利用地面探测器的触发信号探测 LISA 中的引力记忆效应

Sourath Ghosh,[1] Alexander Weaver,[1] Jose Sanjuan,[2] Paul Fulda,[1] 和 Guido Mueller[1,3]
[1] *Physics Department, University of Florida, USA*[2] *Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University, USA*
[3] *Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert-Einstein-Institut) Hannover, Germany*（日期：2023年2月10日）

激光干涉仪引力波天文台与室女座引力波探测器合作组织与 KAGRA（LVK）合作组已探测到来自 90 次致密双星并合的引力波。除进一步巩固广义相对论（GR）的线性化理论外，这批探测事件的统计集合也为探测 GR 预言的非线性效应带来了可能，其中一项预言便是非线性引力记忆效应。对于已探测到的恒星级和中等质量致密双星，引力记忆效应所诱导的应变比探测器噪声背景低一到两个数量级。此外，由于大部分能量在并合时辐射出来，引力记忆效应诱导的应变在并合时刻呈现阶跃函数的形态。这些事实促使我们提出这样一种设想：在记录到的引力波事件的并合时刻，对其数据流进行相干叠加，从而使累积的记忆应变达到足够的信噪比，得以探测。引力波探测器本质上记录的是往返光行时尺度上的积分应变响应，因此，像 LISA 这样的未来太空长臂干涉仪非常适合在低频下探测记忆效应。本文提出一种方法，利用地面探测器的事件目录，在 LISA数据流中搜寻相应的记忆应变。根据 LVK 的 O3科学运行事件目录，我们采用标度论证，并基于源种群模型的假设，估算利用当前及未来地面探测器的触发信号，使 LISA 累积达到 5 的记忆信噪比所需的运行时间。最后，我们将这些计算扩展至 LISA 以外的任务，例如 ALIA、AMIGO 和 Folkner，以探测引力记忆效应。LISA 的结果表明，在 10 年的 LISA任务寿命内有望探测到记忆效应；LISA 以外任务的相应结果则更为乐观。

arXiv:2302.04396v1 [gr-qc] 9 Feb 2023

I. 引言

2015年，LIGO科学合作组首次直接探测到来自致密双星源的引力波辐射。这次探测以及此后完成的89次探测，验证了线性化近似下的爱因斯坦广义相对论。谜题的下一步，是利用已探测事件的整体数据，提取完整非线性广义相对论所预言的重要特征。1991年，Christodulou [1] 估算了非线性广义相对论的一种特殊推论——引力记忆效应所诱发的应变。该效应预言，引力波经过后，时空中会留下永久的非零应变。估算表明，对于致密双星源，这种现象的幅度仅比线性化广义相对论预言的引力波应变低一到两个数量级。Christodulou的研究结果发表后不久，A. G. Wiseman、C. M. Will 和 K. S. Thorne [2] 指出，Christodulou记忆效应本质上由出射辐射本身产生；换言之，以粒子能量来描述，这种额外应变是由运动引力子的能量所诱发的。因此，他们推导出了横向无迹（TT）规范下记忆效应所诱发的时间相关应变表达式，该表达式在 $t \to \infty$ 渐近极限下与Christodulou的研究结果相符：

$$h_{\mathrm{Mem}ij}(t) = \frac{4G}{rc^4}\int_{-\infty}^{t}\int_{\Omega'}\frac{dE}{dtd\Omega'}\frac{n'_i n'_j}{1-\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{z'}}d\Omega' dt \quad (1)$$

此处 $\frac{dE}{dtd\ \Omega'}$ 表示单位立体角内辐射引力波的能量通量。带撇号的坐标表示源参考系中的坐标（见图1），$\overrightarrow{z'}$为视线矢量。空间积分遍及以源为中心、在时间 t经过探测器的整个球面波前。时间积分表示将这些波前产生的无穷小应变贡献从过去累积至现在，从而形成“记忆效应”。图2 展示了GW150914 的应变及其对应产生的记忆应变。GW150914 是 LIGO探测器探测到的首个事件 [3], ，假设其为等质量双星，并使用方程1 的简化版本，参见第II节。

我们发现，对于恒星级和中等质量致密双星，记忆波形比辐射波形弱一个数量级。因此，需要对探测到的事件进行集合叠加，其中累积信噪比统计量的平均值随探测事件数量的平方根增长。Grant 等人 [4]估算了直接在地面探测器的数据流中探测引力记忆所需的探测器运行时间。

在这项工作中，我们提出了一种替代方案：利用地面探测器（LIGO、爱因斯坦望远镜（ET）[9], 和宇宙探索者（CE）[10, 11]）的事件触发信号，在未来空间引力波探测器（LISA [5] 以及后续的类LISA任务概念 ALIA [6], 、AMIGO [7]和 Folkner [8]）的数据流中搜索记忆印迹。其中一个优势

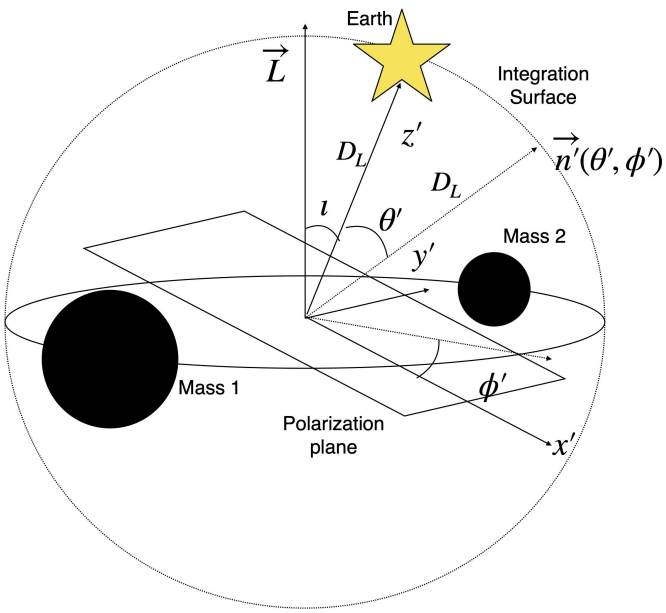


图 1. 致密双星源的源参考系坐标系。 z' 轴固定为视线方向， ι 为倾角，即源的角动量 $\vec{L}$ 与视线之间的夹角。此外， x' 轴定义为与 z' 和 $\vec{L}$共面，而 y' 轴的定义使得 x'、 y'、 z' 构成一个正交右手坐标系

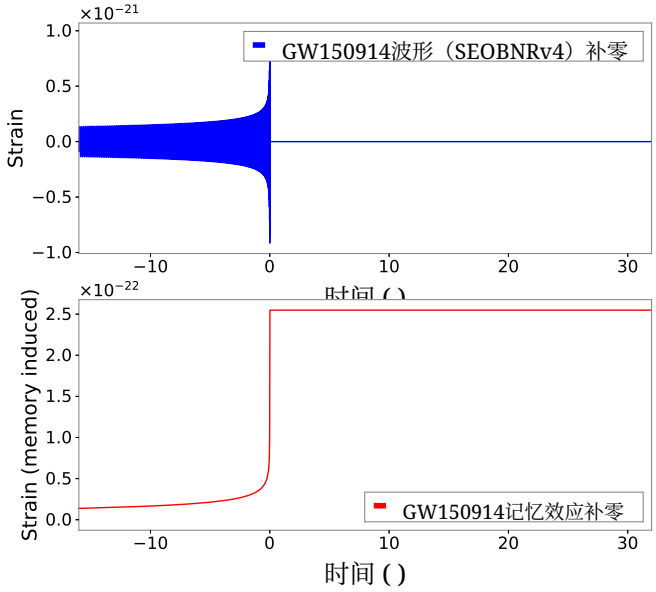


图 2. 上图：GW150914应变波形（SEOBNRv4近似模型）；下图：由引力波辐射产生的记忆应变。

是利用空间引力波探测器数据流的优势：往返光行时比记忆波形的上升时间长1至4个数量级。Divakarla 在其论文中 [12] 指出，上升时间与 $\mathcal{O}(\frac{GM_{\rm total}}{c^3})$成比例。我们计算了本文所考虑的质量最大的等质量双星系统（ $M_{\rm total} = 10^4 M_\odot$）的上升时间（采用相同定义），结果约为0.5秒，比LISA的往返光行时短33倍[5]。这种时间尺度上的差异意味着，记忆信号的持续时间主要由往返光行时决定，信号形态主要由源相对于探测器的天区位置决定，而其他所有参数只决定信号的振幅（见图4）。因此，我们可以在时域中使用简单的叠加算法，并用单个模板波形计算所有事件的记忆信噪比。

本文结构安排如下：第二节 扩展了方程1 ，并计算了记忆波形在 LISA 的 TDI X数据流中的响应。第三节III介绍一种累积信噪比统计量，该统计量通过前述叠加或组合各个记忆效应构成，并利用 GW150914 的记忆效应作为玩具模型，估算叠加信号对该累积信噪比的影响。我们还利用现有的 LIGO 事件目录，估算 LISA 探测器的运行时间

，以累积足够的记忆信噪比，使其超过预设阈值 5。第四节 将此计算推广，以估算使用 LIGO（具有 A$^\#$ 灵敏度）、宇宙探索者和爱因斯坦望远镜等未来地面探测器触发事件目录时所需的运行时间，而非使用 LIGO 触发事件。第五节V将第四节 中的计算扩展至未来的类 LISA 任务概念，即 ALIA、AMIGO 和 Folkner。第六节VI 讨论结论及未来影响。

II. LISA 探测器对记忆波形的响应

图中源参考系坐标的选择1 确保记忆应变波形沿$x' - y'$ (+)方向极化。此外，公式1 中的记忆应变张量可简化为一个包含光度距离 $D_{\rm L}$、倾角 ι 以及占主导地位的 $l = 2$, $m = 2$ 适用于等质量无自旋双星系统的自旋加权球谐函数[12] (注：本文所有计算均假设双星系统等质量且自旋为零)

$$h(t) = h_{\rm Mem+}(t) = h_{\rm Mem11} = -h_{\rm Mem22} = \frac{D_{\rm L}}{192\pi c}\sin^2\iota(17+\cos^2\iota)\int_{-\infty}^{t}|\dot{h}_{22}(t)|^2 dt \tag{2}$$

$$h_{\rm Mem\times}(t) = h_{\rm Mem12} = h_{\rm Mem21} = 0 \tag{3}$$

为计算 LISA 臂中的记忆效应诱导的应变响应，我们遵循 [13] ，并引入图中定义的一组新的“探测器坐标系”坐标。3。根据这些约定，

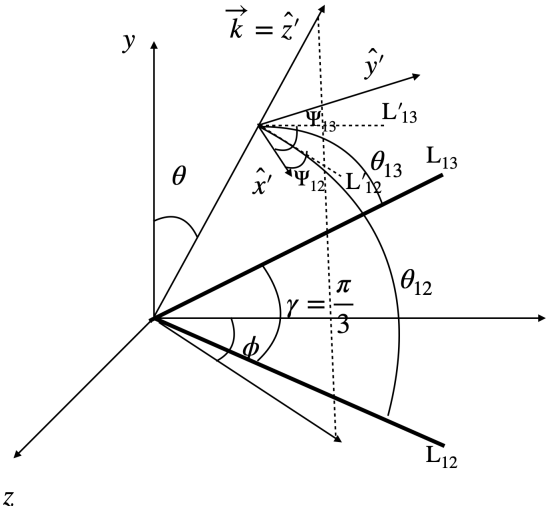


图3. 探测器坐标系。 x'、 y'、 z' 表示源参考系坐标。L_{12}, L_{13} 表示 LISA 臂，其张角为 $\gamma = \pi/3$，SC_1 为主航天器。探测器的 x轴固定在两臂小夹角的角平分线上，而 z轴则垂直于两臂。偏振角 Ψ_{12}、 Ψ_{13} 定义为 LISA 臂在偏振平面（L'_{12}、L'_{13}）上的投影与 x' 轴之间的夹角

LISA 臂中的应变响应（z_{1j}）（臂长相等，SC_1 为主航天器，且臂长在光行时尺度内保持恒定）可用记忆应变 $h(t)$、航天器间光行时 $\tau = 8.3$ 秒、偏振角Ψ_{12}、 Ψ_{13} 以及各臂沿传播方向张开的角度 θ_{12}、 θ_{13} [13]表示：

$$z_{1j}(t) = \frac{\cos(2\Psi_{1j})}{2\tau}\left(\int_{t-2\tau}^{t} h(t)dt - \cos\theta_{1j}\left(\int_{t-\tau(1+\cos\theta_{1j})}^{t} h(t)dt - \int_{t-2\tau}^{t-\tau(1+\cos\theta_{1j})} h(t)dt\right)\right);\ j = 2,3 \tag{4}$$

第一个积分表示波垂直入射探测器平面时的臂响应，而第二和第三个积分则表示斜入射的修正项；斜入射会导致波在不同时间到达各个航天器。

LISA 的后处理算法——时间延迟干涉测量（TDI） [14]旨在将主要的激光频率噪声降至亚皮米级。之后，预计散粒噪声将在 3 mHz 以上占主导，而加速度噪声将在 3 mHz 以下占主导。我们假设噪声背景由散粒噪声主导，且每个科学光电二极管上的白噪声位移振幅谱密度（ASD）为 [15]:

$$\tilde{n}_s = \frac{5\,\mathrm{pm}}{\sqrt{\mathrm{Hz}}} \tag{5}$$

因此，单臂响应中的噪声贡献为

$$n_{1j}(t) = n_{s1j}(t) - n_{sj1}(t-2\tau);\ j = 2,3 \tag{6}$$

其中， τ 是单程光行时， n_{sij} 是与航天器 j相连的航天器i 上的科学光电二极管的散粒噪声。单臂总干涉仪应变响应为：

$$s_{1j}(t) = z_{1j}(t) + n_{1j}(t);\ j = 2,3 \tag{7}$$
$$\Delta_1(t) = s_{12}(t) - s_{13}(t) \tag{8}$$

本文使用 $TDI_{1.0}$ X 数据流，该数据流由第一代 TDI 算法生成，该算法假设在往返光行时的时间尺度内，干涉仪臂长保持恒定。此外，为简化计算，我们还假设干涉仪臂长度相等。在这一假设下，$TDI_{1.0}$ X [14] 响应可简化为：

$$X_{1.0}(t) = \Delta_1(t) - \Delta_1(t-2\tau) \tag{9}$$

请注意，对于 LISA 的科学运行，需要考虑臂长不等的情况，以减去激光频率噪声。鉴于 LISA 的臂长失配对应的光行时为 $\Delta\tau < 130$ 毫秒，我们估计，在等臂假设下计算出的记忆信噪比，其修正量会小一个 O 倍（10^{-3}）。此外，LISA 的科学运行很可能会采用第二代 TDI 算法 TDI2.0，该算法考虑了单次往返光行时内臂长的变化。尽管我们预计使用 TDI $\Delta\tau < 130$ 数据流计算出的记忆信噪比不会发生显著变化（如果有变化的话），

我们计划在未来的工作中使用 TDI 2.0 数据流。

图4 展示了 GW 150914 记忆效应在 LISA 干涉仪和 $\mathrm{TDI}_{1.0}X$ 响应中引起的长度变化，固定方位角 ϕ 下不同极角（见θ 图3）以及对应的最优偏振角（分别针对干涉仪（IFO）和 TDI 响应） Ψ_{12} 和 Ψ_{13}。请注意，图中所选的偏振角是针对正号记忆效应的最优值。变换（Ψ_{12}, Ψ_{13}）$\rightarrow$ $(\frac{\pi}{2}+\Psi_{12}, \frac{\pi}{2}+\Psi_{13})$给出相应的负号记忆效应。

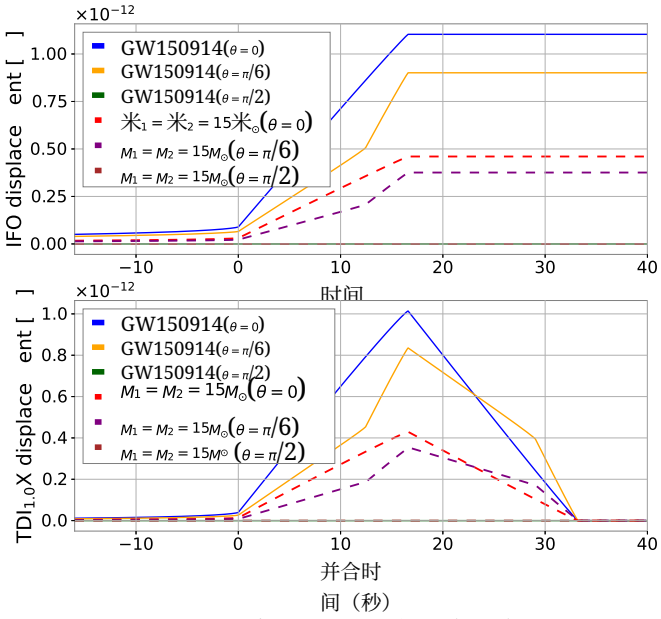


图4. GW150914 记忆效应在 LISA 干涉仪（上图）和 $\mathrm{TDI}_{1.0}$X（下图）数据流中引起的测试质量（TM）位移图。曲线是在方位角固定为 $\phi = 0$、偏振角为 Ψ_{12} 和 Ψ_{13} 的条件下生成的，这些角度给出了最佳的正号记忆效应。作为比较，图中还绘制了位于相同光度距离处的一个15 $M_\odot$ 等质量、零自旋致密双星的类似曲线。

III. 记忆信噪比计算

从图5可以明显看出，散粒噪声主导了 GW150914 的响应，其他恒星质量/中等质量致密双星的情况也一样。此外，根据方程4 和图 4可知，TDI X 中的记忆效应响应类似于（在第III B节中进一步量化）一个三角脉冲（$h_\Delta(t)$，其底边长度为4τ，并从并合时间开始。这两项观察促使我们考虑查找已记录引力波事件的并合时刻，并创建一个组合

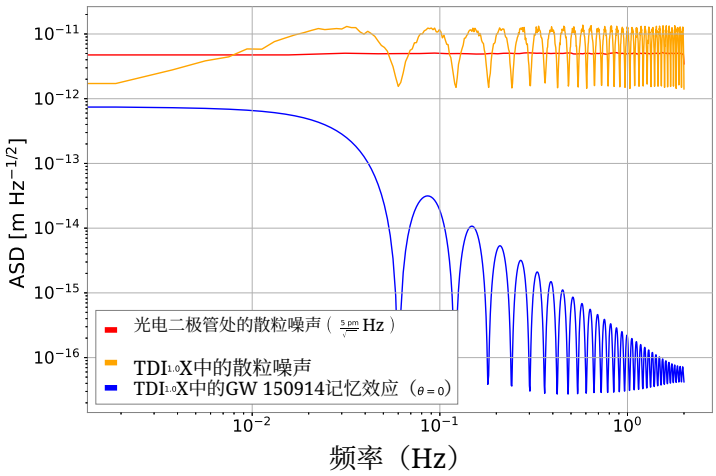


图5. $\mathrm{TDI}_{1.0}$X中GW 150914记忆效应（最佳定向）与散粒噪声背景的对比

数据流， $X_{\mathrm{stack}}(t)$，方法是叠加从这些并合时刻开始、长度为X_i 4τ 秒的 TDI 数据片段。叠加时采用适当的权重因子（w_i），并通过一个通用匹配滤波器进行处理，该滤波器使用三角脉冲模板。（注：除去倾角和天空方向角非最优的影响（见第III B节），与使用根据记忆波形本身推导出的模板相比，使用三角脉冲模板会导致信噪比损失 $< 0.2\%$，在最坏情况下如此；最坏情况对应于倾角为 $M_{\mathrm{Tot}} = 10^4 M_\odot$的双星系统。）

本节分为三个小节。在第III A节中，我们定义累积信噪比统计量，并给出用于提取记忆信号的相应探测阈值信噪比。在第III B节中，我们随后将信噪比统计量应用于一组类似GW 150914的事件。考虑到探测器取向非最佳所导致的信噪比损失（图4中的橙色和绿色曲线）以及源倾角导致的源功率损失（方程2），我们估算了达到信噪比阈值所需的类似GW 150914事件数量。最后，在第III C节中，我们利用标度论证计算LISA在LIGO的O3科学运行期间探测到的事件所累积的预期记忆信噪比 [16, 17]。我们估算具有O3灵敏度的类LIGO探测器需要多长时间才能探测到足够多的事件，使LISA中的累积记忆信噪比超过预设阈值。

A. 记忆信噪比统计量

本文给出了与三角脉冲模板 $d(t)$ 匹配的一般数据流 $d(t)$ 的信噪比定义，模板的

单位高度为 $h_\Delta(t)$，其定义如下：

$$\mathrm{SNR} = \frac{\overrightarrow{d(t)}^\dagger C^{-1} \overrightarrow{h_\Delta(t)}}{\sqrt{\overrightarrow{h_\Delta}^\dagger C^{-1} \overrightarrow{h_\Delta(t)}}} \tag{10}$$

其中 C 是 d（t）的噪声协方差矩阵，其矩阵元素为：

$$C_{ij} = \langle (\mathrm{noise}(d[i])^*)\,(\mathrm{noise}(d[j]))\rangle. \tag{11}$$

其中 $d[i]$，$d[j]$ 分别表示数据流 i^{th} 的 j^{th} 元素 d（t），尖括号表示系综平均。此 SNR 定义等价于 LIGO 的模型搜索分析中使用的著名频域最优匹配滤波器 SNR 定义 [18]。对于零均值噪声背景，我们可以看到，在没有信号的情况下，方程10 中的 SNR 统计量均值为零，标准差（σ_{SNR}）为 1。因此，我们采用 5 作为 SNR 阈值，以判定是否实现 5σ 探测。

如上所述，我们计算所用的数据流是 N 个 TDI 数据片段的加权组合，其噪声背景由散粒噪声主导。因此，数据流为

$$\overrightarrow{d(t)} = \sum_{i=1}^{N} w_i \overrightarrow{X_i(t)} \tag{12}$$

协方差矩阵的形式为：

$$C = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i^2\right) \langle n^2_{\mathrm{shot}}(t)\rangle \begin{pmatrix} 8\mathrm{I}_{2\tau\times 2\tau} & -4\mathrm{I}_{2\tau\times 2\tau} \\ -4\mathrm{I}_{2\tau\times 2\tau} & 8\mathrm{I}_{2\tau\times 2\tau} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} w_i^2\right) C_{1\ \mathrm{event}} \tag{14}$$

这里 $\langle n^2_{\mathrm{shot}}(t)\rangle = \tilde{n}_s^2 \frac{f_{s_{\mathrm{LISA}}}}{2}$是各科学光电探测器中散粒噪声的方差（根据方程5推导得出）。LISA 的采样率为 $f_{s_{\mathrm{LISA}}} = 4$ Hz，根据奈奎斯特准则，频带内的最高频率为 2 Hz。此外，$I_{2\tau\times 2\tau}$ 表示一个66×66 单位矩阵（66 =最大整数（$2\tau f_{s_{\mathrm{LISA}}}$））。

权重 w_i 的最优选择对应于在存在信号时使信噪比统计量的期望值最大化的选择。将 X_i 的信号分量建模为高度为 a_i的已知三角形，我们有

$$\mathrm{signal}(X_i(t)) \approx a_i h_\Delta(t). \tag{15}$$

因此，利用公式10，存在信号时信噪比的期望值为

$$\langle \mathrm{SNR}\rangle = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} a_i w_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N} w_j^2}}\right) \sqrt{h_\Delta C^{-1}_{1\mathrm{event}} h_\Delta}, \tag{16}$$

其最大值为

$$\langle \mathrm{SNR}\rangle_{\mathrm{Max}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)} \sqrt{h_\Delta C^{-1}_{1\mathrm{event}} h_\Delta} \tag{17}$$

对于权重 $w_i = a_i$的选择。

请注意，这里我们作出了一个关键假设，即已知记忆信号的符号（即每个 a_i的符号），而这一点仅由式2无法确定。Lasky等人 [19] 提出了一种方法，可以根据振荡引力波波形的高阶模式测定记忆效应的符号。

B. LISA中GW 150914 类似事件的记忆信噪比

利用第III A节中信噪比的定义，我们通过叠加 GW150914 类事件来计算累积的记忆信噪比。我们模拟了多个 TDI X数据流，每个数据流均由具有最优源倾角（$\iota = \pi/2$）和最优探测器取向（$\theta = 0$，见图3）的 GW150914 记忆信号，以及随机生成的散粒噪声背景组成。图6 展示了信噪比随叠加事件数据流数量增加而累积的情况。我们看到，叠加约 5 个数据流后，信号便超过噪声背景；叠加 1000 个数据流后，信噪比最终达到 14.11。该图还证实，信噪比与事件数量之间存在平方根依赖关系。由此，我们可以外推并估计，一个取向最优的 GW 150914事件的平均信噪比为 0.45，因此需要叠加约 125 个取向最优的类似 GW150914 的事件，才能超过信噪比阈值 5。

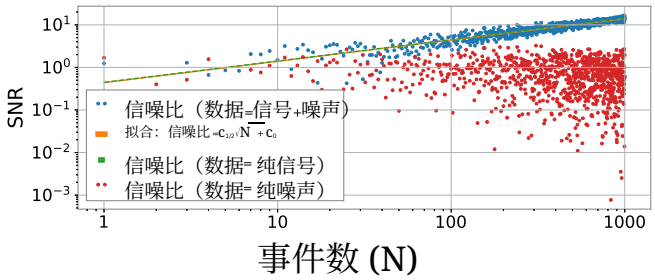


图6. 匹配滤波器信噪比随最佳取向的 GW150914 事件数的变化。

现在我们使用方程2 和4 来估算对倾角 ι 和天空方向角（θ，ϕ）取平均所产生的影响，即估算由于信号强度减弱（事件的取向并非最优）而损失的信噪比，以及使用三角形模板提取这些取向并非最优的事件而损失的信噪比。假设这三个角度彼此独立且均匀分布。我们使用方程2

估算对倾角取平均所产生的影响ι，并使用方程4 估算对天空方向（θ，ϕ）和偏振（Ψ_{12}，Ψ_{13}）角取平均所产生的影响。这四个角度 ι，θ，ϕ 和 $\Psi_+ = \Psi_{12} + \Psi_{13}$ 彼此独立，并假设均匀分布，而 $\Psi_- = \Psi_{12} - \Psi_{13}$ 是 θ 和ϕ 的函数。

倾角平均信噪比与最大信噪比之比为

$$\frac{\langle \mathrm{SNR}(\iota)\rangle_\iota}{\mathrm{SNR}(\iota=\pi/2)} = \frac{\langle \sin^2\iota(17+\cos^2\iota)\rangle}{17} \approx 0.50 \qquad (18)$$

同样，我们使用公式4 来估算信噪比从正交入射到探测器平面时的下降比例（见图7）。因此，对天空方向和偏振角进行平均，得到其占最大信噪比的比例（$\theta = 0$，$\Psi_+ = \pi/2$）

$$\frac{\langle \mathrm{SNR}\rangle_{\theta,\phi,\Psi_+}}{\mathrm{SNR}(\theta=0,\Psi_+=\pi/2)} = 0.55\frac{2}{\pi} \qquad (19)$$

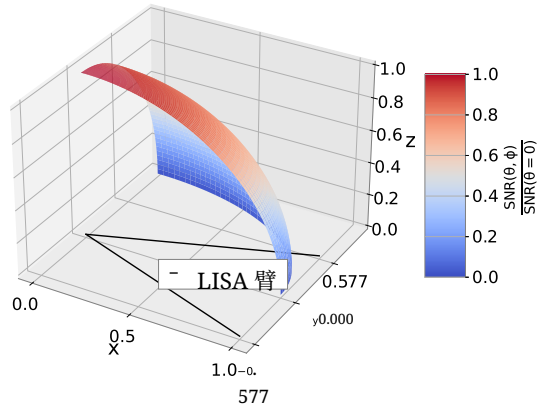


图 7. 在偏振角取最优值时，信噪比随天空方向的变化（$\Psi_+ = \pi/2$）。

根据方程18 和19，我们推导出单个类似 GW150914 的事件所产生的平均记忆信噪比为0.055 $\left(= \left[(0.5)\left(0.55\frac{2}{\pi}\right)\right]\right.$ $\left.(0.45)\right)$。因此，大约需要 8000 个取向随机的类似 GW150914 的事件，才能超过 5 的信噪比阈值。

C. LIGO O3目录的记忆信噪比

为了粗略估计 LIGO O3目录事件的记忆信噪比，我们在图8中估计了 SEOBNRv4波形模型类下记忆振幅（a）与双星啁啾质量（$\mathcal{M}_c$）之间的标度关系。

根据图表，我们推导出一个经验标度关系：

$$a \propto D_{\mathrm{L}}^{-1}(\mathcal{M}_c)^\alpha; \quad \alpha = 0.96 \qquad (20)$$

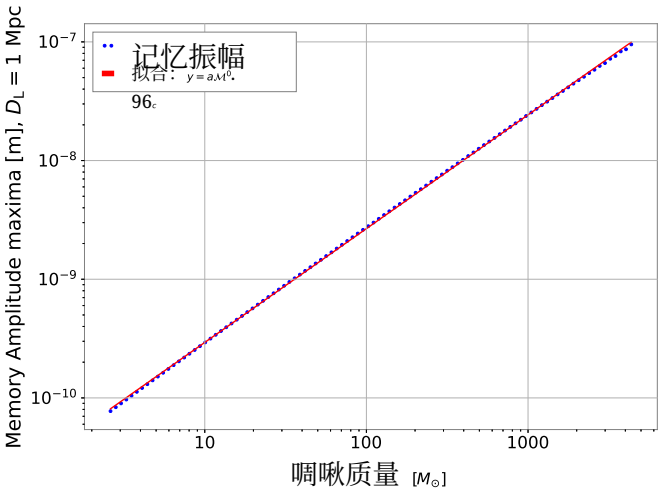


图8. 记忆波形最大值随啁啾质量的变化规律$\mathcal{M}_c$，适用于位于光度距离 $D_{\mathrm{L}} = 1$ Mpc 处的双星系统

(请注意，$D^{-1}{}_{\mathrm{L}}$ 依赖关系来自方程2）。此外，对于 LIGO目录中具有 O3灵敏度 [16, 17], 的事件，我们发现

$$\sqrt{\sum_{\mathrm{CatalogEvents}} D_{\mathrm{L}}^{-2}(\mathcal{M}_c)^{2\alpha}} \gtrsim 1.9(D_{\mathrm{L}}^{-1}(\mathcal{M}_c)^\alpha)_{150914} \qquad (21)$$

$$\therefore \sqrt{\sum_{\mathrm{CatalogEvents}} a^2} \gtrsim 1.9\, a_{150914} \qquad (22)$$

因此，根据方程17 ，O3目录的累积记忆信噪比与 GW 150914 的记忆信噪比之间的关系为：

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{O3Catalog}} \gtrsim 1.9\,\mathrm{SNR}_{150914} = 0.1045, \qquad (23)$$

这意味着，LIGO O3运行阶段最多需要重复 2100 次，才能达到信噪比阈值 5。

根据 [16, 17, 20], ，我们发现 LIGO O3运行阶段的运行时间为 $t_{\mathrm{LIGO-O3}} \approx 0.95$ 年。因此，对于具有 O3灵敏度的 LIGO探测器，LISA 中的累积记忆信噪比将在并行运行 ≈ 2000 年后超过探测阈值。

尽管如此，我们确实预期，在 LISA 开始科学运行时，灵敏度远高于 LIGO O3#灵敏度的地面探测器（如宇宙探索者和爱因斯坦望远镜）将已投入运行。根据图9中绘制的视界红移曲线，我们预计这些探测器的事件探测率将远高于具有 O3 灵敏度的 LIGO，从而使 LISA 中的记忆信噪比累积速度快得多。第IV 节估算了利用这些未来地面探测器的预期目录，在 LISA 中探测引力记忆所需的运行时间。

关于误差分析的说明：本节估算了所需的类似 GW150914 的事件数量、LIGO O3目录的数量，以及相应地 LISA（使用 LIGO O3目录）累积到 5 的记忆信噪比所需的时间。假设波形参数已完全知晓，这些数值的不确定性完全来自信噪比统计量（方程10）的不确定性。信噪比统计量的方差为 1，因此，上述各量的误差条上下界 $1\,\sigma$分别对应于信噪比阈值为 5.5 和 4.5 时的预期值。这些量与信噪比的平方根成正比，因此上界和下界 $1\,\sigma$ 分别比均值高 21% 和低 19%。假设天体物理事件率和源分布已完全知晓，相同的误差条也适用于以下数值表中列出的所需探测器运行时间I 和 II。

IV. 利用未来地面探测器的触发信号估算 LISA 中的记忆信噪比

本节通过缩放 LIGO 的 O3 观测周期所得结果，估算未来地面引力波探测器（即采用 A$^{\#}$ 灵敏度的先进 LIGO、爱因斯坦望远镜 [9] 和宇宙探索者（CE） [10, 11] ）触发信号对应的记忆信噪比预期累积速率。运行 $T_{\rm obs}$ [年] 的某一地面探测器（d）触发信号对应的累积记忆信噪比表示为：

$$\mathrm{SNR}^{\mathrm{d}}=\kappa\sqrt{T_{\rm obs}}\sqrt{\int_{M_{\rm min}}^{M_{\rm max}}\int_{z_{\rm min}}^{z^{\mathrm{d}}_{\rm max}(M)}\left[\frac{M^{\alpha}(1+z)^{\alpha}}{D_{\rm L}(z)}\right]^{2}\left[\sum_{\rm source:s}\beta_s P_s(M)R_s(z)\right]\left[4\pi(D_{\rm C}(z))^{2}\frac{dD_{\rm C}(z)}{dz}dz\right]dM} \tag{24}$$

对红移和质量的二重积分，实质上表示探测器 d 在一年观测期间提供的所有触发信号对应的记忆波形振幅平方的预期总和。由式17 可知，信噪比与该总和呈平方根依赖关系。本文将计算范围限定为总质量介于 $1\,M_{\odot}-10^{4}M_{\odot}$之间的等质量双星。因此，红移积分的上限由地面探测器的红移视界给出 $z^{\mathrm{d}}_{\rm Max}(M)$，即总质量为 M 的等质量双星能够以 8 的信噪比被探测到的最大红移。我们利用9中引用的 GitHub 代码，计算并绘制了先进 LIGO 在 O3 和 A$^{\#}$ 灵敏度下，以及爱因斯坦望远镜和宇宙探索者的红移视界曲线（见图[21]）。因此，积分区域由红移视界曲线下方的面积表示（不过，为避免光度距离表达式在 $z=0$处出现奇点，在计算中我们采用了 $z_{\rm min}=0.01$作为红移下限；这是 LVK 迄今测得的距离最近的源）。

被积函数（与地面探测器的灵敏度无关）由以下几项相乘得到：第一项，$M^{\alpha}(1+z)^{\alpha}/D_{\rm L}(z)$，本质上与总质量为 M 、光度距离为 $D_{\rm L}(z)$处单个事件的记忆效应贡献高度成正比（根据公式20）。第二项，$\sum_{\text{源: s}}\beta_s P_s(M)R_s(z)$，表示总质量为 M 的双星系统在 $\left(\text{单位时间内出现的数量，单位为}_{\text{数量}\,M_{\odot}\mathrm{Gpc}^{3}\text{年}}\right)$。 β_s 表示某种形成渠道的相对丰度，$P_s(M)$表示该渠道归一化后的初始质量函数（IMF），$R_s(z)$表示相应的率。本文假定球状星团（GC）和孤立场双星（IF）是主要的形成渠道，其相对丰度为 $\beta_{\rm GC}=\beta_{\rm IF}=0.5$ [22]。假定场双星的初始质量函数（IMF） $P_{\rm IF}$服从幂律分布 [23] ，而球状星团的初始质量函数（IMF） $P_{\rm GC}$服从对数均匀分布 [24]。相应的红移率取自 [10, 22]。被积函数中的第三项， $4\pi(D_{\rm C}(z))^{2}\frac{dD_{\rm C}(z)}{dz}dz$ ，表示无穷小共动体积元，其中 $D_{\rm C}(z)$表示径向共动距离。用于给出 $D_{\rm L}(z)$和$D_{\rm C}(z)$表达式的宇宙学模型，假定为普朗克合作组推导的ΛCDM宇宙学 [25]。

定义了方程中所有术语后24，表 I展示了使用预计的 LIGO A$^{\#}$、爱因斯坦望远镜（ET）和宇宙探索者（CE）目录时，LISA 中记忆信噪比累积速率与使用现有 LIGO O3目录作为基准时 LISA 中记忆信噪比累积速率的比值。此外，还估算了实现信噪比 $=5$ 探测所需的运行时间。结果表明，若 LISA 的寿命为 10 年，只有使用爱因斯坦望远镜（ET），或联合使用爱因斯坦望远镜（ET）和宇宙探索者（CE），才有可能探测到记忆效应。这是因为，与其他地面探测器相比，爱因斯坦望远镜（ET）对高质量双星系统具有更大的视界红移，如图9所示。

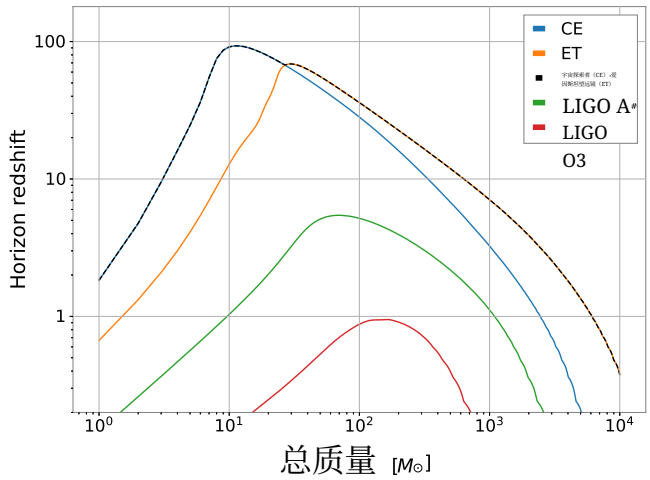


图 9. 地面探测器的视界红移 [21]。曲线表示对于最优定向的等质量双星系统，可检测到的最大红移；其信噪比阈值为 8。

探测器(d)	信噪比 $\frac{d}{\text{信噪比}_{\text{LIGO O3}}}$	LISA记忆效应探测时间[年]
CE	8.69	26
ET	18.94	6
LIGO A#	4.13	120
LIGO O3	1	2000
CE+ET	18.94	6

表 I. 使用预计的 CE、ET 和 LIGO A# 目录中的触发信号，在 LISA 的 TDI 数据流中累积达到 5 的信噪比阈值所需的时间。

V. 未来类 LISA 任务中的记忆效应探测前景

除 LISA 外，我们预计在 LISA 之后，还会有更多类LISA任务概念投入运行

本世纪下半叶开展科学运行的任务包括 ALIA、AMIGO 和 Folkner 等。相关结果见表 II。本节将简要介绍其中的每一项任务。

AMIGO 的白皮书文件 [7] 提出了与 LISA 相同的配置（臂长为 2.5 Gm，测量频带也相同），但预计加速度噪声将降低 10 倍，并通过使用 30 W 激光器及直径略大的 0.5 m 望远镜，使散粒噪声降低约 10 倍。这进而使记忆信噪比提高约 10 倍，并将探测记忆效应所需的时间缩短 100 倍。

ALIA 的设计 [6] 采用臂长为 0.5 Gm 的等边三角形，因此测量频带略高。此外，预计接收功率将提高 40000 倍，使散粒噪声限制下的位移灵敏度提高 200 倍；结合臂长缩短的影响，散粒噪声限制下的应变灵敏度将提高 40 倍，记忆信噪比将提高 $\frac{40}{\sqrt{5}}$ 倍，进而使记忆效应探测所需的时间缩短 320 倍。

与 ALIA 和 AMIGO 不同，Folkner 的干涉仪构型 [8] 采用边长为 260 Gm 的等边三角形，因此目标频率低于 LISA 频段。在散粒噪声极限下，臂长的增加被光电探测器接收功率的降低所抵消，从而使应变灵敏度几乎相同（使用 3 W 发射激光器而非 LISA 的 2 W 激光器，可带来 $\sqrt{2/3}$ 倍的提升）。使用 Folkner 的散粒噪声主导极限面临的一项挑战是，其大部分频段都受到银河系混淆噪声的主导，而这种噪声目前尚无法确定能否分辨。尽管如此，若假设银河系混淆噪声可以分辨，我们便能主要凭借往返过程积分时间的增加而提升记忆信噪比（信噪比提高 $10.2\sqrt{3/2}$倍，探测所需时间缩短至原来的 1/156）。

VI. 结论与未来展望

本文提出了一种简单的数据分析流程，利用 LISA（以及未来类似 LISA 的任务）的数据流和地面探测器的事件目录，探测 Christodoulou 的非线性引力记忆效应。其思路是，首先利用地面探测器的探测目录获取已探测事件的到达时间，然后以最优权重因子叠加从 TDI 数据流中提取的数据片段，这些片段始于

这些到达时间。随后，将复合数据流通过以三角脉冲为模板的匹配滤波器，并在时域中计算信噪比。基于简单的双黑洞天体物理种群模型（第IV节）以及根据现有 LIGO O3目录得出的记忆信噪比，表II 给出了估计值，说明对于由以下探测器目录得出的数据，LISA 及 AMIGO、ALIA 和 Folkner 等未来空间探测任务需要多长时间才能使累积记忆信噪比达到 5 的信噪比阈值

探测器(d)	$\frac{\mathrm{SNR}^d}{\mathrm{SNR}^{\mathrm{LIGO\ O3}}}$	记忆效应探测时间[年]			
		LISA	AMIGO	ALIA	Folkner
CE	8.69	26	2.3×10^{-1}	9×10^{-2}	1.4×10^{-1}
ET	18.94	6	4.8×10^{-2}	1.9×10^{-2}	3.1×10^{-2}
LIGO $A^{\#}$	4.13	120	1.0	0.4	0.7
LIGO O3	1	2000	17	7	11
CE+爱因斯坦望远镜（ET）	18.94	6	4.8×10^{-2}	1.9×10^{-2}	3.1×10^{-2}

表II。使用 来自 LISA、ALIA、AMIGO 和 Folkner 的时间延迟干涉数据流，将信噪比阈值累积至 5 所需的时间
来自预计的宇宙探索者（CE）、爱因斯坦望远镜 和 LIGO $A^{\#}$ 目录的触发事件
（ET）的触发信号

CE、ET、采用 $A^{\#}$ 的 LIGO，以及采用 O3 灵敏度的 LIGO。结果表明，LISA 与 ET 联合运行，很可能在数年协同观测后就能探测到引力记忆效应；而超越 LISA 的任务前景则更加可观。

虽然我们认为，本研究提供了良好的基准估计，以及一种在空间探测器中检测引力记忆的时域数据分析方法，但仍有一些方面可以进一步完善。其中大多数改进都涉及放宽假设，以提高估计的准确性。

1.将计算推广到非等质量情形。这需要计算并纳入 [26]式 2 中的高阶球谐贡献，并将式24 修改为对两个质量分量进行积分。

2. 我们可以通过将天空划分为若干区域，并为每个区域分配一个模板，而不是使用通用的三角脉冲模板，从而避免由 θ、ϕ 取向角造成的信噪比损失。斜入射角对应的波形类似于高度较低、带有折点的三角脉冲（例如图 4中的橙色曲线）。因此，除了为每个天空区域使用不同的模板外，我们还需要更新用于叠加数据流的相应最优权重因子。

3. 虽然本文在 $\mathrm{TDI}_{1.0}$ X 数据流中寻找记忆信号，但最终将有助于进一步扩展计算，使用 $\mathrm{TDI}_{2.0}$ 数据流来考虑一个往返光行时内臂长的变化。直观而言，我们预计这些变化不会导致本文给出的估算结果发生显著改变。

VII. 致谢

我们感谢 BernardWhiting 富有成果的讨论。此外，本研究得到 由美国国家航空航天局（NASA）拨款资助，项目编号为 80NSSC20K0126 和 80NSSC19K0324；我们谨此感谢 NASA 对本研究的资助。最后，本研究使用了 LVK 合作组观测运行期间公开提供的数据，并声明如下：“本研究使用了从引力波开放科学中心（gw-openscience.org）获取的数据或软件。该中心由 LIGO 实验室、LIGO科学合作组、Virgo 合作组和 KAGRA 提供服务。LIGO 实验室和先进 LIGO 的经费来自美国国家科学基金会（NSF）、英国科学技术设施委员会（STFC）、马克斯·普朗克学会（MPS）以及下萨克森州（德国），用于支持先进 LIGO 和 GEO600 探测器的建设，以及先进 LIGO 的建设和运行。澳大利亚研究理事会为先进 LIGO 提供了额外资助。Virgo 通过欧洲引力观测台（EGO）获得资助，资助方包括法国国家科学研究中心（CNRS）、意大利国家核物理研究院（INFN）和荷兰 Nikhef，并得到比利时、德国、希腊、匈牙利、爱尔兰、日本、摩纳哥、波兰、葡萄牙和西班牙各机构的资助。KAGRA 的建设和运行经费来自日本文部科学省（MEXT）、日本学术振兴会（JSPS）、韩国国家研究基金会（NRF）和科学技术信息通信部（MSIT），以及中央研究院（AS）和台湾科技部（MoST）。”

[1] D. Christodoulou, 《物理评论快报》67，1486（1991）。[2] A. G. Wiseman 和 C. M. Will, 《物理评论D》44，R2945（1991）。[3] B. P. Abbott *et al.*（LIGO科学合作组和 Virgo 合作组）, 《物理评论快报》116，061102（2016）。[4] A. M. Grant 和 D. A. Nichols, 《利用当前和未来的引力波探测器探测引力波位移和自旋记忆效应的展望》（2022）。[5] P. Amaro-Seoane *et al.*, 《激光干涉仪空间天线》（2017）, arXiv:1702.00786 [astro-ph.IM]。[6] J. Crowder 和 N. J. Cornish, 《物理评论D》72，083005（2005）, arXiv:gr-qc/0506015。[7] V. Baibhav *et al.*, 《实验天文学》51，1385（2021）, arXiv:1908.11390 [astro-ph.HE]。[8] W. Folkner, 《非无拖曳引力波任务架构》（2011）。[9] S. Kroker 和 R. Nawrodt, 《IEEE仪器与测量杂志》18，4（2015）。[10] M. Evans、R. X. Adhikari、C. Afle、S. W. Ballmer、S. Bis-coveanu、S. Borhanian、D. A. Brown、Y. Chen、R. Eisen-stein、A. Gruson、A. Gupta、E. D. Hall、R. Huxford、B. Kamai、R. Kashyap、J. S. Kissel、K. Kuns、P. Landry、A. Lenon、G. Lovelace、L. McCuller、K. K. Y. Ng、A. H. Nitz、J. Read、B. S. Sathyaprakash、D. H. Shoemaker、B. J. J. Slagmolen、J. R. Smith、V. Srivastava、L. Sun、S. Vitale 和 R. Weiss, 《宇宙探索者：科学、天文台与社群愿景研究》（2021）。[11] D. Reitze、R. X. Adhikari、S. Ballmer、B. Barish、L. Bar-sotti、G. Billingsley、D. A. Brown、Y. Chen、D. Coyne、R. Eisenstein、M. Evans、P. Fritschel、E. D. Hall、A. Laz-zarini、G. Lovelace、J. Read、B. S. Sathyaprakash、D. Shoemaker、J. Smith、C. Torrie、S. Vitale、R. Weiss、C. Wipf 和 M. Zucker, 《宇宙探索者：美国对 LIGO 之后引力波天文学的贡献》（2019）, arXiv:1907.04833 [astro-ph.IM]。[12] A. K. Divakarla, *Memory effects in the era of Gravitational-Wave Astronomy*，博士论文，佛罗里达大学（2021）。[13] S. L. Larson、W. A. Hiscock 和 R. W. Hellings, 《物理评论D》62，062001（2000）。[14] M. Tinto、F. B. Estabrook 和 J. W. Armstrong, 《物理评论D》65，082003（2002）。[15] M. Hewitson、E. Fitzsimons 和 W. Weber，LISA 性能模型与误差预算, LISA- AEI-INST-TN-003（2020）。[16] R. Abbott *et al.*（LIGO科学合作组和 Virgo 合作组）, 《物理评论X》11，021053（2021）。[17] LIGO科学合作组、Virgo 合作组、KAGRA合作组织、R. Abbott、 *et al.*, Gwtc-3：LIGO 和 Virgo 在第三次观测运行的后半阶段观测到的致密双星并合（2021）。[18] D. Brown, *Searching for Gravitational Radiation from Binary Black Hole Machos in the Galactic Halo*，博士论文，威斯康星大学密尔沃基分校（2004）。[19] P. D. Lasky、E. Thrane、Y. Levin、J. Blackman 和 Y. Chen, 《物理评论快报》117，061102（2016）。[20] R. Abbott *et al.*, SoftwareX 13，100658（2021）。[21] H.-Y. Chen、D. E. Holz、J. Miller、M. Evans、S. Vitale 和 J. Creighton, 《经典与量子引力》38，055010（2021）。[22] K. K. Y. Ng、S. Vitale、W. M. Farr 和 C. L. Rodriguez, 《天体物理学杂志快报》913，L5（2021）。[23] K. Belczynski、T. Ryu、R. Perna、E. Berti、T. L. Tanaka 和 T. Bulik, 《皇家天文学会月报》471，4702（2017）, https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/471/4/4702/1964425

4/

[24] C. L. Rodriguez 和 A. Loeb, 《天体物理学杂志》**866**，L5（2018）。[25]Alves, Joao, Combes, Fran.coise, Ferrara, Andrea, Forveille, Thierry, and Shore, Steve, 《天文学与天体物理学》**594**，E1（2016）。[26] C. Talbot, E. Thrane, P. D. Lasky, 和 F. Lin, 《物理评论D》**98**，064031（2018）。