arXiv:2302.04350v1 [math.CV] 8 Feb 2023

半平面到带有多个裂隙的多边形域的单参数共形映射族

A. POSADSKII 和 S. NASYROV

Abstract. 在求解施瓦茨–克里斯托费尔积分中的附属参数的各种方法中，基于勒文微分方程的库法列夫方法发挥着重要作用。该方法用于描述这样一参数函数族：它们将典范域共形映射到带有一条裂缝的多边形上，而裂缝的端点从一个边界点出发，沿着一条折线移动。本文针对多条裂缝的情形，对库法列夫方法作了改进，这些裂缝的长度以某种方式相互关联。我们论证了该方法，并求得描述附属参数动力学的常微分方程组。此外，我们还给出了数值计算结果，验证了该方法的有效性。

关键词：Schwarz-Christoffel积分、附属参数、洛wner方程、参数方法、库法列夫方法、柯西问题、常微分方程组。数学主题分类：30C30，30-08。

Introduction

众所周知，将典范域共形映射到给定多边形域的积分公式，是由 E. Christoffel [6] 和 H. Schwarz [27]分别独立推导出来的。施瓦茨–克里斯托费尔积分含有未知的（附加）参数，而在一般情形下，求解这些参数的问题非常困难（例如参见 [9]）。

为解决这一问题，人们发展了多种方法，其中包括 M. A. Lavrentiev [20, 21], 、A. Weinstein [31, 32], 、S. Bergman [2, 3]等人提出的解析方法。随着计算能力的发展，数值方法也在积极发展，其中一些见于 V. V. Sobolev [15, 28], 、L. N. Trefesen [30], 、R. T. Davis [7]等人的著作。后来，这些方法被实现为软件包（例如 Driscoll MATLAB 工具箱 [8]）。我们还要指出 S. I. Bezrodnykh[4]提出的一种新颖方法；该方法基于 Lauricella函数的解析延拓。

著名的 Loewner参数方法 [11, 1] 影响了附属参数问题的求解过程。该方法的主要思想是考察一族依赖于实参数的单叶函数，这些函数将某个典范域（如单位圆盘或上半平面）映射到一族带有不断增长的裂缝的区域。若裂缝的轨迹是一条多边形折线，且裂缝的端点沿其中一条线段移动，则这一函数族满足某个微分方程。采用这一方法，P. P. Kufarev（参见例如[14], [1, 第六章]）将求解附属参数的问题归结为求解若干常微分方程组的柯西问题。该方法中，求解附属参数的过程包含若干步骤。每一步都要解其中一个方程组，其初始条件则根据前一步所得结果确定。最后一步得到的数值就是所求结果。基于库法列夫方法的一些数值结果见 [5] 和 [13]。

后来，V. Ya. Gutlyansky 和 A. O. Zaidan [12] 提出了对库法列夫方法的一种改进。他们研究上半平面 $\mathbb{H}^+$ 上的共形映射，并从另一个多边形 P中切出所需的多边形

，而不是从典范域中切出。从几何上看，这意味着首先从多边形 P'的一个边界点出发，生长出一条直线裂隙；接着在第二步，裂隙改变方向，并从第一步所得裂隙的端点继续生长，如此等等。最后一步中，裂隙的端点到达 P' 的边界（见图1）。裂隙端点的整个轨迹 L 将 P' 分成两部分，每一部分都是多边形域；它们是具有不断延伸的裂隙的区域族的核。如果其中一个核就是所需的多边形域 P ，并且适当选定将$\mathbb{H}^+$ 共形映射到沿 L的子弧带有裂隙的区域上的函数的规范化，那么根据 Caratheodory核收敛定理（例如，参见 [11, 第 II 章], ），与附属参数极限（最终）值对应的函数将上半平面映射到 P。因此，我们像用剪刀一样，从原始多边形 P' 中剪出多边形域 P，其顶点为 A_1、 A_2、.....、 A_n；原始多边形的顶点为 A'_1、 A'_2、.....、 $A'_{n'}$。图1展示了.....的情形；此时 P'和 P有共同顶点 $A'_j = A_j$、 $j \in \{1, \dots, l, k+3, \dots, n\}$）。

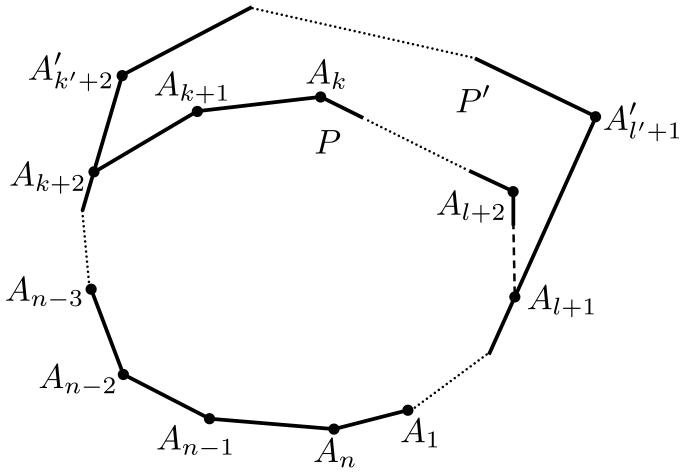

FIGURE 1. 多边形 P' ，其边界的一部分上有一条不断延伸的裂缝 P。

库法列夫方法展现了其有效性，因此人们开始关注其推广。由此，利用参数方法，可以求得从典范域到多圆弧域的近似共形映射（例如参见 [1]）。最近，I. A. Kolesnikov [16, 17] 提出了这一方法的改进方案。他还利用参数方法，求出了具有可数顶点集和平移对称性的多边形域共形映射的附属参数 [18]。此外，I. A. Kolesnikov [19] 发展出一种更一般的方法，可用于平行平移多边形的各边。L. Yu. Nizamieva [24] 提出了一种基于库法列夫方法和Hilbert边值问题理论的近似方法，用于求解施瓦茨–克里斯托费尔积分中的附属参数。此外，她还将这一方法用于求解某些自由边界边值问题 [25]。N. N. Nakipov 和 S. R. Nasyrov 将其推广至黎曼曲面上的多边形域 [23]。

本文针对若干条裂缝在初始多边形中同时增长的情形，对 V. Ya. Gutlyansky 和 A. O. Zaidan [12] 所得结果进行了改进。与 [12]相比，所提出方法的优点在于可以显著减少连续步骤的数量。求解问题时，我们可以用更少的步骤完成计算。例如，对于凸多边形，我们可以一步完成。

现在我们将描述一种可能的方案。设有一个多边形域 P'，其顶点为 A'_1、A'_2、.....、$A'_{n'}$，我们希望从 P' 中裁去一个凸多边形域 P，其顶点为 A_1、A_2、.....、A_n，使其来自 P'。假设我们通过沿折线 $A_{l+1}A_{l+2}\dots A_{k+2}$ 绘制裂缝，从 P' 得到 P（图 2）。然后，对于每个 j、$l+1 \le j \le k+1$，我们从 A_j 引出射线 L_j，使其经过下一个顶点 A_{j+1}。设射线 L_j 在某点 B_j 处与多边形 P' 的边界相交（$B_{k+1} = A_{k+2}$）。随后，我们同时从点 B_j、$l+1 \le j \le k+1$释放裂缝，其端点沿射线 L_j 移动至点 A_j。可以选择裂缝的增长速度，使第 j 条裂缝的端点同时到达点 A_j、$l+1 \le j \le k+1$。因此可以看出，与经典的库法列夫方法不同，我们将步骤数减少为一步。唯一的问题是，实施这一算法需要求解一个更为复杂的常微分方程组。然而，该方程组与单条裂缝情形中所使用的常微分方程组并无本质差异。因此，我们可以看到，所提出的方法可用于更简单、更快速地求解附属参数。

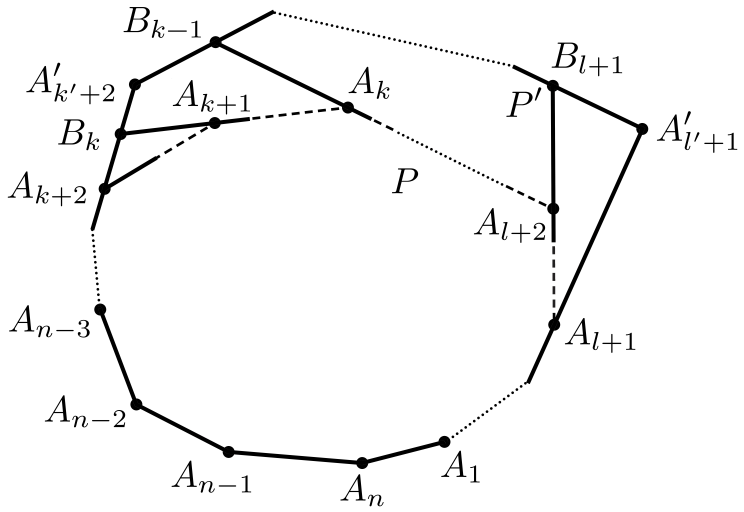

FIGURE 2. 一步切出凸多边形域 P P'。图中，$A'_{i'} = A_i$ 对应于 $i' = i \in \{1, \dots, l, k+3, \dots, n\}$。

为论证这一方法，选择一个适当的参数，使映射族关于该参数可微，这一点至关重要。我们考察形式足够一般的施瓦茨–克里斯托费尔积分，它给出到具有固定角的多边形域上的共形映射，并研究多边形边长与附属参数之间的依赖关系。我们证明，附属参数随边长平滑变化（实际上，这一事实已由 A. Weinstein [31], [32]证明）。对于一个固定的多边形域，若其中的裂隙逐渐延长，且各长度彼此平滑关联，那么这一事实使我们能够选取其中一条裂隙的长度作为合适的参数。

1. One-parameter families of conformal mappings onto polygons with severalslits

设 D_n 是 $\mathbb{C}$中的一个单连通域，其边界是一个（不一定有界的）n边形，$n \ge 3$，其顶点为 A_1、.....、A_n，内角为 $\pi\alpha_k$、$|\alpha_k| \le 2$、$1 \le k \le n$（D_n 的值在 $\mathbb{C}$ 时为负数）。

那么，从上半平面 $\mathbb{H}^+$ 到D_n 的共形映射存在，并且可以用施瓦茨–克里斯托费尔公式表示：

$$f(z) = c\int_0^z \prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}\, d\zeta + c_1, \tag{1}$$

其中， $a_1, \ldots, a_n$ 是顶点 $A_1, \ldots, A_n$的原像， $c \neq 0$ 和 c_1 是一些复数。数值 a_k, $1 \leq k \leq n$, c 和 c_1 事先未知，称为附属参数。此外，根据共形映射的性质，我们可以固定参数 a_k中的任意三个。这样，剩余的附属参数以及共形映射便以唯一的方式确定。下文假设 $a_{n-2} = 0$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = \infty$以及顶点 A_{n-2}, A_{n-1}, A_n 位于平面的有限点处；这并不会实质性地限制一般性。在这种情况下， $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-3} < 0$ 且 (1) 式变为

$$f(z) = c\int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}\, d\zeta + A_{n-2}.$$

固定 m 个不同的点 $B_1, B_2, \ldots, B_m$，这些点位于 ∂D_n上，且不落在线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 和 $A_{n-1}A_n$上；从这些点向 D_n 内部引出互不相交的直线裂缝，其长度随实参数 $t \in [0, T]$增大。将裂缝的端点记为 $\Lambda_1(t) \ldots, \Lambda_m(t)$。参数 t取值时对应的带裂缝区域D_n 记为 $D_n(t)$。我们还假设，当 $t = 0$ 时，所有裂缝的长度均为零；而当 $t \geq 0$ 时，它们的长度严格递增。由于区域 $D_n(t)$也是多边形，共形映射 $f(z,t)$: $\mathbb{H}^+ \to D_n(t)$满足归一化条件 $f(0,t) = A_{n-2}, f(1,t) = A_{n-1}, f(\infty,t) = A_n$，因此也可以表示为施瓦茨–克里斯托费尔积分。

对于每个 i、 $1 \leq i \leq m$，第 i 条裂缝的长度都会增长，并且在初始时刻 $t = 0$点 B_i 发生分叉。因此，对于 $t > 0$ ，在 $D_n(t)$ 中有两个支撑于点 B_i的边界元素（Caratheodory 意义下的素端）；它们位于裂缝的两侧。记它们在将上半平面共形映射到 $D_n(t)$ 的映射下的原像为 $a_{i1}(t)$ 和 $a_{i2}(t)$，并记 $\pi\alpha_{i1}$ 和 $\pi\alpha_{i2}$ 为 $D_n(t)$ 在这些点处的角。我们对 a_{ij} 进行编号，使得 $a_{i1}(t) < a_{i2}(t)$， $1 \leq i \leq m$。记 $\lambda_i(t)$ 为第 i 条裂缝端点的原像；它位于线段 $[a_{i1}(t)\ a_{i2}(t)]$ 上。此外，令 $\sigma_k = \alpha_k - 1$、 $\sigma_{ij} = \alpha_{ij} - 1$。

现在我们将写出将上半平面映射到 $D_n(t)$ 的施瓦茨-克里斯托费尔积分映射。这里我们区分两种情况。

1) 如果没有裂隙从多边形 ∂D_n 的顶点伸出，那么对所有 i，我们都有 $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} = 1$，即 $\sigma_{i1} + \sigma_{i2} = -1$，并且

$$f(z,t) = c(t)\int_0^z \prod_{l=1}^{m} (\zeta - \lambda_l(t)) \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{2} (\zeta - a_{ij}(t))^{\sigma_{ij}} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k(t))^{\sigma_k}\, d\zeta + A_{n-2}. \tag{2}$$

2) 如果裂隙的某个初始点与初始多边形的一个顶点重合，例如 $B_l = A_k$，那么我们省略公式 (2) 中含有 $k = l$ 的因子；对于从顶点伸出的更多裂隙，我们也作同样处理。

下文中，为了表述更清晰，除非另有说明，我们只考虑情形 1)，尽管考虑情形 2) 并不困难。

2. Derivation of the Loewner equation

关于映射 (2) 随参数 t 变换时的动力学信息由洛wner方程给出。此外，该方程使我们能够求出用于确定附属参数的常微分方程组。对于单位圆盘的映射，相应的方程例如可见于专著 [1]中。

这里我们考虑多个裂隙的情形。推导洛wner方程时，我们将遵循 [12] 中提出的方案，其中讨论了单个裂缝的情形。

我们先证明施瓦茨引理的一个推论。

引理 2.1. 设 $w(z)$ 是从 $\mathbb{H}^+$ 到 $\mathbb{H}^+$ 的共形映射，其间有 m 条裂隙沿互不相交的解析弧 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ 延伸，并从 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 这些点出发，满足 ∂H 上的条件 $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < 0$ 和 $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$。那么 $w(z)$ 在 $z = 1$ 和 $\frac{dw}{dz}\big|_{z=1} \leq 1$ 处全纯。若 $\frac{dw}{dz}\big|_{z=1} = 1$，则 $w(z,t) \equiv z$。

证明。存在 m 线段 $[\alpha_1, \beta_1]$、$[\alpha_2, \beta_2]$、……、$[\alpha_m, \beta_m] \in \mathbb{R}^-$，共形映射$w$（$z$）将其映射为沿弧 Γ_1、Γ_2、……、Γ_m的裂隙。我们有 $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$、$1 \leq i \leq m-1$。

根据黎曼-施瓦茨对称原理，w（z）可通过 $\mathbb{R}^+$解析延拓到下半平面。特别地，w（z）在点 $z = 1$ 处全纯，并利用导数辐角的几何意义，我们得出 $\operatorname{Im} \frac{dw}{dz}\big|_{z=1} = 0$。函数 ϕ（ζ）$=$（$\zeta+1$）^{2}（$\zeta-1$）$^{-2}$ 将单位圆 $|\zeta| < 1$ 共形映射到沿 $\mathbb{R}^-$有裂隙的平面上。

将施瓦茨引理应用于在 $|\zeta| < 1$ 中全纯的函数 $\Phi(\zeta) = (\phi^{-1} \circ w \circ \phi)(\zeta)$，即可得到所需的断言。□

现在我们将重新考察由（2）定义的函数族 $f(z,t)$。引入函数 $w(z,t) = f^{-1}(f(z,T)\ t)$, 其中 $0 \leq t \leq T$ 将 $\mathbb{H}^+$ 共形映射到具有 m 条裂隙的 $\mathbb{H}^+$ 上，并满足 $w(0,t) = 0$, $w(1,t) = 1$, $w(\infty,t) = \infty$。裂隙生长所起始的 ∂H 上的点位于 $\mathbb{R}^-$ 上。根据 Caratheodory 核收敛定理，对于固定的 $z \in \mathbb{H}^+$，$w(z,\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上连续。由引理 2.1 以及关于全纯函数序列收敛的魏尔斯特拉斯定理,

$$\frac{dw}{dz}(1,t) = q(t) \tag{3}$$

是参数 t 的非负连续严格递增函数。事实上，若 $0 \leq s < t \leq T$，则根据引理 2.1，将其应用于函数 $w^{-1}(w(z,s)\ t)$，可得 $\frac{dw}{dz}(1,s)\left(\frac{dw}{dz}(1,t)\right)^{-1} < 1$。

为方便起见，我们将对这一族重新参数化，取 $\tau = \ln q(t)$ 为新参数。下文为简化记号，假设 $q(t) = \exp(t)$；这种参数化称为典范参数化。

现在考虑函数 $h(z,t,s) = f^{-1}(f(z,t)\ s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ 将$\mathbb{H}^+$ 共形映射到带有 m 个裂隙的 $\mathbb{H}^+$；它保持点 0、1 和 ∞ 不变。根据半平面施瓦茨公式，我们得到:

$$h(z,t,s) = z + \frac{z(z-1)}{\pi} \sum_{i=1}^{m} I_i(z,t,s), \tag{4}$$

其中

$$I_i(z,t,s)=\int_{\alpha_i(s)}^{\beta_i(s)}\frac{\operatorname{Im}h(x,t,s)}{(x-z)(x-1)x}dx.$$

由于 $h(w(z,t),t,s)=w(z,s)$，这意味着

$$w(z,s)-w(z,t)=\frac{w(z,t)(w(z,t)-1)}{\pi}\sum_{i=1}^{m}I_i(w(z,t),t,s). \tag{5}$$

当 $z\to 1$ 趋于极限时，由（4）以及 $h(z,t,s)$ 的定义，我们得到

$$\exp(s-t)=\frac{dh}{dz}(1,t,s)=1+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}J_i(t,s),$$

其中

$$J_i(t,s)=I_i(1,t,s)=\int_{\alpha_i(s)}^{\beta_i(s)}\frac{\operatorname{Im}h(x,t,s)}{(x-1)^2x}dx<0.$$

因此，我们有

$$s-t\sim\exp(s-t)-1=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}J_i(t,s),\quad s\to t. \tag{6}$$

根据中值定理，我们有

$$I_i(w(z,t),t,s)=\int_{\alpha_i(s)}^{\beta_i(s)}\frac{\operatorname{Im}h(x,t,s)}{(x-1)^2x}dx\cdot K_i=J_i(t,s)\cdot K_i,$$

其中

$$K_i=\operatorname{Re}\frac{x_{i,1}-1}{x_{i,1}-w(z,t)}+i\operatorname{Im}\frac{x_{i,2}-1}{x_{i,2}-w(z,t)},\quad x_{i,1},x_{i,2}\in[\alpha_i(s),\beta_i(s)],$$

因此，由（6）可得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\lim_{s\to t}\frac{w(z,t)(w(z,t)-1)}{\pi}\sum_{i=1}^{m}(J_i(t,s)\cdot K_i)\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}J_k(t,s)\right)^{-1}. \tag{7}$$

下文将证明，若裂隙的长度彼此平滑地依赖，则对于每个i、 $1\le i\le m$，极限都存在

$$C_i(t)=\lim_{s\to t}\left(J_i(t,s)\left(\sum_{k=1}^{m}J_k(t,s)\right)^{-1}\right).$$

我们注意到， $C_i(t)\ge 0$ 是两个负数之比的极限。此外，这些系数之间存在如下关系：

$$\sum_{i=1}^{m}C_i(t)=1.$$

那么，考虑到引入的记号，可得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=w(z,t)(w(z,t)-1)\sum_{i=1}^{m}C_i(t)\frac{\lambda_i(t)-1}{\lambda_i(t)-w(z,t)}.$$

回忆起 $w(z,t) = f^{-1}(f(z,T)\ \ t)$，可得

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial z} z\,(z-1) \sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)-1}{\lambda_i(t)-z}. \tag{8}$$

最后，我们应注意到，实际上，我们考虑的是 s 从左侧趋近 t 时的极限；从右侧取得的极限可用类似方法研究。

注释 2.1。如果不进行向规范参数的变换，我们将得到一个与（8）类似的方程，但其右端还会多出乘数 $d(\ln q(t))/dt$；在某些自然条件下，我们将在第 6.2 小节中证明函数 $q(t)$ 的光滑性。因此，（8）的形式不会改变，因为我们可以将每个 $C_i(t)$ 乘以此表达式$\widetilde{\ }$，并将乘积结果记为，例如，$C_i(t)$。

注2.2。我们可以考虑具有类似规范化的共形映射族，使得 $f(0,t)$、$f(1,t)$ 和 $f(\infty,t)$ 不依赖于 t，但不一定是相应多边形域的角点。那么，很容易看出，导出方程的形式不会改变。

3. ODE system for accessory parameters

现在，我们将推导用于确定附属参数的方程组。

定理 3.1。附属参数在 $[0,T]$ 上满足以下微分方程组：

$$\begin{aligned} -\frac{d\lambda_p}{dt} &= \lambda_p(t)\,(\lambda_p(t)-1) \left(\sum_{l=1,l\neq p}^{m} C_l(t) \frac{\lambda_l(t)-1}{\lambda_p(t)-\lambda_l(t)} + C_p(t)\,(\lambda_p(t)-1) \right. \\ &\left. \times \sum_{l=1,l\neq p}^{m} \frac{1}{\lambda_p(t)-\lambda_l(t)} \right) + C_p(t)\,(2\lambda_p(t)-1)\,(\lambda_p(t)-1) + C_p(t)\lambda_p(t) \\ &\times (\lambda_p(t)-1)^2 \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_p(t)-a_{ij}(t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{\lambda_p(t)-a_k(t)} \right),\ 1\le p\le m, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{da_l}{dt} = -a_l(t)\,(a_l(t)-1) \sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)-1}{a_l(t)-\lambda_i(t)},\ 1\le l\le n-3, \tag{10}$$

$$\frac{da_{ij}}{dt} = -a_{ij}(t)\,(a_{ij}(t)-1) \sum_{l=1}^{m} C_l(t) \frac{\lambda_l(t)-1}{a_{ij}(t)-\lambda_l(t)},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le 2, \tag{11}$$

$$\frac{1}{c(t)}\frac{dc}{dt} = -\alpha_n \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\,(\lambda_i(t)-1)\,. \tag{12}$$

证明。考虑函数 $\phi(z,t) = \ln \frac{\partial f}{\partial z}$。由于（8），它满足微分方程

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} z(z-1) \sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)-1}{\lambda_i(t)-z}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)(\lambda_i(t)-1)^2}{(\lambda_i(t)-z)^2} - \sum_{i=1}^{m} C_i(t)(\lambda_i(t)-1). \tag{13}$$

由（2）可得

$$\phi(z,t) = \ln c(t) + \sum_{l=1}^{m} \ln(z-\lambda_l(t)) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij} \ln(z-a_{ij}(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \ln(z-a_k(t)).$$

因此，

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{c(t)}\frac{dc}{dt} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{z-\lambda_l(t)}\frac{d\lambda_l}{dt} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{ij}}{z-a_{ij}(t)}\frac{da_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{z-a_k(t)}\frac{da_k}{dt}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{z-\lambda_l(t)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{ij}}{z-a_{ij}(t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{z-a_k(t)}. \tag{15}$$

将（14）和（15）代入（13），得到

$$-\frac{1}{c(t)}\frac{dc}{dt} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{z-\lambda_l(t)}\frac{d\lambda_l}{dt} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{ij}}{z-a_{ij}(t)}\frac{da_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{z-a_k(t)}\frac{da_k}{dt} =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{z-\lambda_l(t)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{ij}}{z-a_{ij}(t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{z-a_k(t)} \right) z(z-1) \sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)-1}{\lambda_i(t)-z}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} C_i(t) \frac{\lambda_i(t)(\lambda_i(t)-1)^2}{(\lambda_i(t)-z)^2} - \sum_{i=1}^{m} C_i(t)(\lambda_i(t)-1).$$

比较最后一个关系式左右两边在点$\lambda_j(t)$ $a_{ij}(t)$ $a_l(t)$处的留数以及自由项，可得方程组（9）–（12）。□

我们注意到，逆命题也成立。若附属参数满足方程组（9）–（12），则映射族 $f(z,t)$满足（8）。这意味着常微分方程的解是唯一的，因为由洛wner方程给出的共形映射族是唯一确定的。

对方程 (9)–(12) 积分，可得附属参数对参数 t 的依赖关系。

现在来说明如何为给定的多边形 P 确定附属参数。首先，应固定一个多边形 P_0，裂隙从其内部生长。其具体形式根据便利性或问题的具体特点选定，同时必须已知 P_0 的所有附属参数。接下来，求解柯西问题，其中初始条件（对于 $t=0$）为多边形 P_0 的附属参数值。在 $t=T$ 处，参数 a_i、a_{ij}、λ_i 的取值即为多边形 P 所需的值。

如果 P 的形状相当复杂，无法一步从 P_0 中切出，则重复上述过程。在后续步骤中，柯西

问题的初始条件由上一步得到的多边形域确定。由于切除后区域仍为多边形，该过程可以按顺序进行任意有限次。

请注意，在积分方程组 (9)–(12) 时，会遇到一个困难：初始时刻以及可能的最终时刻存在退化。

当 $t \to 0$ 时，与裂缝末端相对应的三个附属参数，以及裂缝基部位于其不同侧的两个顶点，会合并为一个。在数值求解方程组时，可以通过稍微改变初始数据来消除第一个问题，例如取 $a_{ij}(0) = \lambda_i(0) + (-1)^j \epsilon_{ij}$, $1 \le i \le m$, $j = 1, 2$，其中 $\epsilon_{ij} > 0$ 足够小[1]，从而消除退化。然而，若要严格论证这种方法，就会产生一个问题：方程组对于初始条件变化的稳定性如何。

当 $t \to T$ 时，可能会出现退化，因为裂缝末端 $\Lambda_k(t)$ 会趋近边界 E_k 上的某一点。正如我们在引言中所述，裂缝的多边形轨迹将多边形域 P' 分成两个子域：P 和另一个子域，记作 P''。根据 G. D. Suvorov 的收敛定理 [29]，位于 P'' 边界上的所有顶点的原像以及裂缝端点的原像，都会收敛到 $\partial\mathbb{H}^+$ 上的同一点，其中 $t \to T$。这一事实可能会使数值计算变得复杂。

4. Solution of the system with the help of power series

在推导出用于确定附属参数的微分方程组后，接下来便要考虑如何求解该方程组。

考虑一种特殊情况。假设 $C_i(t)$ 是变量 $x = \sqrt{t}$, $t \in [0, T]$ 的某些给定实解析函数。那么它们可以表示为幂级数

$$C_p(t) = \widetilde{C}_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_{p,n} x^n, \ 1 \le p \le m.$$

与单条裂缝的情形类似，我们在方程组 (9)–(12) 中作变量变换 $x = \sqrt{t}$，并设其解为幂级数：

$$\lambda_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{p,n} x^n, \quad 1 \le p \le m, \tag{16}$$

$$a_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} x^m, \quad 1 \le l \le n-3, \tag{17}$$

$$a_{ij}(x) = \lambda_{i,0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{ij,m} x^m, \quad 1 \le i \le m, \ j = 1, 2. \tag{18}$$

将这些展开式代入方程组 (9)–(12)，并令左右两边 x 的一次项系数相等，得到：

$$\lambda_{p,1} = q_p \sum_{j=1}^{2} \frac{\sigma_{pj}}{\lambda_{p,1} - a_{pj,1}}, \quad 1 \le p \le m,$$

[1]在下文给出的数值示例中，我们取 $\epsilon_{ij} = 10^{-15}$。

$$a_{ij,1} = \frac{q_i}{a_{ij,1} - \lambda_{i,1}}, \quad 1 \le i \le m,\ j = 1, 2,$$
$$a_{l,1} = 0, \quad 1 \le l \le n-3,$$

其中 $q_\mu = -2\widetilde{C}_{\mu,\ 0}\lambda_{\mu,\ 0}(\lambda_{\mu,\ 0} - 1)^2$。由这些等式可得

$$\begin{cases} \lambda_{i,1} = q_i \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\sigma_{ij}}{\lambda_{i,1} - a_{ij,1}}, \\ a_{ij,1} = -\dfrac{q_i}{\lambda_{i,1} - a_{ij,1}}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_{i,1} = (\alpha_{i1} - \alpha_{i2}) \sqrt{\dfrac{q_i}{\alpha_{i1}\alpha_{i2}}}, \\ a_{i1,1} = -\sqrt{q_i \dfrac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1}}}, \\ a_{i2,1} = \sqrt{q_i \dfrac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}}}. \end{cases}$$

同样，通过比较 x^s处的系数，我们得到

$$a_{i1,1}\lambda_{i,s} + (s a_{i2,1} - a_{i1,1})\, a_{i1,s} = \phi_{i1},$$
$$a_{i2,1}\lambda_{i,s} + (s a_{i1,1} - a_{i2,1})\, a_{i2,s} = \phi_{i2},$$
$$\lambda_{i,s} + \sum_{k=1}^{n-3} \sigma_k a_{k,s} + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij} a_{ij,s} = \phi_i^*,\ 1 \le i \le m,$$
$$a_{k,s} = \phi_k,\ 1 \le k \le n-3,$$

其中， ϕ_k、 ϕ_{ij} 和 ϕ_i^* 仅取决于前几阶的系数 .

此外，仿照单条裂缝的情形（见 [1] 和 [12]）进行论证，可得幂级数 (16)–(18) 收敛，并且表示了在点 0 的某个邻域内关于变量$x = \sqrt{t}$ 实解析的唯一解。

不过，正如下文将要展示的，另一种情形对我们的研究目的更为重要。研究函数 $C_i(t)$ 并非任意选取，而是以能够给定裂缝长度的动力学（在某种参数化下）为条件的情形，颇有意义。对此，我们将在下一节讨论。

5. 裂缝长度的控制

现在我们将研究裂隙的长度如何依赖于参数 t。考虑第 r 条裂隙端点 $\Lambda_r(t)$ 的动力学，该端点是点 $\lambda_r(t)$ 在映射 $f(z,t)$ 下的像，即 $\Lambda_r(t) = f(\lambda_r(t),\ t)$。对这个等式求导，并利用 (2)，可得第 r 条裂隙长度的增长率 $v_r(t)$ 的表达式：

$$v_r(t) = \left| \frac{d\Lambda_r(t)}{dt} \right| = |c(t)| A_r(t) C_r(t), \tag{19}$$

其中

$$A_r(t) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{2} |\lambda_r(t) - a_{ij}(t)|^{\sigma_{ij}} \prod_{k=1}^{n-1} |\lambda_r(t) - a_k(t)|^{\sigma_k} \times |\lambda_r(t)|\, |\lambda_r(t) - 1|^2 \prod_{i=1, i\ne r}^{m} |\lambda_r(t) - \lambda_i(t)|. \tag{20}$$

我们看到， $v_r(t)$ 与 $C_r(t)$ 成正比，并且不显式依赖于其他函数 $C_j(t)$、 $j \ne r$。这一事实可用于控制裂缝长度之间的比率。

5.1. 两条裂缝的情形。
考虑情形 $m = 2$，即只有两条裂缝的情况。为简单起见，假设它们长度的速度之比为给定的正数 α，即

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \equiv \alpha, \tag{21}$$

其中，$v_1(t)$和 $v_2(t)$分别是第一条和第二条裂缝长度的增长率。于是，由（19）和（21）得

$$\frac{C_1(t)}{C_2(t)} = \alpha \frac{A_2(t)}{A_1(t)}.$$

此外，$C_1(t) + C_2(t) = 1$，因此，

$$C_1(t) = \frac{\alpha A_2(t)}{A_1(t) + \alpha A_2(t)}, \quad C_2(t) = \frac{A_1(t)}{A_1(t) + \alpha A_2(t)}. \tag{22}$$

这里，$A_1(t)$和 $A_2(t)$由（20）给出，其中令 $m = 2$。若将所得的 $C_1(t)$和 $C_2(t)$表达式代入方程组（9）–（12）的右端，则得到用于确定共形映射 $f(z,t)$附属参数的方程组，使裂隙长度的增长率具有所需比率 α 。

现在给出一些例子。

例5.1。考虑一族共形映射 $f(z,t)$，它将上半平面映射到上半平面，并将两条直线裂缝映射为从给定点 x_1和 x_2, $x_1 < x_2 < 0$垂直向上延伸的裂缝；对任意 t 均成立（图3）。

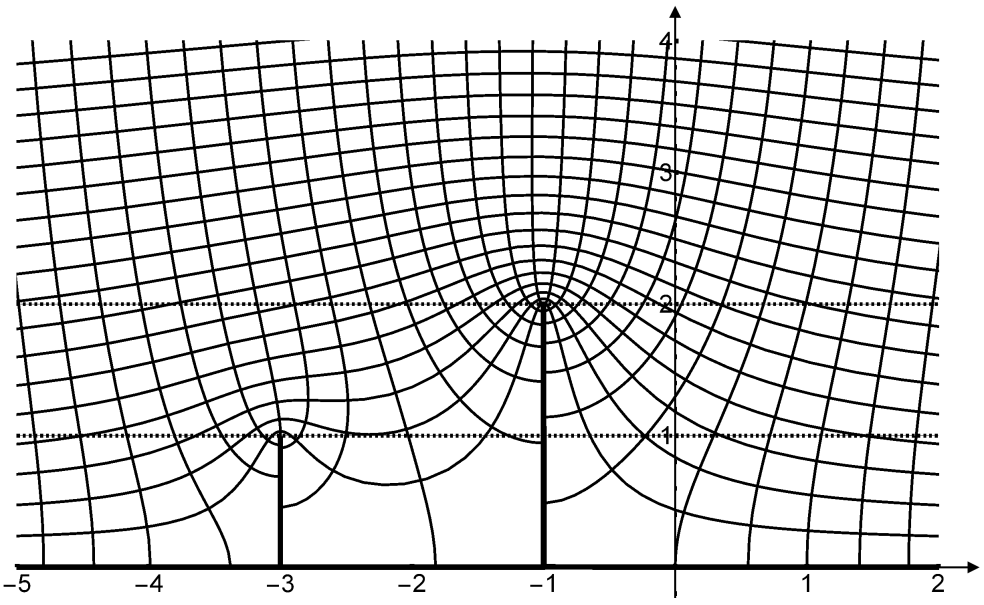

FIGURE 3. 笛卡尔网格经由上半平面到带有两条裂缝的半平面的共形映射后的像。

共形映射 $f(z,t)$ 的形式为

$$f(z,t) = c(t) \int_0^z \prod_{l=1}^{2} (\zeta - \lambda_l(t)) \prod_{i,j=1}^{2} (\zeta - a_{ij}(t))^{-\frac{1}{2}} d\zeta, \tag{23}$$

其中，被积函数的分支选取为在较大的正实数 ζ 处为正；此外， $f(z,t)$ 在 $t=0$ 处等于恒等映射。由式（23）可得，裂隙长度 $L_j = L_j(t)$ 的增长率为

$$v_1(t) = \frac{dL_1(t)}{dt} = \frac{C_1(t)\,|c(t)|\,\lambda_1(t)\,(\lambda_1(t)-1)^2\,(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))}{\sqrt{(\lambda_1(t)-a_{11}(t))\,(a_{12}(t)-\lambda_1(t))\,(a_{21}(t)-\lambda_1(t))\,(a_{22}(t)-\lambda_1(t))}},$$

$$v_2(t) = \frac{dL_2(t)}{dt} = \frac{C_2(t)\,|c(t)|\,\lambda_2(t)\,(\lambda_2(t)-1)^2\,(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))}{\sqrt{(\lambda_2(t)-a_{11}(t))\,(\lambda_2(t)-a_{12}(t))\,(\lambda_2(t)-a_{21}(t))\,(a_{22}(t)-\lambda_2(t))}}.$$

考虑到裂缝长度增长率的比率（21），我们得到

$$\frac{1}{C_2(t)} = \alpha\sqrt{\frac{(\lambda_1(t)-a_{11}(t))\,(a_{12}(t)-\lambda_1(t))\,(a_{21}(t)-\lambda_1(t))\,(a_{22}(t)-\lambda_1(t))}{(\lambda_2(t)-a_{11}(t))\,(\lambda_2(t)-a_{12}(t))\,(\lambda_2(t)-a_{21}(t))\,(a_{22}(t)-\lambda_2(t))}}$$

$$\times\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}\left(\frac{\lambda_2(t)-1}{\lambda_1(t)-1}\right)^2+1, \qquad C_1(t)=1-C_2(t),$$

这等价于（22）。

现在我们将给出一些数值计算的结果。设 $x_1=-2$、 $x_2=-1$ ，我们需要求出将上半平面映射到具有两条垂直于边界、长度分别为 $L_1=1$ 和 $L_2=2$ 的裂缝的半平面的共形映射（图3）。令 $\alpha = L_1/L_2 = 0.5$。求解常微分方程组的柯西问题，我们得到（23）中的附属参数的数值。它们列于表1中。计算使用 Wolfram Mathematica 软件包完成。作为比较，我们还在表中给出了借助 MATLAB 的知名 Driscoll 的 SC Toolbox 软件包计算得到的数值 [8]；这些数值精确到小数点后7位。可以看出，所得到的参数值在小数点后6位以内一致。

TABLE 1. 上半平面到带有两条裂缝的半平面的共形映射的附属参数值。

参数	Our method	SC Toolbox
c	0.5867804	$-$
a_{11}	-9.8974995	-9.8974994
λ_1	-8.5126732	-8.5126732
a_{12}	-7.3979258	-7.3979257
a_{21}	-6.8108252	-6.8108251
λ_2	-3.7393888	-3.7393887
a_{22}	-0.3978735	-0.3978735

为消除方程组在初始时刻的退化，对初始数据作了微小变换：我们没有取 $a_{ij}(0) = \lambda_i(0)$，而是取了 $a_{ij}(0) = \lambda_i(0) + (-1)^j\epsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2$,$\epsilon_{ij} = 10^{-15}$。

例5.2。考虑求取将上半平面共形映射到六边形 H（即去掉角点 $[-1,-0.5]\times[0.5,1]$ 的矩形 $R=[-1,1]\times[0,1]$，见图 4）的附属参数问题。

作为 初始多边形，我们取矩形 R。将 $\mathbb{H}^+$ 映射到 R 的初始映射为

$$f(z,0)=-c(0)\int_0^z(\zeta(\zeta-1))^{-\frac{1}{2}}(\zeta-a_2(0))^{-\frac{1}{2}}(\zeta-a_1(0))^{-\frac{1}{2}}d\zeta+1, \tag{24}$$

其中

$$c(0)=\frac{2+\sqrt{2}}{K\left(1/\sqrt{2}\right)}=1.84146496\ldots,\quad a_1(0)=-(3+2\sqrt{2})=-5.82842712\ldots,$$

$$a_2(0)=-2(\sqrt{2}+1)=-4.82842712\ldots$$

这里，$K(k)$ 是第一类完全椭圆积分。被积函数的分支选定为：当实数 ζ 为充分大的正数时，被积函数取正值；下文给出的映射 $f(z,t)$ 也采用同样的约定。

从点 $-0.5+i$和 $-1+0.5i$ 出发，以相同的增长率，作两条垂直于矩形 R边界的裂缝。注意，在映射 (24) 下，点 $-0.5+i$和 $-1+0.5i$ 的原像为

$$\lambda_1=-(\sqrt{2+\sqrt{2}}+1)(1+\sqrt{2})=-6.87509856\ldots,\quad \lambda_2=-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})=-5.28521351\ldots.$$

上文所述将 $\mathbb{H}^+$ 映射到带有两条裂缝的 R 的施瓦茨–克里斯托费尔积分，在满足条件 $f(0,t)=1, f(1,t)=1+i, f(\infty,t)=i$ 的归一化下，具有如下形式

$$f(z,t)=-c(t)\int_0^z(\zeta(\zeta-1))^{-\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{2}(\zeta-\lambda_l(t))\prod_{i,j=1}^{2}(\zeta-a_{ij}(t))^{-\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{2}(\zeta-a_k(t))^{-\frac{1}{2}}d\zeta+1, \tag{25}$$

其中 $-\infty<a_{11}(t)<\lambda_1(t)<a_{12}(t)<a_1(t)<a_{21}(t)<\lambda_2(t)<a_{22}(t)<a_2(t)<0$。我们注意到，根据注2.2，$\infty$ 的像不是角点，但这无关紧要。对于 $t=0$，我们有 $a_{11}(0)=\lambda_1(0)=a_{12}(0)=\lambda_1$, $a_{21}(0)=\lambda_2(0)=a_{22}(0)=\lambda_2$。

在所选的增长率下，裂隙同时到达点 $0.5+0.5i$，其中某个$t=T$，且映射族 $f(z,t)$ 收敛到将 $\mathbb{H}^+$ 映射到所需六边形 H 的映射 $g(z)$；其形式为

$$f(z,T)=-c\int_0^z(\zeta(\zeta-1)(\zeta-a))^{-\frac{1}{2}}(\zeta-\lambda)^{1/2}\prod_{i=1}^{2}(\zeta-b_i)^{-\frac{1}{2}}d\zeta+1,$$

$-\infty<b_1<\lambda<b_2<a<0$。此外，$a_{11}(t)\to b_1$；$\lambda_1(t)$、$a_{12}(t)$、$a_1(t)$、$\lambda_2(t)$ 和 $a_{21}(t)\to\lambda$, $a_{22}(t)\to b_2$, $a_2(t)\to a$，如 $t\to T$。表2比较了我们的方法与 SC Toolbox 软件包得到的结果；数值精确到小数点后 7 位。可以看出，所得参数值大多精确到小数点后 6 位时一致；λ 的值精确到小数点后 4 位时一致；这是因为映射在该点附近的收敛并不一致。

TABLE 2. 上半平面到六边形的共形映射的附属参数值 $\mathbb{H}^+$ H。

参数	Our method	SC Toolbox
c	1.90896	$-$
b_1	-8.6039921	-8.6039920
λ	-4.6992541	-4.6992949
b_2	-4.0805629	-4.0805627
a	-4.0225626	-4.0225623

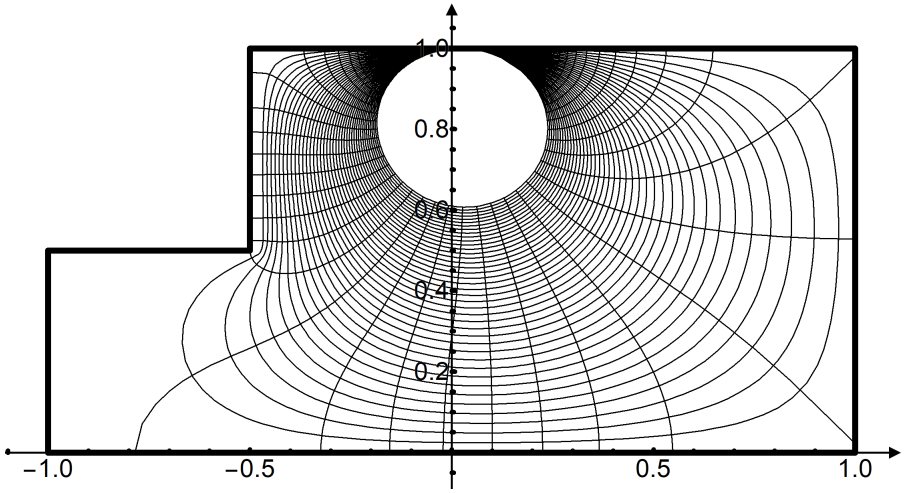

FIGURE 4. 笛卡尔网格在半平面到六边形的共形映射下的像 $\mathbb{H}^+$ H。

5.2. 一般情形。
一般而言，通过设定裂隙长度的速度 v_j 之间的关系（这些速度甚至可以是非定常的），我们得到关于 m 个函数 $C_i(t)$ 的 $m-1$ 个方程：

$$g_\nu\left(v_1(t), v_2(t)\ldots, v_m(t), t\right) = 0,\ 1 \le \nu \le m-1.$$

条件

$$\sum_{i=1}^{m} C_j(t) = 1 \tag{26}$$

从而闭合方程组，以确定 $C_i(t)$、 $1 \le i \le m$。连同方程 (9)-(12)，它们构成一个完整的方程组，用于求出附属参数。

现在考虑一个非常重要的情形：速率比率 v_j 为常数。举例来说，设

$$\frac{v_j(t)}{v_m(t)} \equiv \alpha_j, \quad 1 \le j \le m-1,$$

其中 α_j 为一些正常数。考虑到（19）和（26），我们得到

$$C_j^{-1}(t) = \alpha_j^{-1} A_j(t) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A_k^{-1}(t), \quad 1 \le j \le m,$$

其中我们令 $\alpha_m = 1$； $A_j(t)$ 的值由 (20) 给出。

因此，我们得到 $C_j(t)$，它们是显式依赖于附属参数的函数。将它们代入 (9)-(12)，便得到一个用于确定附属参数的常微分方程组。

6. 附属参数与边长之间的关系

寻找一个合适的参数，使映射族关于该参数连续可微，是一个重要且有趣的问题。本节考虑与固定角多边形变形相对应的映射族。作为上述参数，我们建议选取任意一条变化的边长（在我们的情形中，即一条裂隙的长度）。这一选择基于如下想法：前顶点与多边形边长（角固定）之间存在双射且可微的映射。证明这一事实，可以使我们论证映射 $f(z,t)$ 的导数 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 存在，以及函数 $C_i(t)$ 存在。

6.1. 多边形边长关于附属参数的可微性。

考虑满足以下条件的多边形 P：

（1） P的边界是一条闭合折线 $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$，其中 $A_{n+1} = A_1$，且 A_{n-2} 的值固定；

（2）线段 A_1A_2 与实轴的倾角 β 固定；（3） P、 $\alpha_1\pi$、 $\alpha_2\pi$、 $\ldots\alpha_n\pi$ 的内角在顶点 $A_1A_2\ldots A_n$ 处的值固定。则从上半平面到 P 的共形映射由下式给出：

$$f(z) = de^{i\beta} \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}\, d\zeta + A_{n-2}; \tag{27}$$

此处，与 上文一样，我们假设 $a_{n-2} = 0$、 $a_{n-1} = 1$ 以及 A_n 的原像为 $a_n = \infty$.

多边形第 ν 条边的长度为：

$$l_\nu = d \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\sigma_k}\, dx. \tag{28}$$

注意，如果固定 l_ν 和 $1 \le \nu \le n-2$的值，那么由（2）可知， l_{n-1} 的值由 l_n 唯一确定。考虑映射 $\Phi: (d, a_1, a_2, \ldots a_{n-3}) \mapsto (l_1, l_2, \ldots, l_{n-2})$，其中 $d > 0$, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-3} < 0$ ，且 l_ν 由（28）给出。注意，如果某些 $\alpha_k - 1$ 为正，则映射（27）可能不是单叶的，其对应的像是一个多层黎曼曲面。

Lem命题 6.1. 映射 Φ 在 se 的每一点处都是光滑且非退化的 t

$$\mathcal{A} = \{(d, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-3}) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid d > 0, a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-3} < 0\}.$$

注 6.1。我们注意到，A. Vainshtein [31]的著作探讨了附属参数与边长之间的关系；所得结果被用于论证他所发展的连续性方法。其他科学家也采用了这一思想的变体：K. Reppe [26], L. N. Trefesen [30]等。特别是，这些变体构成了

施瓦茨–克里斯托费尔积分的数值映射 [9]的基础。下面我们将根据 [22, 第 3]章所给出的思路，简述这一事实的证明。

对 (28) 中的 l_ν 关于 a_μ 和 d 求导，可以很容易地证明映射 Φ 是连续可微的。接下来只需证明映射 Φ 的雅可比矩阵非退化。反设不然。那么在 $\mathcal{A}$ 的某一点，存在变分 δd、δa_1、……、δa_{n-2}，使得所有 l_ν 的值都不发生变化。若包含线段 $A_\nu A_{\nu+1}$ 的直线可表示为 $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \beta_\nu \xi + \gamma_\nu \eta = \epsilon_\nu\}$，其中 β_ν、γ_ν、ϵ_ν 是一些常数，则变分 δf 满足一个分段常系数齐次希尔伯特边值问题的边界条件（参见例如 [10] 或 [22]）：

$$\beta_\nu \operatorname{Re} \delta f(x) + \gamma_\nu \operatorname{Im} \delta f(x) = 0, \quad a_\nu < x < a_{\nu+1},$$

对所有 ν 均成立。考察 δf 在点 a_ν 处的行为，可知该希尔伯特问题只有平凡解。引理 6.1 得证。

由引理 6.1 可知，(2) 中的附属参数关于裂隙长度光滑地依赖。

6.2. 映射族的可微性。
现在考虑一族多边形，它们是通过从一个固定多边形中绘制长度为 l_1、$l_2 \ldots$、l_m 的 m 条裂隙得到的。我们假设这些长度彼此光滑地依赖。为明确起见，假设 $l_j = \phi_j(l_1)$、$2 \le j \le m$，其中 ϕ_j 是光滑函数。于是，附属参数及相应的共形映射也关于 l_1 光滑地依赖。因此，我们可以将 l_1 作为映射族 $f(z,t)$ 的参数 t，从而将 $f(z,t)$ 视为一个光滑族。

由于其中的所有量现在都有明确定义，因此我们可以将由勒夫纳方程 (8) 得到的下列表达式作为函数 $C_k(t)$ 的定义：

$$C_k(t) = \frac{2\pi i}{\lambda_k(t)\left(\lambda_k(t)-1\right)^2} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1} \right), \ 1 \le k \le m.$$

现在我们将证明，在这种光滑参数化下，由（3）定义的函数 $q(t)$ 是参数 $t = L_1$ 的光滑函数。由于 $f(z,T) = f(w(z,t)\ t)$，且 $f(z,T)$ 是克里斯托费尔–施瓦茨积分，对 z 求导可得 $f'(z,T) = f'(w(z,t)\ t)w'(z,t)$，因此，

$$w'(z,t) = \frac{f'(z,T)}{f'(w(z,t),t)}.$$

由（2）可得

$$f'(w(z,t),t) \sim \Psi(w(z,t)-1)^{\sigma_{n-1}}, \quad f'(z,T) \sim C(z-1)^{\sigma_{n-1}}, \ z \to 1,$$

其中 C 是常数，Ψ 是关于 $c(t)$ 和多边形域 $D_n(t)$ 的顶点原像的非零光滑函数。因此，我们可以认为 $\Psi = \Psi(t)$ 是 t 的光滑函数。于是

$$w'(1,t) = \lim_{z \to 1} \frac{f'(z,T)}{f'(w(z,t),t)} = \frac{C}{\Psi(t)(w'(1,t))^{\sigma_{n-1}}},$$

因此，

$$q(t) = w'(1,t) = \left(\frac{C}{\Psi(t)} \right)^{1/\alpha_{n-1}}.$$

这表明 $q(t)$ 是光滑的。

我们还注意到，以某条裂隙的长度作为参数，可以避免一些技术上的困难。假设我们想得到长度为 L_1 的第一条裂隙（其余裂隙的长度由此唯一确定）。那么，必须在区间 $[0, L_1]$ 上求解常微分方程组（ 9 ） – （ 12 ）。若采用任意参数化，则需要寻找参数 t 的终值 T，使各裂隙具有所需的长度。这里，该值会自动确定。

Weinstein 的结果帮助我们证明了多条裂隙情形下映射族的可微性。不过，其推论并不止于此：这一论证也适用于 I. A. Kolesnikov 在 [17] 中研究的更一般情形。

7. 结论

我们提出了对 V. Ya. Gutlyanskii 和 A. O. Zaidan 给出的、用于近似求解上半平面到多边形的共形映射的著名库法列夫方法的一种改进推广。该方法基于 Loewner参数方法，并考虑施瓦茨–克里斯托费尔积分的一参数映射族 $f(z,\ t)$，$0 \le t \le T$；对于固定的 t，函数 $f(z,\ t)$ 将上半平面共形映射到带有若干条直线裂缝的多边形上，并且随着 t 增大，裂缝的长度也随之增加。$f(z,\ t)$ 的积分表示依赖于一些未知的（附属）参数。我们推导出描述映射 $f(z,\ t)$ 及相应附属参数动力学的微分方程。一参数映射族的存在唯一性意味着所得常微分方程组的解存在且唯一。我们还研究了如何寻找合适的参数 t。我们证明，如果参数 t 与某条裂缝的长度相等，且其他裂缝的长度随该长度平滑变化，那么映射族 $f(z,\ t)$ 也随之平滑变化，并且可以通过求解一个常微分方程组的柯西问题来确定附属参数。数值计算证实了该方法的高效性和良好的精度。

然而，仍有一些问题尚未得到探讨。例如，需要论证常微分方程组对初始数据变化的稳定性，以及幂级数方法在一般情形下的适用性。此外，我们还希望提高所得到的常微分方程组数值解的精度，以确定施瓦茨–克里斯托费尔积分中的附属参数。

8. Acknowledgements

A. Posadsky 和 S. Nasyrov 的工作得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助（协议编号：075-15-2022-287）。

References

[1] I. A. Aleksandrov, 《单叶函数论中的参数扩张》（Nauka，莫斯科，1976）。[2] S. Bergmann, 《根据双曲积分的周期模确定其分支点，并将其应用于变压器理论》, 《数学杂志》19，8–25（1923）。[3] S. Bergmann, 《单相变压器磁场的计算》, 《应用数学与力学杂志》5，319–331（1925）。[4] S. I. Bezrodnykh, 《Lauricella函数与多边形的共形映射》, 《数学札记》112（4），505–522（2022）。

[5] Yu. V. Chistyakov, 《将圆盘共形映射到由圆弧和直线段围成的区域的函数的近似求法》, 托木斯克大学学报14, 143–151（1960）。[6] E. B. Christoffel, 《关于稳态温度问题及给定曲面的表示》, 《纯粹与应用数学年刊》系列II, 1, 89–103（1867）。[7] R. T. Davis, 《基于施瓦茨–克里斯托费尔变换的坐标生成数值方法》, 载于第4届美国航空航天学会计算流体力学会议（弗吉尼亚州威廉斯堡, 1979）, 第1–15页。[8] T. A. Driscoll, 《算法756: 用于施瓦茨–克里斯托费尔映射的MATLAB工具箱》, 《ACM数学软件汇刊》22（2）, 168–186（1996）。[9] T. A. Driscoll和L. N. Trefethen, 《施瓦茨–克里斯托费尔映射》（剑桥大学出版社, 剑桥, 2002）。[10] F. D. Gakhov, 《边值问题》（培格曼出版社, 牛津, 1966）。[11] G. M. Goluzin, 《复变函数几何理论》, 数学专著译丛（罗得岛州普罗维登斯: 美国数学学会, 1969）。[12] V. Ya. Gutlyanskii和A. O. Zaidan, 《多边形域的共形映射》, 《乌克兰数学杂志》45（11）, 1484–1494（1993）。[13] T. R. Hopkins和D. E. Roberts, 《用于确定施瓦茨–克里斯托费尔附属参数的库法列夫方法》, 《数值数学》33（4）, 353–365（1979）。[14] P. P. Kufarev作品集: 纪念其诞辰100周年, I. A. Aleksandrov编（Izd. Nauch.-Tech. Lit., 托木斯克, 2009）, 第86–88页。[15] N. V. Ischenko和V. V. Sobolev, 《将无界域共形映射到圆盘外部及其逆映射的复合算法》, 载于《数学分析与代数研究》, I. A. Aleksandrov等编（托木斯克: 托木斯克大学, 1998）, 第10–17页。[16] I. A. Kolesnikov, 《半平面到零角圆弧多边形的共形映射》, 《俄罗斯数学》（高等院校学报）, （6）, 11–24（2021）。[17] I. A. Kolesnikov, 《关于求半平面到圆弧多边形的共形映射参数》, 《科学与技术成果·现代数学应用·专题综述》175, 56–68（2020）。[18]I. A. Kolesnikov, 《具有对称性的典范域到区域的共形映射》, 学位论文（托木斯克大学, 托木斯克, 2014）。[19] I. A. Kolesnikov, 《确定施瓦茨–克里斯托费尔积分中参数的单参数方法》, 《西伯利亚数学杂志》62（4）, 638–653（2021）。[20] M. A. Lavrentiev, 《共形映射及其在若干力学问题中的应用》（Gostekkhizdat, 莫斯科—列宁格勒, 1946年）。[21] M. A. Lavrentiev和B. V. Shabat, 《复变函数论方法》（Nauka, 莫斯科, 1965年）。[22] V. N. Monakhov, 《椭圆方程组带自由边界的边值问题》, 数学专著译丛, 第57卷（罗得岛州普罗维登斯: 美国数学学会, 1983）。[23] N. N. Nakipov和S. R. Nasyrov, 《求广义施瓦茨–克里斯托费尔积分附属参数的参数方法》, 《喀山大学学报·物理与数学科学系列》158（2）, 202–220（2016）。[24] L. Yu. Nizamieva, 《关于求施瓦茨–克里斯托费尔积分中的附属参数》, 载于《消费合作: 理论、方法论与实践: 国际会议论文集》（俄罗斯合作大学, 莫斯科, 2010）, 第313–319页。[25] L. Yu. Nizamieva, 《关于参数的内外混合反边值问题》 x。学位论文（喀山大学, 喀山, 2011）。[26] K. Reppe, 《借助共形映射, 通过对施瓦茨–克里斯托费尔映射函数进行数值积分计算磁场》, 《西门子研究与开发报告》8, 190–195（1979）。[27] H. A. Schwarz, 《关于若干映射问题》, 《纯粹与应用数学杂志》70, 105–120（1869年）。[28] V. V. Sobolev, 《具有流体力学规范化的半平面到自身的共形映射数值方法》, 《托木斯克国立大学学报》数学与力学版280, 81–85（2003）。[29] G. D. Suvorov, 《平面映射的素端与序列》（Naukova Dumka, 基辅, 1986年）。[30] L. N. Trefethen, 《施瓦茨–克里斯托费尔变换的数值计算》, 《工业与应用数学学会科学与统计计算杂志》1（1）, 82–102（1980）。

[31]A. Weinstein, 《多边形映射定理的连续性证明》, 《数学杂志》19, 72–84（1924）。[32] A. Weinstein, 《一个流体力学唯一性定理》, 《数学杂志》19, 265–274（1924）。

Lebedev Physical Institute, Moscow, 119991; Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia电子邮箱：posadskij.af@phystech.edu

Kazan Federal University, Kazan, 420008; Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia电子邮箱：semen.nasyrov@yandex.ru