连续分段线性迭代函数系统的分形维数

R. DÁNIEL PROKAJ、PETER RAITH 和 KÁROLY SIMON

arXiv:2302.04333v1 [math.DS] 8 Feb 2023

摘要。我们研究实数轴上的迭代函数系，其由连续分段线性函数组成。在一个温和的分离条件下，我们证明吸引子的豪斯多夫维数和盒维数相等，且等于 1 与由吸引子最自然的覆盖系统得到的指数二者中的较小值。

1. 引言

实数轴上的迭代函数系统（IFS）由有限个严格压缩的自映射组成，
tr作用于实数集。Hutchinson [7] 证明了，对于每个迭代函数系
$\mathcal{F}=\{f_k\}_{k=1}^m$ 存在唯一的非空紧集 Λ，称为吸引子
of 迭代函数系 $\mathcal{F}$ 由以下方式定义

$$\Lambda=\bigcup_{k=1}^{m} f_k(\Lambda). \tag{1.1}$$

对于每个迭代函数系 $\mathcal{F}$，都存在唯一的“最小”非空紧区间 I，它在$\mathcal{F}$的所有映射作用下均映入自身：

$$I:=\bigcap\{J|\ J\subset\mathbb{R}\text{ compact interval}: f_k(J)\subset J,\forall k\in[m]\}, \tag{1.2}$$

其中 $[m]:=\{1,\dots,m\}$。不难看出，

$$\Lambda=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in[m]^n} I_{i_1\dots i_n}, \tag{1.3}$$

其中 $I_{i_1\dots i_n}:=f_{i_1\dots i_n}(I)$ 是**柱区间**，我们采用通用的简写记法 $f_{i_1\dots i_n}:=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}$ 表示一个
$(i_1,\dots,i_n)\in[m]^n$。

本文所考虑的迭代函数系由分段线性函数构成。因此，它们的导数可能在某些点发生变化，但在给定的实数区间上是线性的。我们始终假设这些函数连续、分段线性、强压缩且斜率非零，并且斜率只会在有限多个点发生变化。

设 F $=\{f_k\}_{k=1}^m$ 为一个 CPLIFS，且 $I\subset$ R 是 (1.2) 中定义的紧区间。对于任意 $k\in[m]$，令 $l(k)$ 表示 f_k 的断点数 $\{b_{k,i}\}_{i=1}^{l(k)}$。它们确定了 $l(k)+1$ 个线性开区间 $\{J_{k,i}\}_{i=1}^{l(k)+1}$。我们用 $S_{k,i}$ 表示满足 $S_{k,i}|_{J_{k,i}}\equiv f_k|_{J_{k,i}}$ 的 R 上的压缩相似变换。我们定义 $\{\rho_{k,i}\}_{k\in[m],i\in[l(k)+1]}$

日期：2023年2月10日。2020 数学学科分类号。主要分类号 28A80，次要分类号 37E05。关键词与短语。分段线性迭代函数系统，豪斯多夫维数。第一作者和第三作者的研究部分得到国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）K142169项目的资助。本研究部分得到Stiftung Aktion Österich Ungarn 103öu6基金资助。

并且$\{t_{k,i}\}_{k\in[m],i\in[l(k)+1]}$ 使得

$$S_{k,i}(x)=\rho_{k,i}x+t_{k,i}. \tag{1.4}$$

我们称 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}:=\{S_{k,i}\}_{k\in[m],i\in[l(k)+1]}$ 为由 CPLIFS **自相似迭代函数系**$\mathcal{F}$ 生成的。

我们引入**自然压力函数**

$$\Phi(s):=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{i_1\dots i_n}|I_{i_1\dots i_n}|^s. \tag{1.5}$$

在 [1], Barreira 证明了 $\Phi(s)$: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是一个严格递减函数，且$\Phi(0)>0$ 并且 $\lim_{s\to\infty}\Phi(s)=-\infty$。因此，我们可以将**自然维数**定义为$\mathcal{F}$ 的

$$s_{\mathcal{F}}:=(\Phi)^{-1}(0). \tag{1.6}$$

注意，他将 $\Phi(s)$ 称为非加性上容量拓扑压力量。他还证明了上盒维数总是不超过自然维数。此外，在极为特殊的没有断点的情况下，也就是说$\mathcal{F}=\{f_k(x)=\rho_k x+t_k\}_{k=1}^m$ 是自相似的，$s_{\mathcal{F}}$就是所谓的相似维数，即 $\sum_{k=1}^m\rho_k^{s_{\mathcal{F}}}=1$。

推论 1.1 (Barreira)。对于直线上的任意迭代函数系 F

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\Lambda\le s_{\mathcal{F}}. \tag{1.7}$$

这里 $\dim_{\mathrm{B}}\Lambda$ 表示吸引子的盒维数。关于分形维数的定义，请参阅 [3]。不等式（1.7）也可由[2, 定理 8 得出。8], 但据我们所知，这种显式形式最早见于 [1]。由此可知，吸引子的豪斯多夫维数 $\dim_{\mathrm{H}}\Lambda$ 也不超过自然维数 $s_{\mathcal{F}}$。我们将证明，通常情况下，这些维数实际上相等。

一个连续分段线性迭代函数系$\mathcal{F}=\{f_k\}_{k=1}^m$ 由函数的斜率 $\{\rho_{k,1},\dots,\rho_{k,l(k)+1}\}_{k=1}^m$、断点 $\{b_{k,1},\dots,b_{k,l(k)}\}_{k=1}^m$以及函数的垂直平移量$\{f_k(0)\}_{k=1}^m$ 唯一确定。后两者称为$\mathcal{F}$的平移参数。

术语。 给定一个对所有 *CPLIFS* 都有意义的性质。如果对于任意固定的斜率向量，使该性质不成立的平移参数集合的填充维数小于满维数，我们就称该性质是维数$_{\mathrm{P}}$维维数-典型的 。

定理 1.2。 我们用 $\Lambda_{\mathcal{F}}$ 表示 *CPLIFS F* 的吸引子。则以下性质是维数$_{\mathrm{P}}$-典型的:

$$\dim_{\mathrm{H}}\Lambda_{\mathcal{F}}=\dim_{\mathrm{B}}\Lambda_{\mathcal{F}}=\min\{1,s_{\mathcal{F}}\}. \tag{1.8}$$

为证明主要结果，我们需要一种分离条件，该条件由 M. Hochman [4] 针对自相似迭代函数系引入。设 $g_1(x)=\rho_1x+\tau_1$ 和$g_2(x)=\rho_2x+\tau_2$ 是实数集 R 上的两个相似变换，其 ρ_1，$\rho_2\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$ 且 τ_1，$\tau_2\in\mathrm{R}$。我们将这两个函数之间的距离定义为

$$\operatorname{dist}(g_1,g_2):=\begin{cases}|\tau_1-\tau_2|,\ \text{if } \rho_1=\rho_2;\\ \infty,\ \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1.9}$$

定义1.3。 设 $F=\{f_k(x)\}_{k=1}^m$ 是实数集$\mathbb{R}$上的一个自相似迭代函数系。若存在一个 $c>0$和一个严格递增的自然数序列 $\{n_l\}_{l=1}^\infty$，使得

$$\operatorname{dist}(f_{\mathbf{i}},f_{\mathbf{j}})\ge c^{n_l},\ \textit{for all } l>0 \textit{ and for all } \mathbf{i},\mathbf{j}\in[m]^{n_l},\mathbf{i}\ne\mathbf{j}. \tag{1.10}$$

Hochman 证明了，ESC 是自相似迭代函数系的 维数$_{\mathrm{P}}$-典型性质 [5,定理 1。10]。Prokaj 和 Simon 将这一结果推广，证明由 CPLIFS 生成的自相似系统满足 ESC 是维数$_{\mathrm{P}}$-典型性质[9, 事实 4。1]。这两个结果与下一个定理共同推出定理 1.2。

定理 1.4。 设 *F* 是一个 *CPLIFS*，其生成的自相似系统为 *S*，吸引子为Λ。若 *S* 满足 *ESC*，则

$$\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \dim_{\mathrm{B}} \Lambda = \min\{1, s_{\mathcal{F}}\}. \tag{1.11}$$

我们将借助马尔可夫图来证明这个定理。

1.1. **直线上的自相似迭代函数系**。 过去十年间，该领域的首个突破性成果归功于 Hochman [4]。他证明了，ESC 意味着自相似测度（见 [3, 第37] 页）的豪斯多夫维数等于 1 与该测度的熵除以李雅普诺夫指数所得比值两者中的较小值（定义见 [8, 第 3] 页）。这一结果的直接推论是，ESC 意味着直线上的自相似迭代函数系满足（1.11）。

Shmerkin [14] 于 L^q 2019年证明了自相似测度维数的一个类似结果。Jordan 和 Rapaport [8] 运用类似思路，将上述 Hochman 的结果从自相似测度推广到了遍历测度的投影。利用这一结果，Prokaj 和 Simon [9, 推论 7。2] 证明了，ESC 也意味着公式（1.11）适用于直线上的图导向自相似吸引子。这是下文定理1.5证明中的一项关键工具。

1.2. **关于 CPLIFS 的早期结果**。 设 $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}_{k=1}^m$ 是定义在 实数集 上的 CPLIFS，其吸引子为 Λ。若 Λ 不包含任何断点，则称$\mathcal{F}$ **为正规**。Prokaj 和 Simon 在 [9] 中证明，对于任意正规 CPLIFS，都存在一个具有相同吸引子的自相似图导向迭代函数系。这一观察引出了以下定理 [9, 定理 2。2]

定理 1.5。 设 *F* 是一个正规 *CPLIFS*，且其生成的自相似迭代函数系满足 *ESC*。那么

$$\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \dim_{\mathrm{B}} \Lambda = \min\{1, s_{\mathcal{F}}\}. \tag{1.12}$$

对于一个 $k \in [m]$，令 $\rho_k := \max_{j\in[l(k)+1]} |\rho_{k,\ j}|$ 为 f_k 的绝对值最大的斜率。若满足以下两个条件，则称$\mathcal{F}$ 为**小**：
(a) $\sum_{k=1}^m \rho_k < 1$。**(b)** 第二个条件取决于系统中函数的单射性：**(i)** 若 f_k 是单射的，则 $\rho_k < \frac{1}{2}$；**(ii)** 若 f_k 不是单射的，则 $\rho_k < {}^{1-}\max_2{}_j \rho_j$ 。

命题 1.6 ([9, 命题 2。3])。 对于小型 *CPLIFS*，正则性是一个维数$_{\mathrm{P}}$-典型性质。

文献 [10]讨论了若干非典型 CPLIFS 族的维数理论。结合命题 1.6、定理1.5以及 M. Hochman 的结果 [5, 定理 1.10], Prokaj 和 Simon 还证明，等式（1.12）是小型 CPLIFS 的 维数$_{\mathrm{P}}$典型性质。本文将通过证明在不限制斜率的情况下同样成立，来推广这一结果。

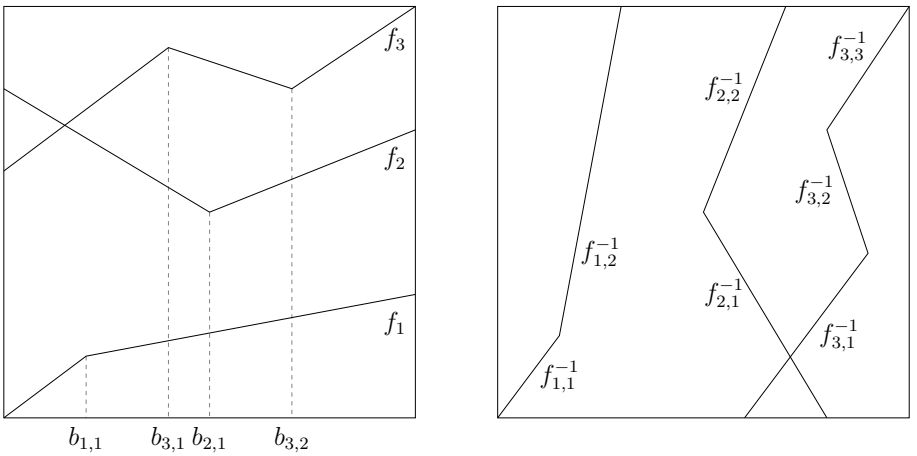

图1. 左侧是一个 CPLIFS $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$，右侧是与之关联的扩张多值映射 T。临界点以蓝色标出。

2. 马尔可夫图

P. Raith 和 F. Hofbauer 利用马尔可夫图的概念，证明了分段单调扩张系统维数方面的结果 [11, 12, 6]。我们将以类似的方式为 CPLIFS 定义马尔可夫图，并用它证明$s_{\mathcal{F}}$ 在某些较弱假设下，对于非正规系统，该量也等于吸引子的豪斯多夫维数。

2.1. **构建马尔可夫图**。设 $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ 是一个 CPLIFS，且 I 是由（1.2）定义的区间。记 $I_k := f_k(I)$，并令 $\mathcal{I} = \cup_{k=1}^m I_k$，我们将与**F** 相关联的扩张多值映射定义为

$$T : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{P}(I)), \quad T(y) := \{\{x \in I : f_k(x) = y\}\}_{k=1}^m. \tag{2.1}$$

也就是说，任意博雷尔子集 $A \subset \mathcal{I}$ 的像为

$$T(A) = \{\{x \in I : f_k(x) \in A\}\}_{k=1}^m.$$

对于 $k \in [m]$, $j \in [l(k) + 1]$，我们将 $f_{k,\,j} : J_{k,\,j} \to I_k$ 定义为满足 $\forall x \in J_{k,\,j}$: $f_k(x) = f_{k,\,j}(x)$ 的唯一线性函数。我们称扩张线性函数

$$\forall k \in [m], \forall j \in [l(k) + 1] : \quad f_{k,j}^{-1} : f_k(J_{k,j}) \to J_{k,j}, \tag{2.2}$$
$$\forall x \in J_{k,j} : f_{k,j}^{-1}(f_k(x)) = x$$

多值映射 T 的**分支**。顾名思义，这些是$\mathcal{F}$中各元素的局部逆映射。

定义 2.1。我们定义临界点集合为

$$\mathcal{K} := \cup_{k=1}^m \{f_k(0), f_k(1)\} \bigcup \cup_{k=1}^m \cup_{j=1}^{l(k)} f_k(b_{k,j}) \bigcup$$
$$\left\{x \in \mathcal{I} | \exists k_1, k_2 \in [m], \exists j_1 \in [l(k_1)], \exists j_2 \in [l(k_2)] : f_{k_1,j_1}^{-1}(x) = f_{k_2,j_2}^{-1}(x)\right\}.$$

定义 2.2. 我们称由临界点集 K 确定的 I 的闭区间划分为 F 的单调性划分 Z_0。其元素称为单调区间。

定义 2.3. 设 $Z \in \mathcal{Z}_0$。我们称 D 是 Z 的后继，并记作$Z \to D$，如果

$$\exists Z_0 \in \mathcal{Z}_0, Z' \in T(Z) : D = Z_0 \cap Z'. \tag{2.3}$$

进一步，我们记 $Z \to_{k,j} D$ *if*

$$\exists Z_0 \in \mathcal{Z}_0 : D = Z_0 \cap f_{k,j}^{-1}(Z).$$

Z 的后继集合记作 $w(Z)$: $=\{D|Z \to D\}$。

类似地，我们将 $w(\mathcal{Z}_0)$定义为$\mathcal{Z}_0$中所有元素的后继集合。也就是说

$$w(\mathcal{Z}_0) := \cup_{Z \in \mathcal{Z}_0} w(Z). \tag{2.4}$$

定义 2.4. 我们称$(D \to)$ 为相对于 Z_0 的 F 的马尔可夫图，如果 D 是包含 Z_0 的最小集合，且 $D = w(D)$。简而言之，我们通常称之为 F 的马尔可夫图。

注 2.5. 类似地，我们可以定义相对于 I 的任意有限划分 Z_0' 的 F 的马尔可夫图。

我们常用以下记号

$$\mathcal{D}_n := \cup_{i=0}^{n} w^i(\mathcal{Z}_0), \text{ where } w^i(\mathcal{Z}_0) = \underbrace{w \circ \cdots \circ w}_{i \text{ times}}(\mathcal{Z}_0). \tag{2.5}$$

显然,

$$\mathcal{D} = \cup_{i \geq 0} w^i(\mathcal{Z}_0). \tag{2.6}$$

如果（2.6）中的并集是有限的，我们就称**马尔可夫图是有限的**。我们递归地定义 ***n*阶马尔可夫图**为

$$\mathcal{Z}_n := \omega(\mathcal{Z}_{n-1}) \setminus \cup_{i=0}^{n-1} \mathcal{Z}_i, \tag{2.7}$$

对于 $n \geq 1$。

我们可以将马尔可夫图想象成一个（可能无限大的）有向图，其顶点集为 D。对于 $C, D \in$ D，当且仅当 $D \in w(C)$ 时，二者之间存在一条有向边 $C \to D$。如果任意两个区间 $C, D \in$ D 之间都存在有向路径，我们就称该马尔可夫图是不可约的。在下一个引理中，我们将证明，通过选择 Z_0，的一个适当细化 Y_0，F 关于 Y_0 的马尔可夫图 $(D', \to)$ 总是包含一个不可约子图。此外，D′ 中的元素覆盖 Λ。这意味着 $(D', \to)$ 足以描述 Λ 中各点的轨道。也就是说，引理 2.6 使我们可以不失一般性地假设 F 的马尔可夫图 (D $\to$) 是不可约的。

引理 2.6. 设 F 是一个以 Λ 为吸引子的 *CPLIFS*，且 $(D(Y_0) \to)$ 是相对于单调性划分 Z_0 的某个有限细化 Y_0 所对应的马尔可夫图。对于恰当选取的 Y_0,，存在 $(D', \to)$ 的一个不可约子图 $(D(Y_0) \to)$，使得 D' 中的元素覆盖 Λ。

证明。对于 $k \in [m]$，令 ϕ_k 为 f_k 的不动点。我们不妨假设：若 $i < j$，则 $\phi_i \leq \phi_j$ 对于 i，$j \in [m]$。令 $\mathcal{Y}_0$ 为 $\mathcal{Z}_0$ 的细化，其中 ϕ_1。$\mathcal{Y}_0$ 中至多有两个以 ϕ_1 结尾的区间，我们将它们记为 Y_1 和 Y_2。令 $\mathcal{D}'$ 为包含 Y_1，Y_2 及其所有与 Λ 相交的后继的集合。特别地，

$$\mathcal{D}' := \{Y_1, Y_2\} \bigcup \{C \subset \mathcal{I} | \exists n > 0, \exists j \in \{1, 2\} : C \in w^n(Y_i) \,\&\, C \cap \Lambda \neq \emptyset\}. \tag{2.8}$$

显然，$(\mathcal{D}', \to)$ 是 $(\mathcal{D}(\mathcal{Y}_0) \to)$ 的子图。令 $C \in \mathcal{D}'$ 为任意一个区间。吸引子 Λ 是 $\mathcal{F}$ 的不变集，因此 $w(C)$ 中的某个元素也与 Λ 相交。因此，$(\mathcal{D}', \to)$ 中没有死端，每条有向路径都可以在该子图中继续延伸。

由于 $C \cap \Lambda \neq \emptyset$ 以及 $\mathcal{F}$ 中的元素都是严格压缩映射，因此存在 $N > 0$和$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \{1, \ldots, m\}^N$，使得 $f_{\mathbf{k}}(I) \cap C \neq \emptyset$ 且 $\rho_{\min}^{-N}|C| > |I|$，其中 $\rho_{\min} < 1$ 是系统 $\mathcal{F}$ 的最小斜率。于是，集合中的元素

$$\{C_N \in \mathcal{D}' | \exists j_1, \ldots, j_N : C \to_{k_1, j_1} \cdots \to_{k_N, j_N} C_N\} \tag{2.9}$$

覆盖 I，因此也覆盖吸引子 Λ。我们刚刚得到

$$\forall C \in \mathcal{D}', \forall U \subset \mathcal{I} : \exists n > 0, \exists C' \in w^n(C) \text{ such that } C' \cap U \neq \emptyset. \tag{2.10}$$

将(2.10)应用于 U 的一个邻域 ϕ_1，可知从每个 $C \in \mathcal{D}'$出发，在$(\mathcal{D}', \to)$ 中存在一条有向路径，通往某个 $C' \in \mathcal{D}'$，且终点位于 ϕ_1。

由于 ϕ_1 是严格压缩映射 f_1的不动点，若 $\phi_1 \in C \in \mathcal{D}'$, ，则在$(\mathcal{D}', \to)$ 中必定存在一条有向路径，从 C 通往 Y_1 或 Y_2。再次应用(2.10)，在$(\mathcal{D}', \to)$ 中，Y_1 与 Y_2之间存在有向路径，因此它确实是一个不可约子图。□

2.2. **与自然压力的联系**。与图导向迭代函数系类似，我们为马尔可夫图关联一个矩阵，以帮助确定相应 CPLIFS 的豪斯多夫维数（见 [3]）。

定义 2.7. 设 $F = \{f_k\}_{k=1}^m$ 为一个 *CPLIFS*，并用 $(D \to)$ 表示其马尔可夫图。我们定义矩阵 $\mathbf{F}(s) := \mathbf{F}_{\mathcal{D}}(s)$，其指标由 D 的元素构成，如下所示

$$[\mathbf{F}(s)]_{C,D} := \begin{cases} \sum_{(k,j): C \to_{(k,j)} D} |f'_{k,j}|^s, \ \textit{if } C \to D \\ 0, \ \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{2.11}$$

我们称 $\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(s)$ 为与马尔可夫图 $(\mathcal{D} \to)$相关联的矩阵。

在定义中我们用到了这样一个事实：对于一个 $D \in \mathcal{D}$，其中 $C \to_{(k,j)} D$ 的导数在 D 上为常数。也就是说，$\mathbf{F}(s)$ 的每个元素要么为零，要么是若干收缩比的 s 次幂之和。

只需仅从 $\mathcal{C}$ 中选取指标，该矩阵也可以为任意 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 定义。我们将这样的矩阵记为 $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)$。由此可知，当 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 时，$\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)$ 始终是 $\mathbf{F}(s)$ 的一个子矩阵。

We 将 $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(n)$ 记作图 $(\mathcal{C} \to)$ 中长度为 n 的有向路径集合 .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(n) := \{((k_1, j_1), \ldots, (k_n, j_n)) | \exists C_1, \ldots, C_{n+1} \in \mathcal{C} : \\ \forall q \in [n] \exists k_q \in [m], j_q \in [l(k)]) : C_q \to_{(k_q, j_q)} C_{q+1}\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

这里，长度为 n 的有向路径是指 n 条连续的有向边，我们按照包含的边的顺序，用这些边的标签来标识每条路径。$(\mathcal{D} \to)$ 中的每条无限长度路径表示 Λ 中的一个点，并且每个点至少由一条路径表示。同样，对于 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$，由 $(\mathcal{C} \to)$ 中无限路径的自然投影所定义的点构成一个不变集 $\Lambda_{\mathcal{C}} \subset \Lambda$。我们将这些集合的自然压力定义为

$$\Phi_{\mathcal{C}}(s) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\mathbf{k}} |I_{\mathbf{k}}|^s, \tag{2.13}$$

其中的求和遍历所有满足 $\exists j_1, \ldots j_n : ((k_1, j_1), \ldots, (k_n, j_n)) \in \mathrm{E}_{\mathcal{C}}(n)$ 的 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots k_n)$ I，且 I 是 (1.1) 中定义的区间。根据 D 的定义，容易看出 $\Phi_{\mathcal{D}}(s) = \Phi s$。

注释 2.8。 令 Y_0 为单调性划分 Z_0，的有限细化，并令$(D', \to)$ 为 F 关于 Y_0 的马尔可夫图。显然，

$$\forall s \geq 0 : \Phi_{\mathcal{D}}(s) = \Phi_{\mathcal{D}'}(s). \tag{2.14}$$

我们将证明，函数 $\Phi_{\mathcal{D}}(s)$ 的唯一零点可以通过某个 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 的 $\Phi_{\mathcal{C}}(s)$ 的根来逼近。为此，我们需要将函数$\Phi_{\mathcal{C}}(s)$ 与矩阵 $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)$ 联系起来。

作为一个算子，$(\mathbf{F}_{\mathcal{D}}(s))^n$ 在 l^∞-范数下总是有界的。因此我们可以定义

$$\varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)) := \lim_{n\to\infty} \|(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s))^n\|_\infty^{1/n}.$$

引理 2.9。 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$。若 $(\mathcal{C} \to)$ 是不可约的，则

$$\Phi_{\mathcal{C}}(s) \leq \log \varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)). \tag{2.15}$$

若 $(\mathcal{C} \to)$ 是不可约且有限的，则

$$\Phi_{\mathcal{C}}(s) = \log \varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)). \tag{2.16}$$

证明。 首先只假设 $(\mathcal{C} \to)$ 是不可约的。由于它是不可约的，我们可以将 $(\mathcal{C} \to)$ 视为某个 IFS 在层级 n 下的柱区间$\{I_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(n)}$ 的马尔可夫图。

固定 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in [m]^n$。对于某个 $j_1, \ldots j_n$，在标签为 $((k_1, j_1) \ldots, (k_n, j_n))$ 的图中，长度为 n 的有向路径至少有一条，但也可能有多条。这些路径分别对应 $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}^n(s)$ 中的唯一一项。这些项中最大的那一项乘以 $|I|$ 是 $|I_{\mathbf{k}}|^s$ 的上界。由于每条长度为 n 的路径都始于 $\mathcal{Z}_0$, 中的某个元素，我们得到

$$\sum_{\mathbf{k}} |I_{\mathbf{k}}|^s \leq |\mathcal{Z}_0| \cdot \|\mathbf{F}_{\mathcal{C}}^n(s)\|_\infty \cdot |I|, \tag{2.17}$$

其中求和遍历所有 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots k_n)$ 满足 $\exists j_1, \ldots j_n : ((k_1, j_1), \ldots, (k_n, j_n)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(n)$。对两边取对数，再除以 n，然后令 $n \to \infty$，得到（2.15）。

现在假设 $\mathcal{C}$ 是有限的，并记 N 为马尔可夫图的最高层级。这意味着对于每个 $|\mathbf{k}| \geq N$，柱区间 $I_{\mathbf{k}}$ 都包含在 $\mathcal{C}$ 的某个元素中。也就是说

$$\forall n \geq 0 : \min_{|\mathbf{l}|=N} |I_{\mathbf{l}}| \|\mathbf{F}_{\mathcal{C}}^n(s)\|_\infty \leq \sum_{\mathbf{k}} |I_{\mathbf{k}}|^s \leq \max_{|\mathbf{l}|=N} |I_{\mathbf{l}}| |\mathcal{Z}_0| \|\mathbf{F}_{\mathcal{C}}^n(s)\|_\infty, \tag{2.18}$$

whe其中，中间的求和是对所有满足以下条件的 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots k_{N+n})$ 进行的

$$\exists j_1, \ldots j_{N+n} : ((k_1, j_1), \ldots, (k_{N+n}, j_{N+n})) \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(N + n).$$

由此可得（2.16）成立。 □

设 $(\mathcal{C}1, \to), (\mathcal{C}2, \to) \ldots$ 是 $(\mathcal{D} \to)$ 的一个递增不可约子图序列。根据 Seneta 的结果 [13, 定理 1]，矩阵 $\mathrm{F}_{\mathcal{C}_n}(s)$ 的所谓 R-值收敛到 $\mathrm{F}(s)$ 的 R-值。对于不可约有限矩阵 A，总有 $R(\mathrm{A}) = \varrho^{-1}(\mathrm{A})$，因此谱半径 $\varrho(\mathrm{F}_{\mathcal{C}_n}(s))$ 收敛到 $\varrho^{-1}(\mathrm{F}(s))$。尽管 $\mathrm{F}(s)$ 可能不是有限的，但在某些假设下，仍可保证关系 $R(\mathrm{F}(s)) = \varrho^{-1}(\mathrm{F}(s))$ 成立。这就是以下性质在我们的证明中起关键作用的原因。

定义 2.10。 设 F 是一个 *CPLIFS*，Y 是单调性划分 Z_0 的有限细化。令 $(D(Y) \to)$ 为 F 关于 Y 的马尔可夫图，并令$\mathbf{F}(Y\ s)$ 为其关联矩阵。

如果存在一个 Y，使得对于所有 $s \in (0,\dim_{\mathrm{H}} \Lambda]$，矩阵 $\mathbf{F}(Y\ s)$ 都具有对应于特征值 $\varrho(\mathbf{F}(Y\ s))$的非负元素右特征向量和左特征向量，则称 *CPLIFS* F 是极限不可约的 。

我们称这个有限划分 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{F}$ 的$(\mathcal{D}(\mathcal{Y}) \to)$ 的极限不可约分割，也是一个极限不可约马尔可夫图 $\mathcal{F}$。

在下一节中，我们将说明极限不可约性意味着吸引子的豪斯多夫维数等于自然维数与 1 中的较小值。随后，在第 3 节中，我们将探讨使 CPLIFS 成为极限不可约的条件。

2.3. **利用图进行证明**。 我们已经展示了马尔可夫图与给定 CPLIFS 的自然压力之间的联系。现在利用这一联系，我们通过用马尔可夫图的子矩阵的谱半径逼近其谱半径，证明极限不可约 CPLIFS 的自然维数始终是其吸引子豪斯多夫维数的下界。

如 [11], 下述命题成立。

命题 2.11。 设 F 是一个极限不可约 *CPLIFS*，且 $(D \to)$ 是其极限不可约马尔可夫图。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\mathcal{C} \subset D$ 有限子集，使得

$$\varrho(\mathbf{F}(s)) - \varepsilon \le \varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(s)) \le \varrho(\mathbf{F}(s)), \tag{2.19}$$

其中 $\mathbf{F}(s)$ 是与$(D \to)$相关联的矩阵。

证明与 [11, 引理 6 (ii)]的证明基本相同。结合 [11, 定理 2] 和 [9, 推论 7.2]，可得到以下定理。

定理 2.12. 设 F 是一个极限不可约的 *CPLIFS*，其吸引子为 Λ，且具有极限不可约的马尔可夫图$(D \to)$。假设 F 生成的自相似系统满足 *ESC*。那么

$$\dim_H \Lambda = \min\{1, s_{\mathcal{F}}\}, \tag{2.20}$$

其中 $s_{\mathcal{F}}$ 表示自然压力函数 $\Phi(s)$的唯一零点。

证明与 [11]中定理 2 的证明类似。

证明。 由推论 1.1， 维数$_H \Lambda \le$最小值$\{s_{\mathcal{F}},\ 1\}$ 总是成立。只需证明下界。

任取 $t \in (0, s_{\mathcal{F}})$。自然压力函数严格递减，并在 $s_{\mathcal{F}}$ 处有唯一零点，因此 $\Phi(t) > 0$。根据注记 $\mathcal{D}$ 的谱半径也可作同样的论断，见注记 2.8。 $(\mathcal{D} \to)$ 不可约，但不一定有限，因此引理2.9 给出

$$0 < \Phi(t) \le \log \varrho\left(\mathbf{F}(t)\right). \tag{2.21}$$

根据命题 2.11，

$$\exists\, \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \text{ finite}: \ \log \varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(t)) > 0. \tag{2.22}$$

再应用引理2.9可得

$$0 < \log \varrho(\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(t)) = \Phi_{\mathcal{C}}(t), \tag{2.23}$$

因为$\mathcal{C}$ 是有限的。

对于有限的 $\mathcal{C}$ 诱导吸引子 $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 是由图 $(\mathcal{C} \to)$定向的。由于生成的自相似系统满足 ESC，我们已从 [9, 推论 72] 得知

$$\dim_H \Lambda_{\mathcal{C}} = \min\{s_{\mathcal{C}}, 1\}, \tag{2.24}$$

其中 $s_{\mathcal{C}}$ 是 $\Phi_{\mathcal{C}}(s)$ 的唯一根。

首先假设 $s_{\mathcal{F}} \le 1$，这意味着 $s_{\mathcal{C}} \le 1$ 对所有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$均成立。由（2.24）和（2.23）可得

$$0 < \Phi_{\mathcal{C}}(t) \implies t < s_{\mathcal{C}} = \dim_H \Lambda_{\mathcal{C}} \le \dim_H \Lambda, \tag{2.25}$$

这对任意 $t \in (0, s_{\mathcal{F}})$ 都成立。因此 $s_{\mathcal{F}} \le \dim_{\mathrm{H}} \Lambda$。

当 $s_{\mathcal{F}} > 1$时，我们可以找到一个 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 使得 $\dim_H \Lambda_{\mathcal{C}} = 1$。这是引理 2.9、命题 2.11 和（2.24）的直接推论。因此，涵盖这两种情况的下界为

$$\min\{s_{\mathcal{F}}, 1\} \le \dim_{\mathrm{H}} \Lambda. \tag{2.26}$$

□

3. 什么使 CPLIFS 极限不可约?

要判断一个 CPLIFS $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^m$ 是否极限不可约，也就是是否满足定义 2.10，并不容易。本节通过分类讨论证明以下命题成立。

命题 3.1. 设 F 是一个 *CPLIFS*，其生成的自相似系统为 S。若 S 满足 *ESC*，则 F 是极限不可约的。

定理 1.4 是由命题3.1 和定理 2.12直接推出的。

根据 [6, 推论 1], 如果 $\mathcal{F}$中的所有函数都是单射，且第一层圆柱集互不重叠，那么$\mathcal{F}$ 就是极限不可约的。Raith 在证明 [11, 引理 6]时运用了这一观察。

在本节中，我们始终假设 $s \in (0, \dim_{\mathrm{H}} \Lambda]$。重叠结构可能会在马尔可夫图中产生重边。在关联矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 中，每条重边都表示为形如 $\rho_{k_1,j_1}^s + \ldots + \rho_{k_n,j_n}^s$ 的项，其中 $n > 1$。由于这些项的绝对值可能大于 1，[6, 推论 1] 的假设并不成立。我们需要考察在什么条件下 [6,推论 1/ii] 能对我们有所帮助。

引理 3.2 (F. Hofbauer [6, 推论 1/ii])。 设 $F = \{f_k\}_{k=1}^m$ 是一个具有马尔可夫图$(D, \to)$及关联矩阵 $\mathbf{F}(s)$ 的 *CPLIFS*。若 $\mathbf{F}(s)$ 可写成如下形式

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

使得 $\varrho(\mathbf{F}(s)) > \varrho(S)$，则 F 是极限不可约的。这里 P、Q、R、S 是维数适当的分块矩阵。

为方便读者，我们也在此给出 Hofbauer 的证明。

证明。 我们遵循 [6] 中定理 9 之后紧接着给出的推论 1/ii 的证明。令 $\lambda := \varrho(\mathbf{F}(s))$，并令 I_d 为 d 维单位矩阵。我们用 d_P 和 d_F 分别表示方阵 P 和$\mathbf{F}(s)$ 的维数。由此可得 $d_S = d_F - d_P$。值得注意的是， d_F和 d_S 可能不是有限的。

由于 $\lambda > \varrho(S)$，$(I_{d_S} - xS)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k S^k$ 存在于 $|x| \le \lambda^{-1}$ 中，且其元素在 $0 \le x \le \lambda^{-1}$时为非负。对于 $E(x) = P + xQ(I - xS)^{-1}R$，我们有如下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} I - xE(x) & -xQ(I - xS)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -xR & I - xS \end{bmatrix} = I - x\mathbf{F}(s), \tag{3.1}$$

对所有 $|x| \le \lambda^{-1}$ 都成立。由于 $\lambda = \varrho(\mathbf{F}(s))$，我们找到一个 x，使得 $|x| = \lambda^{-1}$，且 $I - x\mathbf{F}(s)$ 不可逆。固定这个 x 数。根据 (3.1)，已知 I 和 $(I - xS)^{-1}$ 均可逆，我们得到 $I - xE(x)$ 不可逆，即 $\varrho(E(x)) \ge \lambda$。由于 $E(|x|)$ 的元素均大于或等于 $E(x)$ 各元素的绝对值，因此我们得到 $\varrho(E(\lambda^{-1})) = \varrho(E(|x|)) \ge \varrho(E(x)) \ge \lambda$。注意， $E(x)$ 是一个有限矩阵。

对于 $t \in (0, \lambda^{-1}]$，映射 $t \to \varrho(E(t))$ 是连续且递增的，因为 $E(t)$ 的元素关于 t 连续且递增。由于 $\varrho(E(\lambda^{-1})) \ge \lambda$，我们找到一个 $y \in (0, \lambda^{-1}]$，使得 $\varrho(E(y)) = y^{-1}$。由于 $E(y)$ 的元素非负，这意味着 $I - yE(y)$ 不可逆。因此，根据 (3.1)， $I - y\mathbf{F}(s)$ 不可逆。由于 $\lambda = \varrho(\mathbf{F}(s))$，我们得到 $y = \lambda^{-1}$。由于 $E(y)$ 是有限矩阵，我们找到一个非负向量 u_1，使得$u_1(I - yE(y)) = 0$。令 $u_2 = yu_1Q(I - yS)^{-1}$，它是一个非负 $l^1(d_S)$ 向量，因为 Q 的各行属于 $l^1(d_S)$。因此， $u = (u_1, u_2)$ 是一个非负 $l^1(d_F)$ 向量，并且根据 (3.1)，$u(I - y\mathbf{F}(s)) = 0$。也就是说， u 是 $\lambda = \varrho(\mathbf{F}(s))$ 的左特征向量。

对$\mathbf{F}(s)$的转置进行类似计算，可得一个非负的 $l^\infty(d_F)$向量 v，满足$(I - \lambda^{-1}\mathbf{F}(s))v = 0$。

□

引理2.9 意味着，对于 $s \in (0, \text{维数}_{\mathrm{H}}\, \Lambda)$，我们有 $\varrho(\mathbf{F}(s)) > 1$，其中 Λ 是 CPLIFS$\mathcal{F}$的吸引子。因此，为了应用引理3.2，只需证明

$$\lim_{N\to\infty} \varrho\left(\mathbf{F}_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)\right) = 1. \tag{3.2}$$

若（3.2）成立，则$\mathbf{F}^{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)$ 可在足够大的 S 下，代替定理3.2中的子矩阵 N。

在扩张分段单调映射这一特殊情形下，（3.2）已由 F. Hofbauer 证明 [6, 推论 1/i]。要将他的结果推广到 CPLIFS，我们需要证明同样的结论适用于我们的扩张多值映射 T。我们的马尔可夫图与他的马尔可夫图之间唯一的区别，是可能重叠所导致的重边。需要注意，并非所有重叠都会产生重边，因为同一层级的单调区间可能彼此重叠。

定义 3.3. 设 $Z \in \mathcal{Z}$ 是基础划分中的一个元素，$f^{-1}_{k_1,\,j_1}$、$f^{-1}_{k_2,\,j_2}$是扩张多值映射 T 的两个不同分支。我们称 $f^{-1}_{k_1,\,j_1}$和 $f^{-1}_{k_2,\,j_2}$ 在 Z 上造成重叠，当且仅当

$$int(f^{-1}_{k_1,j_1}(Z)) \cap int(f^{-1}_{k_2,j_2}(Z)) \neq \emptyset,$$

其中 $int(A)$ 表示集合 A的内部。如果 $\exists z \in Z: f^{-1}_{k_1,\,j_1}(z) = f^{-1}_{k_2,\,j_2}(z)$，则称其为交叉重叠，否则称其为轻重叠。见图2。我们将同一区间上造成重叠的分支分别称为交叉重叠分支或轻重叠分支。

注意， T的分支图只能在某个基础区间 $Z \in \mathcal{Z}_0$ 的端点处相交（见定义 2.2）。我们称**重叠阶数**为K，如果 T 中定义域相交的分支的最大数量为 K。

3.1. **轻微重叠的情形。**

引理 3.4. 设 F 是仅存在轻微重叠的 *CPLIFS*。则存在一个有限划分 Y，使得 F 关于 Y 的马尔可夫图不包含任何重边。

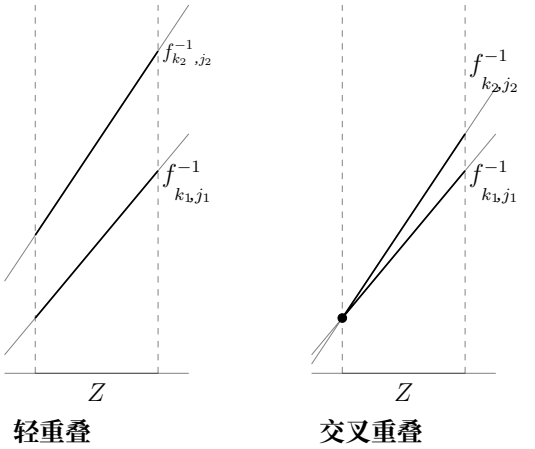

图2。两种重叠类型。

证明。设 K 为 $\mathcal{F}$ 的重叠阶数， T 为与$\mathcal{F}$相关联的多值映射。首先假设 T 的分支仅在 $Z \in \mathcal{Z}_0$ 上方重叠，并将这些分支记为 $f^{-1}_{k_1,j_1},\dots,f^{-1}_{k_K,j_K}$。由于只有轻微重叠，不失一般性，我们可以假设 $\forall x \in Z$: $f^{-1}_{k_\beta,j_\beta}(x) < f^{-1}_{k_\gamma,j_\gamma}(x)$ 若 $\beta < \gamma$。

定义

$$\varepsilon := \max\{\varepsilon' > 0 \,|\, \forall \beta \in [K-1], \forall A \subset \mathbb{R}, |A| = \varepsilon' : f^{-1}_{k_{\beta+1},j_{\beta+1}}(A) \cap f^{-1}_{k_\beta,j_\beta}(A) = \emptyset\}. \tag{3.3}$$

由于只有轻微重叠， ε是一个定义良好的正数。任意长度不超过 $A \subset Z$的区间 ε在分支 $f^{-1}_{k_1}$、j_1、……、 $f^{-1}_{k_K}$、j_K下的像必定互不相交。图3对此作了说明。

设$\mathcal{Y}_Z$ 是 Z 的一个有限划分，其中每个元素的长度都不超过 ε。将$\mathcal{Y}_Z$ 代替 Z ，代入$\mathcal{Z}_0$, ，我们得到$\mathcal{Y}$ 对$\mathcal{Z}_0$的一个有限细化。根据（3.3），相对于$\mathcal{F}$ 和$\mathcal{Y}$的马尔可夫图中不存在重边。

现在假设，在 $q > 1$ 许多单调区间Z_1上方 $\dots Z_q \in \mathcal{Z}_0$发生轻微重叠。对于每个 $i \in [q]$, 令 ε_i为使用以下内容在（3.3）中定义的数

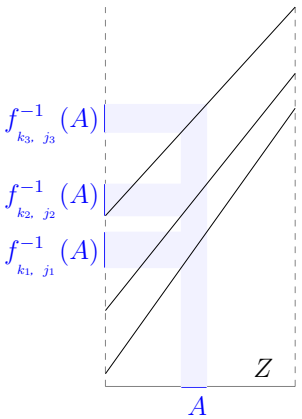

图3. 若区间 $A \subset Z$ 足够小，则其在三个轻重叠分支下的像互不相交。

在 Z_i 上方的分支，并令 $\mathcal{Y}_{Z_i}$ 为 Z_i 的有限划分，其各元素的长度均不超过 ε_i。将 $\mathcal{Z}_0$ 中的 Z_i 对每个 $i \in [q]$ 都替换为 $\mathcal{Y}_{Z_i}$，即可得到有限划分 $\mathcal{Y}$。关于 $\mathcal{Y}$ 的 $\mathcal{F}$ 马尔可夫图不含任何重边。□

引理 3.4 表明，对于仅存在轻微重叠的 CPLIFS，[6, 推论 1/i]也成立。

命题 3.5。设 F 是仅存在轻微重叠的 *CPLIFS*，对于有限划分 Y，令 $(D(Y) \to)$ 为 F 关于 Y 的马尔可夫图。那么存在一个 Y 有限划分，使得

$$\lim_{N\to\infty} \varrho\left(\mathbf{F}_{\mathcal{D}(\mathcal{Y})\setminus\mathcal{D}(\mathcal{Y})_N}(s)\right) = 1, \tag{3.4}$$

其中，$\mathbf{F}(s)$ 是与 $(D(Y) \to)$相关联的矩阵。

为方便读者，我们在此附上推论 1/i 的证明的一个修订版本。

证明。根据引理 3.4，存在 Z 的一个 Y 有限细化$_0$，使得 (D $\to$) := (D(Y) $\to$) 中没有重边。固定 $N > 1$，并令 $Z \in \mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$。此外，设 (k_1, j_1) 是从 Z 出发的一条边的标签，并设 $(k_1, j_1) \ldots, (k_q, j_q)$ 是一串标签，对应于 $\mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$ 中一条有向边路径，其中 $q > 0$ 任意。我们将证明，若 $q \le N$，则 $(k_1, j_1) \ldots, (k_q, j_q)$ 至多定义 $\mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$ 中形如 $Z_0 = Z \to Z_1 \to \cdots \to Z_q$ 的两条有向路径。

假设 $q < N$，且 Z 的一个端点是临界点。不失一般性，设 $Z = [w, x]$，其中 $w \in \mathsf{K}$。Z 经由分支 (k_1, j_1) 的后继只能终止于 $f_{k_1}^{-1}{}_{,j_1}(w)$ $f_{k_1}^{-1}{}_{,j_1}(x)$，或某个临界点。其中至多只有一个属于 $\mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$，因为形如 $[a, b]$ 的区间（其中 $a \in T^{i_1}v_1, b \in T^{i_2}v_2$, v_1, $v_2 \in \mathsf{K}$ $0 \le i_1, i_2 \le N$）都包含在 D_N 中。也就是说，那个终止于 $f_{k_1}^{-1}{}_{,j_1}(x)$ 的区间。因此 Z_1 被唯一确定。同理，Z_i 必须是 Z_{i-1} 的那个后继，它终止于 $f_{k_i}^{-1}{}_{,j_i} \circ \cdots \circ f_{k_1}^{-1}{}_{,j_1}(x)$，其中 $i \in [q]$。所以在这种情况下，Z_1，……，Z_q 都被唯一确定。

如果 $Z = [x, y]$ 的端点都不是临界点，那么 Z 在 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_N$ 中至多有两个后继。这两个区间的终点都是临界点，因此我们可以对它们应用前面的论证。于是，对于 $Z_1, \ldots, Z_q$，我们有两种情形。

我们刚刚证明，对于所有 $n > 0$，矩阵 $\left(\mathrm{F}^{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)\right)^{nN}$ 中任意 $Z \in \mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$ 所在的行，至多有 $2^n \cdot K^N$ 个非零元素。这里我们用 K^N 作为 $\mathsf{D} \setminus \mathsf{D}_N$ 中长度为 N 的路径可能数量的上界。由引理 3.4 可知，$\left(\mathrm{F}^{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)\right)^{nN}$ 的元素都不超过 1，因为 (D $\to$) 中没有重边。因此

$$\varrho\left(\mathbf{F}_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)\right) \le \sqrt[nN]{\| \left(\mathbf{F}_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_N}(s)\right)^{nN} \|_\infty} \le \sqrt[nN]{2^n K^N} = \sqrt[N]{2} \cdot \sqrt[n]{K}, \tag{3.5}$$

对于任意 $n \ge 1$，结论由此得证。□

引理3.2 和命题3.5 共同给出

$$\mathcal{F} \text{ has only light overlaps} \implies \mathcal{F} \text{ is limit-irreducible.}$$

也就是说，对于仅存在轻微重叠的 CPLIFS $\mathcal{F}$，若其生成的自相似系统满足 ESC，则总有 $\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \min\{1, s_{\mathcal{F}}\}$，其中 Λ 是 $\mathcal{F}$ 的吸引子。

3.2. **交叉重叠的情形**。 我们将集合中的元素称为

$$\left\{x \in \mathcal{I} | \exists k_1, k_2 \in [m], \exists j_1 \in [l(k_1)], \exists j_2 \in [l(k_2)] : f^{-1}_{k_1,j_1}(x) = f^{-1}_{k_2,j_2}(x)\right\}$$

相交点。它们构成临界点$\mathcal{K}$的一个子集。设 $w \in I$ 是一个相交点，那么$\mathcal{D}$ 中的元素只能以 w 为端点。如果$D \in \mathcal{D}$ 以 w结尾，那么我们称 D **在处产生交叉重叠**。

引理 3.6。 设 F 是一个 *CPLIFS*，其对应的扩张多值映射为T。设 $x_0 \in I$ 是一个相交点。如果 F 生成的自相似系统 S 满足 *ESC*，那么不存在有限的 N使得 $x_0 \in T^N(x_0)$。

证明。 我们将通过反证法证明该命题，并假设存在有限的$N > 0$使得 $x_0 \in T^N(x_0)$。设 $f^{-1}_{k'_1,j'_1}$和 $f^{-1}_{\widehat{k}_1,\widehat{j}_1}$是 T的两个不同分支，它们将 x_0 映射到同一个值。由于 x_0 是一个相交点，这些分支必然存在。不失一般性，假设分支序列 $((k_1, j_1) \ldots, (k_N, j_N))$ 将 x_0 映射到自身。具体而言，

$$f^{-1}_{k_N,j_N} \circ \cdots \circ f^{-1}_{k_1,j_1}(x_0) \equiv x_0.$$

对于分支序列 $((k_1, j_1)\ldots\ldots, (k_N, j_N), (k'_1, j'_1))$ 和 $((k_1, j_1)\ldots\ldots,$ 同样成立也一样。

对于给定的分支 $f^{-1}_{k,j}$，我们将 $S_{k,j}$记作生成的自相似迭代函数系 $\mathcal{S}$ 中对应的元素。因此

$$S_{(k_1,j_1),\ldots,(k_N,j_N),(k'_1,j'_1)} \equiv S_{(k_1,j_1),\ldots,(k_N,j_N),(\widehat{k}_1,\widehat{j}_1)}. \tag{3.6}$$

利用这两个函数，对于任意层级 $n > N$，我们至少可以构造出两个编码不同但迭代相同的对象。这意味着 $\mathcal{S}$ 不满足 ESC。□

引理 3.7。 设 F 是一个 *CPLIFS*，其生成的自相似系统满足 *ESC*。设 T 为与 F 相关联的扩张多值映射， W 为所有相交点的集合。固定 $P > 0$。那么存在 Z_0的一个有限细化 Y，使得

$$\forall Z \in \mathcal{Y}, \forall w \in W, \forall n \in [P] : w \in Z \implies Z \cap (\cup T^n(Z)) = \emptyset. \tag{3.7}$$

证明。设 $w \in W$ 为任意一个相交点。根据引理 3.6，$\forall n \in [P]$： $w \notin T^n(w)$。也就是说， w与集合 $\cup_{n\in[P]} T^n(w)$之间的距离为正。设 $d > 0$ 为此距离。回忆一下，$\rho_{\min}$ 表示$\mathcal{F}$中的最小收缩比，因此 $1/\rho_{\min}$是 T的最大斜率。

设 $p \in \mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的点

$$|w - p| < \frac{d\rho^P_{\min}}{1 + \rho^P_{\min}}. \tag{3.8}$$

设 $Z \in \mathcal{Z}_0$ 为包含 w的一个单调区间，并设 p 为 Z 中唯一满足条件 (3.8) 的点。相交点也是临界点，因此 Z 至多包含一个这样的点。我们用 p将 Z切分为两个闭区间，并将它们分别记为 Y_Z, Y'_Z。

对于任意包含相交点 $w \in W$的单调区间 $Z \in \mathcal{Z}_0$，我们都可以构造出区间对 Y_Z, Y'_Z Z ，$\mathcal{Z}_0$ 中所有会导致交叉重叠的点，替换为相应的 $\{Y_Z, Y'_Z\}$，即可得到满足 (𝒴3.7) 的有限划分 。 □

命题 *3.1* 的证明。 我们将借助引理 $\mathcal{F}$ 构造一个 3.7 和引理 3.4 所给出的 M ，其中 K 表示系统中的交点数， ϱ，而 $\mathbf{F}(s)) > 1$表示重叠阶数。我们知道 $\varepsilon > 0$ ，因此可以固定一个 $\varrho(\mathbf{F}(s)) > 1 + \varepsilon$。

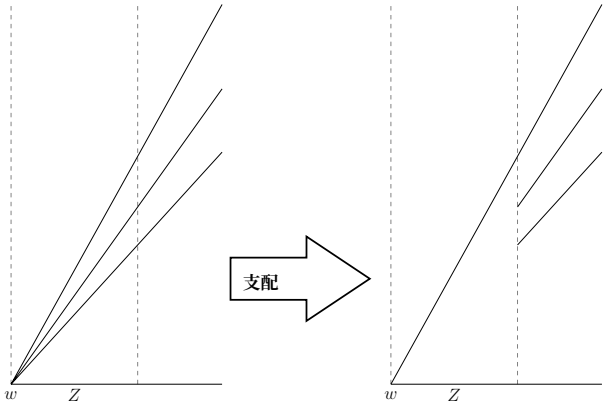

图4. 该图说明了我们如何通过用斜率最大的分支支配相交点 w 周围的分支来处理交叉重叠。马尔可夫图的节点保持不变，我们只删除一些边。

取一个足够大的 $P > 0$，使得

$$\sqrt[P]{K} < \sqrt[M+1]{1+\varepsilon}. \tag{3.9}$$

我们对F 应用引理*3.7*，并对 P 应用引理，以得到有限划分$\mathcal{Y}$。设$(\mathcal{D} \to)$ 是$\mathcal{F}$ 相对于$\mathcal{Y}$的马尔可夫图，并设 $Z \in \mathcal{Y}$ 是导致交叉重叠的一个区间。由于$\mathcal{Y}$的构造， Z 与其前 P 个后继不相交。换言之，在 P 长度的有向路径中，$\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P$ 不可能多次经过 Z。

设 Z_{cross} 为上文定义的、由不同交叉重叠分支作用于 Z 所得到的所有像的集合。 Z_{cross} 中的元素彼此嵌套。因此，使用膨胀比最大的交叉重叠分支，我们可以支配 $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}_P$ 中经过 Z 且包含 Z_{cross} 的每条长度至多为 P 的有向路径。这意味着，对于每个 $n \in [P]$ 以及 $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}_P$ 中满足 $Z \subset Z$ 和 $C_1 \in Z_{\text{cross}}$ 的每条有向路径 $Z \to C_1 \to \cdots \to C_n$，都存在 $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}_P$ 中的一条有向路径 $Z \to D_1 \to \cdots \to D_n$，使得 D_1 是 Z 经由斜率最大的分支得到的后继，且$\forall k \in [n] : C_k \subset D_k$。这实质上等同于擦除 T 在 Z 上方的所有其他交叉重叠分支，见图4。对于所有导致交叉重叠的 $Z \in \mathrm{Y}$，我们都进行同样的支配。设 $\mathbf{F}^{\max}(s)$ 为该支配系统的矩阵。我们在上标中写 $\max$，以表示支配之后，在每个最初导致交叉重叠的 Z 上方，只剩下膨胀比最大的交叉重叠分支。

我们通过支配交叉重叠分支得到的新系统只能有轻微重叠。该系统的马尔可夫图与原系统具有相同的节点，我们只因支配作用而删除了边。根据命题 3.5，我们得到有限细化$\mathcal{Y}'$ 的 $\mathcal{Y}$，使得（3.4）在 $\mathbf{F}^{\max}(s)$下成立。也就是说，存在一个 $N > P$ 使得

$$\varrho\left(\mathbf{F}^{\max}_{\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}'_N}(s)\right) < 1 + \varepsilon, \tag{3.10}$$

其中，$(\mathcal{D}', \to)$ 是关于 $\mathcal{Y}'$ 的 $\mathcal{F}$ 的马尔可夫图。令 $\mathbf{F}'(s)$ 为与 $(\mathcal{D}', \to)$ 相关联的矩阵。由矩阵 $\mathbf{F}^{\max}(s)$ 的构造可知，$\mathbf{F}^{\max}(s)$ 的每个元素都小于或等于 $\mathbf{F}'(s)$ 中对应的元素。

现在我们证明，子矩阵 $\mathbf{F}'_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}(s)$ 的谱半径小于 $\mathbf{F}'(s)$ 的谱半径。令 $Z\in\mathcal{Y}$ 为在支配之前导致交叉重叠的区间之一。注意，在 $(\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N,\to)$ 中，至多有 K 条有向边从 Z 出发。也就是说，我们用一条路径支配了 $(\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N,\to)$ 中至多 K^M 条路径。由此我们得到上界

$$\left(\|\left(\mathbf{F}'_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}(s)\right)^{nP}\|_\infty\right)^{\frac{1}{nP}}\le\left(\sqrt[P]{K}\right)^M\left(\|\left(\mathbf{F}^{\max}_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}(s)\right)^{nP}\|_\infty\right)^{\frac{1}{nP}}, \tag{3.11}$$

对于任意 $1\le n$。由此可得

$$\varrho\left(\mathbf{F}'_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}(s)\right)\le\left(\sqrt[P]{K}\right)^M\cdot\varrho\left(\mathbf{F}^{\max}_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}\right). \tag{3.12}$$

将 (3.10) 和 (3.9) 代入 (3.12)，即可完成证明

$$\varrho\left(\mathbf{F}'_{\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}'_N}(s)\right)<1+\varepsilon<\varrho\left(\mathbf{F}'(s)\right). \tag{3.13}$$

根据定理3.2，$\mathcal{F}$ 是极限不可约的。 □

参考文献

[1] L. M. Barreira. 非加性热力学形式及其在双曲动力系统维数理论中的应用。遍历理论与动力系统，16(5):871–928，1996。[2] K. J. Falconer. 分形集几何。第 85 卷。剑桥大学出版社，1986。[3] K. J. Falconer. 分形几何技术，第 3 卷。威利奇切斯特，1997。[4] M. Hochman. 关于具有重叠的自相似集与熵逆定理。数学年刊，773–822 页，2014。[5] M. Hochman. 关于实数集^{d}中具有重叠的自相似集与熵逆定理，2015。[6] F. Hofbauer. 分段可逆动力系统。概率论及相关领域，72(3):359–386，1986。[7] J. E. Hutchinson. 分形与自相似性。印第安纳大学数学杂志，30(5):713–747，1981。[8] T. Jordan 和 A. Rapaport. 投影到具有重叠的自相似集上的遍历测度的维数。伦敦数学会会刊，2020。[9] R. D. Prokaj 和 K. Simon. 具有重叠构造的直线上分段线性迭代函数系。非线性，35(1):245，2021。[10] R. D. Prokaj 和 K. Simon. 分段线性迭代函数系的特殊族。*arXiv:2212.09378*，2022。[11] P. Raith. 分段单调映射的豪斯多夫维数。数学研究，1 33，1989 94 17( )：– 。[12] P. Raith. 区间映射不变子集的豪斯多夫维数的连续性。科门尼乌斯大学数学学报，63:39–53，1994。[13] E. Seneta. 非负矩阵与马尔可夫链。施普林格科学与商业媒体，2006。[14] P. Shmerkin. 关于富斯滕伯格交集猜想、自相似测度及卷积的 l q 范数。数学年刊，189(2):319–391，2019。

R. Dániel Prokaj，阿尔弗雷德·雷尼数学研究所，Reáltanoda u. 13-15.，1053 布达佩斯，匈牙利

电子邮箱： prokajrd@math.bme.hu

Peter Raith，数学学院，维也纳大学，Oskar-Morgenstern-Platz 1，1090 维也纳，奥地利电子邮箱： peter.raith@univie.ac.at

Károly Simon，随机学系，数学研究所，布达佩斯工业与经济大学，Műegyetem rkp. 3.，1111 布达佩斯，匈牙利，以及 ELKH-BME随机学研究组，邮政信箱 91，1521 布达佩斯，匈牙利

电子邮箱： simonk@math.bme.hu