arXiv:2302.04347v1 [math.FA] 8 Feb 2023

凸体截面与投影的不等式

APOSTOLOS GIANNOPOULOS、ALEXANDER KOLDOBSKY 和 ARTEM ZVAVITCH

Abstract. 本文属于几何层析学领域，研究基于立体截面和投影数据的几何性质。我们介绍几何层析学中的一个新方向，在这一方向中，将不同的体积结果置于更一般的框架下研究，用任意测度取代体积。令人惊讶的是，这种一般方法适用于许多体积结果。特别地，我们讨论任意测度下关于凸体截面的 Busemann-Petty问题以及任意测度下的切片问题。我们将这些问题推广到函数情形。此外，我们还讨论了与投影相关问题的若干推广，例如 Shephard问题，以及离散断层成像中的一些问题。

Contents

1. 引言 2 2. 符号与定义 2 3. 正交投影与截面的体积估计 5 4. 函数的比较不等式与切片不等式 7 4.1. 函数的比较问题 7 4.2. 函数的切片问题 8 4.3. 函数截面的商不等式 10 5. 凸体投影 11 5.1. Shephard问题 11 5.2. Busemann-Petty问题与Shephard问题的一种变体 12 5.3. 投影的表面积 13 6. 表面积 15 7. 体积差不等式 18 8. 离散版本 19 参考文献 24

2010 *Mathematics Subject Classification.* 52A20、53A15、52B10。*Key words and phrases.* 凸体；截面；Radon变换；交体。第一作者获希腊研究与创新基金会（H.F.R.I.）资助，该资助来自“支持教职人员和研究人员并购置高成本科研设备的 H.F.R.I. 研究项目首轮征集”项目（项目编号：1849）。第二作者部分获得美国国家科学基金会 DMS-2054068 项目资助。第三作者部分获得美国国家科学基金会 DMS-2000304 项目和美以双边科学基金会（BSF）资助。第二作者和第三作者在罗得岛州普罗维登斯的计算与实验数学研究所参加调和分析与凸性学期项目期间，均部分获得美国国家科学基金会 DMS-1929284 项目资助。

1. Introduction

Busemann-Petty问题探讨的是：在 $\mathbb{R}^n$中，中心超平面截面的$(n-1)$维体积一致较小的原点对称凸体，其 n维体积是否必然较小。Bourgain切片问题探讨的是：在 $\mathbb{R}^n$ 中，每个体积为一的对称凸体是否都存在一个中心超平面截面，其$(n-1)$维体积大于某个绝对常数。我们从更一般的视角考察凸几何中的这些及其他结果与问题，以任意测度取代体积。尽管常识似乎表明，任意测度的情形过于一般，难以得出有意义的结果，但我们展示了若干种情形，在这些情形下，这种推广完全可行。特别是， [125] 证明了：用正密度的任意测度取代体积时，Busemann-Petty问题的解答（当 $n \leq 4$ 时为肯定，当 $n \geq 5$时为否定）完全相同。 [83], 证明了任意测度下切片问题的一个版本：具体而言，对于体积为一的原点对称凸体 K 上的任意概率密度f，都存在一个超平面 H，使其满足 $\mathbb{R}^n$，且 f在 $K \cap H$ 上的积分大于 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

本文的结构如下。第 2 节简要介绍本文所需的最基本符号和事实。第 3 节首先给出由正交投影和截面得到的体积估计，随后讨论这些不等式的推广和变体。第 4 节讨论 Busemann-Petty问题及其推广，重点关注以测度取代体积的一般情形。第 5 节介绍与凸体的投影相关的结果，包括 Shephard问题（它是 Busemann-Petty问题在投影方面的类比）、Milman问题（可视为一种混合的 Busemann-Petty-Shephard问题），以及关于投影的表面积的切片型不等式。第 6 节讨论凸体表面积的比较不等式与切片不等式。第 7 节探讨体积差不等式，这类不等式可用于估计断层成像计算中的误差。最后，第 8 节介绍关于切片问题的离散类比的已有研究。

致谢。我们感谢 Dylan Langharst 和 Michael Roysdon 提出的诸多更正、宝贵的讨论和建议。

2. Notation and definitions

本节将介绍本文所需的一些基本符号和定义。关于本综述中使用的凸几何、几何层析学和傅里叶分析相关对象与工具的更多信息，请读者参阅 $[3,\ 4,\ 27,\ 28,\ 43,\ 44,\ 76,\ 93,\ 115]$ 。

我们在 $\mathbb{R}^n$ 中进行研究，其中配备了标准内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。我们分别用 B_2^n 和 S^{n-1} 表示欧几里得单位球和球面。我们用 $|\cdot|$ 表示相应维数下的体积，用 ω_n 表示 B_2^n 的体积，用 σ 表示 S^{n-1} 上的旋转不变概率测度。由 $\mathbb{R}^n$ 中所有 k 维子空间构成的格拉斯曼流形 $G_{n,\ k}$ 配备了 Haar概率测度 $\nu_{n,\ k}$。对于任意 $1 \leq k \leq n-1$ 和 $H \in G_{n,\ k}$，我们用 P_H 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 H 的正交投影。字母 c, c', c_1, c_2 等表示绝对正常数，这些常数可能随行而变化。每当我们写下 $a \approx b$，意思是存在绝对常数 $c_1, c_2 > 0$，使得 $c_1 a \leq b \leq c_2 a$。

$\mathbb{R}^n$ 中的凸体是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧凸子集 K，且其内部非空。若 $-K=K$，则称 K 原点对称；若其重心 $\frac{1}{|K|}\int_K x\,dx$ 位于原点，则称 K 中心对称。凸体 K 的支撑函数定义为 $h_K(y)=\max\{\langle x,y\rangle:\ x\in K\}$，而 K 的平均宽度为

$$w(K)=\int_{S^{n-1}} h_K(\xi)\,d\sigma(\xi).$$

若闭有界集 K in $\mathbb{R}^n$ 满足：每条经过原点的直线都与 K 的边界恰好相交于两个非原点处，原点是 K 的内部点，且由下式定义的 K 的闵可夫斯基泛函

$$\|x\|_K=\min\{a\geq 0:\ x\in aK\}$$

是 $\mathbb{R}^n$. 上的连续函数。我们使用星体 K 的体积 $|K|$ 的极坐标公式:

$$|K|=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\|\xi\|_K^{-n}d\xi. \tag{2.1}$$

若 f 是 K 上的可积函数，则

$$\int_K f=\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{\|\xi\|_K^{-1}} r^{n-1}f(r\xi)dr\right)d\xi. \tag{2.2}$$

对于 $1\leq k\leq n-1$，$(n-k)$ 维球面拉东变换 $\mathcal{R}_{n-k}:C(S^{n-1})\to C(G_{n,\ n-k})$ 是由下式定义的线性算子

$$\mathcal{R}_{n-k}g(H)=\int_{S^{n-1}\cap H} g(x)\ dx\quad \text{for all}\ \ H\in G_{n,n-k}$$

对每个函数 $g\in C(S^{n-1})$。

对于每个 $H\in G_{n,\ n-k}$，星体 K 被 H 截出的截面的 $(n-k)$ 维体积可写为

$$|K\cap H|=\frac{1}{n-k}\mathcal{R}_{n-k}(\|\cdot\|_K^{-n+k})(H). \tag{2.3}$$

更一般地，对于可积函数 f 以及任意 $H\in G_{n,\ n-k}$,

$$\int_{K\cap H} f=\mathcal{R}_{n-k}\left(\int_0^{\|\cdot\|_K^{-1}} r^{n-k-1}f(r\ \cdot)\ dr\right)(H). \tag{2.4}$$

交体类 $\mathcal{I}_n$ 由 Lutwak [103]引入。我们考虑 Zhang [123]提出的这一概念的推广。称原点对称星体 D 在 $\mathbb{R}^n$ 中为广义 k-交体，并记为 $D\in\mathcal{BP}_k^n$，如果在 $G_{n,\ n-k}$ 上存在有限的 Borel 非负测度 ν_D，使得对于每个 $g\in C(S^{n-1})$

$$\int_{S^{n-1}}\|x\|_D^{-k}g(x)\ dx=\int_{G_{n,n-k}} R_{n-k}g(H)\ d\nu_D(H). \tag{2.5}$$

当 $k=1$ 时，我们得到 Lutwak 原始的交体类 $\mathcal{BP}_1^n=\mathcal{I}_n$.

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个关于可逆线性变换保持不变的星体类。我们用

$$d_{BM}(K,\mathcal{A})=\inf\{a>0:\exists D\in\mathcal{A}\quad \text{such that}\quad K\subset D\subset aK\}$$

表示从 K 到 $\mathcal{A}$ 的 Banach–Mazur 距离。我们还定义较小的体积比距离

$$d_{\mathrm{vr}}(K,\mathcal{A})=\inf\left\{(|K|/|D|)^{1/n}:\ D\subset K,\ D\in\mathcal{A}\right\},$$

以及外体积比距离

$$d_{\mathrm{ovr}}(K,\mathcal{A})=\inf\left\{(|D|/|K|)^{1/n}:\ K\subset D,\ D\in\mathcal{A}\right\}$$

从 K 到 $\mathcal{A}$。

Minkowski 基本定理指出，如果 K_1、.....、K_m 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空的紧凸子集，那么 $t_1K_1+\cdots+t_mK_m$ 的体积是关于 $t_i>0$ 的 n 次齐次多项式；即

$$|t_1K_1+\cdots+t_mK_m|=\sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le m}V(K_{i_1},\ldots,K_{i_n})t_{i_1}\cdots t_{i_n},$$

其中，系数 $V(K_{i_1},.....,K_{i_n})$ 的选取应使其在参数置换下保持不变。系数 $V(K_1,.....,K_n)$ 是 K_1、.....、K_n 的混合体积；关于混合体积的定义及主要性质的详细阐述，请参见 [115]。特别地，如果 K 和 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体，那么函数 $|K+tD|$ 是关于 $t\in[0,\infty$ 的多项式：

$$|K+tD|=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{n-j}(K,D)\,t^j,$$

其中，$V_{n-j}(K,D)=V((K,n-j),(D,j))$ 是 K 和 D 的第 j 个混合体积（我们用记号 (D,j) 表示 D，.....，D j 次）。若 $D=B_2^n$，则令 $W_j(K):=V_{n-j}(K,B_2^n)=V((K,n-j),(B_2^n,j))$；这是 K的第 j 个曲率积分。混合体积 $V_{n-1}(K,D)$ 可表示为

$$V_{n-1}(K,D)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_D(\xi)d\sigma_K(\xi), \tag{2.6}$$

其中，σ_K 是 K的表面积测度；这是定义在 S^{n-1} 上的博雷尔测度，定义如下：

$$\sigma_K(A)=\lambda(\{x\in\mathrm{bd}(K):\ \text{the outer normal to } K \text{ at } x \text{ belongs to } A\}),$$

其中，λ 是定义在 bd(K) 上的豪斯多夫测度。特别地，若 σ_K 相对于 λ 绝对连续，则 σ_K 的密度称为曲率函数，通常记作 f_K。K 的表面积 $S(K):=\sigma_K(S^{n-1})$ 满足

$$S(K)=nW_1(K).$$

一般而言，体积和混合体积满足许多非常有用的不等式。第一个是 Brunn-Minkowski 不等式 $|K+L|^{1/n}\ge|K|^{1/n}+|L|^{1/n}$，其中$K$、$L$ 和 $K+L$ 均为可测且非空的集合。

Brunn-Minkowski不等式的直接推论是 Minkowski 第一不等式

$$V_{n-1}(K,L)\ge|K|^{(n-1)/n}|L|^{1/n}, \tag{2.7}$$

以及 Minkowski 第二不等式

$$V(K,L)^2\ge|K|V((L,2),(K,n-2)), \tag{2.8}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸紧子集 K 和 L。

佐诺体是线段的闵可夫斯基和在豪斯多夫度量下的极限。等价地，原点对称凸体 Z 是佐诺体，当且仅当其极体 Z° 是某个 L_1 空间中 n 维子空间的单位球；也就是说，存在定义在 S^{n-1} 上的正测度 μ （ Z 的支撑测度），使得

$$h_Z(x) = \|x\|_{Z^\circ} = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, y\rangle| d\mu(y).$$

具有非空内部的原点对称佐诺体类与投影体类相同。回顾一下，凸体 K 的投影体 ΠK 是对称凸体，其支撑函数定义为

$$h_{\Pi K}(\xi) = |P_{\xi^\perp}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle \xi, y\rangle| d\sigma_K(y), \qquad \xi \in S^{n-1},$$

其中 $\xi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle = 0\}$ 是垂直于 ξ 的中心超平面，而$P_{\xi^\perp}(K)$表示 $K \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\xi^\perp$上的正交投影。

3. Volume estimates from orthogonal projections and sections

根据凸体的正交投影或截面体积来估计其体积，是凸几何中的一个经典问题。一个著名的此类估计是Loomis-Whitney 不等式，它断言，对于任意凸体（实际上，任意紧集） K

$$|K|^{n-1} \le \prod_{i=1}^{n} |P_{e_i^\perp}(K)|, \tag{3.1}$$

其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基（见 [102]）。当且仅当 K 是一个正交平行六面体，且 $\pm e_i$ 是其各面的法向量时，等式（3.1）成立。Meyer 于 [104]证明了一个对偶不等式，其中通过截面$K \cap e_i^\perp$的体积来估计 K 的体积：对于 $\mathbb{R}^n$中的每个凸体 K，都有

$$|K|^{n-1} \ge \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^\perp|, \tag{3.2}$$

当且仅当 $K = \mathrm{conv}\{\pm\lambda_1 e_1, \dots, \pm\lambda_n e_n\}$ 对于某个 $\lambda_i > 0$ 时取等号。

这两个不等式都有多种推广。为陈述其中一种，设 $s > 0$，并称子空间 $F_1, \dots, F_r$ 以权重 $c_1, \dots, c_r > 0$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的 s-均匀覆盖，当且仅当

$$s\, I_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_{F_i}, \tag{3.3}$$

其中 I_n 是 $\mathbb{R}^n$上的恒等算子。然后，作为多维几何 Brascamp-Lieb 不等式的一个应用，可以证明，对于 $\mathbb{R}^n$的每个紧子集 K，都有

$$|K|^s \le \prod_{i=1}^{r} |P_{F_i}(K)|^{c_i}. \tag{3.4}$$

另一方面，利用 Barthe几何反向 Brascamp-Lieb 不等式，文献 [100] 证明了：若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，满足 $0 \in \text{int}(K)$，且 F_1、 ..... 、 F_r 是如上所述的子空间，则

$$|K|^s \geq \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{r} \left(d_i! \, |K \cap F_i|\right)^{c_i}, \tag{3.5}$$

其中 $d_i = \dim(F_i)$。这些不等式的一个特例是：当 $u_1, \ldots, u_m$是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量，且 $c_1, \ldots, c_m$ 是满足 John 条件 $I_n = \sum_{i=j}^{m} c_j u_j \otimes u_j$的正实数时，那么，如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且 $0 \in \text{int}(K)$，则有

$$\frac{n!}{n^n} \prod_{j=1}^{m} |K \cap u_j^{\perp}|^{c_j} \leq |K|^{n-1} \leq \prod_{j=1}^{m} |P_{u_j^{\perp}}(K)|^{c_j}. \tag{3.6}$$

为此，注意到如果 $P_j = P_{u_j^{\perp}}$，那么 $u_j \otimes u_j = I_n - P_j$；因此，John 条件可以写为 $I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j (I_n - P_j)$，这意味着

$$(n-1) I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j P_j, \tag{3.7}$$

因为 $\sum_{j=1}^{m} c_j = n$。假设 K 的内部包含原点，仅在左侧不等式中才需要。(3.6)中的右侧不等式由 Ball 在 [7], 中证明，而左侧不等式则由 Li 和 Huang 在 [98]中得到。

Loomis-Whitney 不等式的另一种推广也可以纳入同一框架，并已在 [19] 中得到证明。对于每个非空的 $\tau \subset [n]$，其中$[n] = \{1, \ldots, n\}$，我们令 $F_\tau = \text{span}\{e_j : j \in \tau\}$ 和 $E_\tau = F_\tau^{\perp}$。给定一个整数 $s \geq 1$，若（不一定互不相同的）集合 σ_1、.....、 $\sigma_r \subseteq [n]$ 构成 $[n]$ 的一个 s-均匀覆盖，即每个 $j \in [n]$ 恰好属于集合 σ_i 中的 s 个，那么我们称之为 $[n]$ 的 s-均匀覆盖。Bollob´as 和 Thomason 的均匀覆盖不等式指出，对于每个作为其内部闭包的 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K ，都有

$$|K|^s \leq \prod_{i=1}^{r} |P_{F_{\sigma_i}}(K)|. \tag{3.8}$$

注意，若 (σ_1, ..., σ_r) 是 $[n]$ 的一个 s-均匀覆盖，那么令 $F_i = F_{\sigma_i} = \text{span}(\{e_j : j \in \sigma_i\})$，$i \in [r]$，便有 $s\, I_n = \sum_{i=1}^{r} P_{F_i}$。因此，(3.8) 是 (3.4) 的直接推论。此外，(3.5) 表明，若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $0 \in \text{int}(K)$ 的凸体，那么

$$|K|^s \geq \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{r} |\sigma_i|! \, |K \cap F_i|. \tag{3.9}$$

要从 (3.5) 推导出 Meyer 不等式，我们使用特殊情形 $F_i = e_i^{\perp}$, $i \in [n]$，从而得到 $(n-1)$ $I_n = \sum_{i=1}^{n} P_{e_i^{\perp}}$。将 (3.9) 应用于 $s = n-1$ 和 $|\sigma_i| = \dim(F_i) = n-1$，可得

$$|K|^{n-1} \geq \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^{\perp}|$$

对于任意满足 $0 \in \text{int}(K)$ 的 K $\mathbb{R}^n$ 中的凸体。还不难看出，(3.6) 中左侧的不等式是 (3.5) 的推论。

局部 Loomis-Whitney 型不等式已在许多著作中得到研究，其中包括[54, 37], ; 文中证明，对于 K $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体以及一对正交向量 u、 $v \in S^{n-1}$，有

$$|K||P_{[u,v]^\perp}(K)| \leq \frac{2(n-1)}{n}|P_{u^\perp}(K)||P_{v^\perp}(K)|.$$

我们参见 [39] ，其中给出了这个不等式的一个简单证明及其若干等价表述。

在 [26] 中，人们得到了 Loomis-Whitney 不等式和均匀覆盖不等式的许多受限变体，它们根据较少数量的截面或投影的体积来估计凸体的体积。关于这方面的一些尖锐结果，另见 [118, 2, 39] 。

4. 函数的比较与切片不等式

4.1. 函数的比较问题。1956 年，Busemann 和 Petty [29]提出了如下问题：对于任意原点对称凸体 K、 $L \subset \mathbb{R}^n$，不等式

$$|K \cap \xi^\perp| \leq |L \cap \xi^\perp| \quad \text{for all } \xi \in S^{n-1} \tag{4.1}$$

是否蕴含 $|K| \leq |L|$。这一问题在 20 世纪 90 年代末通过一系列论文 [97, 5, 50, 23, 103, 109, 41, 42, 121, 74, 75, 122, 49] 得到了解决。当 $n \leq 4$ 时，答案是肯定的；当 $n \geq 5$. 时，答案是否定的。关于这一问题的解决过程，读者可参见 [76，第 3] 页或 [43，第 343] 页。

同构Busemann–Petty问题于 [106], 提出，探讨不等式 (4.1) 是否蕴含 $|K| \leq C\,|L|$，其中 C 是一个绝对常数。这个问题至今仍未解决，且等价于 Bourgain切片问题；详见下文。Klartag 和 Lehec 的一项最新结果 [71] 表明，该常数可以用维数的多对数函数估计。

文献 [125] 研究了将 Busemann-Petty问题中的体积推广为任意测度的情形。设 K 、 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体，且 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$. 上的局部可积非负函数。假设对每个 $\xi \in S^{n-1}$

$$\int_{K\cap\xi^\perp} f(x)dx \leq \int_{L\cap\xi^\perp} f(x)dx, \tag{4.2}$$

其中积分是关于 $\xi^\perp$. 上的勒贝格测度进行的。这是否必然意味着

$$\int_K f(x)dx \leq \int_L f(x)dx?$$

文献 [125] 证明，对于任意严格正函数 f，其结论与体积情形（其中 $f \equiv 1$）相同：当 $n \leq 4$ 时答案肯定，当 $n \geq 5$ 时答案否定。

鉴于这一结果，自然会再次提出同构问题。不等式 (4.2) 是否意味着

$$\int_K f(x)dx \leq s_n \int_L f(x)dx,$$

其中常数 s_n 不依赖于 f、K、L? [94] 证明了答案是肯定的，即 $s_n \le \sqrt{n}$.

[94] 中的论证基于一个更一般的估计。 [94]证明了不等式 (4.2) 蕴含

$$\int_K f(x)dx \le d_{BM}(K,\mathcal{I}_n)\int_L f(x)dx. \tag{4.3}$$

根据 John定理 [63] 以及类 $\mathcal{I}_n$ 包含椭球这一事实，我们有$d_{BM}(K,\mathcal{I}_n) \le \sqrt{n}$，这证明了函数的同构Busemann–Petty问题中的 $\sqrt{n}$ 估计。目前尚不清楚 $\sqrt{n}$ 估计是否最优。另一个尚未解决的问题是，能否将 (4.3) 中的 Banach–Mazur 距离替换为更小的外体积比距离 $d_{\mathrm{ovr}}(K,\mathcal{I}_n)$。

[90]证明了一个略有不同的估计，其中使用外体积比距离而非 Banach–Mazur 距离。具体而言，若 K, L 是 $\mathbb{R}^n$中的星体，且 f, g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数，并且满足 $\|g\|_\infty = g(0) = 1$，那么不等式

$$\int_{K\cap\xi^\perp} f(x)dx \le \int_{L\cap\xi^\perp} g(x)dx \quad \text{for all } \xi \in S^{n-1}$$

意味着

$$\int_K f(x)dx \le d_{\mathrm{ovr}}(K,\mathcal{I}_n)\frac{n}{n-1}|K|^{\frac{1}{n}}\left(\int_L g(x)dx\right)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{4.4}$$

4.2. 函数的切片问题。Bourgain切片问题 [20, 21]询问，是否存在一个常数 C，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathbb{R}^n$中的任意原点对称凸体 K，

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \le C\max_{\xi\in S^{n-1}} |K\cap\xi^\perp|. \tag{4.5}$$

换句话说， $\mathbb{R}^n$ 中每个体积为 1 的原点对称凸体 K 是否都有一个超平面截面，其（$n-1$）维体积大于某个绝对常数?

该问题仍未解决。Bourgain [22] 证明了 $C \le O(n^{1/4})$，但带有一个对数因子；该因子后来由 Klartag [68]去除。Chen [32] 证明了对于每个 $\epsilon > 0$， $C \le O(n^\epsilon)$；Klartag 和 Lehec [71] 建立了一个多重对数界$C \le O(\log^4 n)$。 [71] 的方法在 [62] 中得到略微改进，并证明了 $C \le O(\log^{2.2226} n)$。对于某些特殊类别的凸体，已知答案是肯定的。对于无条件凸体，这一点由 Bourgain 观察到；另见 [106, 65, 17]）；对于 L_p 的子空间单位球， [8, 64, 105], 中给出了证明；对于交体，见 [43, 中的定理 9.4；对于佐诺体，见 [106], ；对于具有有界体积比的体的对偶，见 [106], ；对于 Schatten类，见 [95], ；对于 k-交体，见 [88, 84]。关于该问题的其他部分结果包括
[6, 24, 33, 35, 57, 67, 70, 107, 36, 10]；详情请参阅该书 [27] 以及综述 [73, 44] 。

在 [78] 中，有人提出将切片问题推广到任意函数。是否存在一个只依赖于维数的常数 T_n，使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个原点对称凸体 K 以及每个非负可积函数 f

on K

$$\int_K f(x)dx \ \leq \ T_n \ |K|^{1/n} \max_{\xi\in S^{n-1}} \int_{K\cap\xi^\perp} f(x)dx \ ? \tag{4.6}$$

换句话说，任意定义在体积为一的凸体上的概率密度，其 Radon变换的上确界是否都有一个只依赖于维数的下界？当 $f \equiv 1$ 时，这一情形对应于 Bourgain切片问题。

在 [80, 81] 中已证明，这个问题的答案是肯定的，且 $T_n \leq O(\sqrt{n})$。基于 Blaschke-Petkantschin公式（见 [116]）的另一种证明见于 [31]。对于交体、无条件凸体、具有有界体积比 [83], 的凸体的对偶体，以及 n维子空间 L_p、 $p > 2$的单位球，(4.6)式中的不等式以绝对常数代替T_n 仍然成立，其中 $C = O(\sqrt{p})$, [87] （注意，具有$0 < p \leq 2$ 的 L_p 子空间的单位球是交体）。

这些结果可由 [83] 中证明的一个更一般的不等式推出。该不等式适用于 $\mathbb{R}^n$中的任意原点对称星体 K ，以及定义在 K上的任意可积非负函数 f ，

$$\int_K f(x)dx \leq 2 \ d_{\rm ovr}(K,\mathcal{I}_n)|K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi\in S^{n-1}} \int_{K\cap\xi^\perp} f(x)dx. \tag{4.7}$$

现在假设 K 是一个原点对称凸体。根据 John定理 [63], 我们得到 $d_{\rm ovr}(K,\mathcal{I}_n) \leq \sqrt{n}.$ 。此外，对于无条件凸体 [83] 以及 L_p、 $p > 2$[105, 87]的子空间的单位球, 该距离有绝对常数上界。显然，若 K 是交体，则该距离为 1。 [83] 中不等式 (4.7) 的证明基于星体截面的稳定性结果。不过，在第 4.3 节中，我们将给出一个更一般结果的证明，而该结果蕴含 (4.7)。

估计 $T_n \leq O(\sqrt{n})$ 是最优的。Klartag 和第二位署名作者在 [69] 中证明，存在一个位于 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体 M 以及定义在 M 上的概率密度 f ，使得

$$\int_{M\cap H} f \leq c\frac{\sqrt{\log\log n}}{\sqrt{n}}|M|^{-1/n},$$

对于 $\mathbb{R}^n$中的每个仿射超平面 H ，其中 c 是一个绝对常数。提供该例子的凸体 M 是一个 Gluskin型随机多胞体，由均匀分布在球面 S^{n-1}上的、经过适当缩放的随机向量 θ_j 生成；而密度 f 则是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准高斯测度与 θ_j的 Dirac质量之和的适当卷积的密度，并限制在 M上。随后，Klartag 和 Livshyts [72], 通过在先前构造中加入“随机舍入”技术，去除了对数项。因此，最终有 $T_n \geq c\ \sqrt{n}.$

另一种包含非中心截面的同类估计在[18]中得到证明。具体而言，存在一个绝对常数 C , 使得

$$\int_K f(x)\,dx \ \leq \ C\sqrt{p}\ d_{\rm ovr}(K,L_p^n)\ |K|^{1/n} \sup_H \int_{K\cap H} f(x)\,dx, \tag{4.8}$$

对于任意 $p \geq 1$、 $n \in \mathbb{N}$, 以及 $\mathbb{R}^n$ 中任意原点对称凸体 K ，其中 $d_{\rm ovr}(K,L_p^n)$ 表示 K 到由 $L_p([0,1])$ 中 n 维子空间的单位球组成的类 L_p^n 的外体积比距离，上确界取遍 $\mathbb{R}^n.$ 中的所有仿射超平面 H

4.3. 函数截面的商不等式。一个可同时推出 (4.4) 和 (4.7) 的一般不等式已在 [56] 中得到证明。设 $\mathbb{R}^n$ 中的 K 和 L 为星体，且 f、g 分别是定义在 K 和 L 上的非负连续函数，并且 $\|g\|_\infty = g(0) = 1$. 那么

$$\frac{\int_K f}{\left(\int_L g\right)^{\frac{n-1}{n}} |K|^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{n}{n-1} d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{I}_n) \max_{\xi \in S^{n-1}} \frac{\int_{K\cap\xi^\perp} f}{\int_{L\cap\xi^\perp} g}.$$

事实上，对于任意整数 $0 < k < n$，都有

$$\frac{\int_K f}{\left(\int_L g\right)^{\frac{n-k}{n}} |K|^{\frac{k}{n}}} \leq \frac{n}{n-k} \left(d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)\right)^k \max_{H \in G_{n,n-k}} \frac{\int_{K\cap H} f}{\int_{L\cap H} g}. \tag{4.9}$$

为证明 (4.9)，固定 $\delta > 0$，并令 $D \in \mathcal{BP}_k^n$ 为满足 $K \subset D$ 且

$$|D|^{\frac{1}{n}} \leq (1+\delta)\ d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)\ |K|^{\frac{1}{n}}. \tag{4.10}$$

记 ν_D 为定义 (2.5) 中与 L 对应的 $G_{n,n-k}$ 上的测度。令 ε 满足

$$\int_{K\cap H} f \leq \varepsilon \int_{L\cap H} g, \qquad \text{for all } H \in G_{n,n-k}.$$

由 (2.4)，可得

$$\mathcal{R}_{n-k}\left(\int_0^{\|\cdot\|_K^{-1}} r^{n-k-1} f(r\,\cdot)\ dr\right)(H) \leq \varepsilon\ \mathcal{R}_{n-k}\left(\int_0^{\|\cdot\|_L^{-1}} r^{n-k-1} g(r\,\cdot)\ dr\right)(H)$$

对每个 $H \in G_{n,n-k}$. 都成立。将后一个不等式两边关于 ν_D 积分，并利用定义 (2.5)，得到

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \|x\|_D^{-k} \left(\int_0^{\|x\|_K^{-1}} r^{n-k-1} f(rx)\ dr\right) dx \\ \leq \varepsilon \int_{S^{n-1}} \|x\|_D^{-k} \left(\int_0^{\|x\|_L^{-1}} r^{n-k-1} g(rx)\ dr\right) dx,\end{aligned} \tag{4.11}$$

这等价于

$$\int_K \|x\|_D^{-k} f(x)dx \leq \varepsilon \int_L \|x\|_D^{-k} g(x)dx. \tag{4.12}$$

由于 $K \subset D$，我们有 $1 \geq \|x\|_K \geq \|x\|_D$，对每个 $x \in K$. 均成立。因此，

$$\int_K \|x\|_D^{-k} f(x)dx \geq \int_K \|x\|_K^{-k} f(x)dx \geq \int_K f.$$

另一方面，我们可以应用 [106, 引理 2.1]。事实上，回想一下，$g(0) = \|g\|_\infty = 1$，函数 $\chi_L(x)g(x)$[106, 也具有同样的性质。此外，在假设该体为星形的情况下，[106, 引理 2.1], 的证明同样适用。因此，我们得到

$$\left(\frac{\int_L \|x\|_D^{-k} g(x)dx}{\int_D \|x\|_D^{-k} dx}\right)^{1/(n-k)} \leq \left(\frac{\int_L g(x)dx}{\int_D dx}\right)^{1/n}.$$

由于 $\int_D \|x\|_D^{-k} dx = \frac{n}{n-k}|D|$，我们可以将 (4.12) 的右端估计为

$$\int_L \|x\|_D^{-k} g(x)dx \le \varepsilon \frac{n}{n-k} \left(\int_L g\right)^{\frac{n-k}{n}} |D|^{\frac{k}{n}}.$$

应用 (4.10) 并令 δ 趋于零，可知后一个不等式与 (4.12) 结合可推出

$$\int_K f \le \varepsilon \frac{n}{\frac{\int_{K\cap H} f}{\int_{L\cap H} g}} (d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n))^k \left(\int_L g\right)^{\frac{n-k}{n}} |K|^{\frac{k}{n}}.$$

现在令 $\varepsilon = \max_{H\in G_{n,\ n-k}} \frac{\int_{K\cap H} f}{\int_{L\cap H} g}$ 即可得到结论。

注意 (4.9) 的以下直接推论。若再假设

$$\int_{K\cap H} f \le \int_{L\cap H} g$$

对所有 $H \in G_{n,\ n-k}$ 均成立，则可得到 (4.4) 的推广：

$$\int_K f \le \frac{n}{n-k} (d_{\mathrm{ovr}}(K, BP_k^n))^k |K|^{\frac{k}{n}} \left(\int_L g\right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

若取 $L = B_2^n$ 和 $g \equiv 1$，则得到切片不等式

$$\int_K f \le \frac{n}{n-k} (d_{\mathrm{ovr}}(K, BP_k^n))^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_H \int_{K\cap H} f,$$

它推广了 (4.7)。取 $K = L$ 和 $g \equiv 1$，可得到函数切片不等式的另一种形式：

$$\frac{\int_K f}{|K|} \le \frac{n}{n-k} (d_{\mathrm{ovr}}(K, BP_k^n))^k \max_H \frac{\int_{K\cap H} f}{|K\cap H|}.$$

5. Projections of convex bodies

5.1. Shephard问题。Shephard问题 [117] 是 Busemann-Petty 问题的“对偶”问题：设 $\mathbb{R}^n$ 中的两个原点对称凸体 K 和 L 满足

$$|P_{\xi^\perp}(K)| \le |P_{\xi^\perp}(L)| \tag{5.1}$$

对每个 $\xi \in S^{n-1}$都成立。能否推出 $|K| \le |L|$?

当 $n = 2$ 时，答案是肯定的；但 Shephard提出问题后不久，人们就证明了，对于所有 $n \ge 3$，答案是否定的。Petty 在 [110] 独立完成了这一证明，并在 $\mathbb{R}^3$给出了一个明确的反例；Schneider 也在 [114]独立证明了这一点，适用于所有 $n \ge 3$。特别是，Schneider 在 [114] 证明，如果体积较大的投影所对应的那个体 L 是投影体，那么答案就是肯定的；关于这些结果的调和分析证明，请参见[91] 。有了这些反例之后，我们或许可以尝试放宽问题，询问使下述结论成立的最小常数 C_n （或该常数 C_n 随 $n \to \infty$变化的增长阶）：若 K、L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体，且 $|P_{\xi^\perp}(K)| \le |P_{\xi^\perp}(L)|$ 对所有 $\xi \in S^{n-1}$ 均成立，那么 $|K| \le C_n|L|$。这样的常数 C_n 确实存在；基于 John定理的一个简单论证表明，$C_n \le c\sqrt{n}$，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。另一方面，K. Ball 在 [7] 证明，这个简单估计是最优的：有 $C_n \approx \sqrt{n}$。

低维 Shephard问题如下。设 $1 \leq k \leq n-1$，令 $S_{n,\ k}$ 为满足以下性质的最小常数 $S > 0$：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一对凸体 K 和 L，若对所有$F \in G_{n,\ n-k}$均有 $|P_F(K)| \leq |P_F(L)|$，则有 $|K|^{\frac{1}{n}} \leq S\,|L|^{\frac{1}{n}}$。是否存在一个绝对常数$C > 0$，使得对所有 n 和 k，均有 $S_{n,\ k} \leq C$？

Goodey 和 Zhang [58] 证明了$S_{n,\ k} > 1$ 如果 $n - k > 1$. 关于 $S_{n,\ k}$ 的一般估计见 [51]：若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体，满足$|P_F(K)| \leq |P_F(L)|$，则对每个 $F \in G_{n,\ n-k}$

$$|K|^{\frac{1}{n}} \leq c_1\sqrt{\frac{n}{n-k}}\log\left(\frac{en}{n-k}\right)|L|^{\frac{1}{n}},$$

其中 $c_1 > 0$ 是一个绝对常数。由此可知，如果 $\frac{n}{n-k}$ 有界，那么 $S_{n,\ k}$ 也由一个绝对常数所界定。此外，在相同假设下，利用[108] 中的结果，可以证明一个关于 n呈对数关系、且对所有 k都成立的一般估计：

$$|K|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_1\,\min w(\tilde{L})}{\sqrt{n}}\,|L|^{\frac{1}{n}} \leq c_2(\log n)|L|^{\frac{1}{n}},$$

其中 c_1、$c_2 > 0$ 是绝对常数，最小值取遍 L 的所有体积为 1 的线性像 $\tilde{L}$。第二个不等式由以下事实得出：如果 L是 $\mathbb{R}^n$ 中体积为 1、且处于最小平均宽度位置的凸体（即对于所有 $T \in SL(n)$，都有 $w(L) \leq w(T(L))$），那么对于某个绝对常数 $c > 0$，有 $w(L) \leq c\sqrt{n}\,(\log\ n)$。这是 Lewis、Figiel、Tomczak-Jaegermann 和 Pisier 的著名结果的推论（完整讨论见 [3, 第 6] 章）。

将 Shephard问题推广到更一般测度情形，最早由 Livshyts [99] 研究，他考察了 p-凹且 $1/p$-齐次的测度。Kryvonos 和 Langharst [96] 进一步拓展了 [99], 的结果，并研究了该问题的同构情形。

5.2. Busemann-Petty 和 Shephard问题的一个变体。V. Milman 提出了 Busemann-Petty 和 Shephard问题的一个变体：假设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体，并且满足

$$|P_{\xi^\perp}(K)| \leq |L \cap \xi^\perp| \tag{5.2}$$

对所有 $\xi \in S^{n-1}$均成立。能否推出 $|K| \leq |L|$? 前两位作者在 [51]中对这个问题给出了肯定的回答。该问题的低维类比也有肯定答案，而且还可以去掉对称性假设，甚至可以去掉关于 L凸性的假设。更具体地说，若 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体，且 L是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧子集，并且对某个 $1 \leq k \leq n-1$,

$$|P_F(K)| \leq |L \cap F|$$

对于所有 $F \in G_{n,\ n-k}$，则

$$|K| \leq |L|.$$

证明利用了 Busemann-Straus/Grinberg 不等式（见 [30], [59]）

$$\int_{G_{n,k}} |K \cap E|^n d\nu_{n,k}(E) \leq \frac{\omega_k^n}{\omega_n^k}\,|K|^k. \tag{5.3}$$

该不等式对每个有界博雷尔集 K在 $\mathbb{R}^n$和 $1 \le k \le n-1$ 中都成立；经典亚历山德罗夫不等式可表述如下：若 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体，则序列

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \tag{5.4}$$

关于 k 是递减的。这是亚历山德罗夫-芬切尔不等式的推论（参见 Burago 和 Zalgaller [28] 以及 Schneider [115] 的著作）。特别地，对每个$1 \le k \le n-1$，我们都有

$$\left(\frac{|K|}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\frac{1}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,n-k}(F) \right)^{\frac{1}{n-k}} \le w(K). \tag{5.5}$$

利用这些工具，可以按如下方式进行：设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体， L 是 $\mathbb{R}^n$的一个紧子集。假设对某个 $1 \le k \le n-1$，有 $|P_F(K)| \le |L \cap F|$对所有$F \in G_{n,\ n-k}$成立。由（5.5）可得

$$\left(\frac{|K|}{\omega_n} \right)^{\frac{n-k}{n}} \le \frac{1}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,n-k}(F).$$

我们的假设、H¨older不等式以及 Busemann-Straus/Grinberg 不等式给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,n-k}(F) &\le \frac{1}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} |L \cap F| \, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &\le \frac{1}{\omega_{n-k}} \left(\int_{G_{n,n-k}} |L \cap F|^n \, d\nu_{n,n-k}(F) \right)^{1/n} \\ &\le \frac{1}{\omega_{n-k}} \frac{\omega_{n-k}}{\omega_n^{\frac{n-k}{n}}} |L|^{\frac{n-k}{n}} = \left(\frac{|L|}{\omega_n} \right)^{\frac{n-k}{n}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

因此， $|K| \le |L|$。

Hosle [60] 证明了，若条件（5.2）反向成立，则 $|L| \le \sqrt{n}|K|$.他还提出了一种将 Milman问题的解推广到对数凹测度、 p-凹测度以及具有 $1/p$-齐次密度的测度（以测度取代体积）的方法。

5.3. 投影的表面积。第二位署名作者得到了若干关于投影体的超平面投影表面积的“切片型”不等式。在 [79] 中，他证明了若 Z 是 $\mathbb{R}^n$中的一个投影体，则

$$|Z|^{\frac{1}{n}} \min_{\xi \in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(Z)) \le b_n S(Z), \tag{5.7}$$

其中 $S(A)$ 表示 A 的表面积，并且

$$b_n = (n-1)\omega_{n-1} / (n\omega_n^{\frac{n-1}{n}}) \approx 1.$$

这个不等式是尖锐的；当 $Z = B_2^n$ 时取等号。反过来，在 [82] he 中，他证明了：如果 Z 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个投影体，且它是各向同性位置下某个体的放大体（例如参见 [27] ），那么

$$|Z|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(Z)) \geq c(\log n)^{-2} S(Z), \tag{5.8}$$

其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。

关于任意凸体 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面投影表面积的类似不等式，已在 [55] 中得到研究。下文中，我们用 ∂_K 表示 K 的最小表面积参数，其定义为

$$\partial_K := \min\left\{ S(T(K))/|T(K)|^{\frac{n-1}{n}} : T \in GL(n) \right\}. \tag{5.9}$$

由等周不等式和 K. Ball 的逆等周不等式 [9] 可知，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K ，都有 $c_1\sqrt{n} \leq \partial_K \leq c_2 n$ ，其中 c_1、$c_2 > 0$ 是绝对常数。在 [55] 中证明了，存在一个绝对常数 $c_1 > 0$ ，使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K ，

$$|K|^{\frac{1}{n}} \min_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \leq \frac{2b_n\partial_K}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}} S(K) \leq \frac{c_1\partial_K}{\sqrt{n}} S(K). \tag{5.10}$$

这个不等式是（5.7）的推广，例如对于欧几里得单位球，该不等式是紧的。由于对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K ，都有 $c_1\partial_K/\sqrt{n} \leq c\sqrt{n}$ ，我们得到一般上界

$$|K|^{\frac{1}{n}} \min_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \leq c\sqrt{n}\, S(K). \tag{5.11}$$

The 证明基于 [54] 中的下一个结果。若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，则

$$\frac{S(P_{\xi^\perp}(K))}{|P_{\xi^\perp}(K)|} \leq \frac{2(n-1)}{n}\frac{S(K)}{|K|} \tag{5.12}$$

对每个 $\xi \in S^{n-1}$ 都成立。因此

$$|K| \min_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \leq \frac{2(n-1)}{n} S(K) \min_{\xi\in S^{n-1}} |P_{\xi^\perp}(K)|.$$

接下来，我们注意到

$$\min_{\xi\in S^{n-1}} |P_{\xi^\perp}(K)| = \min_{\xi\in S^{n-1}} h_{\Pi K}(\xi) = r(\Pi K),$$

whe其中 $r(A)$ 是 A 的内半径，即满足 $rB_2^n \subseteq A$ 的最大 $r > 0$ 。我们记 e

$$r(\Pi K) \leq \left(\frac{|\Pi K|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\omega_{n-1}\partial_K}{n\omega_n} |K|^{\frac{n-1}{n}},$$

whe其中 $|\Pi K|$ 的上界估计见 [53]。结合以上结果，我们得到 t

$$|K| \min_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \leq \frac{2(n-1)\omega_{n-1}\partial_K}{n^2\omega_n} S(K)\, |K|^{\frac{n-1}{n}}.$$

不等式（5.8）也可以推广，首先有以下事实：若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，则

$$\int_{S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K))\, d\sigma(\xi) \geq c\, S(K)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

该不等式意味着，若 K 处于某种“经典位置”（关于这些“经典位置”的讨论，包括最小表面积、最小平均宽度、各向同性位置、John 位置或 L¨owner 位置，请参见 [3, 106] ），则

$$|K|^{\frac{1}{n}} \int_{S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K))\, d\sigma(\xi) \geq c\, S(K), \tag{5.13}$$

其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。特别地，如果 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体，并且处于某种“经典位置”，那么

$$|K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \geq c\, S(K).$$

回顾一下，(5.8) 中出现了一个 $(\log n)^2$ 项。(5.13) 中的估计更强；对于这类界，无需假设 K 是一个投影体。事实上，只要满足

$$S(K)^{\frac{1}{n-1}} \leq c|K|^{\frac{1}{n}}$$

其中 $c > 0$为一个绝对常数。这是一个温和的条件，不仅经典位置满足它， K的所有合理位置也都满足它。

对于凸体 K的曲率积分 $V_{n-k}(K) = V((K, n–k), (B_2^n, k))$ 以及其超平面投影所对应的曲率积分，也可以研究同样的问题。证明采用了与表面积情形相同的工具。除此之外，主要还需要将 (5.12) 推广到任意维数的子空间以及任意阶的曲率积分（该推广在 [37]中得到证明）：如果 K 是$\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，并且 $0 \leq p \leq k \leq n$，那么，对于每个 $F \in G_{n,\ k}$，

$$\frac{V_{n-p}(K)}{|K|} \geq \frac{1}{\binom{n-k+p}{n-k}} \frac{V_{k-p}(P_F(K))}{|P_F(K)|}. \tag{5.14}$$

这个不等式可以进一步推广：对于任意给定的 $1 \leq k \leq n-1$，可以将凸体的表面积 K 与其低维投影的最小、平均或最大表面积进行比较 $P_F(K)$，$F \in G_{n,\ k}$。关于与 (5.14) 相关的不等式的进一步研究，参见 [39, 38] 。

6. Surface area

关于能否将切片不等式从体积推广到表面积，问题可以表述如下：是否存在一个常数 α_n，它依赖于维数 n （也可能不依赖），使得

$$S(K) \leq \alpha_n |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(K \cap \xi^\perp) \tag{6.1}$$

对于 $\mathbb{R}^n$中的每个原点对称凸体 K，上述结论是否成立？也可以提出低维切片问题；对于任意 $2 \leq k \leq n-1$，是否存在一个常数 $\alpha_{n,\ k}$，使得

$$S(K) \leq \alpha_{n,k}^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_{H \in G_{n,n-k}} S(K \cap H) \tag{6.2}$$

对每个原点对称凸体 K，在 $\mathbb{R}^n$ 中均成立。此外，可以用任何其他曲率积分替代表面积，并提出相应的问题。

文献 [25] 给出了否定的答案。对于任意 $n \geq 2$ 和任意 $\alpha > 0$，均可找到一个原点对称凸体 K，使其属于 $\mathbb{R}^n$，并且

$$S(K) > \alpha |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K)) \geq \alpha |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(K \cap \xi^\perp).$$

In f可证明，可以构造一个原点对称椭球 $\mathcal{E}$，使得 at

$$S(\mathcal{E}) > \alpha |\mathcal{E}|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(\mathcal{E})).$$

为此，对于给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的椭球 $\mathcal{E}$，需要知道 $\mathcal{E}$ 的具有最大表面积的 $(n-1)$ 维截面。这是一个自然且本身也值得研究的问题。文献 [25] 证明，若 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称椭球，且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 是其半轴的长度，e_1、e_2、...、e_n 是对应的方向，则

$$S(\mathcal{E} \cap \xi^\perp) \leq S(P_{\xi^\perp}(\mathcal{E})) \leq S(\mathcal{E} \cap e_1^\perp) \tag{6.3}$$

对每个 $\xi \in S^{n-1}$ 都成立。随后，将这一结果与 Rivin 的椭球表面积公式 [111] 结合：若 $\mathcal{E}$ 是上述椭球，则

$$S(\mathcal{E}) = n\,|\mathcal{E}| \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{a_i^2} \right)^{1/2} d\sigma(\xi). \tag{6.4}$$

假设存在一个常数 $\alpha_n > 0$，使得椭球满足以下不等式：

$$S(\mathcal{E}) \leq \alpha_n |\mathcal{E}|^{1/n} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(\mathcal{E} \cap \xi^\perp). \tag{6.5}$$

于是我们有

$$\max_{\xi \in S^{n-1}} S(\mathcal{E} \cap \xi^\perp) = S(\mathcal{E} \cap e_1^\perp) = (n-1)\,|\mathcal{E} \cap e_1^\perp| \int_{S^{n-2}} \Big(\sum_{i=2}^n \frac{\xi_i^2}{a_i^2} \Big)^{1/2} d\sigma(\xi)$$

并且不妨假设 $\prod_{i=1}^n a_i = 1$，将 (6.5) 重写为

$$n\omega_n \cdot \frac{1}{d_n} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n \frac{g_i^2}{a_i^2} \Big)^{1/2} \Big] \leq \alpha_n \omega_n^{1/n} \cdot (n-1)\omega_{n-1} \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{d_{n-1}} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=2}^n \frac{g_i^2}{a_i^2} \Big)^{1/2} \Big],$$

其中 $d_n \sim \sqrt{n}$。经过一些计算，我们得到

$$\alpha_n \geq c \left(\frac{1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1^2}{a_i^2}}{\sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i^2}} \right)^{1/2}$$

其中某个绝对常数为 $c > 0$。取 $a_2 = \cdots = a_n = r$ 和 $a_1 = r^{-(n-1)}$，我们得到

$$\left(\frac{1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1^2}{a_i^2}}{\sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 + \frac{n-1}{r^{2n}}}{\frac{n-1}{r^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{r^{2n-2}} + \frac{r^2}{n-1} \right)^{1/2} \to \infty$$

如 $r \to \infty$。因此，我们得出了矛盾。

事实上，可以证明 (6.3) 的一个更一般的类似结论；对于任意 k–维子空间 H 以及任意 $0 \le j \le k-1$，都有

$$W_j(\mathcal{E} \cap F_k) \le W_j(\mathcal{E} \cap H) \le W_j(\mathcal{E} \cap E_k)$$

and

$$W_j(P_{F_k}(\mathcal{E})) \le W_j(P_H(\mathcal{E})) \le W_j(P_{E_k}(\mathcal{E})),$$

其中 $F_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$、$E_k = \text{span}\{e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$，且 $W_j(A) = V((A, k-j), (B_2^k, k-j))$ 是 k维凸体 A 的第 j 个曲率积分。这些结果推广了关于椭球的 k 维截面和投影的最大体积与最小体积的一个已知事实。由此可以得到关于凸体的截面和投影的所有曲率积分的一个更一般的否定结果。

在 [25] 中，针对这一问题的变体陈述了一些正面结果，并在 [101]中得到了加强。例如，下面是不等式：若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体，则对于任意 $0 \le j \le n-k-1 \le n-1$，有

$$\alpha_{n,k,j} \binom{n}{k}^{-1} \frac{W_j(K)}{|K|} \le \int_{G_{n,n-k}} \frac{W_j(K \cap F)}{|K \cap F|} d\nu_{n,n-k}(F) \le \alpha_{n,k,j} \binom{n-j}{k} \frac{W_j(K)}{|K|}$$

其中 $\alpha_{n,\ k,\ j}$ 是仅依赖于 n、k、j 的常数。

Koldobsky 和 K¨onig 于 [85]研究了 Busemann-Petty问题关于表面积的类似问题：若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体，满足对所有 $\xi \in S^{n-1}$ 都有$S(K \cap \xi^{\perp}) \le S(L \cap \xi^{\perp})$，那么是否可以推出 $S(K) \le S(L)$? 他们回答了 Pelczynski 提出的问题，证明了立方体 $B_\infty^n = [-1,1]^n$ 的具有最大表面积的中心（$n-1$维）截面，正是对应于单位向量 $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, \dots, 0)$ 的截面（与体积的情形完全相同），即

$$\max_{\xi \in S^{n-1}} S(B_\infty^n \cap \xi^{\perp}) = S(B_\infty^n \cap \xi_0^{\perp}) = 2((n-2)\sqrt{2}+1).$$

与适当半径的 Ball 进行比较可知，在维数为 $n \ge 14$ 时，表面积的 Busemann-Petty 问题的答案是否定的。

自然会想到，这个问题的同构版本是否有肯定答案。假设存在常数 γ_n，使得若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的对称凸体，且满足

$$S(K \cap \xi^{\perp}) \le S(L \cap \xi^{\perp})$$

对所有 $\xi \in S^{n-1}$ 均成立，则 $S(K) \le \gamma_n S(L)$；由此可知，存在某个常数 $c(n)$，使得

$$S(K) \le c(n) S(K)^{\frac{1}{n-1}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(K \cap \xi^{\perp}) \tag{6.6}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K 均成立。文献 [25] 已证明，这类不等式一般成立。若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，则

$$S(K) \le A_n S(K)^{\frac{1}{n-1}} \max_{\xi \in S^{n-1}} S(K \cap \xi^{\perp})$$

其中，$A_n > 0$ 是一个仅取决于 n的常数。首先针对任意椭球证明了该结果，然后利用John定理将其推广到任意凸体。在 [101] 中，给出了一个更一般结果的直接证明，表明对于任意 k 和 j，不等式（6.6）均成立，其中 k 是子空间的余维，j 是

我们所考虑的曲率积分的阶数：设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个原点对称凸体。对于每个 $0 \leq j \leq n-k-1 \leq n-1$，都有

$$W_j(K)^{n-k-j} \leq \alpha_{n,k,j} \max_{F \in G_{n,n-k}} W_j(K \cap F)^{n-j},$$

其中 $\alpha_{n,\ k,\ j} > 0$ 是一个仅依赖于 n、k 和 j 的常数。不等式的证明利用了 Blaschke-Petkantschin公式，以及 Dann、Paouris 和 Pivovarov 在 [34] 中得到的一些积分几何结果。

7. Volume difference inequalities

体积差不等式估计了根据一个凸体的截面和投影面积计算其体积时产生的误差。从截面的情形开始，令 $\gamma_{n,\ k}$ 为具有如下性质的最小常数 $\gamma > 0$：

$$|K|^{\frac{n-k}{n}} - |L|^{\frac{n-k}{n}} \leq \gamma^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \big(|K \cap F| - |L \cap F|\big) \tag{7.1}$$

对于所有 $1 \leq k < n$ 以及所有满足 $L \subset K.$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体 K 和 L，问题是是否存在一个绝对常数 C，使得 $\sup_{n,\ k} \gamma_{n,\ k} \leq C$。注意，如果不对 K 和 L 作额外假设，不等式（7.1）不可能对任何 $\gamma > 0$ 成立，因为存在反例否定了 Busemann-Petty问题。还要注意，如果在（7.1）中令 $L = \beta B_2^n$ 为 $\beta \to 0$，我们就得到切片不等式。

在 [77] 中证明了对于 $k = 1$，在 [86] 中证明了对于 $1 < k < n$，若 $K \in \mathcal{BP}_k^n$ 且 L是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意原点对称星体，则 (7.1) 可写为

$$|K|^{\frac{n-k}{n}} - |L|^{\frac{n-k}{n}} \leq c_{n,k}^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \big(|K \cap F| - |L \cap F|\big), \tag{7.2}$$

其中 $c_{n,\ k}^k = \omega_n^{\frac{k}{n}} / \omega_{n-k}$。可以验证，对所有 $n, k.$，$c_{n,\ k} \in \big(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\big)$

在 [52], 中，不等式 (7.2) 被推广到任意原点对称星体。令 $1 \leq k < n$，并设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称星体，使得$L \subset K.$ 则

$$|K|^{\frac{n-k}{n}} - |L|^{\frac{n-k}{n}} \leq c_{n,k}^k d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n) \max_{F \in G_{n,n-k}} \big(|K \cap F| - |L \cap F|\big). \tag{7.3}$$

外体积比距离在 [89]中得到了估计。若 K 是 $\mathbb{R}^n$中的原点对称凸体，则

$$d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n) \leq c\sqrt{n/k}\,\big(\log(en/k)\big)^{\frac{3}{2}}, \tag{7.4}$$

其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。因此，(7.3) 对比例维数的截面给出了该问题的肯定答案。

体积差不等式 (7.3) 可以推广到以任意测度代替体积的情形，如下所示。设 f 是 $\mathbb{R}^n.$ 上一个有界的非负可测函数。令 μ 为密度为 f 的测度，使得对于 $\mathbb{R}^n.$ 中的每个博雷尔集 B，都有 $\mu(B) = \int_B f$。此外，对于每个 $F \in G_{n,\ n-k}$，记 $\mu(B \cap F) = \int_{B \cap F} f$，其中我们将 f 在 F 上的限制对 $F.$ 上的勒贝格测度积分。对于任意 $1 \leq k < n$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $L \subset K$ 的任意一对原点对称星体 K 和 L，以及任何具有偶非负连续密度的测度 μ，

$$\mu(K) - \mu(L) \leq \frac{n}{n-k} c_{n,k}^k\, |K|^{\frac{k}{n}}\, d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n) \max_{F \in G_{n,n-k}} \big(\mu(K \cap F) - \mu(L \cap F)\big). \tag{7.5}$$

反过来，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意具有有界密度 g 的测度，(7.6)

$$\big(\mu(K)-\mu(L)\big)^{\frac{n-k}{n}} \geq \frac{c_{n,k}^k}{\|g\|_\infty^{\frac{k}{n}}} \left(\int_{G_{n,n-k}} \big(\mu(K\cap F)-\mu(L\cap F)\big)^{\frac{n}{n-k}}\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

特别地，

$$\big(\mu(K)-\mu(L)\big)^{\frac{n-k}{n}} \geq c_{n,k}^k \frac{1}{\|g\|_\infty^{\frac{k}{n}}} \min_{F\in G_{n,n-k}} \big(\mu(K\cap F)-\mu(L\cap F)\big). \tag{7.7}$$

对于投影也有相应的结果。令 β_n 为满足下述条件的最小常数:

$$\beta\big(|L|^{\frac{n-1}{n}}-|K|^{\frac{n-1}{n}}\big) \geq \min_{\xi\in S^{n-1}} \big(|P_{\xi^\perp}(L)|-|P_{\xi^\perp}(K)|\big) \tag{7.8}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中所有曲率函数 f_K 和 f_L 存在且满足 $f_K(\xi)\leq f_L(\xi)$ 的原点对称凸体 K、L，对所有 $\xi\in S^{n-1}$ 均成立。于是，$\beta_n\simeq\sqrt{n}$，即存在绝对常数 a、$b>0$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$

$$a\sqrt{n}\leq\beta_n\leq b\sqrt{n}.$$

请注意，如果不对 K 和 L 附加额外条件，则由于 Shephard问题的反例，(7.8) 一般不可能对任何 $\beta>0$ 成立。

文献 [77, 79] 证明了，如果 L 是投影体，而 K 是原点对称凸体，则

$$|L|^{\frac{n-1}{n}}-|K|^{\frac{n-1}{n}} \geq c_{n,1} \min_{\xi\in S^{n-1}} \big(|P_{\xi^\perp}(L)|-|P_{\xi^\perp}(K)|\big). \tag{7.9}$$

对于 (7.9) 不需要条件 $f_K\leq f_L$，因为我们假设 L 是投影体。在文献 [52] 中，该不等式被推广到任意原点对称凸体，具体如下。设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点对称凸体，且它们的曲率函数存在并满足 $f_K(\xi)\leq f_L(\xi)$ 对所有 $\xi\in S^{n-1}$. 均成立。则

$$d_{\mathrm{vr}}(L,\Pi)\big(|L|^{\frac{n-1}{n}}-|K|^{\frac{n-1}{n}}\big) \geq c_{n,1} \min_{\xi\in S^{n-1}} \big(|P_{\xi^\perp}(L)|-|P_{\xi^\perp}(K)|\big). \tag{7.10}$$

再次利用 K. Ball的体积比估计，对于任意凸体 K in $\mathbb{R}^n$, $d_{\mathrm{vr}}(K,\Pi)\leq\sqrt{n}$. 事实上，这个距离可以达到 $\sqrt{n}$ 量级，误差至多为一个绝对常数因子。

关于体积差不等式的更多内容，参见 [92]。

8. Discrete versions

令 $\mathbb{Z}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$中的标准整数格。给定一个原点对称凸体 K，定义 $\#K=\mathrm{card}(K\cap\mathbb{Z}^n)$，即 $\mathbb{Z}^n$ 在 K中的点数。Loomis-Whitney 不等式 (3.1) 的原始证明基于一种离散化技术，即考虑一个集合 K，它可分解为若干个互不相交且大小相等的立方体之并，并用组合语言重新表述这个问题。特别地，这个组合版本蕴含（实际上等价于）以下离散变体

$$\#K\leq\left(\prod_{i=1}^n \#(P_{e_i^\perp}(K))\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{8.1}$$

Loomis-Whitney 不等式。

有许多非常有趣的层析问题与凸体投影中的整数点数量有关；参见 [45, 113, 124]。我们还注意到，近年来，人们曾多次尝试将经典凸性中的问题和事实推广到包括离散几何在内的更一般的情形。本文将重点讨论有关凸体截面的不等式。关于凸体截面相对于整数格的性质，离散断层成像领域已经进行了广泛研究，参见 [45, 46, 47, 48, 113], ，其中证明了许多有趣的新性质，并提出了一系列令人振奋的开放性问题。值得注意的是，经过转化后，许多问题变得相当非平凡且违反直觉，其答案也可能与连续情形中的答案大不相同。此外，找出凸集的几何性质与其中所含整数点数量之间的关系，一直是一项非平凡的任务。例如，从 Khinchin 平坦性定理的发展历程中便可看出这一点（参见 [11, 12, 13, 66]）。

大约在2013年，第二位署名作者提出，是否可能给出不等式（4.6）的一个离散类比：

问题1. 是否存在一个常数 d_n ，使得

$$\#K \leq d_n \max_{\xi \in S^{n-1}} \left(\#(K \cap \xi^{\perp})\right) |K|^{\frac{1}{n}},$$

对于所有包含 n 个线性无关格点的原点对称凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ ，上述结论是否成立?

这里需要指出的是，我们要求 K 包含 n 个线性无关格点，以排除凸体的退化情形（例如形如 $[-\delta, \delta]^{n-1} \times [-20, 20]$ 的长方体）：其最大截面包含该凸体内的所有格点，但通过取足够小的 $\delta > 0$，其体积可以任意接近 0。

因此，用于解决这一问题的方法与前面各节所述的方法截然不同，而且似乎需要借助数论几何的工具。我们从最简单的情形入手，证明常数 d_2 存在，也就是说，它与原点对称平面凸体 K 无关。我们将用到两个经典结论（例如参见 [120]）：

闵可夫斯基第一定理：设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个原点对称凸体，满足 $|K| \geq 2^n$。那么 K 至少包含 $\mathbb{Z}^n$ 的一个非零元素。
皮克定理：设 P 是一个整格二维凸多边形。那么 $|P| = I + \frac{1}{2}B - 1$，其中 I 是 P 内部格点的数量，而 B 是其边界上格点的数量。这里，如果一个多边形可以表示为其格点的凸包，就称它为整格多边形。

沿用 [1], ，考虑一个中心对称平面凸体 K ，并令 $s = \sqrt{|K|/4}$。根据闵可夫斯基第一定理，存在一个非零向量 $u \in \mathbb{Z}^2 \cap \frac{1}{s}K$。那么 $su \in K$ ，并且

$$\#\left(L_u \cap K\right) \geq 2\lfloor s \rfloor + 1,$$

其中， $\lfloor s \rfloor$ 是 s 的整数部分， L_u 是经过 u 和原点的直线。接下来，考虑 K内部格点的凸包 P。由于 P是一个整格二维凸多边形，根据皮克定理可得

$$|P| = I + \frac{1}{2}B - 1 \geq \frac{I + B}{2} - \frac{1}{2},$$

利用 $I \geq 1$，因此，

$$\#P = I + B \leq 2|P| + 1 \leq \frac{5}{2}|P|,$$

因为中心对称整数凸多边形的面积至少为 2。因此可得

$$\begin{aligned}\#K = \#P &\leq \frac{5}{2}|P| \leq \frac{5}{2}|K| = \frac{5}{2}(2s)\,|K|^{\frac{1}{2}} < 4\,(2\lfloor s\rfloor + 1)\,|K|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4 \max_{\xi \in S^1} \#(K \cap \xi^{\perp})\,|K|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

遗憾的是，以上方法似乎无法直接推广到更高维情形。这部分是由于维数高于一的超平面截面更加难以研究，但也因为缺乏皮克公式的直接类似物。还必须注意的是，一般而言，常数 d_n 取决于 n。事实上，对于交叉多胞体 $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$ 我们有 $\#B_1^n = 2n+1$，并且 $\max\{\#(B_1^n \cap \xi^{\perp}) : \xi \in S^{n-1}\} = \#(B_1^n \cap e_1^{\perp}) = 2n-1$，以及 $|B_1^n|^{1/n} \sim n^{-1}$。因此，$d_n$ 必须大于 cn。利用无条件体的特殊结构，文献 [1] 证明，对于这类凸体，d_n 的量级为 n。

另一个能说明这种情形的例子是经典的布伦原理（例如参见 [43]），它告诉我们，对于原点对称凸体 K，有

$$|K \cap \xi^{\perp}| \geq |K \cap (t\xi + \xi^{\perp})|, \text{ for all } \xi \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}.$$

如果用整数点的个数代替体积，上述结论便不再成立。事实上，设 $Q = [0,1]^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$，并设 K 为 $Q + e_n$ 与 $-Q - e_n$ 的凸包。那么 $\#(K \cap e_n^{\perp}) = 1$，但 $\#(K \cap (e_n + e_n^{\perp})) = 2^{n-1}$.。以下布伦凹性原理的类比结果已在 [1, 40] 中得到证明：

$$\#(K \cap \xi^{\perp}) \geq 2^{1-n} \#(K \cap (t\xi + \xi^{\perp})), \text{ for all } \xi \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

要证明对于一般的原点对称凸体，常数 d_n 有界，可以使用John定理的离散类比 [14, 119, 120, 16]，该结果给出了用对称广义算术级数逼近原点对称凸体的方法。[1] 采用了这一方法，证明了$d_n \leq O(n)^{7n/2}$。后一个估计还可以略微改进：利用 [16]，可以证明 $d_n \leq O(n)^n$，但这仍远非最优。最后，以下事实已在 [1]中得到证明：

$$\#K \leq O(1)^n n^{n-m} \max\left(\#(K \cap H)\right)\,|K|^{\frac{n-m}{n}},$$

其中，最大值取遍所有 m 维线性子空间 $H \subset \mathbb{R}^n$。特别地，对于某个较大的 $C > 0$，有 $d_n \leq C^n$。这一事实的证明基于闵可夫斯基第二定理、离散布伦原理 (8.2) 以及 Bourgain-Milman 不等式。更多细节请参阅 [1]。这里我们想介绍一种由 Oded Regev[112]提出的、结合概率方法与调和分析的方法来研究问题1。我们将证明，存在一个方向分布 ξ，使得 $\#(K \cap \xi^{\perp})$ 足够大，且这一结论以正概率成立。为方便读者，我们先给出几个标准定义，并证明一些技术性估计。格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个线性无关向量的所有整数线性组合构成的集合。注意到 $\Lambda = T\mathbb{Z}^n$，其中 $T \in GL(n)$，$\det(T) \neq 0$ 并记

$\det(\Lambda) = \det(T)$。我们还将考虑对偶格 $\Lambda^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}$，对所有 $y \in \Lambda\}$ 均成立。最后，对于任意 $s > 0$，考虑函数 $\rho_s(x)$：$\mathbb{R}^n \to (0,1]$，定义为 $\rho_s(x) = e^{-\pi|x|^2/s^2}$，其中 $|x|$ 是 x 的欧几里得范数；对于可数集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，令

$$\rho_s(A) = \sum_{x\in A} e^{-\pi|x|^2/s^2}.$$

我们将使用泊松求和公式（例如，参见 [15, 引理 17.2]）。考虑函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$，并令

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle} f(x)dx \qquad (y \in \mathbb{R}^n)$$

$\widehat{\ }$为 f的傅里叶变换。假设 f 和 f 衰减得足够快，即存在正常数 C、δ，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $|f(x)|$、$|\widehat{f}(x)| \le \frac{C}{1+|x|^{n+\delta}}$（注意，这个条件对于 ρ_s显然成立）。那么，

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\det(\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \widehat{f}(y). \tag{8.3}$$

利用 $\widehat{\rho_s}(y) = s^n\rho_{1/s}(y)$ 这一事实，并结合 (8.3)，我们得到

$$\rho_s(\Lambda) = \sum_{x\in A} \rho_s(x) = \frac{1}{\det(\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \widehat{\rho_s}(y) = \frac{s^n}{\det(\Lambda)}\rho_{1/s}(\Lambda^*).$$

特别地，我们看到

$$\rho_s(\Lambda) \ge \det(\Lambda)^{-1} s^n. \tag{8.4}$$

我们还可以再次利用 (8.3) 证明，对于所有 $a \in \mathbb{R}^n$，都有 $\rho_s(\Lambda + a) \le \rho_s(\Lambda)$。事实上，利用$\widehat{\rho_s}(y) = s^n\rho_{1/s}(y) > 0$，我们得到

$$\rho_s(\Lambda + a) = \frac{1}{\det(\Lambda)}\sum_{y\in\Lambda^*} \widehat{\rho}_s(y)e^{-2\pi i\langle a,y\rangle} \le \frac{1}{\det(\Lambda)}\sum_{y\in\Lambda^*} \widehat{\rho}_s(y) = \rho_s(\Lambda). \tag{8.5}$$

设 $Z_{A,\ s}$ 为一个取值于可数集 A 的随机向量，使得

$$\mathbb{P}(Z_{A,s} = x) = \frac{\rho_s(x)}{\rho_s(A)}.$$

利用 (8.4) 可得

$$\mathbb{P}(Z_{\Lambda,s} = 0) = \frac{1}{\rho_s(\Lambda)} \le \frac{\det(\Lambda)}{s^n}. \tag{8.6}$$

最后，若我们选取一个格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$、$x \in \Lambda$ 和 $s > 0$，则可断言

$$\mathbb{P}(\langle Z_{\Lambda^*,s}, x\rangle = 0) \ge \mathbb{P}(Z_{\mathbb{Z}\setminus|x|,s} = 0) = \rho_{s|x|}(\mathbb{Z})^{-1} \ge c\min\{1, (s|x|)^{-1}\}. \tag{8.7}$$

我们可以假设 $x \neq 0$，并注意到根据定义，$\langle Z_{\Lambda^*,\ s}, x\rangle$ 只能取整数值。固定某个 $k \in \mathbb{Z}$，并考虑满足 $\langle x, y\rangle = k$ 的点集 $y \in \Lambda^*$。注意，若此集合为空，则其 ρ_s 质量显然为零。现在考虑此集合非空的情形。仿射子空间 $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = k\}$ 是 $x^\perp$ 的一个平移，沿 $x/|x|$ 方向，距离为 $k/|x|$。注意，这样的平移不一定会将 Λ^* 中的点移入其自身，因此还需要在内部进行额外的平移

$\{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = k\} \cap \Lambda^*$ 可能是必要的。因此，利用 ρ_s 的乘积结构和性质 (8.5)，我们得到

$$\rho_s(\{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = k\} \cap \Lambda^*) \le \rho_s(k/|x|)\rho_s(\Lambda^* \cap x^\perp).$$

将上述不等式除以 $\rho_s(\Lambda^*)$，并对 $k \in \mathbb{Z}$ 求和，可得（8.7）。

以下定理由 O. Regev [112]提出：设 $K \subset \mathbb{R}^n$是一个原点对称凸体。那么，

$$\#K \le \max_{\xi \in S^{n-1}} \left(\#(K \cap \xi^\perp)\right) \max\{1, cn|K|^{\frac{1}{n-1}}\}.$$

注意，当 $|K|$ 的体积小于 C^{n^3} 时，该定理将 d_n 的界从 [1], 加以改进，并为体积小于 n^{cn^2}的凸体给出了关于 d_n 的多项式界。

证明如下：利用 John定理，我们可知存在一个线性变换，使得 $\det(T) = 1$ 且 $TK \subset n|TK|^{1/n}B_2^n$。不失一般性，我们考虑凸体 TK 而非 K，并考虑格 $\Lambda = T\mathbb{Z}^n$ 而非 $\mathbb{Z}^n$。我们还可以假设 $|K| \ge n^{-n}$，否则 $K \subset \delta B_2^n$，其中 $0 < \delta < 1$，并利用 $\det(\Lambda) = 1$，可得 $K \cap \Lambda$ 不是满维的，因此结论显然成立。

现在我们将使用概率方法来选取方向 $\xi \in \Lambda^* \setminus \{0\}$。令$\xi = Z_{\Lambda^*,s}$ 其中 $s \ge 1$ 将在稍后选定。于是我们可以应用 (8.7) 得出，对于任意固定的 $x \in K \cap \Lambda$，都有

$$\mathbb{P}(x \in \xi^\perp) \ge c\min\{1, (s|x|)^{-1}\} \ge c\min\{1, (sn|K|^{1/n})^{-1}\} = \frac{c}{sn|K|^{1/n}}$$

Then

$$\mathbb{E}\left(\frac{\#\{x \in K \cap \Lambda : \langle x, \xi\rangle = 0\}}{\#(K \cap \Lambda)}\right) \ge \frac{c}{sn|K|^{1/n}}.$$

上述不等式使我们能够选取 ξ，使得 $\#\{x \in K \cap \Lambda : \langle x, \xi\rangle = 0\}$ 较大。为了完成证明，我们需要选择 $s \ge 1$，以确保可以选取 ξ 使其不等于 0。由 (8.6) 可知，$\mathbb{P}(\xi = 0) \le s^{-n}$. 因此，我们需要选取$s \ge 1$ 使得 $s^{-n} \le c(sn|K|^{1/n})^{-1}$，即 $s = C|K|^{\frac{1}{n(n-1)}} \ge 1$，其中 $C > 0$ 是足够大的绝对常数。证明完成。

关于凸体截面中格点基数的另一个非常有趣的界，受到 Meyer 不等式（3.2）的启发。该界由 Gardner、Gronchi 和 Zong [45] 提出，并由 Freyer 和 Henk 在 [40]中证明：对于任意关于原点对称的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，都存在一个基 b_1, ..., b_n 属于 $\mathbb{Z}^n$，使得

$$(\#K)^{\frac{n-1}{n}} \le O(n^2 2^n) \prod_{i=1}^n \left(\#(K \cap b_i^\perp)\right)^{1/n}$$

并且存在 t_1, ..., $t_n \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$(\#K)^{\frac{n-1}{n}} \le O(n^2) \prod_{i=1}^n \left(\#(K \cap (t_i + b_i^\perp))\right)^{1/n}.$$

因此我们立即得到切片不等式

$$(\#K)^{\frac{n-1}{n}} \le O(n^2) \max_{t,b \in \mathbb{Z}^n, b \ne 0} \#(K \cap (t + b^\perp))$$

对 $\mathbb{R}^n$中的任意原点对称凸体 K 均成立。实际上，Freyer 和 Henk [40]在上述表述中去除了 K 对称这一条件（在 Meyer 不等式的离散类比中，该条件无法去除）。此外，他们还证明，在对称情形下， $O(n^2)$项可以替换为$O(n)$。遗憾的是，由于缺乏 Brunn 不等式的直接类比，这些结果似乎无法直接应用于问题 1。

References

1. M. Alexander、M. Henk 和 A. Zvavitch, *A discrete version of Koldobsky's slicing inequality*, 《Israel J. Math.》222(1), (2017), 261–278。2. D. Alonso-Guti´errez、S. Artstein-Avidan、B. Gonz´alez Merino、C. H. Jim´enez 和 R. Villa, *Rogers-Shephard and local Loomis-Whitney type inequalities* 374 2019 3 4, , 《Math. Ann.》 (), 第 – 页。3. S. Artstein-Avidan、A. Giannopoulos 和 V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis Vol.* , 《数学调查与专著》, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2015。xx+451 页。4. S. Artstein-Avidan、A. Giannopoulos 和 V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis Vol.* , 《数学调查与专著》, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2021。xxxvii+645 页。5. K. M. Ball, *Some remarks on the geometry of convex sets*, 泛函分析的几何方面（1986/87）, 《数学讲义》1317, 施普林格出版社, 柏林-海德堡-纽约, 1988, 224–231。6. K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, 《Studia Math.》88（1988）, 69–84。7. K. M. Ball, *Shadows of convex bodies*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》327（1991）, 891–901。8. K. M. Ball, *Normed spaces with a weak-Gordon-Lewis property*, 泛函分析（奥斯汀, TX, 1987/1989）, 36–47, 《数学讲义》1470, Springer, 柏林, 1991。9. K. M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, 《J. London Math. Soc.》（2）44（1991）, 351–359。10. K. M. Ball 和 V. H. Nguyen, *Entropy jumps for isotropic log-concave random vectors and spectral gap* 213 2012 81 96 , 《Studia Math.》 (), –。11. W. Banaszczyk, *Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattices in* $\mathbb{R}^n$, 《Discrete Comput. Geom.》13（1995）, 第2期, 217–231。12. W. Banaszczyk, *Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattices in* $\mathbb{R}^n$. *III. Application of* K*-convexity* 16 1996 3, 305 311 , 《Discrete Comput. Geom.》 (), 第 – 期。13. W. Banaszczyk、A. Litvak、A. Pajor 和 S. Szarek, *The flatness theorem for nonsymmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces* 24 1999 3, 728 , 《Math. Oper. Res.》 (), 第 – 期, 750。14. I. B´ar´any 和 A. M. Vershik, *On the number of convex lattice polytopes*, 《Geom. Funct. Anal.》2（1992）, 第4期, 381–393。15. A. Barvinok, *MATH 669: Combinatorics, Geometry and Complexity of Integer Points*, 《数学讲义》, 可从 http://www.math.lsa.umich.edu/∼barvinok/latticenotes669.pdf 获取。16. S. Berg 和 M. Henk, *Discrete analogues of John's theorem*, 《Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory》8-4（2019）, 367–378。17. S. Bobkov 和 F. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with un-conditional basis*, 泛函分析的几何方面（Milman-Schechtman 编）, 《数学讲义》1807（2003）, 53–69。18. S. G. Bobkov、B. Klartag 和 A. Koldobsky, *Estimates for moments of general measures on convex bodies* 146 2018 11, 4879 4888 , 《Proc. Amer. Math. Soc.》 (), 第 – 期。19. B. Bollob´as 和 A. Thomason, *Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs*, 《Bull. London Math. Soc.》27（1995）, 417–424。20. J. Bourgain, *On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies*, 《美国数学杂志》108（1986）, 1467–1476。

21. J. Bourgain, *Geometry of Banach spaces and harmonic analysis*, 《国际数学家大会论文集》（伯克利, CA, 1986 1987, 871 878）, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, –。22. J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high-dimensional convex sets*, 《数学讲义》1469（1991）, 127–137。23. J. Bourgain, *On the Busemann-Petty problem for perturbations of the ball*, 《Geom. Funct. Anal.》1（1991）, 1–13。24. J. Bourgain、B. Klartag、V. D. Milman, *Symmetrization and isotropic constants of convex bodies* 1850 2004 101 , 泛函分析的几何方面, 《数学讲义》（）, – 116。25. S. Brazitikos 和 D.-M. Liakopoulos, *On a version of the slicing problem for the surface area of convex bodies* 375 2022 5561 5586 , 《Trans. Amer. Math. Soc.》（）, –。26. S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 D.-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volumeof coordinate sections and projections of convex bodies*, 《Adv. Geom.》18（2018）, 第3期, 345–354。27. S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, 《数学调查与专著》196。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2014。xx+594 页。28. Y. D. Burago 和 V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, 《施普林格苏联数学丛书》, 施普林格出版社, 柏林-纽约（1988）。29. H. Busemann 和 C. M. Petty, *Problems on convex bodies*, 《Math. Scand.》4（1956）, 88–94。30. H. Busemann 和 E. G. Straus, *Area and Normality*, 《Pacific J. Math.》10（1960）, 35–72。31. G. Chasapis、A. Giannopoulos 和 D. Liakopoulos, *Estimates for measures of lower dimensional sections of convex bodies* 306 2017 880 904 , 《数学进展》（）, –。32. Y. Chen, *An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture*, 《Geom. Funct. Anal.》31（2021）, 34–61。33. N. Dafnis 和 G. Paouris, *Small ball probability estimates ψ_2-behavior and the hyperplane* , 泛函分析杂志, 《J. Funct. Anal.》（）, –。*conjecture* 258 2010 1933 1964 34. S. Dann、G. Paouris 和 P. Pivovarov, *Bounding marginal densities via affine isoperimetry*, 《伦敦数学会论文集》113（2016）, 140–162。35. S. Dar, *Remarks on Bourgain's problem on slicing of convex bodies*, 算子理论, 《进展与应用》77（1995）, 61–66。36. R. Eldan 和 B. Klartag, *Approximately gaussian marginals and the hyperplane conjecture*, 《集中现象、泛函不等式与等周理论》研讨会论文集, 《Contemp. Math.》545（2011）, 55–68。37. M. Fradelizi、A. Giannopoulos 和 M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*, 《Israel J. Math.》135（2003）, 157–179。38. M. Fradelizi、M. Madiman 和 A. Zvavitch, *Sumset estimates in convex geometry*, arXiv:2206.01565。39. M. Fradelizi、M. Madiman、M. Meyer 和 A. Zvavitch, *On the volume of the Minkowski sum of zonoids* 2206 02123 , arXiv: 。40. A. Freyer 和 M. Henk, *Bounds on the lattice point enumerator via slices and projections*, 《Discrete Comput. Geom.》67（2022）, 第3期, 895–918。41. R. J. Gardner, *Intersection bodies and the Busemann-Petty problem*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》342（1994）, 435–445。42. R. J. Gardner, *A positive answer to the Busemann-Petty problem in three dimensions*, 《数学年刊》140（1994）, 435–447。43. R. J. Gardner, *Geometric tomography*, 第二版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2006, xxii+492 页。44. R. J. Gardner, *Geometric tomography: Update to the second edition*, https://www.wwu.edu/faculty/gardner/research.html。45. R. J. Gardner、P. Gronchi 和 C. Zong, *Sums projections and sections of lattice sets and the* , , 《*discrete covariogram* 34 2005 3, 391 409 Discrete Comput. Geom.》（）, 第 – 期。46. R. J. Gardner 和 P. Gritzmann, *Discrete tomography: determination of finite sets by X-rays*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》349（1997）, 2271–2295。

47. R. J. Gardner 和 P. Gritzmann, *Uniqueness and complexity in discrete tomography*，载于：离散断层成像：基础、算法与应用，G. T. Herman 和 A. Kuba 编，Birkhauser，波士顿，马萨诸塞州，1999年，第85–113页。48. R. J. Gardner 和 P. Gronchi, *A Brunn-Minkowski inequality for the integer lattice*，《Trans. Amer. Math. Soc.》353（2001），3995–4024。49. R. J. Gardner、A. Koldobsky 和 Th. Schlumprecht, *An analytic solution to the Busemann–Petty problem on sections of convex bodies* 149 1999 691 703 ，《数学年刊》（），–。50. A. Giannopoulos, *A note on a problem of H. Busemann and C. M. Petty concerning sections of symmetric convex bodies* 37 1990 239 244 ，Mathematika（），–。51. A. Giannopoulos 和 A. Koldobsky, *Variants of the Busemann-Petty problem and of the Shephard problem* 2017, 3, 921 943 ，《国际数学研究通讯》（IMRN），第–期。52. A. Giannopoulos 和 A. Koldobsky, *Volume difference inequalities*，《Trans. Amer. Math. Soc.》370（2018），4351–4372。53. A. Giannopoulos 和 M. Papadimitrakis, *Isotropic surface area measures*，Mathematika 46（1999），1–13。54. A. Giannopoulos、M. Hartzoulaki 和 G. Paouris, *On a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality for the quermassintegrals of a convex body* 130 2002 2403 ，《Proc. Amer. Math. Soc.》（），– 2412。55. A. Giannopoulos、A. Koldobsky 和 P. Valettas, *Inequalities for the surface area of projections of convex bodies* 70 2018 4, 804 823 ，Canad. J. Math.（），第–期。56. A. Giannopoulos、A. Koldobsky 和 A. Zvavitch, *Inequalities for the Radon transform on convex sets* 2022, 18, 13984 14007 ，《国际数学研究通讯》（IMRN），第–期。57. A. Giannopoulos、G. Paouris 和 B.-H. Vritsiou, *A remark on the slicing problem*，泛函分析杂志262（2012），1062–1086。58. P. Goodey 和 G. Zhang, *Inequalities between projection functions of convex bodies*，美国数学杂志120（1998），345–367。59. E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for k-dimensional cross-sections of convex bodies* 291 1991 75 86 ，《Math. Ann.》（），–。60. J. Hosle, *On the comparison of measures of convex bodies via projections and sections*，《国际数学研究通讯》IMRN 2021，第17期，13046–13074。61. D. Iglesias、J. Yepes Nicol´as, *Brunn-Minkowski inequalities for the lattice point enumerator* 370 2020 107193, 25 as 和 A. Zvavitch，，《数学进展》（），第页。62. A. Jambulapati、Y. T. Lee 和 S. Vempala, *A slightly improved bound for the KLS constant*，arXiv:2208.11644v2。63. F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*，《Courant纪念文集》，Interscience，纽约（1948），187–204。64. M. Junge, *On the hyperplane conjecture for quotient spaces of L_p*，Forum Math. 6（1994），617–635。65. M. Junge, *Proportional subspaces of spaces with unconditional basis have good volume properties* 1992 1994 121 129, ，《泛函分析的几何方面》（以色列研讨会，-），–，《算子理论：进展与应用》77，Birkhauser，巴塞尔，1995年。66. R. Kannan 和 L. Lov´asz, *Covering minima and lattice-point-free convex bodies*，《Ann. of Math.》（2）128（1988），第3期，577–602。67. B. Klartag, *An isomorphic version of the slicing problem*，泛函分析杂志218（2005），372–394。68. B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*，《Geom. Funct. Anal.》16（2006），1274–1290。69. B. Klartag 和 A. Koldobsky, *An example related to the slicing inequality for general measures*，泛函分析杂志274（2018），2089–2112。70. B. Klartag 和 G. Kozma, *On the hyperplane conjecture for random convex sets*，《Israel J. Math.》170（2009），253–268。71. B. Klartag 和 J. Lehec, *Bourgain's slicing problem and KLS isoperimetry up to polylog*，《Geom. Funct. Anal.》32（2022），第5期，1134–1159。72. B. Klartag 和 G. V. Livshyts, *The lower bound for Koldobsky's slicing inequality via random rounding* 43 63, 2266, ，《泛函分析的几何方面》第二卷，–，《数学讲义丛书》，Springer，Cham，2020年。

73. B. Klartag 和 V. D. Milman, *The slicing problem of Bourgain*, 《Analysis at Large：纪念 Jean Bourgain 的论文集》，即将出版，arXiv:2203.15551。74. A. Koldobsky, *Intersection bodies positive definite distributions and the Busemann-Petty prob-* ，，美国数学 *lem* 120 1998 827 840 杂志（），–。75. A. Koldobsky, *Intersection bodies in* $\mathbb{R}^4$, 《数学进展》136（1998），1–14。76. A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*，数学调查与专著，第116卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年。vi+170 页。77. A. Koldobsky, *Stability in the Busemann-Petty and Shephard problems*, 《数学进展》228（2011），2145–2161。78. A. Koldobsky, *A hyperplane inequality for measures of convex bodies in* $\mathbb{R}^n$, $n \leq 4$, 《Discrete Comput. Geom.》47（2012），538–547。79. A. Koldobsky, *Stability and separation in volume comparison problems*, 《Math. Model. Nat. Phenom.》8（2013），156–169。80. A. Koldobsky, *A* $\sqrt{n}$ *estimate for measures of hyperplane sections of convex bodies*, 《数学进展》254（2014），33–40。81. A. Koldobsky, *Estimates for measures of sections of convex bodies*, GAFA研讨会文集，B. Klartag 和 E. Milman 编，《数学讲义丛书》2116（2014），261–271。82. A. Koldobsky, *Stability inequalities for projections of convex bodies*, 《Discrete Comput. Geom.》57（2017），152–163。83. A. Koldobsky, *Slicing inequalities for measures of convex bodies*, 《数学进展》283（2015），473–488。84. A. Koldobsky, *Slicing inequalities for subspaces of* L_p, 《Proc. Amer. Math. Soc.》144（2016），第2期，787–795。85. A. Koldobsky 和 H. K¨onig, *On the maximal perimeter of sections of the cube*, 《数学进展》346（2019），773–804。86. A. Koldobsky 和 Dan Ma, *Stability and slicing inequalities for intersection bodies*, 几何献刊162（2013），325–335。87. A. Koldobsky 和 A. Pajor，关于 L_p球截面测度的一则评论，《泛函分析的几何方面》，213–220，《数学讲义丛书》2169，Springer，Cham，2017年。88. A. Koldobsky，A. Pajor 和 V. Yaskin, *Inequalities of the Khinchine type and sections of* L_p*-balls* 184 2008 217 231 ，《Studia Math.》（），–。89. A. Koldobsky、G. Paouris 和 M. Zymonopoulou, *Isomorphic properties of intersection bodies*, 泛函分析杂志261（2011），2697–2716。90. A. Koldobsky、G. Paouris 和 A. Zvavitch, *Measure comparison and distance inequalities for convex bodies* 71 2022 1, 391 407 ，《印第安纳大学数学杂志》（），第–期。91. A. Koldobsky，D Ryabogin 和 A. Zvavitch, *Projections of convex bodies and the Fourier transform* 139 2004 361 380 ，《Israel J. Math.》（），–。92. A. Koldobsky 和 D. Wu, *Extensions of reverse volume difference inequalities. Analytic aspects* ，– Springer *of convexity* 61 71, 25, 2018 INdAM丛书，Springer，Cham，。93. A. Koldobsky 和 V Yaskin, *The interface between convex geometry and harmonic analysis*, CBMS数学区域会议丛书，第108卷。由数学科学会议委员会为会议出版，华盛顿哥伦比亚特区；美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，2008年。x+107 页。94. A. Koldobsky 和 A. Zvavitch, *An isomorphic version of the Busemann-Petty problem for arbitrary measures* 174 2015 261 277 ，几何献刊（），–。95. H. K¨onig、M. Meyer 和 A. Pajor, *The isotropy constants of Schatten classes are bounded*, 《Math. Ann.》312（1998），773–783。96. L. Kryvonos 和 D. Langharst, *Measure Theoretic Minkowski's Existence Theorem and Projection Bodies* 2111 10923 ，arXiv: .。97. D. G. Larman 和 C. A. Rogers, *The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small* 22 1975 164 175 ，Mathematika（），–。98. A.-J. Li 和 Q. Huang, *The dual Loomis-Whitney inequality*, 《Bull. London Math. Soc.》48（2016），676–690。99. G.V. Livshyts, *An extension of Minkowski's theorem and its applications to questions about projections for measures* 356 2019 106803 ，《数学进展》（），。

100. D.-M. Liakopoulos, *Reverse Brascamp-Lieb inequality and the dual Bollobás-Thomason inequality* **112** 2019 3, 293 304 , 《巴塞尔数学档案》 ( ), no. – . 101. D.-M. Liakopoulos, *Inequalities for the quermassintegrals of sections of convex bodies*, 预印本。102. L. H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, 《Bull. Amer. Math. Soc.》55 (1949), 961–962. 103. E. Lutwak, *Intersection bodies and dual mixed volumes*, 《数学进展》71 (1988), 232–261. 104. M. Meyer *A volume inequality concerning sections of convex sets*, 《Bull. London Math. Soc.》20 (1988), no. 2, 151–155. 105. E. Milman, *Dual mixed volumes and the slicing problem*, 《数学进展》207 (2006), 566–598. 106. V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space* , 收录于: 泛函分析的几何方面，J. Lindenstrauss 和 V. D. Milman 编，数学讲义丛书1376，Springer，海德堡，1989年，第64–104页。107. G. Paouris, *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, 泛函分析的几何方面，以色列研讨会1996-2000，数学讲义丛书1745 (2000), 239–244. 108. G. Paouris and P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets*, 《Discrete Comput. Geom.》49 (2013), 601–646. 109. M. Papadimitrakis, *On the Busemann-Petty problem about convex centrally symmetric bodies* , , *in* $\mathbb{R}^n$ 39 1992 258 266 Mathematika ( ), – . 110. C. M. Petty, *Projection bodies*, Proc. Coll. Convexity (哥本哈根 1965), Kobenhavns Univ. Mat. Inst., 234–241. 111. I. Rivin, *Surface area and other measures of ellipsoids* 39 2007 4, , Adv. in 409 427 Appl. Math. ( ), no. – . 112. O. Regev, *A note on Koldobsky's lattice slicing inequality*, arXiv e-prints, arXiv:1608.04945. 113. D. Ryabogin, V. Yaskin and N. Zhang, *Unique determination of convex lattice sets*, Disc. Comp. Geom. 57 (2017), 582-589. 114. R. Schneider, *Zu einem problem von Shephard über die projektionen konvexer Körper*, Math. Z. 101 (1967), 71–82. 115. R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 第二扩充版。《数学百科全书及其应用》151，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。116. R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, 《概率及其应用》，施普林格出版社，柏林，2008年。117. G. C. Shephard, *Shadow systems of convex bodies*, 《Israel J. Math.》2 (1964), 229–306. 118. I. Soprunov and A. Zvavitch, *Bezout inequality for mixed volumes*, Int. Math. Res. Notices (2016), no. 23, 7230–7252. 119. T. Tao and V. Vu, *Vorm type theorems for generalized arithmetic progressions and iterated sumsets* 219 2008 2, 428 449 , Adv. Math. ( ), no. – . 120. T. Tao and V. Vu, *Additive Combinatorics*, 《剑桥高等数学研究》105。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。121. G. Zhang, *Intersection bodies and Busemann-Petty inequalities in* $\mathbb{R}^4$, 《数学年刊》140 (1994), 331–346. 122. G. Zhang, *A positive answer to the Busemann-Petty problem in four dimensions*, 《数学年刊》149 (1999), 535–543. 123. G. Zhang, *Sections of convex bodies*, 美国数学杂志118 (1996), 319–340. 124. N. Zhang, *An analogue of the Aleksandrov projection theorem for convex lattice polygons*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》145 (2017), no. 6, 2305–2310. 125. A. Zvavitch, *The Busemann-Petty problem for arbitrary measures*, 《Math. Ann.》331 (2005), 867–887.

(Apostolos Giannopoulos) Department of Mathematics,
National and Kapodistrian Uni-versity of Athens, Panepistimiopolis 157-84, Athens,
Greece*Email address*: apgiannop@@math.uoa.gr (Alexander Koldobsky)
Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia,MO 65211, USA
Email address: koldobskiya@@missouri.edu (Artem Zvavitch)
Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent,OH USA
Email address: zvavitch@@math.kent.edu