)$ 为空或具有预期维数；否则为空。□

现在我们将给出关于 $Q_e^{e-f}(V)$ 类型割线轨迹的相应命题。这将在 § 8 中使用。

Corollary 2.20. 设 C 是一条曲线，$E \to C$ 是一个向量丛。设 $V \subseteq H^0(C, E^*)$ 是一个维数为 $n+1$ 的子空间。设 $\mathcal{F}^\vee \to p_C^* E^*$ 是一族次数为 $\deg E^* - e$、由簇 Q 参数化的初等变换。对每个 f' 以及每个维数为 $m+1$ 的子空间 $W \subseteq V$，令

$$Q_e^{e-f'}(Q, W) := \{q \in Q : h^0(C, \mathcal{F}_q^*) \cap W \geq m + 1 - e + f'\}.$$

假设对于 $0 \leq f' \leq f$，有 $\dim Q_e^{e-f'}(Q, V) \leq \max\{d_1(f'), d_2(f')\}$。那么，对于一个维数为 $m+1$ 的一般子空间 $W \subseteq V$，轨迹 $Q_e^{e-f}(Q, W)$ 为空，或者在 $\dim Q - f(m+1-e+f)$ 非负时具有预期维数；否则为空。

Proof. 这与前一个推论的证明类似。□

至此，我们概述了滚动曲面及其割线轨迹的基本性质。接下来的各节中，我们将把这些结果应用于关于 $H_e^{e-f}(\ell)$ 和 $Q_e^{e-f}(V)$ 的若干问题。

3. 割线轨迹与 Brill–Noether 轨迹

现在我们将进一步讨论割线轨迹与 Brill–Noether 轨迹之间的联系，并将阿贝尔–雅可比映射和线性级数的概念推广到 Quot 概形的情形。这拓展了 [Hit20, 注 4.7]。

众所周知，对于 $e \geq f \geq 0$，存在一个图表

$$\begin{array}{ccccc} C_e & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Quot}^{0,e}(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^e(C) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C_e^f & \xrightarrow{\sim} & Q_e^{e-f}\left(\mathcal{O}_C, K_C, H^0(C, K_C)\right) & \longrightarrow & B_{1,e}^{1+f} \end{array} \tag{3.1}$$

各行由 $D \mapsto [\mathcal{O}_C(-D) \to \mathcal{O}_C] \mapsto \mathcal{O}_C(D)$ 给出。这个复合映射是一个阿贝尔–雅可比映射，其在 L 上的纤维由线性级数 $|L|$ 给出。

现在令 $U_C(r, d+e)$ 为 C 上秩为 r、次数为 $d+e$ 的稳定丛模空间。对于 $k \geq 0$，我们考虑高秩布里尔–诺特轨迹

$$B^k_{r,d+e} \;=\; \{F \in U_C(r, d+e) : h^0(F) \geq k\}.$$

令 E 为秩为 r、次数为 d 的向量丛，不一定是半稳定的。假设 $0 \leq f \leq e$ 和 $Q^{e-f}_e(E, K_C, H^0(E^* \otimes K_C))$ 包含一个点 $[F^* \to E^*]$，使得 F 是稳定丛。根据塞尔对偶，有如下向量空间正合列

$$\begin{aligned} 0 \;\to\; H^0(C,E) \;\to\; H^0(C,F) \;\to\; H^0(C,F/E) \;\to\; \\ H^0(C, K_C \otimes E^*)^* \;\to\; H^0(C, K_C \otimes F^*)^* \;\to\; 0, \end{aligned}$$

由此可得

(3.2)

$$h^0(C,F) = h^0(C,E) + f \text{ if and only if } h^0(C, F^* \otimes K_C) = h^0(C, E^* \otimes K_C) - e + f.$$

因此，作为 (3.1) 的推广，我们有一个笛卡尔图

(3.3)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)_{\mathrm{nd}} & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \mathrm{Quot}^{0,e}(E^*) & \overset{a}{\dashrightarrow} & U_C(r, d+e)\,, \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^{e-f}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1))_{\mathrm{nd}} & \xrightarrow{\alpha} & Q^{e-f}_e\left(E, K_C, H^0(C, E^* \otimes K_C)\right) & \overset{a}{\dashrightarrow} & B^{h+f}_{r,d+e} \end{array}$$

其中 α 的定义见命题 2.9，且 $a([F^* \to E^*]) = F$。映射 a 和 $a \circ \alpha$ 是阿贝尔–雅可比映射的推广。

现在，对于任意秩为 F 的 r，我们将 $H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))_{\mathrm{inj}}$ 记作一般单射映射的开子集。注意，$\mathrm{Aut}(F^*)$ 在 $H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))$ 上有一个自然作用，并保持 $H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))_{\mathrm{inj}}$ 不变。

PROPOSITION 3.1. 设 $E \to C$ 是一个秩为 r、次数为 d 的向量丛。

(a) 对于一个固定的秩为 r、次数为 $d+e$ 的向量丛 F，轨迹

$$\{[F_1^* \xrightarrow{j} E^*] \in \mathrm{Quot}^{0,e}(E^*) : F_1 \cong F \text{ as vector bundles}\} \;=:\; Q_E(F)$$

与 $H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))_{\mathrm{inj}}/\mathrm{Aut}(F^*)$ 构成双射。

(b) 假设 $\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 包含一个点 $[F^* \to E^*]$，使得 F 是一个稳定向量丛。设 a 如 (3.3) 中所定义。则

$$a^{-1}(F) \;=\; Q_E(F) \;\cong\; \mathbb{P}H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))_{\mathrm{inj}}.$$

PROOF. (a) 对应关系 $j \mapsto [F^* \xrightarrow{j} E^*]$ 定义了一个映射

$$H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))_{\mathrm{inj}} \;\to\; Q_E(F)$$

这显然是满射。根据 Quot 概形的定义和核的泛性质，两个映射 j' 和 j 定义相同的 $\mathrm{Quot}^{0,e}(E^*)$ 中的元素，当且仅当 $j' = j \circ \gamma$ 对某个 $\gamma \in$ 自同构群 (F^*) 成立。这就证明了 (a)。(b) 由 (a) 得出，因为当 F 稳定时，$\mathrm{Aut}(F^*) = \mathbb{C}^*$。□

REMARK 3.2. 若 L 是次数为 e 的线丛，则由命题 3.1 可得

$$a^{-1}(L) \;\cong\; Q_{\mathcal{O}_C}(L) \;\cong\; \mathbb{P}H^0(C, \mathrm{Hom}(L^{-1}, \mathcal{O}_C))_{\mathrm{inj}} \;\cong\; |L|.$$

因此，将 $Q_E(F)$ 称为"关于 E 的 F 广义线性级数"是合理的。若 $\Omega \subseteq H^0(C, \mathrm{Hom}(F^*, E^*))$ 是 $\mathrm{Aut}(F^*)$- 不变子空间，则轨迹 $\Omega_{\mathrm{inj}}/\mathrm{Aut}(F^*)$ 将可能不完备的线性子级数这一概念推广了。

REMARK 3.3. 黎曼–肯普夫奇点定理 [ACGH85，第 VI 章。2], 给出了秩一 Brill–Noether 轨迹的切锥描述W^f_e。对于 $k \geq r$ 和 $W \in B^k_{r,\,d}$ 生成向量丛，黎曼–肯普夫奇点定理有如下推广。对于 $\ell \geq r$，令 $U^\ell \subseteq \mathrm{Gr}(\ell, H^0(C, W))$ 为一般位置生成 W 的子空间所构成的开子集。假设该开子集非空，根据 [Hit20，定理 5。6] ，$B^k_{r,\,d}$ 在 W 处的射影化切锥为

$$\mathbb{P}\mathcal{T}_W B^k_{r,d} \;=\; \overline{\bigcup_{\Lambda \in U^k} \left(\bigcap_{\Pi \in (U^r \cap \mathrm{Gr}(r,\Lambda))} \mathrm{Span}\, \psi\left(Z_\Pi \times_C \mathbb{P}W\right) \right)}. \tag{3.4}$$

这里，$\psi(Z_\Pi \times_C \mathbb{P}W)$ 是线丛的一个截面所关联的除子的典范像的一种推广，定义见 [Hit20, § 5.2]。我们在此关注的是，在原始的黎曼–肯普夫奇点定理 [ACGH85, p.241] 中，线性子级数 g^{k-1}_d 所在的位置，在 (3.4) 中出现的是 $U^r \cap \mathrm{Gr}(r, \Lambda)$。承接前面的评论，我们将把 $U^r \cap \mathrm{Gr}(r, \Lambda)$ 解释为广义线性级数。

首先，映射 $(s_1, \ldots, s_r) \mapsto \mathrm{Span}\{s_1, \ldots, s_r\}$ 定义了一个态射

$$H^0(C, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C{}^{\oplus r}, W))_{\mathrm{inj}} \;\to\; \mathrm{Gr}(r, H^0(C, W)),$$

其像恰为 U^r，并且该映射下降为一个同构

$$H^0(C, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C{}^{\oplus r}, W))_{\mathrm{inj}}/\mathrm{GL}_r \;\xrightarrow{\sim}\; U^r. \tag{3.5}$$

根据命题 3.1 (a)，这恰好是广义线性级数 $Q_{W^*}(\mathcal{O}_C{}^{\oplus r})$。此外，对于 $\Lambda \in U^k$，同构 (3.5) 限制为一个同构

$$\Lambda^{\oplus r}_{\mathrm{inj}}/\mathrm{GL}_r \;\xrightarrow{\sim}\; U^r \cap \mathrm{Gr}(r, \Lambda).$$

因此，$U^r \cap \mathrm{Gr}(r, \Lambda)$ 确实在广义 Riemann–Kempf 定理中扮演线性级数的角色。

4. 一些非空性结果

本节针对某些 e 和 f 的取值，给出 $H^{e-f}_e(V)_{\mathrm{nd}}$ 和 $Q^{e-f}_e(V)$ 非空性的若干充分或必要条件。我们先给出一个适用于任意维数至少为 2 的光滑非退化簇 S 的简单"理论界"（对于曲线而言，这是平凡的）。

LEMMA 4.1. 设 S 为一个维数为 r 的光滑簇，且 $\ell = (\mathcal{L}, V)$ 是 S上的一个维数为 n 的非常丰线性级数。令 $e_0 := n - r + 2$。那么对任意 $e > e_0$和 $f \leq e - e_0$，割线轨迹 $H^{e-f}_e(\ell)$ 均非空。

PROOF. 由定理 2.17，对于一般的 $\Pi = \mathbb{P}^{n-r+1} \subset \mathbb{P}V^*$，交$\Pi \cap \psi(S)$ 是维数为 1 的光滑概形。任意长度为 $e > e_0$ 的既约子概形 $Z \subset (\Pi \cap \psi(S))$ 的线性张成都包含于 Π中，因此其亏格至少为 $e - e_0$。因此，对于任意 $f \leq e - e_0$，Z 都定义了 $H_e^{e-f}(\ell)$ 中的一个点。□

REMARK 4.2. 若 $e = n$，则 $e - e_0 = r - 2$。因此，对于 $r \geq 3$，引理 4.1 表明，$H_n^{n-f}(\ell)$ 对于 $1 \leq f \leq r-2$ 非空。这推广了 [AS15 引理 2.1] 关于 $r \geq 3$ 的非空性命题。

现在我们将重点讨论曲线上的滚动曲面的割线轨迹。首先，我们有一个技术性命题。

LEMMA 4.3. 设 $\pi\colon \mathbb{P}E \to C$ 为一个射影丛，且 $\iota\colon C \to \mathbb{P}E$ 为一个截面。设 $x \in C$ 为一点。

(a) 存在 z 上 x 处的一个局部参数，以及一个标架 $\phi_1, \ldots, \phi_r$，使得在 x 附近，对于 $k \geq 1$，单点子概形 $\iota(kx) \subset \mathbb{P}E$ 由理想定义

$$\left(\pi^* z^k, \frac{\phi_2}{\phi_1}, \ldots, \frac{\phi_r}{\phi_1}\right). \tag{4.1}$$

(b) 写作 $Z := \iota(kx)$，并令 $E_Z^* = \pi_* \mathcal{I}_Z(1)$。于是，$\{\pi^* z^k \cdot \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r\}$ 是 E_Z^* 在 x 附近的一个标架。

PROOF. 令 $U := \operatorname{Spec} A$ 为 x 在 C 中的一个仿射邻域，在此邻域上 E 是平凡化的。令 $\nu_1, \ldots, \nu_r$ 为一个标架，使得 $\iota\colon C \to \mathbb{P}E$ 对应于子向量丛 $\mathcal{O}_C \cdot \nu_1$。令 $\phi_1, \ldots, \phi_r$ 为 $E^*|_U$ 的对偶标架，并令 z 为 C 在 x 处的一个局部参数。我们考虑仿射簇

$$\Omega \;:=\; \operatorname{Spec} A\left[\frac{\phi_2}{\phi_1}, \ldots, \frac{\phi_r}{\phi_1}\right] \;\cong\; U \times \mathbb{A}^{r-1} \;\subset\; \mathbb{P}E.$$

在这些坐标下，嵌入

$$kx \;=\; \operatorname{Spec}\left(A/\mathfrak{m}_x^k\right) \;\hookrightarrow\; U \;\xrightarrow{\iota}\; \Omega$$

对应于复合环映射

$$A\left[\frac{\phi_2}{\phi_1}, \ldots, \frac{\phi_r}{\phi_1}\right] \;\xrightarrow{\sigma^*}\; A \;\to\; A/\mathfrak{m}_x^k.$$

其中 $\sigma^* z = z$ 和 $\sigma^*(\phi_i/\phi_1) = 0$ 对于 $2 \leq i \leq r$。最后的复合环映射的核恰好是 (4.1)，从而得到 (a)。

至于其余部分：由 (a) 可知，$\mathcal{I}_{\iota(ex)}(1)$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 上由元素 $\pi^* z^k \cdot \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ 生成。命题 (b) 得证。□

COROLLARY 4.4. 设 $\mathbb{P}E$ 和 ι如上。对于 C上的任意次数为 e 的有效除子 D，子概形 $\iota(D) \subset \mathbb{P}E$ 定义了 $\mathrm{Hilb}^e(\mathbb{P}E)$ 中的一个点，该点是π-非亏格且可平滑化的。

PROOF. 首先，由于 $\iota(D)$ 是曲线型概形经嵌入所得的像，$\iota(D)$ 是可平滑化的。至于其余部分：由于 π-非亏格性是 C 上的局部性质，只需考虑 $D = ex$ 的情形。在这种情形下，由引理 4.3 (b) 可知

$$E_Z^*|_U \;=\; \pi_* \mathcal{I}_Z(1)|_U \;\cong\; \mathcal{O}_U(-ex) \oplus \mathcal{O}_U^{\oplus(r-1)}.$$

因此，E^*/E_Z^* 的长度为 e；由此，根据定义 2.11，$\iota(D)$ 是 π-非亏格的。

□

现在假设 $S = \mathbb{P}E$ 是一个维数为 $r \geq 2$ 、以 C 为底的卷曲。我们将利用关于曲线割线轨迹的已有结果，证明预期维数较大的 S 的割线轨迹非空。

Proposition 4.5. 设 E 为一个秩为 $r \geq 2$ 、次数为 d的向量丛，并记$S := \mathbb{P}E$。假设 $V \subseteq H^0(S, \mathcal{L}_M)$是一个维数为 $n+1$的线性子系。假设

$$0 < f < e \quad and \quad re - f(n+1-e+f) \geq (r-1)e. \tag{4.2}$$

则 $H_e^{e-f}(V)_{\mathrm{nd}}$ 和 $Q_e^{e-f}(V)$均非空。

Proof. 记 $d' := \deg(E \otimes M^{-1}) = d - r \cdot \deg(M)$。根据 [PR03，命题 6.1]，，对所有 $k \gg 0$，存在一个短正合列 $0 \to L \to E \otimes M^{-1} \to F \to 0$，其中 F是一个秩为 $r-1$ 、次数为 k的稳定向量丛。我们选择

$$k \geq \max\{0, 2g + d'\}. \tag{4.3}$$

由于 $k \geq 0$，根据稳定性有 $h^0(C, F^*) = 0$。对 $0 \to$取整体截面 $F^* \to E^* \otimes M \to L^{-1} \to 0$ 并取对偶，得到

$$\cdots \to H^0(L^{-1})^* \to H^0(E^* \otimes M)^* \to 0. \tag{4.4}$$

将 C 射影化并与 $\mathbb{P}L$相认同，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} |L^{-1}|^* & - - \twoheadrightarrow & \mathbb{P}V^* \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_{L^{-1}}} & & \uparrow \\ C & \xhookrightarrow{\iota} & \mathbb{P}E. \end{array}$$

现在 $\deg L^{-1} = k - d'$，由 (4.3) 可知其至少为 $2g$。因此 $h^1(C, L^{-1}) = 0$和$\varphi_{L^{-1}}$ 是一个嵌入。由于 C 在 $|L^{-1}|^*$中非退化，我们得到 $\mathbb{P}V$ 与 $|L^{-1}|$的一个子系统 $g^n_{k-d'}$ 之间的认同。

接下来我们回顾 [ACGH85，第 355] 页：这个$g^n_{k-d'}$的相对亏格定义为 $\deg L^{-1} - g - n$。由于 $h^1(C, L^{-1}) = 0$，我们有

$$\deg L^{-1} - g - n = \chi(C, L^{-1}) - (n+1) = h^0(C, L^{-1}) - \dim V,$$

由于在 (4.4) 中我们已将 $\mathbb{P}V$与 $|L^{-1}|$ 的一个子系统相认同，因此该值非负。此外，由 (4.2) 可知 $e - f(n+1-e+f) \geq 0$。因此，根据上述文献，通常割线轨迹 $V_e^{e-f}(g^n_{d+k}) \subseteq C_e$ 非空。于是存在 C 上的一个次数为 e 的除子 D，使得 $\mathrm{Span}\,\psi(\iota(D))$ 的维数为 $e-f-1$。那么 $\iota(D)$ 是 $\mathbb{P}E$ 的一个长度为 e的子概形，其张成空间至多是 $|\mathcal{L}_M|^*$中的一个 $\mathbb{P}^{e-f-1}$；并且根据推论 4.4，$\iota(D)$ 是 π-非亏格且可平滑化的。因此 $H_e^{e-f}(V)_{\mathrm{nd}}$ 非空，由此命题 2.12 可知 $Q_e^{e-f}(V)$ 也非空。□

Remark 4.6. 若 $f = 1$，则 (4.2) 化简为 $e \geq 2$ 和 $2e - 1 \geq n + 1$。若$e = n$，则对于 $n \geq 2$，此条件成立。因此对于 $r \geq 2$，命题 4.5 的陈述再次推广了 [AS15，引理 2.1] 中关于非空性的部分。

我们以非空性的一个必要条件结束本节。

Proposition 4.7. 设 E 是一个秩为 r 、次数为 d的向量丛。令 $h := h^0(C, K_C \otimes E)$。若 Q_e^{e-f}非空，则扭曲 Brill–Noether 位点

$$B^{\widehat{h}+f}_{1,e}(K_C \otimes E) = \{L \in \mathrm{Pic}^e(C) : h^0(C, K_C L \otimes E) \geq f\}$$

包含一个有效线丛。

Proof. 假设 $[F^* \to E^*]$ 属于 Q_e^{e-f}。利用 (3.2)，我们得到

$$h^0(C, K_C \otimes F) \;\geq\; h^0(K_C \otimes E) + f.$$

现在，对于某个 $D \in C_e$，有 $F \subseteq E(D)$。于是 $\mathcal{O}_C(D)$ 属于 $B^{h+f}_{1\,e}$，$(K_C \otimes E)$。 □

这一观察将在第 6 节及之后进一步展开。

5. 割线轨迹的切空间

本节将描述 $Q_e^{e-f}(V)$ 的扎里斯基切空间，这是对 [ACGH85，引理 IV.1.5] 以及 [Cop95，定理 0.3] 的推广。作为准备，我们给出任意 Quot 概形中一个元素的一阶无穷小变形的构造，这将便于计算。

5.1. Quot 概形的切空间。设 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 是一个极化簇，且 $\mathcal{V}$ 是 X 上的相干层。$\mathrm{Quot}^{\Phi}(\mathcal{V})$ 概形参数化相干商 $\mathcal{V} \xrightarrow{q} \mathcal{Q}$ 的等价类，其中 $\mathcal{Q}$ 具有希尔伯特多项式 Φ。给定 $[\mathcal{V} \xrightarrow{q} \mathcal{Q}]$ 的一阶无穷小变形由扎里斯基切空间 $T_q\mathrm{Quot}^{\Phi}(\mathcal{V})$ 参数化。该空间典范同构于 $H^0(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}))$，其中 $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}(q)$；例如参见 [HL10，第 2] 章。这些变形自然地诱导出层 $\mathcal{W}$ 的变形，我们现在将构造这种变形。（[Eis95，习题 6.12 c] 中给出了类似的变形方法。）

对于每个 $u \in H^0(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}))$，令 $\mathbb{W}_u$ 为 Spec $\mathbb{C}[\varepsilon] \times X$ 上的层，其在每个开集 $U \subseteq X$ 上由下式给出

$$\mathbb{W}_u(U) \;=\; \{\varepsilon t + s \in H^0(U, \varepsilon \cdot \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) : q(t) = u(s)\} \tag{5.1}$$

（这里我们用到这样一个事实：Spec $\mathbb{C}[\varepsilon] \times X$ 与 X 具有相同的环境拓扑空间。）层 $\mathbb{W}_u$ 自然包含于 $\varepsilon \cdot \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ 中，并且很容易验证 $\mathbb{W}_u = \mathbb{W}$ 可纳入如下形式的正合图

(5.2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \varepsilon \cdot \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathcal{W} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\
0 & \longrightarrow & \varepsilon \cdot \mathcal{V} & \longrightarrow & \varepsilon \cdot \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\
0 & \longrightarrow & \varepsilon \cdot \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

因此，$\mathbb{W}_u$ 定义了 $\mathcal{V} \xrightarrow{q} \mathcal{Q}$ 的一阶无穷小变形。

Lemma 5.1. 这一对应关系

$$u \;\mapsto\; \left[\varepsilon \cdot \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \to \frac{\varepsilon \cdot \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}}{\mathbb{W}_u}\right]$$

在 $H^0(C, \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}))$ 与 $[\mathcal{V} \xrightarrow{q} \mathcal{Q}]$ 的一阶无穷小变形的同构类集合之间定义了一个双射。

Proof. 我们仅指出主要步骤。首先回顾一下， $\mathcal{O}_X$-模的映射 $u\colon \mathcal{W}\to\mathcal{Q}$ 的图像是 $\mathcal{O}_X$-子模 $\Gamma_u\subseteq\mathcal{Q}\oplus\mathcal{W}$，在开集 $U\subseteq X$ 上由下式给出

$$\Gamma_u(U) \;=\; \{(u(s),s) : s\in\mathcal{W}(U)\}.$$

根据构造， $\mathbb{W}_u$ 恰好是 $\Gamma_{\varepsilon u}$ 在投影 $\varepsilon\cdot\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}\to\varepsilon\cdot\mathcal{Q}\oplus\mathcal{W}$下的原像。

现在，例如根据 [HL10，第 2 节，2]， $\mathcal{V}\xrightarrow{q}\mathcal{Q}$ 的每个一阶无穷小变形都对应于一个形如 (5.2) 的正合图。正如上文所述， $\mathbb{W}=\mathbb{W}_u$ 适合放入这样的图中。反过来，给定一个形如 (5.2) 的图， $\widetilde{}$令 $\mathbb{W}:=(q\oplus\mathrm{Id}_{\mathcal{V}})(\mathbb{W})$。于是

$\widetilde{}$(i) $\mathbb{W}\cap(\varepsilon\cdot\mathcal{Q}\oplus 0)=0$，因为 $\mathbb{W}\cap(\varepsilon\cdot\mathcal{V}\oplus 0)=\varepsilon\cdot\mathcal{W}$;

以及$\widetilde{}$(ii) $\mathbb{W}$ 在 $\mathcal{V}$ 中的像是 $\mathcal{W}$，因为 $\mathbb{W}\to\mathcal{W}$ 是满射。

$\widetilde{}$线性代数论证随后表明， $\mathbb{W}=\Gamma_{\varepsilon u}$ 对于唯一确定的$u\colon\ \mathcal{W}\to\mathcal{Q}$，并且 $\mathbb{W}=\mathbb{W}_u$。 □

5.2. $Q_e^{e-f}(V)$ 的扎里斯基切空间。现在我们考虑一条光滑曲 e C 和一个秩为 r 、次数为 d的向量丛 $E\to C$ 。设 M 为一个线丛，且 $V\subseteq H^0(C,E^*\otimes M)$ 是一个维数为 $n+1$ 的子空间。我们将研究 $Q_e^{e-f}(E,M,V)\;=:\;Q_e^{e-f}(V)$ 的切空间。

在本文余下部分，对于 C 上的任意层 $\mathcal{W}$，我们分别将 $H^i(C,\mathcal{W})$ 和 $h^i(C,\mathcal{W})$ 简记为 $H^i(\mathcal{W})$ 和 $h^i(\mathcal{W})$。

按照 C_e^f 在 [ACGH85，第 IV 章] 中关于切空间的论述（它恰好是 $Q_e^{e-f}(K_C,\mathcal{O}_C,H^0(K_C))$），我们固定如下设定。考虑一个初等变换 $0\to E\to F\to\mathcal{T}\to 0$，其中 τ 的长度为 e。取 $\mathrm{Hom}(-,M)$，得到一个序列

$$0\;\to\;F^*\otimes M\;\to\;E^*\otimes M\;\xrightarrow{q}\;\tau\;\to\;0 \tag{5.3}$$

其中 $\tau:=\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{T},M)$ 与 $\mathcal{T}$ 非典范同构。根据上一节，且由于 M 可逆，

$$T_{F^*}\mathrm{Quot}^{0,e}(E^*)\;\cong\;H^0(C,\mathrm{Hom}(F^*,\tau\otimes M^{-1}))\;\cong\;H^0(C,\mathrm{Hom}(F^*\otimes M,\tau)).$$

此外，回顾一下存在一个自然映射

$$c\colon H^0(\mathrm{Hom}(F^*\otimes M,\tau))\;\to\;\mathrm{Hom}\left(H^0(F^*\otimes M),H^0(\tau)\right).$$

Proposition 5.2. 设 E、 M 和 V 如上。假设 $[F^*\to E^*]$ 是 $Q_e^{e-f}(V)\setminus Q_e^{e-f-1}(V)$ 中的一个点。那么

$$T_{F^*}Q_e^{e-f}(V)\;=\;\{u\in H^0(\mathrm{Hom}(F^*\otimes M,\tau)) : c(u)(V\cap H^0(F^*\otimes M))\subseteq q(V)\}.$$

此外，这恰好是以下映射的核

$$H^0(\mathrm{Hom}(F^*\otimes M,\tau))\;\to\;\mathrm{Hom}\left(V\cap H^0(F^*\otimes M),\frac{H^0(\tau)}{q(V)}\right)$$

该映射由依次复合 c、限制到 $V\cap H^0(F^*\otimes M)$ 以及对 $q(V)$ 取商得到。

Proof. 当且仅当每个 $s\in V\cap H^0(F^*\otimes M)$ 都能提升到如下给出的变形 $\mathbb{W}_u$（见（5.1））时，切向量 $u\in H^0(\mathrm{Hom}(F^*\otimes M,\tau))$ 才属于 $T_{F^*}Q_e^{e-f}(V)$:

$$\mathbb{W}_u(U)\;=\;\{\varepsilon t+s\in\varepsilon\cdot(E^*\otimes M)(U)\oplus(F^*\otimes M)(U) : q(t)=u(s)\}$$

在每个开子集 $U \subseteq C$ 上。这等价于说，对于每个元素$s \in V \cap H^0(F^* \otimes M)$，都存在 $t \in V$，使得 $q(t) = c(u)(s)$；换言之，即 $c(u)\left(V \cap H^0(\widehat{F})\right) \subseteq q(V)$。这就证明了第一个命题；第二个命题则显而易见。□

5.3. 完备情形。在本小节中，我们固定 $M = K_C$ 并假设$V = H^0(E^* \otimes K_C)$。在此情形下，我们可以进一步说明 $T_{F^*}Q_e^{e-f}$。

首先，我们回顾一些熟悉的事实。为简化记号，对于任意位于 C 上的局部自由层 W，我们将 $K_C \otimes W^*$ 记作 W。固定一个初等变换 $0 \to E \to F \to \mathcal{T} \to 0$。这会自然地确定一个序列 $0 \to \widehat{F} \to \widehat{E} \xrightarrow{q} \tau \to 0$ 以及 $\mathrm{Quot}^{0,e}(E^*)$ 中的一个元素，如上所述。令 $\partial\colon H^0(\tau) \to H^1(\widehat{F})$ 表示相应的余边界映射。于是我们得到一个具有正合行的交换图

(5.4)

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathrm{Hom}(\widehat{F},\tau)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathrm{End}\,\widehat{F}) & \longrightarrow & H^1(\mathrm{Hom}(\widehat{F},\widehat{E})) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle \cup} & & \downarrow & & \\ \mathrm{Hom}\left(H^0(\widehat{F}), H^0(\tau)\right) & \xrightarrow{\partial_*} & \mathrm{Hom}\left(H^0(\widehat{F}), H^1(\widehat{F})\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(H^0(\widehat{F}), H^1(\widehat{E})\right) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\cup$ 是杯积映射。我们回顾一个众所周知的事实：通过 Serre 对偶，$\cup$ 与 Petrimap 对偶

$$\mu\colon H^0(\widehat{F}) \otimes H^0(F) \to H^0(\widehat{F} \otimes F) = H^0(K_C \otimes \mathrm{End}\,F).$$

Proposition 5.3. 令 $0 \to E \to F \to \mathcal{T} \to 0$ 如上。假设$[F^* \to E^*]$ 属于 $Q_e^{e-f} \setminus Q_e^{e-f-1}$。

(a) 我们有 $T_{F^*}Q_e^{e-f} = \text{核}(\cup \circ \delta) = \mathrm{Im}\,({}^t\delta \circ \mu)^\perp$。(b) 轨迹 Q_e^{e-f}在 $[F^* \to E^*]$ 处是光滑的且具有预期维数，当且仅当 $\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F} \otimes E)\right) = H^0(\widehat{F}) \otimes H^0(E)$。

Proof. (a) 由于 $V = H^0(\widehat{E})$，当且仅当 $\partial \circ c(u)$ 在 $\mathrm{Hom}\left(H^0(\widehat{F})\ H^1(\widehat{F})\right)$ 中为零时，我们有 $\mathrm{Im}(c(u)) \subseteq q(V)$。因此，根据命题 5.2 以及 (5.4) 的交换性，可得

$$T_{F^*}Q_e^{e-f} = \mathrm{Ker}(\partial_* \circ c) = \mathrm{Ker}(\cup \circ \delta).$$

由于对任意向量空间映射 φ，$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}({}^t\varphi)^\perp$，且由于 ${}^t\cup = \mu$，这又与 $\mathrm{Im}\,({}^t\delta \circ \mu)^\perp$ 相同。

(b) 根据 (a)，$T_{F^*}Q_e^{e-f}$在 $T_{F^*}\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 中的余维恰好为 $\dim \mathrm{Im}({}^t\delta \circ \mu)$。下面计算后者。对偶化 (5.4)，得到

(5.5)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\widehat{F}) \otimes H^0(E) & \longrightarrow & H^0(\widehat{F}) \otimes H^0(F) & \longrightarrow & H^0(\widehat{F}) \otimes H^0(\tau)^* \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\widehat{F} \otimes E) & \longrightarrow & H^0(\widehat{F} \otimes F) & \xrightarrow{{}^t\delta} & H^0(\mathrm{Hom}(\widehat{F},\widehat{\tau}))^*. \end{array}$$

因此 $\operatorname{Ker}({}^t\delta\circ\mu) = \mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right)$，故 $\operatorname{Im}({}^t\delta\circ\mu)$ 的维数为

$$h^0(\widehat{F})\cdot h^0(F) - \dim\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right) = h^0(\widehat{F})\cdot\left(h^0(F)-h^0(E)\right) - \dim\frac{\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right)}{H^0(\widehat{F})\otimes H^0(E)}.$$

根据假设，$h^0(\widehat{F}) = h^0(\widehat{E}) - e + f$。因此，由 (3.2) 可得 $h^0(F) - h^0(E) = f$。于是，$\operatorname{Im}({}^t\delta\circ\mu)$ 的维数为

$$\left(h^0(\widehat{E}) - e + f\right)\cdot f - \dim\frac{\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right)}{H^0(\widehat{F})\otimes H^0(E)}.$$

由于 Q_e^{e-f}in $\operatorname{Quot}^{0,e}(E^*)$ 的预期余维为 $(h^0(\widehat{E}) - e + f)\cdot f$(因为在此情形下 $n+1 = h^0(\widehat{E})$)，我们可知，$T_{F^*}Q_e^{e-f}$具有预期余维当且仅当 $\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right) = H^0(\widehat{F})\otimes H^0(E)$。□

5.4. 一些例子。继续使用上一小节的记号，我们回到对广义 Abel–Jacobi 映射的研究

$$a\colon \operatorname{Quot}^e(E^*) \dashrightarrow U_C(r,d+e)$$

由 $[F^*\to E^*]\mapsto F$ 给出。如第 3 节所述，我们有

$$a^{-1}\left(B^{h^0(E)+f}_{r,d+e}\right) = Q_e^{e-f}(E,K_C,H^0(E^*\otimes K_C)).$$

众所周知，$B^{h^0(E)+f}_{r,d+e}$，在稳定丛 F 处光滑且具有预期维数，当且仅当 μ 是单射。在特殊情形 $E = \mathcal{O}_C$ 和 $F = \mathcal{O}_C(D)$ 且 $D\in C_e^f\setminus C_e^{f+1}$ 时，根据 [ACGH85，引理 IV.1。6]，的单射性也等价于 C_e^f 在 D 处的光滑性。可以验证，在这种情况下，命题 5.3（b）中的条件等价于 μ 的单射性，因此并不矛盾。不过，我们现在将给出一些例子，说明一般而言，$B^{h^0(E)+f}_{r,d+e}$，在 F 处的光滑性，对于 $Q_e^{e-f}(E,\ K_C,\ H^0(E^*\otimes K_C))$ 在 F^* 处的光滑性而言，既非必要条件，也非充分条件。

Example 5.4. 令 D 为次数为 $e\le g-1$的有效除子，且 $E := \mathcal{O}_C(-D)$。设 $F = E(D) = \mathcal{O}_C$，使得 $F = K_C$。这里 $\deg(E) = -e$，且 $f = 1$，并且

$$F\in Q_e^{e-1}(E,K_C,H^0(E^*\otimes K_C)) = Q_e^{e-1}(\mathcal{O}_C(-D),K_C,H^0(K_C(D))).$$

显然，$B^1_{1,\ d+e} = B^1_{1,\ 0} = \{\mathcal{O}_C\}$ 在 F处光滑且具有预期维数。

现在 $H^0(\widehat{F})\otimes H^0(F) = H^0(K_C)\otimes H^0(\mathcal{O}_C)$。显然，$\mu$是一个同构，并且

$$\mu^{-1}\left(H^0(\widehat{F}\otimes E)\right) = \mu^{-1}\left(H^0(K_C(-D))\right) = H^0(\mathcal{O}_C)\otimes H^0(K_C(-D)),$$

由于 $\deg(D)\le g-1$，该项非零。另一方面，$H^0(\mathcal{O}_C(-D))\otimes H^0(K_C)$ 为零。根据命题 5.3 (b)，割线轨迹 Q_e^{e-1} 在 F 处不光滑。（可以验证，Q_e^{e-1} 的预期维数为 $e-g<0$。）

下一个例子表明，尽管 $B^k_{r,d}$ 在 F 处不光滑， Q^{e-f}_e 仍可能在 F^* 处光滑。其思路是构造一个 E 和 F，使得 Ker μ 非零，但包含于 $H^0(\widehat{F})\otimes H^0(E)$，从而条件 $\mu^{-1}H^0(\widehat{F}\otimes E) = H^0(\widehat{F})\otimes H^0(E)$ 仍然成立。或许这做法有些刻意，我们将从向量丛 F 开始，并选择一个适当的 E。向量丛 F 将具有秩二和典范行列式；此类向量丛的 Brill–Noether 轨迹已在 [TiB04],[TiB08] 等文献中得到研究，并且已知在许多情况下具有超额维数。

Example 5.5. 假设 $g \geq 6$，从而 $B^2_{1,\ g-2}$ 非空。设 L_1 是次数为 $g-2$ 的线丛，且 $h^0(L_1) = 2$。设 x_1 和 x_2 是 C的一般点，并令 $L_2 := K_C L_1^{-1}(-x_1 - x_2)$。则 $h^0(L_2) = 1$。令

$$0 \ \to \ L_1 \oplus L_2 \ \to \ F \ \to \ \mathcal{O}_{x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_2} \ \to \ 0 \tag{5.6}$$

是一个初等变换，使得 L_1 和 L_2 都不是 F的商。根据 [Mer99，定理 ´eor`eme A.5], ，我们可以假设 F 是稳定的。

现在我们断言 $H^0(F) = H^0(L_1) \oplus H^0(L_2)$。只需证明复合映射

$$H^0(\mathcal{O}_{x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_2}) \ \to \ H^1(L_1) \oplus H^1(L_2) \ \to \ H^1(L_1) \ \cong \ H^0(K_C L_1^{-1})^* \tag{5.7}$$

是单射。不难看出，这个复合映射的像恰好是平面曲线 $\varphi_{K_C L_1^{-1}}(C)$ 上由点 x_1 和 x_2 张成的割线所对应的锥面。
如前所用，由于 x_1 和 x_2 的一般性，我们有 $h^0(K_C L_1^{-1}(-x_1 - x_2))) = 1$，因此此锥面的维数为 2。于是 (5.7) 是一个同构，特别地，它如所需为单射。

因此， F定义了 $B^3_{2,\ 2g-2}$中的一个点。此外，由于 $\det(F) \cong K_C$，我们有 $F \cong K_C \otimes F^*$，且 Petri 映射可识别为自然映射

$$H^0(F) \otimes H^0(F) \ \to \ H^0(F \otimes F).$$

滥用记号，我们也用 μ表示此映射。设 s_1、 s_2 是 $H^0(L_1)$的一组基。那么 $s_1 \wedge s_2$ 是 Ker(μ)的非零元素，因此 $B^3_{2,\ 2g-2}$ 在 F处不是光滑的，和/或不具有预期维数。

现在我们将构造一个向量丛 E ，使得 $[F^* \to E^*]$ 是某个 $Q^{e-f}_e(E^*, K_C, H^0(E^* \otimes K_C))$的光滑点。设 E 为一个初等变换$0 \to E \to F \to \mathcal{O}_D \to 0$ ，其中 D 是次数为 $e \geq 2$的一般有效除子，并且

$$\mathrm{Im}\,(E|_p \to F|_p) \ = \ L_1|_p \text{ for each } p \in D. \tag{5.8}$$

由于 $L_1 \to F \to \mathcal{O}_D$ 为零， $L_1 \subset E$。（注意，因此 E 不稳定，因为 $\deg(L_1) = g - 2 \geq \frac{2g-2-e}{2}$ ，但这不会影响论证。）特别地，$H^0(E)$ 包含 $H^0(L_1)$。此外，令 s_3 为 $H^0(L_2)$ 的一个生成元。由 D的一般性，我们可以假设，对于所有 $p \in D$， $s_3(p) \notin L_1|_p$ 。因此， s_3 不是 E的一个截面，从而 $h^0(E) = h^0(L_1) = 2$。由黎曼–罗赫定理， $h^0(E^* \otimes K_C) = e + 2$。由于

$$h^0(F^* \otimes K_C) \ = \ h^0(F) \ = \ 3 \ = \ h^0(E^* \otimes K_C) - e + 1,$$

我们有 $[F^* \to E^*] \in Q^{e-1}_e\left(E, K_C, H^0(C, E^* \otimes K_C)\right)$。我们将证明它是一个光滑点。

$\widehat{\ }$根据命题 5.3 (b)，注意到 $F \cong F^* \otimes K_C = F$，我们必须证明

$$\mu^{-1}\left(H^0(F \otimes E)\right) \ = \ H^0(F) \otimes H^0(E). \tag{5.9}$$

设 $s := \sum_{i\ ,\ j=1}^{3} \alpha_{ij} s_i \otimes s_j$ 是 $H^0(F) \otimes H^0(F)$ 的一个元素，并假设对于所有 $p \in C$，$(\mu(s))(p)$ 都属于 $F \otimes E|_p$ 的像。这仅在 s 处是非空的

条件，因为对于 $p \notin D$ 有 $E|_p = F|_p$。对于 $p \in D$，利用 (5.6)，存在 $(F \otimes F)|_p$ 的一个典范分裂，写作

$$(L_1|_p \otimes L_1|_p) \oplus (L_2|_p \otimes L_1|_p) \oplus (L_1|_p \otimes L_2|_p) \oplus (L_2|_p \otimes L_2|_p)\,.$$

我们将 $(\mu(s))\,(p)$ 按此分解展开：

(5.10)
$$\begin{aligned}(\alpha_{11}s_1(p) \otimes s_1(p) + \alpha_{21}s_2(p) \otimes s_1(p) + \alpha_{12}s_1(p) \otimes s_2(p) + \alpha_{22}s_2(p) \otimes s_2(p),\\ \alpha_{31}s_3(p) \otimes s_1(p) + \alpha_{32}s_3(p) \otimes s_2(p), \alpha_{13}s_1(p) \otimes s_3(p) + \alpha_{23}s_2(p) \otimes s_3(p),\\ \alpha_{33}s_3(p) \otimes s_3(p))\,.\end{aligned}$$

现在由 (5.8) 可知，根据假设，$(\mu(s))\,(p)$ 属于

$$\operatorname{Im}\left(E|_p \otimes F|_p \;\to\; F|_p \otimes F|_p\right) \;=\; (L_1|_p \oplus L_2|_p) \otimes L_1|_p$$

对 $p \in D$。因此，对于所有 $p \in D$，(5.10) 的第三和第四个分量都必须为零。首先，由于根据 D 的一般性，可以假设对所有 $p \in D$，$s_3(p)$ 都非零，于是得到 $\alpha_{33} = 0$。此外，考察 (5.10) 的第三个分量，可得

$$(\alpha_{13}s_1(p) + \alpha_{23}s_2(p)) \otimes s_3(p) \;=\; 0 \text{ for all } p \in D.$$

利用上面 $s_3(p)$ 非零这一事实，可得对所有 $p \in D$，$\alpha_{13}s_1(p) + \alpha_{23}s_2(p) = 0$。再次利用 D 的一般性，我们可以假设 D 中任意两个点在映射 $C \to |L_1|^* = \mathbb{P}^1$ 下都不重合。因此，此条件对 $(\alpha_{13}, \alpha_{23})$ 施加了 e 个独立线性条件。由于 $e \geq 2$，唯一的解是 $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$。由此可得 $s \in H^0(F) \otimes H^0(E)$。因此 (5.9) 得以满足，且 Q_e^{e-1} 在 $[F^* \to E^*]$ 处光滑。

Remark 5.6. 在例 5.4 中，奇点源于一个维数不符合预期的行列式簇。此外，例5.5中的向量丛 E 并非半稳定。若能找到其他类型的例子，并更深入地探究$B^k_{r,d}$的光滑性、Q_e^{e-f}的光滑性与 E的半稳定性之间的关系，将会很有意义。

6. Q_e^{e-1}的参数化

与前面一样，设 E 是一个秩为 r、次数为 d 的 C上的向量丛。在 [Hit19, § 4.3], 中，给出了映射 $\mathbb{P}E \dashrightarrow |\mathcal{L}_M|^*$的拐点轨迹的一种参数化。现在，我们将构造 $Q_e^{e-1}(E, M, H^0(E^* \otimes M))$的一种类似参数化。在接下来的各节中，我们将针对这一参数化给出一些应用，类似于 [Hit19, § 5–6]中的应用。

对于 $M \in \operatorname{Pic}^0(C)$，考虑 Quot 概形

$$\operatorname{Quot}^{r-1,d+2r(g-1)+e}(K_C M^{-1} \otimes E)$$

它参数化商 $[K_C M^{-1} \otimes E \to \mathcal{Q}]$ 的等价类，其中 $\mathcal{Q}$ 是秩为 $r-1$、次数为 $\deg(K_C M^{-1} \otimes E) + e$的凝聚层；等价地，它参数化 $K_C M^{-1} \otimes E$中次数为 $-e$的可逆子层。由于我们希望聚焦于子层，并简化记号，将这个 Quot 概形记作 $Q_{1,\,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$。

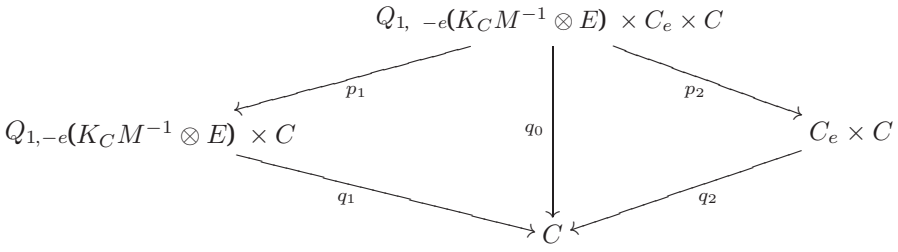
设 $a\colon C_e \to \operatorname{Pic}^{-e}(C)$ 是阿贝尔–雅可比型映射 $D \mapsto \mathcal{O}_C(-D)$，并设$b\colon Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E) \to \operatorname{Pic}^{-e}(C)$ 是遗忘映射 $\left[L \xrightarrow{\sigma} K_C M^{-1} \otimes E\right] \mapsto L$。

考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} S_M^e & \longrightarrow & Q_{1,-e}(K_C M^{-1}\otimes E) \\ \downarrow & & \downarrow b \\ C_e & \xrightarrow{\ a\ } & \mathrm{Pic}^{-e}(C). \end{array} \tag{6.1}$$

从集合论的角度看， S_M^e 参数化了满足以下条件的配对 (σ, D)： D 是 C 上的次数为 e 的有效除子，且 $\sigma\colon\ \mathcal{O}_C(-D) \to K_C M^{-1}\otimes E$ 是一个层单射。现在我们将构造一个由 S_M^e 参数化的 E^* 的初等变换族。

考虑下图，其中所有映射均为投影。



还要回忆正合列 $0 \to \mathcal{O}_{C_e\times C}(-\mathscr{D}) \to \mathcal{O}_{C_e\times C} \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_{\mathscr{D}} \to 0$ ，其中 $\mathscr{D}$ 是泛除子。

令 $\Sigma\colon\ \mathcal{L} \to q_1^*(K_C M^{-1}\otimes E)$ 为 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1}\otimes E)\times C$ 上的泛子层。一个关键点是， $\mathcal{L}$ 是局部自由的，因此 $p_1^*\mathcal{L}$ 也是（这就是我们使用 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1}\otimes E)$ 而不直接使用 $\mathrm{Quot}^{1,e}(K_C{}^{-1}M\otimes E^*)$ 的原因）。因此 $p_1^*\Sigma$ 可以视为 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1}\otimes E)\times C_e\times C$ 上向量丛之间的映射（带有一个退化轨迹）。于是我们可以对它取转置，再扭绞 $q_0^*(K_C M^{-1})$，并构造复合映射

$$q_0^*E^* \ \to\ q_0^*(K_C M^{-1})\otimes p_1^*\mathcal{L}^\vee \ \to\ q_0^*(K_C M^{-1})\otimes p_1^*\mathcal{L}^\vee\otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathscr{D}}. \tag{6.2}$$

现在 C_e 也是一个 Quot 概形，它参数化 C 上任意线丛的次数为 e 的挠商。因此，根据 Quot 概形的泛性质，此映射在任意纤维上的限制

$$\left\{[L \xrightarrow{\sigma} K_C M^{-1}\otimes E], D\right\}\times C$$

被识别为复合映射

$$E^* \ \xrightarrow{\widehat{\sigma}}\ K_C M^{-1}L^{-1} \ \to\ K_C M^{-1}L^{-1}|_D$$

其中 $\widehat{\sigma} = {}^t\sigma\otimes \mathrm{Id}_{K_C M^{-1}}$。其核是 E^* 的一个初等变换。由于限制 $K_C M^{-1}L^{-1} \to K_C M^{-1}L^{-1}|_D$ 总是满射，当且仅当 {6} 在 D 的每个点处都是向量丛单射时，该初等变换的次数为 $\deg E^* - e$。将其拉回到 (6.1) 中定义的 S_M^e，我们得到一族 $\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 的元素，其参数由开子集

$$\left\{\left([L \xrightarrow{\sigma} K_C M^{-1}\otimes E], D\right) : L\cong \mathcal{O}_C(-D) \text{ and } \sigma \text{ is a vector bundle injection along } D\right\}$$

S^e_M。根据 Quot$^e(E^*)$ 的泛性质，我们得到一个映射 $\gamma^e_M\colon S^e_M \dashrightarrow \mathrm{Quot}^e(E^*)$，其定义域恰为上述开集，并由如下方式给出：将

$$(\sigma, D) \mapsto \mathrm{Ker}\left(E^* \xrightarrow{\widehat{\sigma}} K_C M^{-1}(D) \to K_C M^{-1}(D)|_D\right). \tag{6.3}$$

现在我们利用空间 S^e_M 描述轨迹 $Q_e^{e-1}(E, M, H^0(E^* \otimes M)) = Q_e^{e-1}$。这一描述与 [Hit19, 命题 4.1] 中给出的卷曲 $\mathbb{P}E$ 的密切空间描述类似。

Proposition 6.1. 设 E 和 M 如上所述，且 γ^e_M 如 (6.3) 中所定义。(a) 我们有 Im$(\gamma^e_M) \subseteq Q_e^{e-1}$。(b) 设 $[F^* \to E^*]$ 属于 Q_e^{e-1}。那么对某个 $e' \in \{1, \dots, e\}$，存在属于 Im $\left(\gamma^{e'}_M\right) \subseteq \mathrm{Quot}^{e'}(E^*)$ 的 $[G^* \to E^*]$，使得 $[F^* \to G^*]^* \in \mathrm{Quot}^{e-e_1}(G^*)$。

Proof. (a) 假设 $[F^* \to E^*]$ 具有 $\gamma^e_M(\sigma, D)$ 的形式。根据γ^e_M的定义，我们有一个正合图

$$\begin{array}{ccccc} F^* & \longrightarrow & E^* & \longrightarrow & E^*/F^* \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{\sigma}'} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\ K_C M^{-1} & \longrightarrow & K_C M^{-1}(D) & \longrightarrow & K_C M^{-1}(D)|_D \end{array}$$

因此，$\widehat{\sigma}'$定义了 $H^0(K_C M^{-1} \otimes F)$ 的一个元素。现在根据假设，$\widehat{\sigma}$沿着 D是一个向量丛满射。由此可知，$\widehat{\sigma}'$ 无法经由 E^*进行分解。因此$h^0(K_C M^{-1} \otimes F) \geq h^0(K_C M^{-1} \otimes E) + 1$。利用（3.2），我们得到 $h^0(F^* \otimes M) \geq h^0(E^* \otimes M) - e + 1$。因此 $[F^* \to E^*]$属于 Q_e^{e-1}。

(b) 假设 $h^0(F^* \otimes M) \geq h^0(E^* \otimes M) - e + 1$。再次利用（3.2），我们看到存在 $\sigma \in H^0(C, K_C M^{-1} \otimes F)$，其在 $H^0(C, K_C M^{-1} \otimes (F/E))$ 中的像非零。

现在，我们将 F 的截面视为 E 的有理截面，其极点至多受限于 F/E。（这推广了有效除子 D 的情形下 $\mathcal{O}_C(D)$ 的定义。）设 $x_1, \dots, x_s \in \mathrm{Supp}(F/E)$ 为 $(\sigma \bmod K_C M^{-1} \otimes E)$ 的支撑点；由于 $\sigma \notin H^0(K_C M^{-1} \otimes E)$，这样的点至少有一个。对于 $1 \leq j \leq s$，我们可以选取 x_j 的适当邻域 U_j，以及 $K_C M^{-1} \otimes E|_{U_j}$ 的标架 $\nu_1^{(j)}, \dots, \nu_r^{(j)}$，并在 C 上取以 x_j 为点的局部参数 z_j，使得 $\sigma|_{U_j}$ 的像为 $\mathcal{O}_{U_j} \cdot \left(z_j^{-e_j} \cdot \nu_1^{(j)}\right)$。令 G 为 E 的初等变换，使得 $K_C M^{-1} \otimes G$ 的标架为

$$z_j^{-e_j} \cdot \nu_1^{(j)},\ \nu_2^{(j)},\ \dots,\ \nu_r^{(j)} \tag{6.4}$$

在每个 U_j 上，而在其他情况下等于 $K_C M^{-1} \otimes E$。现在，$z_j^{-e_j} \cdot \nu_1^{(j)} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$ 属于 F，其余标架元素 $\nu_2^{(j)}, \dots, \nu_r^{(j)}$ 属于 $E \subset F$。因此，我们有包含关系 $E \subset G \subseteq F$。记作 $e' := \sum_{i=1}^s e_j$，则有

$$\deg E + e' = \deg G \leq \deg F = \deg E + e.$$

特别地，$e' \leq e$，并且

$$[F^* \to G^*] \text{ is an element of } \mathrm{Quot}^{e-e'}(G^*). \tag{6.5}$$

令 D' 为有效除子 $\sum_{i=1}^{s} e_j x_j \in C_{e'}$。由 G 的构造可知

$$\sigma \in H^0(K_C M^{-1} \otimes G) \subseteq H^0(K_C M^{-1}(D') \otimes E)$$

而且，σ：$\mathcal{O}_C \to K_C M^{-1} \otimes G$在每个$x_j$处的像都非零。对 $\mathcal{O}_C(-D')$进行扭转后，我们看到 σ 定义了一个层单射 σ'：$\mathcal{O}_C(-D') \to K_C M^{-1} \otimes E$，它沿着 Supp D'是一个向量丛单射。

现在我们声称

$$[G^* \to E^*] = \gamma_M^{e'}\left([\sigma' \colon \mathcal{O}_C(-D') \to K_C M^{-1} \otimes E], D'\right).$$

为此：对每个 U_j，令 $\phi_1^{(j)}$、……、$\phi_r^{(j)}$为与 $\nu_1^{(j)}$、……、$\nu_1^{(j)}$ 对偶的 $E^*|_{U_j}$的标架。根据 G的构造，我们看到 $G^*|_{U_j} \subset E^*|_{U_j}$ 具有如下标架

$$z_j^{e_j} \cdot \phi_1^{(j)},\ \phi_2^{(j)},\ \ldots,\ \phi_r^{(j)} \tag{6.6}$$

与 (6.4) 对偶；并且 G^* 在 $C \setminus D'$上与 E^* 重合。另一方面，映射

$$E^* \xrightarrow{{}^t\sigma' \otimes \mathrm{Id}_{K_C M^{-1}}} K_C M^{-1}(D') \to K_C M^{-1}(D')|_{D'}$$

在我们选定的坐标下，U_j 上的映射由下式给出

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \phi_i^{(j)} \mapsto z_j^{-e_j} \cdot f_1 \mapsto z_j^{-e_j} \cdot f_1 \mod \mathcal{O}_{U_j}.$$

与 (6.6) 比较可知，此映射的核恰为 G^*，从而证明了所述结论。由该结论和 (6.5) 立即得到命题 (b)。□

Remark 6.2. 设 $[L \xrightarrow{\sigma} K_C \otimes E]$ 是 $Q_{1,\ -e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 的一个元素，其中 $|L^{-1}|$ 的维数为 $k \geq 1$。为简单起见，设 $|L^{-1}|$ 无基点。那么 $S^e_{\mathcal{O}_C}$ 包含轨迹

$$\{(\sigma, D) : D \in |L^{-1}|\} \cong \mathbb{P}^k.$$

由命题 6.1 (a)，对每个 $D \in |L^{-1}|^*$，我们都得到 Q_e^{e-1} 中的一个元素，沿着该元素 σ 是丛嵌入。由引理 2.9 和命题 2.12，射影模型 $\mathbb{P}E \dashrightarrow |\mathcal{L}_M|^*$ 具有一族由 $|L^{-1}|$的某个开子集参数化的 1- 亏格 e- 割线。

Remark 6.3. 我们可以问，S^e_M 与 H_e^{e-1}之间是否存在类似于命题 6.1 中所述的 Q_e^{e-1}关系。确实存在一个映射β：$S^e_M \dashrightarrow \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)_{\mathrm{nd}}$，由（$\sigma$，$D$）$\mapsto \mathbb{P}\sigma$（$D$）给出，它将引理 4.3 的构造整体化。该映射恰好在 σ 于 D处是向量丛单射时有定义；事实上，可以证明 $\alpha \circ \beta = \gamma$，其中 α：$\mathrm{Hilb}^e(S) \dashrightarrow \mathrm{Quot}^e(E^*)$是第 2.5 节中研究的映射。于是，引理 2.12 推出命题 6.1（a）的一个类比结果。然而，命题 6.1（b）较难推广，因为我们无法总是选取一个起到上述层 G 作用的子概形；这主要是由于 $\mathbb{P}E$中包含线性空间，从而产生了可辨识性问题（例如在 [BC21，定义 6.1]中定义）。因此，目前我们暂且满足于研究 Q_e^{e-1}。

在接下来的各节中，我们将运用命题6.1来刻画半稳定性，研究 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 的非常丰性问题，并证明在某些参数取一般值时，割线轨迹具有良好的性质。

7. 塞格雷不变量 s_1 与割线轨迹

本节中，我们运用参数空间 S_M^e ，根据塞格雷不变量 s_1 来刻画 $f = 1$ 的非空割线轨迹。首先，我们回顾 Segre 不变量的概念。

7.1. Segre 不变量。

DEFINITION 7.1. 设 $E \to C$ 是一个秩为 r 、次数为 d的向量丛。对于 $1 \leq t \leq r-1$，塞格雷不变量 $s_t(E)$ 定义为

$$s_t(E) := \min\{td - r \cdot \deg(F) : F \subset E \text{ a subbundle of rank } t\}.$$

塞格雷不变量是"稳定性次数"：当且仅当对于 $1 \leq t \leq r-1$， E 稳定时，$s_t(E) > 0$。显然，对于任意线丛 L， $s_1(E) = s_1(E \otimes L)$。此外，随着 E 在族中变化， $s_t(E)$ 下半连续。对线丛取直和，可以构造出 E ，使其 $s_t(E)$ 任意低。然而，Hirschowitz [Hir86，定理 ́eor`eme 4.4] （另见 [CH10]）证明了关于 $s_t(E)$ 的以下精确上界。

THEOREM 7.2（Hirschowitz 界）。设 $E \to C$ 为秩 r、次数 d的向量丛。那么对于 $1 \leq t \leq r-1$，有 $s_t(E) \leq t(n-t)(g-1) + \delta$，其中 δ是满足 $0 \leq \delta \leq r-1$ 且 $t(r-t)(g-1) + \delta \equiv td$ 模 r的唯一整数。此外，一般稳定的 E 达到此上界。

特别地，这意味着对于足够低的次数， E 的子层的 Quot 概形总是非空。下面我们将这一点对线子丛的情形表述得更精确。以下结果众所周知，但为方便起见，我们仍给出证明。

LEMMA 7.3. 设 C 是任意一条曲线。设 $E \to C$ 是一个模空间中的一般向量丛。那么当 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 非负时，它非空且光滑，维数为 $re + d + (r+1)(g-1)$；否则为空。此外，当$Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 非空时，一般元素是一个向量丛单射。

PROOF. 容易计算得出， $re + d + (r+1)(g-1) \geq 0$ 当且仅当

$$\deg(K_C \otimes E) - r \cdot (-e) \geq (r-1)(g-1) + \delta,$$

其中 δ 如定理 7.2 所述，利用左侧模 d r同余这一事实。在这种情况下，根据 Hirschowitz 界， $K_C \otimes E$ 有一个次数至少为 $-e$的线子丛，因此$Q_{1,\ -e}(K_C M^{-1} \otimes E)$非空。对于一般的 E ，$Q_{1,\ -e}(K_C M^{-1} \otimes E)$的光滑性和维数随即由 [LN03，引理 3.3] 及其前面的讨论得出。为证明一般元素是饱和的，我们注意到$Q_{1,\ -e}(K_C M^{-1} \otimes E)$中非饱和子层的轨迹维数至多为

$$\max\{\dim Q_{1,-e_1}(K_C \otimes E) + \dim C_{e-e_1} : e_1 < e\},$$

可以验证，这严格小于 $re + d + (r+1)(g-1)$。

另一方面，如果 $re + d + (r+1)(g-1) < 0$，那么 $\deg(K_C \otimes E) + re < (r-1)(g-1)$。对于这样的 e， $K_C \otimes E$ 中存在次数为 $-e$ 的可逆子层，当且仅当 $s_1(E)$ 小于一般值，因此 E 不是一般的。□

7.2. $f = 1$ 的非空性判据。这是对 [Hit19, Theorem 5.2], 的推广，证明也非常相似。

THEOREM 7.4. 设 $E \to C$ 是一个秩为 r 、次数为 d的向量丛。对于$e \geq 1$，以下条件等价。

(1) $s_1(E) > d + r(2g-2+e)$。（2）对于所有 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$ 以及所有 $Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)_{\mathrm{nd}}$，$\phi_{\mathcal{L}_M}(Z)$ 的张成空间在 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M|^*$ 中的维数为 $e-1$。（3）对于所有 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$ 以及所有 $[F^* \subset E^*] \in \mathrm{Quot}^e(E^*)$，我们有

$$h^0(F^* \otimes M) \;=\; h^0(E^* \otimes M) - e.$$

Proof. （2）与（3）的等价性由命题2.12及 $\alpha\colon \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S) \to \mathrm{Quot}^e(E^*)$的满射性得出。下面证明（1）与（3）等价。

假设（1）成立。由于 $s_1(K_C M^{-1} \otimes E) = s_1(E) > d + r(2g-2+e)$，若 $L \subset K_C M^{-1} \otimes E$是可逆子层，则 $\deg(L) < -e$。特别地，$Q_{1,\,-e'}(K_C M^{-1} \otimes E)$，因此对所有 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$及 $e' \le e$，$S^{e'}_M$ 均为空。由命题 6.1 (b)，Q^{e-1}_e也为空。

反过来，设 $s_1(E) = s_1(K_C \otimes E) \le d + r(2g-2+e)$。则存在 $L \in \mathrm{Pic}^{-e}(C)$ 以及一个次数为 $-e$的层单射 $\sigma'\colon L \to K_C \otimes E$。令$D \in C_e$ 为 $L \to K_C \otimes E$ 是向量丛单射所沿的任意除子。设$M := L(D) \in \mathrm{Pic}^0(C)$，并且

$$\sigma \;:=\; \sigma' \otimes \mathrm{Id}_{L^{-1}(-D)}\colon \mathcal{O}_C(-D) \;\to\; K_C M^{-1} \otimes E.$$

于是，(σ, D)定义了S^e_M 中的一个元素，γ^e_M 在该处有定义。因此，根据命题6.1 (a)，Q^{e-1}_e非空。□

Remark 7.5. 正如 [Hit19，注5.6], 所述，我们注意到，定理 7.4 对不完全线性系并不成立。对于任意 $Z \in \mathrm{Hilb}^e_{\mathrm{sm}}(S)$，若从 $\mathrm{Span}\,\psi(Z)$中的一个点作投影，那么无论 $s_1(E)$的值如何，$\mathbb{P}E$ 的像都具有亏格 e-割线空间。（然而，正如§ 2.7中所指出的，在某些条件下，H^{e-1}_e和 Q^{e-1}_e在从一般中心作投影时确实会表现如预期。）

现在我们提及一些特殊情形，它们推广了 [Hit19，推论5.4]中讨论的情形。我们省略证明，因为它们与 [Hit19]中的证明几乎完全相同。回顾一下，向量丛 $W \to C$ 的斜率是比值 $\mu(W) := \deg(W)/\mathrm{rk}(W)$。

Corollary 7.6. 设 E 是秩为 r、次数为 d 的向量丛，其中 $d \le r(1-2g)$。(a) 假设 $s_1(E) > 0$（例如，当 E 稳定时，情况便是如此）。那么对于 $e \le \mu(E^*) - (2g-2)$，任意 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$，轨迹 $\big(H^{e-1}_e\big)_{\mathrm{nd}}$和 Q^{e-1}_e 都为空。(b) 如果 $e \ge \mu(E^*) - \frac{1}{r}(r+1)(g-1)$，那么对于某个 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$，轨迹$\big(H^{e-1}_e\big)_{\mathrm{nd}}$ 和 Q^{e-1}_e非空。(c) 如果 $s_1(E)$ 是一般值 $(r-1)(g-1) + \delta$，那么 (b) 的逆命题也成立。

7.3. Lange 的一个问题。若 $r = 2$，则 $\mathbb{P}E$ 是 C上的直纹曲面。对于有理曲线和椭圆曲线，Lange [Lan92, Lecture 2 (a)]（另见 [Har77, Exercise V.2.12]）给出了关于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* M$ 的非常丰性判据，条件以 $\deg(M)$ 和 $s_1(E)$ 表示。随后，他提出了一个问题：当 $g \ge 2$时，能否为直纹曲面找到类似的判据。现在，我们给出一个沿此方向的结果；事实上，该结果适用于任意维数 $r \ge 2$ 的 C上的射影丛。

Theorem 7.7. 设 $E \to C$ 是秩为 r、次数为 d的向量丛。那么，对于所有 $L \in \mathrm{Pic}^\ell(C)$，线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* L$ 都是非常丰沛的，当且仅当

$$\ell \;>\; \mu(E) - \frac{s_1(E)}{r} + 2g. \tag{7.1}$$

PROOF. 映射 $S \to \mathbb{P}^n$ 是嵌入，当且仅当所有 2-割线都没有亏格。此外，当 S 是 C上的射影丛 $\mathbb{P}E$ 时，由 [Sta21a, 定理 3(i)] 的论证可知，所有 2-割线都是 π-无亏格的（参见定义 2.11）。因此，只需证明 (7.1) 等价于对于所有 $L \in \mathrm{Pic}^\ell(C)$，割线轨迹 $H_2^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* L)_{\mathrm{nd}}$ 为空。

现在固定一个次数为 ℓ 的线丛 L_0。对于任意 $M \in \mathrm{Pic}^(C)$，我们有

$$H_2^1(H^0(\mathbb{P}E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* L_0 M)) \cong H_2^1\left(H^0(\mathbb{P}(E \otimes L_0^{-1}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E \otimes L_0^{-1})}(1) \otimes \pi^* M)\right).$$

根据定理 7.4，右侧对所有 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$ 为空，当且仅当

$$s_1(E \otimes L_0^{-1}) > d - r\ell + 2rg.$$

由于 $s_1(E \otimes L_0^{-1}) = s_1(E)$，这等价于 $\ell > \mu(E) - {}^{s_1(E)}{}_r \quad +2g$，如所求。 □

定理 7.7 是一个关于给定次数的所有线丛 L 的 $E \otimes L$ 的命题。我们再作一个观察，说明非常丰性也可能取决于 $L \in \mathrm{Pic}^\ell(C)$。固定这样一个 L，并记 $h := h^0(K_C L^{-1} \otimes E)$。我们考虑扭曲 Brill–Noether 位点

$$B_{1,2}^{h+1}(K_C L^{-1} \otimes E) = \{N \in \mathrm{Pic}^2(C) : h^0(K_C L^{-1} N \otimes E) \geq h + 1\}.$$

在 $\mathrm{Pic}^2(C)$ 上，我们还有标准的 Brill–Noether 轨迹

$$B_{1,2}^1 = \{\mathcal{O}_C(x + y) : x, y \in C\} \subseteq \mathrm{Pic}^2(C)$$

参数化 C 上次数为二的有效线丛。

PROPOSITION 7.8. 设 E 为秩 r、次数 d 的向量丛。对于 $L \in \mathrm{Pic}^\ell(C)$，线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* L$ 非常丰沛，当且仅当

$$B_{1,2}^{h+1}(K_C M^{-1} \otimes E) \cap B_{1,2}^1 = \emptyset.$$

PROOF. 根据 [Hit20，命题 4.1]（将“V”替换为 $K_C M^{-1} \otimes E$），线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1) \otimes \pi^* L$ 在 $\mathbb{P}E$ 上非常丰沛，当且仅当

$$h^0(C, K_C L^{-1} \otimes E(x + y)) = h^0(C, K_C L^{-1} \otimes E) \text{ for all } x + y \in C_2. \tag{7.2}$$

这等价于说，对所有 $x + y \in C_2$，$h^0(C, K_C L^{-1} \otimes E(x + y)) = h$；换言之，没有形如 $\mathcal{O}_C(x + y)$ 的线丛属于轨迹$B^{h+1}(K_C L^{-1} \otimes E)$。□

7.4. 半稳定性判据。这里我们利用定理 7.4 给出一个半稳定性判据。这与 [Hit19，定理 5.7] 完全类似；由于证明几乎相同，我们只略作说明。对于给定的 $E \to C$，对于 $t \geq 1$，我们记 π_t: $\mathbb{P}(\wedge^t E) \to C$ 为投影。

THEOREM 7.9. 设 E 是一个秩为 r 且满足 $\mu(E) < 1 - 2g$的向量丛。那么以下条件等价。

(1) 向量丛 E 是半稳定的。(2) 对于 $1 \leq t \leq r-1$，对所有 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$，以及对于 $1 \leq e < t \cdot \mu(E^*) - (2g-2)$，割线轨迹

$$H_e^{e-1}\left(H^0(\mathbb{P}(\wedge^t E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^t E)}(1) \otimes \pi_t^* M\right)_{\mathrm{nd}}$$

为空。

(3) 对于 $1 \le t \le r-1$，以及如 (2) 中的 M 和 e，割线轨迹

$$Q_e^{e-1}\left(\wedge^t E, M, H^0(C, \wedge^t E \otimes \pi_t^* M)\right)$$

为空；也就是说，对于所有初等变换 $0 \to \mathcal{F}_n \to \wedge^n E^* \to T \to 0$，$h^0(C, \mathcal{F}_n) = h^0(C, M \otimes \wedge^n E^*) - e$，其中 T 是长度为e的挠。

Proof. （2）与（3）的等价性证明与定理 7.4 中的证明相同。若 E 半稳定，则由于 $\mathbb{C}$ 具有零特征，$1 \le t \le r-1$ 时 $\wedge^t E$ 也半稳定。特别地，$s_1(\wedge^t E) \ge 0$。因此，定理 7.4 蕴含（3）。

反过来，假设（3）成立。那么对每个 $t \in \{1, \dots, r-1\}$，由定理 7.4 可得

$$s_1(\wedge^t E) > \deg(\wedge^t E) + \mathrm{rk}(\wedge^t E) \cdot (2g - 2 - e_t)$$

其中 $e_t = \max\{e : 1 \le e < t \cdot \mu(E^*) - (2g-1)\}$。根据 s_1 的定义，最后一个不等式的左右两边模 $\mathrm{rk}(\wedge^t E)$ 同余。因此

$$s_1(\wedge^t E) \ge \deg(\wedge^t E) + \mathrm{rk}(\wedge^t E) \cdot (2g - 2 + e_t + 1).$$

根据 e_t 的定义，这就变成了 $s_1(\wedge^t E) \ge 0$。如同在 [Hit19，定理 5.7]，的证明中一样，我们得出对于所有秩为 t 的子丛 $F \subset E$，都有 $\mu(F) \le \mu(E)$。□

8. 当 $f = 1$ 时一般卷曲面的割线轨迹

在最后一节中，我们研究当参数 E、M 和 V 取一般值时，割线轨迹 $Q_e^{e-1}(E, M, V) =: Q_e^{e-1}(V)$ 的预期维数、非空性和计数问题。对于任意曲线 C，这些命题均成立。我们还得到某些 $H_e^{e-1}(\mathcal{L}_M, V)_{\mathrm{nd}}$ 为空；然而，由于缺乏对 α: $\mathrm{Hilb}^e(\mathbb{P}E) \dashrightarrow \mathrm{Quot}^e(E^*)$ 的纤维的完整描述，目前我们尚未进一步证明关于 $H_e^{e-1}(\mathcal{L}_M, V)$ 的维数界。

8.1. $Q_e^{e-1}(V)$的预期维数。这里我们证明，若参数取一般值，则当预期维数为零时，$\left(H_e^{e-1}(V)\right)_{\mathrm{nd}}$ 和 $Q_e^{e-1}(V)$ 为空；否则，$Q_e^{e-1}(V)$若非空，其维数即为预期维数。这推广了 [Hit19，定理 6。4]，并采用了类似的方法。我们先处理完备情形。固定 $r \ge 2$ 和 $d < r(1-g) - 1$，使得$n := -d - r(g-1) - 1 \ge 0$。回顾一下，对于 $f = 1$，H_e^{e-1}和 Q_e^{e-1}的预期维数为 $re - (n + 1 - e + 1) = (r+1)e - n - 2$。

Theorem 8.1. 设 $E \to C$ 为一般的秩为 r 、次数为d的向量丛。那么存在非空开子集 $U \in \mathrm{Pic}^0(C)$，使得对于 $M \in U$，以下结论成立。

(a) $h^0(C, E^* \otimes M) = n + 1$，因此 $|\mathcal{L}_M|$的维数为 n。(b) 若$(r+1)e - n - 2 < 0$，则 Q_e^{e-1}和$\left(H_e^{e-1}\right)_{\mathrm{nd}}$ 为空。(c) 若$(r+1)e - n - 2 \ge 0$，则 Q_e^{e-1}为空，或具有预期维数。

Proof. 部分 (a) 正是 [Hit19，定理 6.4 (a)]。对于 (b)：回顾一下，S_M^e 是 (6.1) 中作为纤维积的构造，以及遗忘映射

$$b\colon Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E) \to \mathrm{Pic}^{-e}(C).$$

展开定义可知，对任意 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$,

$$M^{-1} \cdot b\left(Q_{1,-e}(K_C \otimes E)\right) = b\left(Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)\right),$$

其中左侧的作用是 $\mathrm{Pic}^0(C)$ 在自身上的平移作用。因此，根据定理 2.17，对一般的 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$，空间 S^e_M 为空，或其维数为

$$\dim Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E) + \dim C_e - \dim \mathrm{Pic}^{-e}(C)$$

当其为非负数时。由引理 7.3 以及 E 的一般性假设，这个数为

$$re + d + (r+1)(g-1) + e - g \;=\; (r+1)e - n - 2,$$

最后一个等式由上文 n 的定义得出。这恰好是 Q^{e-1}_e 和 H^{e-1}_e 的预期维数。

现在由命题 6.1 (b) 可知，只有当某个 $e' \le e$ 使 $S^{e'}_M$ 非空时，轨迹 Q^{e-1}_e 才可能非空。上述计算表明，对于 $e' < e$，$\dim S^{e'}_M < \dim S^e_M$。因此，若 $(r+1)e - n - 2 < 0$，则 Q^{e-1}_e 为空。由于根据命题 2.12，$\alpha\left(H^{e-1}_e\right)_{\mathrm{nd}} = Q^{e-1}_e$，故 $\left(H^{e-1}_e\right)_{\mathrm{nd}}$ 也为空。这就证明了 (b)。

其余情况：若 $[F^* \to E^*]$ 是 Q^{e-1}_e 中的一个点，则由命题 6.1 (b) 可得 $F^* \subseteq G^*$，其中 $[G^* \to E^*]$ 属于.....的像

$$\gamma^{e'}_M \colon S^{e'}_M \;\dashrightarrow\; \mathrm{Quot}^{e'}(E^*),$$

对某个 $e' \le e$。因此 $\dim Q^{e-1}_e$ 至多为

$$\dim S^{e'}_M + \dim \mathrm{Quot}^{e-e'}(G^*) \;=\; (r+1)e' - n - 2 + r(e-e') \;=\; (r+1)e - n - 2 - (e-e').$$

由于 $e \ge e'$，部分 (c) 得证。（注意，对于 $e' = e$，我们取等号；参见命题 2.16 (b)。）□

利用推论 2.20，我们可以将定理 8.1 推广到不完全线性系的情形。

THEOREM 8.2. 设 E 和 M 在定理 8.1 的意义下为一般的。设 $W \subseteq H^0(C, E^* \otimes M)$ 是一个维数为 $m+1$ 的一般子空间。

(a) 若 $(r+1)e - m - 2 < 0$，则 $Q^{e-1}_e(W)$ 为空。(b) 若 $(r+1)e - m - 2 < 0$，则 $\left(H^{e-1}_e(W)\right)_{\mathrm{nd}}$ 为空。(c) 若 $(r+1)e - m - 2 \ge 0$，则 $Q^{e-1}_e(W)$ 为空，或具有预期维数。

PROOF. 对于 (a) 和 (c)，我们将应用推论 2.20。由于 $f = 1$，要满足该假设，只需证明 $Q^{e-1}_e(H^0(E^* \otimes M))$ 为空或具有预期维数（显然，Q^e_e 始终具有预期维数）。这由定理 8.1 得出。然后，(b) 与之前一样，由引理 2.9 (a) 和命题 2.12 得出。□

8.2. $Q^{e-1}_e(V)$ 的非空性。定理 8.1 和 8.2 表明，对于参数的一般选取，$Q^{e-1}_e(V)$ 若非空，则具有预期维数。现在我们描述两种情形，在这两种情形下，$Q^{e-1}_e(V)$ 确实非空。

PROPOSITION 8.3. 设 $E \to C$ 是一个模空间中的一般向量丛。假设 $e \ge \max\{g, -d/r - (g-1)(r+1)/r\}$。那么，对于泛型的 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$，$Q^{e-1}_e(V)$ 非空且具有预期维数。

PROOF. 由于 $e \ge -d/r - (g-1)(r+1)/r$，我们有 $re + d + (r+1)(g-1) \ge 0$。由于 E 是一般的，根据引理 7.3，概形 $Q_{1,\,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 非空，且一般元素具有如下形式：$[L \xrightarrow{\sigma} K_C M^{-1} \otimes E]$，其中 σ 是一个向量丛

单射。但由于还有 $e \geq g$，对于任何如此出现的 L，我们都有 $L = \mathcal{O}_C(-D)$，其中某个 $D \in C_e$。因此，(σ, D) 是 S^e_M 的一个点，在此处 γ^e_M 有定义。因此，根据命题 6.1 (a)，Q^{e-1}_e非空。□

Proposition 8.4. 设 E 是任意向量丛，并假设对某个 $e \geq 1$，$Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 非空。那么对某个 $M \in$， $Q^{e-1}_e(E, M, H^0(E^* \otimes M))$ 非空，其中 $M \in \mathrm{Pic}^0(C)$。

Proof. 设 $[L \xrightarrow{\sigma} K_C \otimes E]$ 是 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 中的一个点。此时，σ 未必在所有点处都是丛嵌入，但我们可以选取一个足够一般的 $D \in C_e$，使得沿其 σ 是丛嵌入。那么 $L^{-1}(-D)$ 的次数为零，并且

$$\left(\left[\mathcal{O}_C(-D) \xrightarrow{\sigma \otimes L^{-1}(-D)} K_C L^{-1}(-D)) \otimes E \right], D \right)$$

是 $S^e_{L^{-1}(-D)}$ 中的一个点，在该点处 $\gamma^e_{L^{-1}(-D)}$ 有定义。于是

$$Q^{e-1}_e(E, L^{-1}(-D), H^0(C, E^* \otimes L^{-1}(-D)))$$

由命题 6.1 (a) 可知其非空。 □

Remark 8.5. 只要 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 的预期维数非负，命题 8.4 就适用。若 E 是一般的，则由引理 7.3 可得此结论。对于任意的 E，我们可以通过取 $Q_{1,h}(K_C \otimes E)$ 的子层，其中 $h > -e$，找到 $Q_{1,-e}(K_C M^{-1} \otimes E)$ 中可能未饱和的元素。

8.3. $Q^{e-1}_e(V)$ 的计数。根据前两个小节，对于任意C 以及一般选取的 (E, M, V)，$Q^{e-1}_e(E, M, V) = Q^{e-1}_e(V)$ 若非空，则具有预期维数；此外，在某些条件下，$Q^{e-1}_e(V)$ 确实非空。现在，我们利用 [**EGL01**], [**OP21**] 和[Sta21b] 的结果，对维数为零且达到预期维数的 $Q^{e-1}_e(V)$进行计数。

沿用 [**OP21**] 和 [Sta21b], 的记号，我们将 $\mathrm{Quot}^e(E^*)$ 上的向量丛 $M^{[e]}$ 定义为：在点 $[F^* \to E^*]$处，其纤维为 $H^0(C, (E^*/F^*) \otimes M)$。对于 $V \subseteq H^0(E^* \otimes M)$，令 $\varepsilon\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^e(E^*)} \otimes V \to M^{[e]}$为求值映射。于是$Q^{e-1}_e(V)$ 是行列式轨迹 $\{F^* \in \mathrm{Quot}^e(E^*) : \mathrm{rk}\ \varepsilon|_{F^*} \leq e-1\}$。当$re = n+2-e$时，$Q^{e-1}_e(V)$ 的预期维数为零，利用Porteous公式可得

$$[Q^{e-1}_e(V)] = s_{n+2-e}\left(M^{[e]}\right) = \int_{[\mathrm{Quot}^e(E^*)]} s(M^{[e]}). \tag{8.1}$$

本小节的主要目标是概述以下命题的证明。

Theorem 8.6. 设 C 为一条光滑曲线，$E \to C$ 为秩为 r 的向量丛，且$M \to C$ 为一个线丛。则形式幂级数之间存在如下等式

$$\sum_{e \geq 0} \int_{[\mathrm{Quot}^e_C(E^*)]} s(M^{[e]})\, q^e = A_1(q)^{\deg(E^* \otimes M)} \cdot B(q)^{1-g} \tag{8.2}$$

其中

$$q = (-1)^r t(1+t)^r, \quad A_1(q) = 1 + t \quad and \quad B(q) = \frac{(1+t)^{r+1}}{1 + t(r+1)}.$$

Sketch of proof. 证明该定理所需的所有要素都已见于[**EGL01**], [**OP21**] 和 [Sta21b], , 因此我们只作概述。公式 (8.2) 已在 [OP21 的定理 6 和定理 8] 中得到证明，其中 E 是秩为

$r \geq 1$的平凡丛。将 [OP21 的推论 16] 中针对曲面的相应公式推广至任意 E 的结果见 [Sta21b 的命题 4。3], 我们采用相同的策略。

为了证明幂级数 A_1 和 B的存在性，我们基本上逐字遵循 d 证明 [EGL01 定理 4.2], , 并将 $\mathcal{K}_r$ 替换为集合 $\mathcal{T}_r := \{(C, E, M)$: C一条光滑曲线， $E \to C$一个秩为 r的向量丛，且 $M \in \mathrm{Pic}(C)\}$，以及 $H_{\Psi,\ \Phi}(S, x)$，其映射 $\mathcal{T}_r \to \mathbb{Q}[[q]]$ 定义为

$$(C, E, M) \ \mapsto \ \sum_{e \geq 0} q^e \int_{[\mathrm{Quot}^e_C(E^*)]} s(M^{[e]});$$

并且 γ映射 $(C, E, M) \ \mapsto (\deg(E^* \otimes M)\ \chi(\mathcal{O}_C))$。在我们的情形中， [EGL01 定理 4.1] 的作用由以下命题承担，该命题出现在 [Sta21b 定理 3.3]的证明中：

Proposition 8.7. 对每个 $e \geq 0$，都存在一个多项式 $u_e(x, y)$，它具有如下普适性：对于任意的 $(C, E, M) \in \mathcal{T}_r$，我们有

$$\int_{[\mathrm{Quot}^e(E^*)]} s(M^{[e]}) \ = \ u_e\left(\deg(E^* \otimes M), \chi(\mathcal{O}_C)\right).$$

一旦证明了 A_1 和 B 的存在，就可以通过比较 [OP21、定理 6 和定理 8] 来计算它们；这里取适当的三元组 (C, E, M)，使得E 平凡化，且 C 为有理或椭圆的。□

以下计数结果可由定理 8.6 和 (8.1) 直接得到。

Corollary 8.8. 假设 E、 M和 $V \subseteq H^0(E^* \otimes M)$ 满足条件，使得 $Q_e^{e-1}(V)$ 具有并达到预期维数零。那么，按重数计数的 $Q_e^{e-1}(V)$ 的点数，等于表达式 (8.2) 中 q^e 的系数。

参考文献

[AS15] M. Aprodu, E. Sernesi: *Secant spaces and syzygies of special line bundles on curves*。《代数与数论》9，第3期（2015），585–600。[ACGH 85] *Geometry of algebraic curves*. E. Arbarello, *Volume I.* 267 M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris:《数学科学基础丛书》。纽约等地：Springer出版社，1985年。[Baj 15] *Martens–Mumford theorems for Brill–Noether schemes arising from very* A. Bajravani: 。*ample line bundles* **105**, 3 2015 229 237 《数学档案》无期（），–。[Baj17]： *Remarks on the geometry of secant loci*。《数学档案》108，第4期（2017），373–381。[Baj18]： *A note on the tangent cones of the scheme of secant loci*。《巴勒莫数学学会汇刊》（第2辑）67，第3期（2018），599–608。[BC21] E. Ballico, L. Chiantini: *On the Terracini locus of projective varieties*。《米兰数学杂志》89，第1期（2021），1–17。[CMTiB 11] *Singularities of Brill–Noether loci for vector* S. Casalaina *bundles on a curve* **284** 14 15 2011 1846 1871 Martin, M. Teixidor i Bigas: 。《数学通讯》（–）（），–。[CT-L18] A. Castorena; H. Torres-L´opez: *Linear stability and stability of syzygy bundles*。《国际数学杂志》29，第11期（2018），文章编号1850080，共14页。[CH10] I. Choe; G. H. Hitching: *Secant varieties and Hirschowitz bound on vector bundles over a curve* 3 4 2010 465 477 。《手稿数学》133，无期（），–。[Cop95] M. Coppens: *Brill–Noether theory for non-special linear systems*。《组合数学》97，第1–2期（1995），17–27。[CJ96]： *An infinitesimal study of secant space divisors*。T. Johnsen撰写附录。《纯粹与应用代数杂志》113，第2期（1996），121–144。[CJ91]: T. Johnsen: *Secant lines of smooth projective curves, an infinitesimal study of the symmetric products* 。枚举代数几何，《Zeuthen专题讨论会论文集》，哥本哈根，1989年，《当代数学》123（1991），61–87。

[CM91] ; G. Martens: *Secant spaces and Clifford's theorem*。《组合数学》78，第2期（1991），193–212。[Cot11] *Geometry of curves with exceptional secant planes: Linear series along the general curve* E. Cotterill: **267**, 3 4 2011 549 582。《数学杂志》无期（ ），–。[CHZ21] ; X. He; N. Zhang: *Secant planes of a general curve via degenerations*。《几何专论》211（2021），165–201。[EGL01] *On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface* G. Ellingsrud; L. Gottsche; M. Lehn: ¨ 1 2001 81 100。《代数几何杂志》10，无期（ ），–。[Eis95] D. Eisenbud: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*。《研究生数学丛书》150。柏林: Springer出版社，1995年。[Far08] G. Farkas: *Higher ramification and varieties of secant divisors on the generic curve*。《伦敦数学会杂志》第二辑78，第2期（2008），418–440。[Far22] : *Generalized de Jonquières divisors on generic curves*, arXiv 2210.07843。[GH78] P. Griffiths; J. Harris: *Principles of Algebraic geometry*，第2版。《Wiley经典文库》。纽约: John Wiley & Sons Ltd.，1994年。[GP82] L. Gruson; C. Peskine: *Courbes de l'espace projectif: Variétés de sécantes*。枚举几何与经典代数几何，《数学进展》24（1982），1–31。[GP13] ; : *On the smooth locus of aligned Hilbert schemes and the general projection theorem* , 。《杜克数学杂志》无期（ ），–。[GT09] I. Grzegorczyk; M. Teixidor i Bigas: **162**, 3 2013 553 578。[Har77] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*。Springer《研究生数学丛书》52。纽约等地: Springer出版社，1983年。[Hir86] A. Hirschowitz: *Problèmes de Brill–Noether en rang supérieur*。《数学预印本》91号，尼斯（1986年）。´epublications Math´ematiques n. 91, Nice (1986)。[Hit19] G. H. Hitching: *Quot schemes, Segre invariants, and inflectional loci of scrolls over curves*。《几何专论》205（2020），1–19。[Hit20] : *A Riemann–Kempf singularity theorem for higher rank Brill–Noether loci*。《伦敦数学会通报》52，第4期（2020），620–640。[HHN21] *Nonemptiness and smoothness of twisted Brill–Noether loci* ; M. Hoff; P. E. Newstead: 4 2 2021 685 709。《纯粹与应用数学年鉴》（ ）200，无期（ ），–。[HL10] D. Huybrechts; M. Lehn: *The geometry of moduli spaces of sheaves*，第2版。剑桥: 剑桥大学出版社，2010年。[Kle74] S. Kleiman: *The transversality of a general translate*。《组合数学》28（1974），287–297。[Lan92] H. Lange: *Some geometrical aspects of vector bundles on curves*。L. Brambila-Paz（编）等，《代数几何专题: 代数几何研讨会论文集》，瓜纳华托，墨西哥，1989年。墨西哥城: 墨西哥数学学会。《数学贡献，研究笔记》5（1992），53–74。´LN[; P. E. Newstead: 03] 。V. Lakshmibai等（编），"献给C. S. Seshadri的纪念文集: 几何与表示论论文集"，《数学前沿》。巴塞尔: Birkhäuser，2003年，310–322。 *Maximal subbundles and Gromov-Witten invariants*LeB¨P. Le Barz: [。《手稿数学》119，第4期（2006），433–452。06] Mer *Sur les espaces multisécants aux courbes algébriques*V. Mercat: [。《手稿数学》98（1999），75–85。99] MS *Le problème de Brill–Noether et le théorème de Teixidor*E. C. Mistretta; L. Stoppino: [。《国际数学杂志》23，第12期（2012），论文编号1250121，共25页。12] Mum *Linear series on curves: stability and Clifford index*D. Mumford: [。《数学教学》第二辑23（1977），39–110。77] MOP *Stability of projective varieties*A. Marian; D. Oprea; R. Pandharipande: ´。《日本数学杂志》71（2019），299–308。[New2019] P. E. Newstead: *The combinatorics of Lehn's conjecture*。《投影》41，第2期（2022），449–480。[OP22] D. Oprea; R. Pandharipande: *Higher rank Brill–Noether theory and coherent systems: Open questions*, , 《几何与拓扑》无期（ ），–。[PR21] M. Popa; M. Roth: *Quot schemes of curves and surfaces: virtual classes inte-grals Euler characteristics* 。《数学发明》152，第3期（2003），625–663。**25**, 7 2021 3425 3505

[Ran15] *Unobstructedness of filling secants and the Gruson–Peskine general projection theorem* 4 2015 697 722
Z. Ran：《杜克数学杂志》164，第（），–。[Sta21a] S. Stark： *On the Quot scheme* $\mathrm{Quot}^{\ell}(\mathscr{E})$, arXiv:2107.03991。[Sta21b]： *Cosection localisation and the Quot scheme* $\mathrm{Quot}^{\ell}(\mathscr{E})$, arXiv:2107.08025。[TiB04] M. Teixidor i Bigas：
Rank two vector bundles with canonical determinant。《数学通讯》265（2004），100–106。[TiB08]：《组合数学》144，第3期（2008），705–720。[Ung19] M. Ungureanu：
Refined de Jonquières divisors and secant varieties on algebraic curves。arXiv:1911.09457。[Ung21a]： *Geometry of intersections of some secant varieties to algebraic curves*。《伦敦数学会杂志》II辑103，第1期（2021），288–313。[Ung21b]：
Dimension theory and degenerations of de Jonquières divisors。《国际数学研究通知》2021，第20期（2021），15911–15958。[Voi19] C. Voisin：
Segre classes of tautological bundles on Hilbert schemes of surfaces。Algebr. Geom. 6（2019），186–195。

Oslo Metropolitan University, Postboks 4, St. Olavs plass, 0130 Oslo, Norway
Email address: gehahi@oslomet.no