arXiv:2302.04433v1 [math.NA] 9 Feb 2023

Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson 方程的高效数值方法*

XIAOLAN ZHOU[1] 和徐传举[1,2]

Abstract. 本文提出了用于演化 Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson 方程的高效一阶/二阶时间步进格式。所提出的格式通过辅助变量重构以及对不同方程间耦合项的精细处理构造而成。通过为辅助变量引入动力学方程，并将原方程重构为一个等价系统，我们为所研究的问题构造了一阶和二阶半隐式线性化格式。所提方法的主要优点如下：(1) 格式无条件稳定，即离散能量在时间步进过程中持续衰减；(2) 离散解的浓度分量保持正性和质量守恒；(3) 精细的实现表明，所提格式能够高效实现，其计算复杂度接近半隐式格式。本文给出了一些数值算例，以展示所提方法的精度和性能。据我们所知，这是首个满足上述所有性质的 Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson 方程二阶方法。

1. Introduction and motivation

纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松（NSNPP）耦合系统是一种常用模型，用于描述起源于生物电子应用的电流体动力学现象。该系统也称为电流体动力学，用于研究带电流体的动力学、电离粒子或分子的运动，以及它们与电场和周围流体的相互作用。在电流体动力学中，悬浮于流体中的不同价态离子受流体流动和电势驱动；电势则同时由施加在边界上的电势和离子所携带的电荷分布产生。此外，离子的浓度梯度会驱动离子扩散。反过来，离子产生的电场会推动流体流动。这些情况常见于大量物理、生物物理和工业过程中。关于该系统物理背景问题的更多详情，请参阅 [2, 24]及其中的参考文献。

NSNPP系统的数学性质已在许多论文中得到研究。文献 [14]在全空间中证明了解的局部存在性。Schmuck在文献 [26] 中针对离子满足阻塞边界条件、电势满足齐次诺伊曼边界条件的情形，证明了二维和三维有界区域中弱解的整体存在性与唯一性，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 65M12、65M70、65Z05。*Key words and phrases.* 纳维–斯托克斯、能斯特–普朗克–泊松、时间步进格式、稳定性、保正性。

*本研究部分由国家自然科学基金委员会项目（11971408）资助。[1]厦门大学数学科学学院及福建省数学建模与高性能科学计算重点实验室，中华人民共和国福建省厦门市 361005。[2]通讯作者。邮箱：cjxu@xmu.edu.cn（C. Xu）。

电势。Ryham [25]考虑了电势满足齐次狄利克雷边界条件的情形，并证明了二维情况下大初始数据以及三维情况下小初始数据和小外力所对应弱解的整体存在性。Bothe [3] 研究了电势满足罗宾边界条件的情形，并证明了二维情况下的整体存在性与稳定性。Zhao等人 [35] 证明了任意初始数据下的局部适定性，以及临界勒贝格空间中小初始数据下的整体适定性。Deng等人 [9] 将这一结果推广到了负指标的特里贝尔-利佐金空间和贝索夫空间。Zhang [34] 证明了二维柯西问题的整体存在性，并建立了 L^2 利用傅里叶分裂方法得到的解的衰减估计。Constantin [7, 8, 22] 研究了不同边界条件下光滑解的整体存在性。

关于NSNPP系统的数值方法也已有多项研究。Yang等人 [32] 提出了人工压缩性方法和有限差分/交替方向方法。Tsai等人 [31]将该方法应用于毛细管电泳微芯片，并测试了不同配置的若干注入系统。Prohl和Schmuck [23] 采用有限元方法进行空间离散，并使用隐式时间离散化，以保持离子浓度的非负性。他们还研究了一种不保持非负性的投影方法。He和Sun [11] 提出了若干NSNPP的时间步进和有限元方法，在一定条件和特定空间离散下，这些方法能够保持正性和/或某种形式的能量耗散。这些方法的缺点是在每个时间步都需要求解非线性方程。Liu和Xu [20] 通过结合若干时间方向的有限差分格式与空间离散的谱方法，提出了不同阶数的数值方法。所提出的格式需要在每个时间步求解若干带时变系数的椭圆方程。文中证明了一阶格式具有保正性。

标量辅助变量方法（通常称为 SAV） [28, 29], 近年来受到了广泛关注。已有证明表明，它是为一大类问题设计无条件稳定格式的有力工具 [5, 6, 12, 15, 16, 18, 19, 33, 36]。本文旨在利用辅助变量方法，为 NSNPP 方程构造高效的时间步进格式。具体而言，我们的思路是寻找合适的辅助变量来处理方程中涉及的非线性项，并采用分裂策略对纳维-斯托克斯部分的不同未知量进行解耦。构造过程中还将采用能斯特–普朗克–泊松的函数变换方法。我们将证明，所得格式具有以下性质：

- 该格式具有保正性；- 该格式满足质量守恒；- 该格式具有无条件能量耗散性；

- 它可以高效实现：其计算复杂度等同于在每个时间步求解若干个具有常系数的解耦线性方程。

空间离散将采用谱伽辽金方法 [27], , 该方法存在用于求解常系数椭圆方程的快速求解器。我们强调，上述优良性质在全离散层面仍然成立。

本文其余部分安排如下。第 2 节首先介绍 NSNPP 系统，以及基于辅助变量方法的重构。第 3 节针对重构后的 NSNPP 方程，构造并分析一阶/二阶、线性、解耦且无条件稳定的格式。第 4 节介绍所提格式的实现细节，并说明通过求解一组常系数的解耦线性椭圆方程，可以高效地实现这些格式。第 5 节给出数值算例，以验证所提出的格式。第 6 节给出总结性意见。

2. Governing equations and reformulatation

2.1. **Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson 方程**。 设 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 为有界的 Lipschitz区域，且 $T > 0$。给定初始条件 $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, 0)$ $c_i(\boldsymbol{x}, 0)$ $(i = 1, \ldots, m)$。我们寻求速度场 $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t)$、压力 $p(\boldsymbol{x}, t)$、离子质量浓度 $c_i(\boldsymbol{x}, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ 以及静电势 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$，使其满足 $\Omega \times (0, T]$ 中的以下 Navier-Stokes-Plank-Poisson 方程 (NSNPP)：

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\big(\sum_{i=1}^{m} z_i c_i\big)\nabla \Phi, \tag{2.1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.1b}$$

$$\partial_t c_i = D_i \nabla \cdot (\nabla c_i + z_i c_i \nabla \Phi) - \nabla \cdot (\mathbf{u} c_i), \quad i = 1, ..., m, \tag{2.1c}$$

$$-\epsilon \Delta \Phi = \sum_{i=1}^{m} z_i c_i, \tag{2.1d}$$

其中， $z_i \in \mathbb{R}$ 为离子价态， D_i 表示正的常数扩散系数， $\epsilon > 0$ 是一个较小的正无量纲数，表示德拜长度的平方与物理特征长度的平方之比， $\nu > 0$ 为运动黏度。

我们考虑阻塞边界条件，即离子浓度的所有法向通量均为零：

$$\big(\mathbf{u} c_i - D_i(\nabla c_i + z_i c_i \nabla \Phi)\big) \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0, \ i = 1, ..., m, \tag{2.2}$$

其中， $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$的边界上的外法向。速度$\mathbf{u}$ 和电势 Φ的边界条件分别为

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.3}$$

and

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.4}$$

在条件（2.3）和（2.4）下，注意到恒等式 $\nabla c = c \nabla \log c$，由（2.2）可得：

$$c_i \frac{\partial(\log c_i + z_i \Phi)}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \big(\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{n}} + z_i c_i \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\big)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ i = 1, ..., m. \tag{2.5}$$

容易看出，在控制方程（2.1a）-（2.1d）中，压力 p 和静电势 Φ 均只确定到一个任意常数。为确定该常数，我们施加以下零均值条件：

$$\int_\Omega p d\boldsymbol{x} = 0, \quad \int_\Omega \Phi d\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.6}$$

我们定义两个部分能量泛函 E_{ns}， E_{npp}：

$$E_{ns} = E_{ns}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{x},$$

$$E_{npp} = E_{npp}[\{c_i\}, \Phi] := \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^m c_i(\log c_i - 1) + \frac{1}{2}\big(\sum_{i=1}^m z_i c_i\big)\Phi\Big] d\boldsymbol{x}.$$

总能量泛函定义为这两个部分泛函之和：

$$E = E[\mathbf{u}, \{c_i\}, \Phi] := E_{ns} + E_{npp}. \tag{2.8}$$

利用 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 以及边界条件（2.3）、（2.4）和（2.5），我们有

$$\begin{aligned}\frac{dE_{ns}}{dt} &= \int_\Omega \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Big[-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla p - \big(\sum_{i=1}^m z_i c_i\big)\nabla\Phi\Big]\cdot \mathbf{u} d\boldsymbol{x} \\ &= -\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \big(\sum_{i=1}^m z_i c_i\big)\nabla\Phi\cdot\mathbf{u} d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

将（2.1c）与 $\log c_i + z_i\Phi$作内积，对 $i = 1, \ldots\ldots, m$求和，并利用（2.1d），可得以下等式：

$$\frac{dE_{npp}}{dt} = \sum_{i=1}^m \int_\Omega -D_i c_i |\nabla(\log c_i + z_i\Phi)|^2 d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^m \int_\Omega -\nabla\cdot(\mathbf{u}c_i)(\log c_i + z_i\Phi) d\boldsymbol{x}. \tag{2.10}$$

此外，对于右侧的第二项，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \int_\Omega -\nabla\cdot(\mathbf{u}c_i)(\log c_i + z_i\Phi) d\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^m \int_\Omega (\mathbf{u}c_i)\cdot\nabla(\log c_i + z_i\Phi) d\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{i=1}^m \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla c_i d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big(\sum_{i=1}^m z_i c_i\big)\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \big(\sum_{i=1}^m z_i c_i\big)\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

然后，结合（2.9）、（2.10）和（2.11）可得

$$\frac{dE}{dt} = -\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^m \int_\Omega D_i c_i |\nabla(\log c_i + z_i\Phi)|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.12}$$

引理 2.1。*NSNPP*问题 （2.1）-（2.4）满足以下性质 ：

1）质量守恒：

$$\int_\Omega c_i(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega c_i(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x}, \quad \forall t > 0. \tag{2.13}$$

2）正性：如果初始条件 $c_i(\boldsymbol{x},0) > 0$ *a.e.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$，那么 $c_i(\boldsymbol{x}, t) > 0$ *a.e.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ $t \in [0, T]$。

3）能量耗散：

$$\frac{dE}{dt} \leq 0. \tag{2.14}$$

证明。 证明很简单，可在相关文献中找到。为方便读者，下面给出证明概要。

1）对2.1c）在 Ω 上积分，并利用2.1b），即可得到2.13）。2）文献 [26]中给出了正性的证明。3）由2.12）可得所需结果2.14）。

□

2.2. **辅助变量重构**。 注意到 $\int_\Omega \sum_{i=1}^m c_i(\log c_i - 1)d\boldsymbol{x}$ 是凸的，因此存在常数 $C_0 > 0$，使得 $E_{npp}[\{c_i\}, \Phi] + C_0 \geq 1$。我们引入如下时间依赖辅助变量（AV）：

$$r(t) := \sqrt{E_{npp}[\{c_i\}, \Phi] + C_0}. \tag{2.15}$$

于是有

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{E_{npp} + C_0}} \frac{dE_{npp}}{dt}.$$

将（2.10）代入上式，加入值为零的项 $\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\boldsymbol{x}$，并乘以因子 $^{r}{}_{(t)}\sqrt{E_{npp}[\{c_i\},\Phi]+C_0}$，即可得到辅助变量 $r(t)$ 的控制方程，如下所示：

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{E_{npp} + C_0}} \Bigg[\frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}[\{c_i\}, \Phi] + C_0}} \sum_{i=1}^m \int_\Omega D_i c_i |\nabla \mu_i|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\sum_{i=1}^m z_i c_i) \nabla \Phi \cdot \mathbf{u} d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\boldsymbol{x} \Bigg].$$

对于能斯特–普朗克–泊松部分，为了保持浓度的正性 c_i，我们考虑采用变量变换技术，这项技术已在多篇论文中使用；参见 [1, 4, 13, 21]:

$$c_i = T(\sigma_i) := \exp(\sigma_i), \quad i = 1, ..., m, \tag{2.16}$$

其中 $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ 是待确定的新未知函数。通过这一变量变换，边界条件（2.5）变为

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ i = 1, ..., m. \tag{2.17}$$

引入辅助变量 r 和附加未知变量 $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$后，我们得到完整的方程组如下：

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}}\Big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\sum_{i=1}^m z_i c_i)\nabla\Phi\Big) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \tag{2.18a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2.18b}$$

$$\partial_t\sigma_i = D_i\Delta\sigma_i + D_i\big(|\nabla\sigma_i|^2 + z_i(\nabla\sigma_i\cdot\nabla\Phi + \Delta\Phi)\big) - \nabla\cdot(\sigma_i\mathbf{u}), \tag{2.18c}$$

$$c_i = \exp(\sigma_i), \quad i = 1, ..., m, \tag{2.18d}$$

$$-\epsilon\Delta\bar{\Phi} = \sum_{i=1}^m z_i c_i, \tag{2.18e}$$

$$\begin{aligned}\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}}\Big[&\frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}}\sum_{i=1}^m\int_\Omega D_i c_i|\nabla(\log c_i + z_i\Phi)|^2 d\boldsymbol{x}\\ &-\int_\Omega(\sum_{i=1}^m z_i c_i)\nabla\Phi\cdot\mathbf{u}d\boldsymbol{x} - \int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\boldsymbol{x}\Big],\end{aligned} \tag{2.18f}$$

$$\Phi = \frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}}\bar{\Phi}, \tag{2.18g}$$

满足边界条件 (2.3)、(2.4)、(2.17) 以及初始条件：

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{x}), \tag{2.19}$$

$$r(0) = \sqrt{E_{npp}[\{c_i(\boldsymbol{x},0)\},\ \Phi(\boldsymbol{x},0)] + C_0}. \tag{2.20}$$

注意到 $\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\boldsymbol{x} \equiv 0$ 以及 $\frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}} \equiv 1$，不难验证，重构后的系统 (2.18) 在连续层面上与原系统 (2.1) 严格等价。

分别将方程 (2.18a) 与 $\mathbf{u}$、方程 (2.18f) 与 $2r$ 取内积，然后将所得结果相加，得到如下能量耗散律：

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{x} + r^2\Big) = -\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2 d\boldsymbol{x} - \Big|\frac{r(t)}{\sqrt{E_{npp}(t)+C_0}}\Big|^2\sum_{i=1}^m\int_\Omega D_i c_i|\nabla\mu_i|^2 d\boldsymbol{x} \le 0.$$

接下来，我们聚焦于等价系统 (2.18)，并为该系统构造数值方法。

3. Unconditionally stable time-stepping schemes

设 Δt 为时间步长，$n \ge 0$ 表示时间步索引，而 $(\cdot)^n$ 表示时间步 n处的变量 $(\cdot)$。设

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\boldsymbol{x},0), \quad c_i^0 = c_i(\boldsymbol{x},0), \quad r^0 = r(0). \tag{3.1}$$

Φ^0 和 p^0 分别通过在 $t=0$ 约束条件（2.6）下求解方程（2.1d）和（2.1a）得到，其弱形式分别为：

$$\epsilon\int_\Omega\nabla\Phi^0\cdot\nabla q d\boldsymbol{x} = \int_\Omega(\sum_{i=1}^m z_i c_i^0)q d\boldsymbol{x}, \quad \forall q\in H^1(\Omega). \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega \nabla p^0\cdot\nabla q d\boldsymbol{x}=\int_\Omega\Big(-(\sum_{i=1}^m z_i c_i^0)\nabla\Phi^0-\mathbf{u}^0\cdot\nabla\mathbf{u}^0\Big)\cdot\nabla q d\boldsymbol{x},\quad \forall q\in H^1(\Omega). \tag{3.3}$$

3.1. **时间步进格式**。现在，我们针对等价系统（2.18）提出采用一阶/二阶后向差分公式的不同格式。

格式1：第一种格式通过采用后向差分公式1（BDF1），并对式（2.18a）-（2.18g）中的不同项作一些一阶近似来构造：给定初始数据（$u^0,p^0,\Phi^0,\{c_i^0\},r^0$），依次求解下列方程，计算 u^{n+1}, $p^{n+1},\Phi^{n+1},\{c_i^{n+1}\},r^{n+1}$，其中 $n\geq 0$

$$\frac{\sigma_i^{n+1}-\sigma_i^n}{\Delta t}-D_i\Delta\sigma_i^{n+1}=$$
$$D_i\big[|\nabla\sigma_i^n|^2+z_i(\nabla\sigma_i^n\cdot\nabla\Phi^n+\Delta\Phi^n)\big]-\nabla\cdot(\sigma_i^n\mathbf{u}^n),\ \text{with}\ \frac{\partial\sigma_i^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.4a}$$

$$\bar{c}_i^{n+1}=\exp(\sigma_i^{n+1}), \tag{3.4b}$$

$$\lambda_i^{n+1}\int_\Omega\bar{c}_i^{n+1}-\int_\Omega c_i^n=0, \tag{3.4c}$$

$$c_i^{n+1}=\lambda_i^{n+1}\bar{c}_i^{n+1},\quad i=1,...,m, \tag{3.4d}$$

$$-\epsilon\Delta\bar{\Phi}^{n+1}=\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1},\quad \text{with}\int_\Omega\bar{\Phi}^{n+1}d\boldsymbol{x}=0,\quad \frac{\partial\bar{\Phi}^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.4e}$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\Delta t}+\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}\Big[(\mathbf{u}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^n+(\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1}\Big]-$$
$$\nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\nabla p^n=0,\ \text{with}\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.4f}$$

$$\Delta\psi^{n+1}=\frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1},\ \text{with}\ \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0,$$
$$\mathbf{u}^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\Delta t\nabla\psi^{n+1},\quad p^{n+1}=\psi^{n+1}+p^n, \tag{3.4g}$$

$$\frac{r^{n+1}-r^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}\Big[\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}\int_\Omega\sum_{i=1}^m D_i\big(c_i^{n+1}|\nabla\bar{\mu}_i^{n+1}|^2d\boldsymbol{x}$$
$$-\int_\Omega(\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1}\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}d\boldsymbol{x}-\int_\Omega(\mathbf{u}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^n\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}d\boldsymbol{x}\Big], \tag{3.4h}$$

$$\Phi^{n+1}=\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}\bar{\Phi}^{n+1}. \tag{3.4i}$$

为简化表述，在上述格式中我们使用了另外两个记号 $\bar{\mu}_i^{n+1}$和 $\bar{E}_{npp}^{n+1}$:

$$\bar{\mu}_i^{n+1}=\log c_i^{n+1}+z_i\bar{\Phi}^{n+1},\ i=1,...,m, \tag{3.5}$$

$$\bar{E}_{npp}^{n+1}=E_{npp}[\{c_i^{n+1}\},\bar{\Phi}^{n+1}]. \tag{3.6}$$

Scheme2：同样的思想可用于构造二阶格式。为便于记号表示，我们将使用 $f^{*,\,n+1}$表示 $2f^n - f^{n-1}$。我们提出如下二阶格式：

$$\frac{3\sigma_i^{n+1} - 4\sigma_i^n + \sigma_i^{n-1}}{2\Delta t} - D_i\Delta\sigma_i^{n+1} = D_i\Big[|\nabla\sigma_i^{*,n+1}|^2 + z_i(\nabla\sigma_i^{*,n+1}\cdot\nabla\Phi^{*,n+1} + \Delta\Phi^{*,n+1})\Big] - \nabla\cdot(\sigma_i^{*,n+1}\mathbf{u}^{*,n+1}),\ \text{with}\ \left.\frac{\partial\sigma_i^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.7a}$$

$$\bar{c}_i^{n+1} = \exp(\sigma_i^{n+1}), \tag{3.7b}$$

$$\lambda_i^{n+1}\int_\Omega \bar{c}_i^{n+1} - \int_\Omega c_i^n = 0, \tag{3.7c}$$

$$c_i^{n+1} = \lambda_i^{n+1}\bar{c}_i^{n+1},\quad i = 1, ..., m, \tag{3.7d}$$

$$-\epsilon\Delta\bar{\Phi}^{n+1} = \sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1}\quad \text{with}\ \left(\bar{\Phi}^{n+1}, 1\right) = 0,\quad \left.\frac{\partial\bar{\Phi}^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.7e}$$

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1} + C_0}}\Big[\mathbf{u}^{*,n+1}\cdot\nabla\mathbf{u}^{*,n+1} + (\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1}\Big] - \nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n = 0,\ \text{with}\ \left.\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.7f}$$

$$\Delta\psi^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\ \text{with}\ \left.\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{2}{3\Delta t}\nabla\psi^{n+1},\quad p^{n+1} = \psi^{n+1} + p^n - \nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \tag{3.7g}$$

$$\frac{3r^{n+1} - 4r^n + r^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{1}{2\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1} + C_0}}\Big[\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1} + C_0}}\int_\Omega\sum_{i=1}^m D_i\big(c_i^{n+1}|\nabla\bar{\mu}_i^{n+1}|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega(\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1}\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}d\boldsymbol{x} - \int_\Omega(\mathbf{u}^{*,n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{*,n+1}\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}d\boldsymbol{x}\Big], \tag{3.7h}$$

$$\Phi^{n+1} = \frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1} + C_0}}\bar{\Phi}^{n+1}. \tag{3.7i}$$

纳维–斯托克斯方程的离散化，即（3.7f）-（3.7g）中的**Scheme2**在不使用辅助变量 r时，被称为旋转压力修正方法（RPC）[10, 30]。对于单独的纳维–斯托克斯方程，文献 [17]已证明，采用 RPC 和辅助变量方法进行时间半离散时具有无条件稳定性。然而，正如我们将在下一节中看到的，我们的分析表明，采用谱方法进行空间离散的完整离散格式要实现无条件稳定性，就必须对 RPC 进行修改。这就是我们在下文提出一种采用 RPC 修正版（以下简称 MRPC）的二阶格式替代方案的原因。

Scheme2b：与格式 **Scheme2**基本相同，但（3.7f）-（3.7g）被修改为

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-4\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}\Big[\mathbf{u}^{*,n+1}\cdot\nabla\mathbf{u}^{*,n+1}+(\sum_{i=1}^{m}z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1}\Big]$$
$$-\nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\nabla(p^{n}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n})=0,\ \text{with}\ \ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.7f'}$$

$$\Delta\psi^{n+1}=\frac{3}{2\Delta t}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\ \text{with}\ \ \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0,$$
$$\mathbf{u}^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\frac{2}{3\Delta t}\nabla\psi^{n+1},\quad p^{n+1}=\psi^{n+1}+p^{n}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n}-\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}. \tag{3.7g'}$$

对这一修改动机的解释见注3.1，并将在下文的稳定性分析中进一步阐明。

注3.1。 在分析稳定性之前，值得先指出上述格式与现有 NSNPP 系统格式相比的若干特点。

i）我们将在下文证明，所提出的格式具有以下性质：（1）浓度保正性；（2）质量守恒；（3）无条件稳定性；（4）每个时间步均可得到待求解的常系数解耦线性方程。特别是，据我们所知，格式（3.7）是文献中首个为 NSNPP 系统开发、具有二阶收敛性且兼具上述所有优点的格式。ii）[20] 中构造的格式在每个时间步都需要求解一些线性方程。然而，这些方程的系数随时间变化，因此每个时间步都需要重新计算系数矩阵。此外，这些格式缺乏稳定性分析。文献 [11],还提出了一种时间步进格式，但该格式是全耦合且非线性的。iii）格式（3.4）和（3.7）能够实现理想性质的关键，在于引入了适当的辅助变量，从而能够将不同的未知变量解耦，并在稳定性证明中消除不理想的非线性项。iv）与3.7f）-（3.7g）中的格式相比，**Scheme2**，我们在技术上于$\nu\nabla\cdot\tilde{}\mathbf{u}^{n}$ 中引入了附加项（3.7f'）-（3.7g'），该格式为**Scheme2b**。这一项有助于证明**Scheme2b**的全离散形式无条件稳定。然而，我们的数值测试（例如表5.1所示）表明，这一附加项对稳定性和收敛阶基本没有影响。因此，该项在格式中的作用似乎纯粹是技术性的。

3.2. **无条件稳定性**。在本小节中，我们通过分析离散能量的衰减行为，证明所提出格式的无条件稳定性。为简化记号，我们用 ξ^{n+1} 表示 $\frac{r^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp}^{n+1}+C_0}}$。下面先通过以下定理证明一阶格式的主要性质。

定理 3.1. 给定 $\{c_i^n\}, \Phi^n, \boldsymbol{u}^n, p^n, r^n, \sigma_i^n = log\ c_i^n$。假设 $c_i^n > 0$ 和 $\int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x} = \int_\Omega c_i^0 d\boldsymbol{x}, i = 0, ..., m$。那么，离散问题 *(3.4)* 的解 $(\{c_i^{n+1}\}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}, r^{n+1})$ 满足以下性质：

i) 保正性：$c_i^{n+1} > 0$。*ii)* 质量守恒：$\int_\Omega c_i^{n+1} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x}$, $i = 1, ..., m$。*iii)* 能量耗散：

$$\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \leq 0, \tag{3.9}$$

其中

$$\mathcal{E}^{n+1} := \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 + \Delta t^2 \|\nabla p^{n+1}\|^2 + |r^{n+1}|^2.$$

iv) 对所有 $n \geq 0$，量 $\|\mathbf{u}^n\|$、$|r^n|$ 和 $|\xi^n|$ 均有界。

证明。我们首先证明保正性和质量守恒。由（3.4b），可得 $\bar{c}_i^{n+1} > 0$。然后，由（3.4c）以及上一步浓度的正性，即 $c_i^n > 0$，$i = 1, \ldots, m$：

$$\lambda_i^{n+1} = \frac{\int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x}}{\int_\Omega \bar{c}_i^{n+1} d\boldsymbol{x}} > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

因此，由（3.4d）可得浓度的正性：

$$c_i^{n+1} = \lambda_i^{n+1} \bar{c}_i^{n+1} > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

质量守恒 ii) 表示为

$$\int_\Omega c_i^{n+1} d\boldsymbol{x} = \frac{\int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x}}{\int_\Omega \bar{c}_i^{n+1} d\boldsymbol{x}} \int_\Omega \bar{c}_i^{n+1} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

现在我们来证明能量耗散。将方程（L^2 3.4f）与$2\Delta t \tilde{}\mathbf{u}^{n+1}$作内积，并利用恒等式 $2\left(a^{k+1}, a^{k+1} - a^k\right) = |a^{k+1}|^2 + |a^{k+1} - a^k|^2 - |a^k|^2$可得

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2 + 2\Delta t\left(\nabla p^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) + 2\Delta t \xi^{n+1}\left(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + (\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1}) \nabla \bar{\Phi}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) \\ &= -2\Delta t \nu \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

此外，由（3.4g）可推得

$$\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^2 + \Delta t^2 \left\|\nabla p^{n+1}\right\|^2 = \left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2 + 2\Delta t \left(\nabla p^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) + \Delta t^2 \left\|\nabla p^n\right\|^2. \tag{3.11}$$

将（3.10）与（3.11）相加，得到

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2 + \Delta t^2 \left\|\nabla p^{n+1}\right\|^2 - \Delta t^2 \left\|\nabla p^n\right\|^2 \\ &+ 2\Delta t \xi^{n+1}\left(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + (\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1}) \nabla \bar{\Phi}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) = -2\Delta t \nu \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

左端最后一项（不理想项）可通过从（3.4h）中减去（3.12），再乘以 $2\Delta t r^{n+1}$ 来消去:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2-\|\mathbf{u}^n\|^2+\Delta t^2\left\|\nabla p^{n+1}\right\|^2-\Delta t^2\|\nabla p^n\|^2+|r^{n+1}|^2-|r^n|^2\\&=-2\Delta t\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2-\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}^n\|^2-\Delta t|\xi^{n+1}|^2\sum_{i=1}^m D_i(c_i^{n+1},|\nabla\bar{\mu}_i^{n+1}|^2)-|r^{n+1}-r^n|^2.\end{aligned}$$

因此，能量耗散律（3.9）由上述等式右端非正这一事实可得。

最后，$\|\mathbf{u}^n\|$, $|r^n|$ 和 $|\xi^n|$ 的有界性可直接由 $\mathcal{E}^n$, $\forall n\geq 0$ 的有界性推出。证毕。□

下一定理给出了二阶格式的类似结果。

定理 *3.2.* 给定 $\{c_i^k\}, \Phi^k, \boldsymbol{u}^k, p^k, r^k, \sigma_i^k = log\ c_i^k,\ k=n,n-1$。假设 $c_i^k>0$ 和 $\int_\Omega c_i^k d\boldsymbol{x}=\int_\Omega c_i^0 d\boldsymbol{x}$, $i=0,...,m;\ k=n,n-1$。那么，离散问题 *(3.7)* 的解 $(\{c_i^{n+1}\}, \tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}, r^{n+1})$，对于 *Scheme2* 和 *Scheme2b*，均满足以下性质：

i) 保正性：$c_i^{n+1}>0$。*ii)* 质量守恒：$\int_\Omega c_i^{n+1}d\boldsymbol{x}=\int_\Omega c_i^n d\boldsymbol{x}$、$i=1$、...、$m$。*iii)* 能量耗散：

$$\mathcal{E}^{n+1}-\mathcal{E}^n\leq 0, \tag{3.13}$$

其中，在***Scheme2***中，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{n+1}:=&\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\|2\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n\|^2+\frac{2}{3}\Delta t^2\|\nabla p^{n+1}+\nu\omega^{n+1}\|^2\\&+\nu\|\omega^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}|r^{n+1}|^2+\frac{1}{2}|2r^{n+1}-r^n|^2\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 $\{w^{n+1}\}$由以下递归定义：

$$\omega^0=0,\ \omega^{n+1}=\omega^n+\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}; \tag{3.15}$$

而在***Scheme2b***中，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{n+1}:=&\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\|2\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n\|^2+\frac{2}{3}\Delta t^2\|\nabla(p^{n+1}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\|^2\\&+\frac{1}{2}|r^{n+1}|^2+\frac{1}{2}|2r^{n+1}-r^n|^2.\end{aligned} \tag{3.15'}$$

iv) 对所有 $n\geq 0$, $\|\mathbf{u}^n\|$、$|r^n|$和 $|\xi^n|$ 均有界。

证明。 保正性 i) 和质量守恒 ii) 的证明方法与一阶格式的定理 3.1完全相同。

接下来我们证明离散能量耗散律 iii）。首先对**Scheme2**进行证明。取方程（ L^2 3.7f）与 $2\Delta t\tilde{}$ $\mathbf{u}^{n+1}$的内积，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-4\mathbf{u}^n+\mathbf{u}^{n-1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)+2\Delta t\left(\nabla p^n,\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)\\&+2\Delta t\xi^{n+1}\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n+(\sum_{i=1}^m z_i c_i^{n+1})\nabla\bar{\Phi}^{n+1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)=-2\Delta t\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

应用众所周知的恒等式

$$2(a^{k+1}, 3a^{k+1} - 4a^k + a^{k-1}) = |a^{k+1}|^2 + |2a^{k+1} - a^k|^2 + |a^{k+1} - 2a^k + a^{k-1}|^2 - |a^k|^2 - |2a^k - a^{k-1}|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left(3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) = \left(3\left(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}\right) + 3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) \\
&= 3\left(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) + \left(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}^{n+1}\right) + \left(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^2 + \left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^2 + \left\|2\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\right\|^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^n\right\|^2 + \left\|2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}\right\|^2. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们还用到了这一事实

$$\begin{aligned}
&\left(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}\right) = \left(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \frac{2\Delta t}{3}\nabla(p^{n+1} - p^n)\right) \\
&= \left(\nabla \cdot \left(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}\right), \frac{2\Delta t}{3}(p^{n+1} - p^n)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Fur此外，令 $H^{n+1} := p^{n+1} + \nu\omega^{n+1}$ 其中 w^{n+1} 由式（3.15）给出，我们有

$$p^{n+1} - p^n + \nu\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = H^{n+1} - H^n,$$

并将式（3.7g）改写为

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{u}^{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla H^{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla H^n. \qquad (3.18)$$

现在，在等式两边对式（3.18）取其自身的内积，并注意到 $(\nabla H^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = (H^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) = 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla H^{n+1}\right\|^2 = \frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla H^n\right\|^2 \\
+ 2\Delta t\left(\nabla p^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right) + 2\Delta t\nu\left(\nabla\omega^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right).
\end{aligned} \qquad (3.19)$$

另一方面，由（3.15）可得

$$\begin{aligned}
2\Delta t\nu\left(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla\omega^n\right) &= -2\nu\Delta t\left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \omega^n\right) \\
&= -2\nu\Delta t\left(\omega^{n+1} - \omega^n, \omega^n\right) \\
&= \nu\Delta t\left(\left\|\omega^n\right\|^2 - \left\|\omega^{n+1}\right\|^2 + \left\|\omega^{n+1} - \omega^n\right\|^2\right) \\
&= \nu\Delta t\left\|\omega^n\right\|^2 - \nu\Delta t\left\|\omega^{n+1}\right\|^2 + \nu\Delta t\left\|\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|^2 = \|\nabla\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

我们得到

$$2\Delta t\nu\left(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla\omega^n\right) = \nu\Delta t\left\|\omega^n\right\|^2 - \nu\Delta t\left\|\omega^{n+1}\right\|^2 + \nu\Delta t\left\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2 - \nu\Delta t\left\|\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^2. \qquad (3.21)$$

结合（3.19）和（3.21）可得

$$2\Delta t\left(\nabla p^{n},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)=\frac{3}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}-\frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^{2}+\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla H^{n+1}\right\|^{2}-\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla H^{n}\right\|^{2}$$
$$+\nu\Delta t\left\|\omega^{n+1}\right\|^{2}-\nu\Delta t\left\|\omega^{n}\right\|^{2}-\nu\Delta t\left\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^{2}+\nu\Delta t\left\|\nabla\times\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^{2}. \tag{3.22}$$

最后，将（4.2h）乘以 $2\Delta t r_N^{n+1}$，并利用用（3.16）、（3.17）和（3.22），可得

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}+\left\|2\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}\right\|^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^{n}\right\|^{2}-\left\|2\mathbf{u}^{n}-\mathbf{u}^{n-1}\right\|^{2}\right)+\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla H^{n+1}\right\|^{2}-\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla H^{n}\right\|^{2}$$
$$+\nu\Delta t\left\|\omega^{n+1}\right\|^{2}-\nu\Delta t\left\|\omega^{n}\right\|^{2}+\frac{1}{2}(|r^{n+1}|^{2}+|2r^{n+1}-r^{n}|^{2})-\frac{1}{2}(|r^{n}|^{2}-|2r^{n}-r^{n-1}|^{2})$$
$$=-\Delta t\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^{2}-\Delta t|\xi^{n+1}|^{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}D_{i}c_{i}^{n+1}|\nabla\bar{\mu}_{i}^{n+1}|^{2}d\boldsymbol{x}-\frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}$$
$$-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1}-2\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1}\right\|^{2}-\nu\Delta t\left\|\nabla\times\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^{2}-\frac{1}{2}|r^{n+1}-2r^{n}+r^{n-1}|^{2}. \tag{3.23}$$

这便得到能量耗散律（3.13）和（3.14）。

对于**Scheme2b**，记

$$\bar{p}^{n}:=p^{n}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n}.$$

取 L^2 将方程（3.7f'）与 $2\Delta t\tilde{}\mathbf{u}^{n+1}$ 作内积，得到对应于（3.16 ）：

$$\left(3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-4\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)+2\Delta t\left(\nabla\bar{p}^{n},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)$$
$$+2\Delta t\xi^{n+1}\left(\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla\mathbf{u}^{n}+\left(\sum_{i=1}^{m}z_{i}c_{i}^{n+1}\right)\nabla\bar{\Phi}^{n+1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right)=-2\Delta t\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^{2}. \tag{3.16'}$$

等式（3.17）对于**Scheme2b** 仍然成立，这是利用了以下事实

$$\left(3\mathbf{u}^{n+1}-4\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}^{n+1}\right)=\left(3\mathbf{u}^{n+1}-4\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1},\frac{2\Delta t}{3}\nabla(\bar{p}^{n+1}-\bar{p}^{n})\right)$$
$$=\left(\nabla\cdot\left(3\mathbf{u}^{n+1}-4\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1}\right),\frac{2\Delta t}{3}(\bar{p}^{n+1}-\bar{p}^{n})\right)=0.$$

方程（3.7g'）可改写为

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{u}^{n+1}+\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla\bar{p}^{n+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla\bar{p}^{n}.$$

现在，对上述等式与其自身取内积，并注意到 $(\nabla\bar{p}^{n+1},\mathbf{u}^{n+1})=0$，我们得到

$$\frac{3}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}+\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla\bar{p}^{n+1}\right\|^{2}=\frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right\|^{2}+\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla\bar{p}^{n}\right\|^{2}+2\Delta t\left(\nabla\bar{p}^{n},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\right). \tag{3.19'}$$

最后，将式（3.7h）乘以 $2\Delta t r^{n+1}$，并利用式（3.16'）、（3.17）和（3.19'），得到

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}+\left\|2\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}\right\|^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}^{n}\right\|^{2}+\left\|2\mathbf{u}^{n}-\mathbf{u}^{n-1}\right\|^{2}\right)+\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla\bar{p}^{n+1}\right\|^{2}$$
$$-\frac{2}{3}\Delta t^{2}\left\|\nabla\bar{p}^{n}\right\|^{2}+\frac{1}{2}(|r^{n+1}|^{2}+|2r^{n+1}-r^{n}|^{2})-\frac{1}{2}(|r^{n}|^{2}-|2r^{n}-r^{n-1}|^{2})$$
$$=-2\Delta t\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^{2}-\Delta t|\xi^{n+1}|^{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}D_{i}c_{i}^{n+1}|\nabla\bar{\mu}_{i}^{n+1}|^{2}d\boldsymbol{x}-\frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}^{n+1}\right\|^{2}$$
$$-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^{n+1}-2\mathbf{u}^{n}+\mathbf{u}^{n-1}\right\|^{2}-\frac{1}{2}|r^{n+1}-2r^{n}+r^{n-1}|^{2}. \tag{3.24}$$

式（3.23）和（3.24）右侧均为非正，这直接导出了能量耗散律（3.13）。

由 $\|\mathbf{u}^n\|$、$|r^n|$和 $|\xi^n|$ 的有界性可直接得出 $\mathcal{E}^n$，$\forall n \geq 0$如式（3.13）所示。证明完毕。□

4. Full Discretization and Implementation

本节考虑一种用于空间离散的谱方法，并分析全离散问题的稳定性。

4.1. 全离散。为明确起见，取 $\Omega = (-1, 1)^2$。设 $\mathbb{P}_N(\Omega)$ 为 Ω 中关于每个变量次数为 $\leq N$ 的多项式空间。我们引入以下逼近空间：

$$
\begin{aligned}
&X_N = \mathbb{P}_N(\Omega), \quad \mathbf{X}_N = X_N^d, \\
&X_N^0 = H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_N(\Omega) = \left\{ v \in \mathbb{P}_N(\Omega) : v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad \mathbf{X}_N^0 = (X_N^0)^d, \\
&M_N = \left\{ v \in \mathbb{P}_N(\Omega) : \int_\Omega v d\boldsymbol{x} = 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

令 $(\cdot, \cdot)_N$ 表示采用 $N+1$ 点 Legendre-Gauss-Lobatto 求积得到的离散内积。令 $\|\cdot\|_{0,N} = (\cdot, \cdot)_N^{1/2}$。

Scheme1-SM：时间采用一阶格式、空间采用谱方法的全离散形式如下：已知前几个时间步的解，求 $\sigma_{i,N}^{n+1}, c_{i,N}^{n+1} \in X_N, i =$

1, ..., m; $\bar{\Phi}_N^{n+1}$, $\Phi_N^{n+1} \in M_N$; $\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} \in \mathbf{X}_N^0$; $\mathbf{u}_N^{n+1} \in \mathbf{X}_N$; ψ_N^{n+1}, $p_N^{n+1} \in M_{N-2}$, 使得

$$\Big(\frac{\sigma_{i,N}^{n+1}-\sigma_{i,N}^{n}}{\Delta t}, w_N\Big)_N - D_i\big(\nabla\sigma_{i,N}^{n+1}, \nabla w_N\big)_N$$
$$= \big(D_i\big[|\nabla\sigma_{i,N}^{n}|^2 + z_i(\nabla\sigma_{i,N}^{n}\cdot\nabla\Phi_N^{n} + \Delta\Phi_N^{n})\big] - \nabla\cdot(\sigma_i^n\mathbf{u}_N^n), w_N\big)_N, \quad \forall w_N \in X_N, \tag{4.1a}$$

$$\bar{c}_{i,N}^{n+1} = \exp(\sigma_{i,N}^{n+1}), \tag{4.1b}$$

$$\lambda_{i,N}^{n+1}\big(\bar{c}_{i,N}^{n+1}, 1\big)_N - \big(c_{i,N}^{n}, 1\big)_N = 0, \tag{4.1c}$$

$$c_{i,N}^{n+1} = \lambda_{i,N}^{n+1}\bar{c}_{i,N}^{n+1}, \quad i = 1, ..., m, \tag{4.1d}$$

$$\epsilon\big(\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1}, \nabla q_N\big)_N = \big(\sum_{i=1}^{m} z_i c_{i,N}^{n+1}, q_N\big)_N, \quad \forall q_N \in M_N, \tag{4.1e}$$

$$\Big(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}-\mathbf{u}_N^{n}}{\Delta t}, \mathbf{v}_N\Big)_N + \frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\Big((\mathbf{u}_N^n\cdot\nabla)\mathbf{u}_N^n + (\sum_{i=1}^{m} z_i c_{i,N}^{n+1})\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1}, \mathbf{v}_N\Big)_N$$
$$+ \nu\big(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla\mathbf{v}_N\big)_N + \big(\nabla p_N^n, \mathbf{v}_N\big)_N = 0, \quad \forall\mathbf{v}_N \in \mathbf{X}_N^0, \tag{4.1f}$$

$$\big(\nabla\psi_N^{n+1}, \nabla q_N\big)_N = \frac{1}{\Delta t}\big(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla q_N\big)_N, \quad \forall q_N \in M_{N-2},$$
$$\mathbf{u}_N^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} - \Delta t\nabla\psi_N^{n+1}, \quad p_N^{n+1} = \psi_N^{n+1} + p_N^n, \tag{4.1g}$$

$$\frac{r_N^{n+1}-r_N^{n}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\Big[\frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\sum_{i=1}^{m} D_i\big(c_{i,N}^{n+1}, |\nabla\bar{\mu}_{i,N}^{n+1}|^2\big)_N -$$
$$\big((\sum_{i=1}^{m} z_i c_{i,N}^{n+1})\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\big)_N - \big((\mathbf{u}_N^n\cdot\nabla)\mathbf{u}_N^n, \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\big)_N\Big], \tag{4.1h}$$

$$\Phi_N^{n+1} = \frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\bar{\Phi}_N^{n+1}, \tag{4.1i}$$

其中 $\bar{\mu}_{i\,N}^{n+1}$，和 $\bar{E}_{npp}^{n+1}{}_{,\,N}$ 定义为

$$\bar{\mu}_{i,N}^{n+1} = \log c_{i,N}^{n+1} + z_i\bar{\Phi}_N^{n+1}, \ i = 1, ..., m,$$
$$\bar{E}_{npp,N}^{n+1} = E_{npp}[\{c_{i,N}^{n+1}\}, \bar{\Phi}_N^{n+1}].$$

Scheme2-SM：二阶半离散问题（3.7）的空间谱方法表述如下：求$\sigma_{i\,N}^{n+1}$，，$c_i^{n+1}{}_{,\,N} \in X_N$，$i = 1$, ..., m; $\bar{\Phi}_N^{n+1}$, $\Phi_N^{n+1} \in M_N$; $\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} \in \mathbf{X}_N^0$; $\mathbf{u}_N^{n+1} \in \mathbf{X}_N$; $\psi_N^{n+1} \in$

M_{N-2} 和 p_N^{n+1} ，使得

$$\Big(\frac{3\sigma_{i,N}^{n+1}-4\sigma_{i,N}^{n}+\sigma_{i,N}^{n-1}}{2\Delta t},w_N\Big)_N - D_i\big(\nabla\sigma_{i,N}^{n+1},\nabla w_N\big)_N = \big(D_i\big[|\nabla\sigma_{i,N}^{*,n+1}|^2+ z_i(\nabla\sigma_{i,N}^{*,n+1}\cdot\nabla\Phi_N^{*,n+1}+\Delta\Phi_N^{*,n+1})\big]-\nabla\cdot(\sigma_{i,N}^{*,n+1}\mathbf{u}_N^{*,n+1}),w_N\big)_N,\quad \forall w_N\in X_N, \tag{4.2a}$$

$$\bar{c}_{i,N}^{n+1}=\exp(\sigma_{i,N}^{n+1}), \tag{4.2b}$$

$$\lambda_{i,N}^{n+1}\big(\bar{c}_{i,N}^{n+1},1\big)_N-\big(c_{i,N}^{n},1\big)_N=0, \tag{4.2c}$$

$$c_{i,N}^{n+1}=\lambda_{i,N}^{n+1}\bar{c}_{i,N}^{n+1},\quad i=1,...,m, \tag{4.2d}$$

$$\epsilon\big(\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1},\nabla q_N\big)_N=\big(\sum_{i=1}^{m}z_ic_{i,N}^{n+1},q_N\big)_N,\quad \forall q_N\in M_N, \tag{4.2e}$$

$$\Big(\frac{3\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}-4\mathbf{u}_N^{n}+\mathbf{u}_N^{n-1}}{2\Delta t},\mathbf{v}_N\Big)_N+\nu\big(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1},\nabla\mathbf{v}_N\big)_N+\big(\nabla p_N^{n},\mathbf{v}_N\big)_N + \frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\Big((\mathbf{u}_N^{*,n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}_N^{*,n+1}+\big(\sum_{i=1}^{m}z_ic_{i,N}^{n+1}\big)\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1},\mathbf{v}_N\Big)_N=0,\quad \forall\mathbf{v}_N\in\mathbf{X}_N^0, \tag{4.2f}$$

$$\big(\nabla\psi_N^{n+1},\nabla q_N\big)_N=\frac{3}{2\Delta t}\big(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1},\nabla q_N\big)_N,\quad \forall q_N\in M_{N-2},$$

$$\mathbf{u}_N^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}-\frac{2\Delta t}{3}\nabla\psi_N^{n+1},\quad p_N^{n+1}=\psi_N^{n+1}+p_N^{n}-\nu\Pi_{N-2}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \tag{4.2g}$$

$$\frac{3r_N^{n+1}-4r_N^{n}+r_N^{n-1}}{2\Delta t}=-\frac{1}{2\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\Big[\frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\sum_{i=1}^{m}D_i\big(c_{i,N}^{n+1},|\nabla\bar{\mu}_{i,N}^{n+1}|^2\big)_N - \big((\sum_{i=1}^{m}z_ic_{i,N}^{n+1})\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1},\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\big)_N-\big((\mathbf{u}_N^{*,n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}_N^{*,n+1},\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\big)_N\Big], \tag{4.2h}$$

$$\Phi_N^{n+1}=\frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\bar{\Phi}_N^{n+1}, \tag{4.2i}$$

其中 Π_{N-2} 是投影到 M_{N-2}上的 L^2-投影算子。

Scheme2b-SM：与**Scheme2-SM** 相同，但（4.2f）和（4.2g）被替换为

$$\Big(\frac{3\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}-4\mathbf{u}_N^{n}+\mathbf{u}_N^{n-1}}{2\Delta t},\mathbf{v}_N\Big)_N+\nu\big(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1},\nabla\mathbf{v}_N\big)_N+\big(\nabla(p_N^{n}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n}),\mathbf{v}_N\big)_N + \frac{r_N^{n+1}}{\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\Big((\mathbf{u}_N^{*,n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}_N^{*,n+1}+\big(\sum_{i=1}^{m}z_ic_{i,N}^{n+1}\big)\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1},\mathbf{v}_N\Big)_N=0,\quad \forall\mathbf{v}_N\in\mathbf{X}_N^0, \tag{4.2f'}$$

$$\big(\nabla\psi_N^{n+1},\nabla q_N\big)_N=\frac{3}{2\Delta t}\big(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1},\nabla q_N\big)_N,\quad \forall q_N\in M_{N-2},$$

$$\mathbf{u}_N^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}-\frac{2\Delta t}{3}\nabla\psi_N^{n+1},\quad p_N^{n+1}=\psi_N^{n+1}+p_N^{n}+\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n}-\nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}. \tag{4.2g'}$$

人们通常认为，只要空间离散采用 Galerkin型，全离散的稳定性就直接由时间半离散的稳定性推出。然而，正如我们将看到的，虽然这对于一阶格式**Scheme1-SM**成立，但

二阶格式的全离散形式则需要谨慎处理。事实上，我们无法证明**Scheme2-SM**的稳定性。格式 **Scheme1-SM** 和**Scheme2b-SM** 的无条件稳定性由以下两个定理给出。

定理 4.1。 给定 $\{c_{i,N}^n\}, \Phi_N^n, \mathbf{u}_N^n, p_N^n, r_N^n$。假设 $c_{i,N}^n > 0$, 且 $(c_{i,N}^n, 1)_N = (c_{i,N}^0, 1)_N, i = 1, ..., m$。那么，***Scheme1-SM*** 的解 $(\{c_{i,N}^{n+1}\}, \mathbf{u}_N^{n+1}, p_N^{n+1}, r_N^{n+1})$ 满足以下性质：

i) 保正性：$c_{i,N}^{n+1} > 0,\ i = 1, ..., m$。

ii) 质量守恒：$(c_{i,N}^{n+1}, 1)_N = (c_{i,N}^n, 1)_N,\ i = 1, ..., m$。

iii) 能量耗散：

$$\mathcal{E}_N^{n+1} - \mathcal{E}_N^n \le 0, \tag{4.3}$$

其中

$$\mathcal{E}_N^{n+1} := \|\mathbf{u}_N^{n+1}\|_{0,N}^2 + \Delta t^2 \|\nabla p_N^{n+1}\|_{0,N}^2 + |r_N^{n+1}|^2.$$

iv) 对所有 $n \ge 0$, $\|u_N^n\|_{0,N}$、$|r_N^n|$ 和 $|\xi_N^n|$ 均有界。

证明。 几乎完全可以按照定理 4.1 中针对时间半离散格式（3.4）所证明的方法，同样证明定理 4.1 所给出的性质。这里只给出关键步骤：由式（4.1g）可得

$$(\mathbf{u}_N^{n+1}, \nabla q_N^{n+1})_N = 0,\ \forall q_N \in M_{N-2}.$$

然后由上述结果和（4.1g）可推得

$$\left\|\mathbf{u}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + \Delta t^2 \left\|\nabla p_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 = \left\|\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + 2\Delta t \left(\nabla p_N^n, \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right)_N + \Delta t^2 \left\|\nabla p_N^n\right\|_{0,N}^2$$

这就是（3.11）的离散版本。其余细节与半离散版本基本相同，此处省略。 □

定理 *4.2.* 给定 $\{c_{i,N}^k\}, \Phi_N^k, \tilde{\mathbf{u}}_N^k, \mathbf{u}_N^k, p_N^k, r_N^k, k = n, n-1$。假设 $c_{i,N}^k > 0$ 和 $(c_{i,N}^k, 1)_N = (c_{i,N}^0, 1)_N$, $i = 0, ..., m;\quad k = n, n-1$。那么，全离散问题 *Scheme2b-SM* 的解 $(\{c_{i,N}^{n+1}\}, \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \mathbf{u}_N^{n+1}, p_N^{n+1}, r_N^{n+1})$ 满足以下性质：

i) 保正性：$c_{i,N}^{n+1} > 0$ 在 Ω 中。*ii)* 质量守恒：$(c_{i,N}^{n+1}, 1)_N = (c_{i,N}^n, 1)_N,\ i = 1, ..., m$。*iii)* 能量耗散：

$$\mathcal{E}_N^{n+1} - \mathcal{E}_N^n \le 0, \tag{4.4}$$

其中

$$\mathcal{E}_N^{n+1} := \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_N^{n+1}\|_{0,N}^2 + \frac{1}{2}\|2\mathbf{u}_N^{n+1} - \mathbf{u}_N^n\|_{0,N}^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2 \|\nabla(p_N^{n+1} + \nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1})\|_{0,N}^2 + \frac{1}{2}|r_N^{n+1}|^2 + \frac{1}{2}|2r_N^{n+1} - r_N^n|^2.$$

iv) 对所有 $n \ge 0$, $\|\mathbf{u}_N^n\|_{0,N}$、$|r_N^n|$ 和 $|\xi_N^n|$ 均有界。

证明：由（4.2g'）可得

$$(\mathbf{u}_N^{n+1}, \nabla q_N)_N = 0, \ \forall q_N \in M_{N-2}.$$

记 $\bar{p}_N^n := p_N^n + \nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^n$，$n \geq 2$。设 $\bar{p}_N^1 = p_N^1 \in M_{N-2}$ 为**Scheme1-SM**的第一步压力解，由（4.2g'）可得 $\bar{p}_N^n \in M_{N-2}$，$n \geq 1$，从而

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{u}_N^{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla\bar{p}_N^{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\nabla\bar{p}_N^n.$$

现在，对 上述等式两边分别与其自身取离散内积，可得 n

$$\frac{3}{2}\left\|\mathbf{u}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla\bar{p}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 = \frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla\bar{p}_N^n\right\|_{0,N}^2 + 2\Delta t\left(\nabla\bar{p}_N^n, \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right)_N.$$

这是（3.19'）的离散类比。证明的其余部分与半离散情形**Scheme2b**类似。细节从略。

□

然而，我们在证明**Scheme2-SM**的稳定性时遇到了困难。障碍来自（3.20）的离散对应式。令

$$\omega_N^{n+1} = \omega_N^n + \Pi_{N-2}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \ n \geq 0; \ \omega_N^0 = 0. \tag{4.5}$$

然后 $p_N^n + \nu\omega_N^n \in M_{N-2}$。由（4.2g）可得：

$$(\mathbf{u}_N^{n+1}, \nabla q_N)_N = 0, \ \forall q_N \in M_{N-2},$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\left\|\mathbf{u}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla(p_N^{n+1} + \nu\omega_N^{n+1})\right\|_{0,N}^2\\ &= \frac{3}{2}\left\|\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right\|_{0,N}^2 + \frac{2}{3}\Delta t^2\left\|\nabla((p_N^n + \nu\omega_N^n))\right\|_{0,N}^2 + 2\Delta t\left(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla p_N^n\right) + 2\Delta t\nu(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla\omega_N^n)_N.\end{aligned} \tag{4.6}$$

尽管我们可以使用离散斯托克斯公式 $\left(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \ \nabla\omega_N^n\right)_N = -\left(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \ \omega_N^n\right)_N$ 来处理（4.6）中的最后一项。为了得到（3.20）的离散对应物，即，

$$2\Delta t\nu\left(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla\omega_N^n\right)_N = \nu\Delta t\left\|w_N^n\right\|_N^2 - \nu\Delta t\left\|w_N^{n+1}\right\|_N^2 + \nu\Delta t\left\|\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}\right\|_N^2,$$

我们需要关系式

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} = w_N^{n+1} - w_N^n,$$

根据（4.5），该关系并不成立。

4.2. 实现。一阶格式的实现与二阶格式的实现基本相同，这里仅介绍二阶完整离散化 **Scheme2b-SM** 的实现如下。

步骤 1： 求解椭圆问题：求 $\sigma_i^{n+1}{}_{,N} \in X_N$，使得

$$\frac{3}{2\Delta t}(\sigma_{i,N}^{n+1}, v_N)_N + D_i(\nabla\sigma_{i,N}^{n+1}, \nabla v_N)_N = (\tilde{g}_i^{*,n+1}, v_N)_N \quad \forall v_N \in X_N, \quad i = 1, ..., m,$$

with $\tilde{g}_i^{*,n+1} = \dfrac{4\sigma_{i,N}^n - \sigma_{i,N}^{n-1}}{2\Delta t} + g_i(\sigma_{i,N}^{*,n+1}, \Phi_N^{*,n+1}, \mathbf{u}_N^{*,n+1})$. Then compute $c_{i,N}^{n+1}$ by

$$\bar{c}_{i,N}^{n+1} = \exp(\sigma_{i,N}^{n+1}), \quad \lambda_i^{n+1} = \frac{(c_{i,N}^n, 1)_N}{(\bar{c}_{i,N}^{n+1}, 1)_N}, \quad c_{i,N}^{n+1} = \lambda_{i,N}^{n+1}\bar{c}_{i,N}^{n+1}.$$

步骤 2： 求 $\bar{\Phi}_N^{n+1} \in M_N$，使得

$$(\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1}, \nabla q_N)_N = \frac{1}{\epsilon}(\sum_{i=1}^m z_i c_{i,N}^{n+1}, q_N)_N, \quad \forall q_N \in M_N.$$

步骤 3： 求出 $\tilde{\mathbf{u}}_{1,N}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{2,N}^{n+1} \in \mathbf{X}_N^0$，使得

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}_{1,N}^{n+1}, \mathbf{v}_N)_N + \nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_{1,N}^{n+1}, \nabla\mathbf{v}_N)_N = (\tilde{\boldsymbol{f}}_N^{n+1}, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{v}_N \in \mathbf{X}_N^0,\\
&\frac{3}{2\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}_{2,N}^{n+1}, \mathbf{v}_N)_N + \nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_{2,N}^{n+1}, \nabla\mathbf{v}_N)_N = -(\mathbf{w}_N, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{v}_N \in \mathbf{X}_N^0,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{f}}_N^{n+1} &= \frac{1}{2\Delta t}(4\mathbf{u}_N^n - \mathbf{u}_N^{n-1}) - \nabla\bar{p}_N^n,\\
\mathbf{w}_N^{n+1} &= \mathbf{u}_N^{*,n+1}\cdot\nabla\mathbf{u}_N^{*,n+1} + (\sum_{i=1}^m z_i c_{i,N}^{n+1})\nabla\bar{\Phi}_N^{n+1}.
\end{aligned}$$

步骤 4： 计算 ξ_N^{n+1}：一旦 $\tilde{\mathbf{u}}_{i,N}^{n+1}, (i = 1,2)$ 已知，我们便可根据（4.2h）显式地确定 ξ_N^{n+1}，如下所示：

$$\xi_N^{n+1} = \frac{2r_N^n - \frac{1}{2}r_N^{n-1} + \frac{\Delta t}{2\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}(\mathbf{w}_N^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{1,N}^{n+1})_N}{\frac{3}{2}\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0} + \frac{\Delta t}{2\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0}}\left[(\sum_{i=1}^m D_i(c_{i,N}^{n+1}, |\bar{\mu}_{i,N}^{n+1}|^2)_N - (\mathbf{w}_N, \tilde{\mathbf{u}}_{2,N}^{n+1})_N\right]}.$$

然后通过以下方式计算 r_N^{n+1}、Φ_N^{n+1} 和 $\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}$

$$\begin{aligned}
r_N^{n+1} &= \xi_N^{n+1}\sqrt{\bar{E}_{npp,N}^{n+1}+C_0},\\
\Phi_N^{n+1} &= \xi_N^{n+1}\bar{\Phi}_N^{n+1},\\
\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_{1,N}^{n+1} + \xi_N^{n+1}\tilde{\mathbf{u}}_{2,N}^{n+1}.
\end{aligned}$$

步骤 5： 求出 $\psi_N^{n+1} \in M_{N-2}$，使得

$$\left(\nabla\psi_N^{n+1}, \nabla q_N\right) = \frac{3}{2\Delta t}\left(\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}, \nabla q_N\right), \quad \forall q_N \in M_{N-2}.$$

然后按如下方式更新速度和压力：

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_N^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1} - \frac{2\Delta t}{3}\nabla\psi_N^{n+1},\\
\bar{p}_N^{n+1} &= \psi_N^{n+1} + \bar{p}_N^n,\\
p_N^{n+1} &= \bar{p}_N^{n+1} - \nu\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_N^{n+1}.
\end{aligned}$$

上述算法表明，所提出方法的计算复杂度相当于在每个时间步求解若干个相互解耦的常系数线性椭圆方程。在空间离散中，我们采用勒让德模态基 [27]，对于矩形区域上的常系数椭圆方程，已有快速求解器可供使用。

5. Numerical Results

本节给出若干数值算例，以验证所提出的方法。我们首先给出含两种组分方程的数值结果，以考察格式的精度和稳定性。我们还将研究收敛阶、质量守恒、保正性和能量耗散。随后，给出一个含三种组分的算例。在所有计算中，我们固定 $C_0 = 100$。

5.1. **含两种离子的情形**。

例*1.* 我们采用 NSNPP 方程的构造的解析解，研究所提出格式的时间和空间收敛率。在方程中加入适当的强迫项，使问题 (2.1)具有以下精确解：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} = (\pi \sin(2\pi y)\sin^2(\pi x)\sin^2 t, -\pi \sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)\sin^2 t)\\
&p = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin^2 t\\
&c_1 = 1.1 + \cos(\pi x)\cos(\pi y)\sin^2 t\\
&c_2 = 1.1 - \cos(\pi x)\cos(\pi y)\sin^2 t\\
&\Phi = \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\cos(\pi y)\sin^2 t.
\end{aligned}
$$

设参数 $z_1 = 1, z_2 = -1, D_1 = D_2 = 1$ 和 $\epsilon = 1,\ \nu = 0.1$。

首先，我们通过考察数值解随多项式次数变化的误差行为，研究空间收敛阶。在图 5.1和5.2中，我们给出了误差随多项式次数 N 变化的曲线，分别对应 Δt 为 0.001 和 0.0001，以及时间 $T = 0.1$下的 和 。在这种半对数表示中，误差曲线呈直线，表明误差呈指数收敛，直至时间误差占主导地位。

在时间收敛性测试中，我们固定空间多项式次数 $N = 64$，该次数足够大，因此空间离散误差相较于时间误差可以忽略不计。图5.3(**Scheme1-SM)**和图5.4 (**Scheme2-SM)**中展示了 L^2–误差关于 Δt 的双对数坐标图。可以清楚地观察到预期的时间收敛阶，这与理论分析的预测一致。

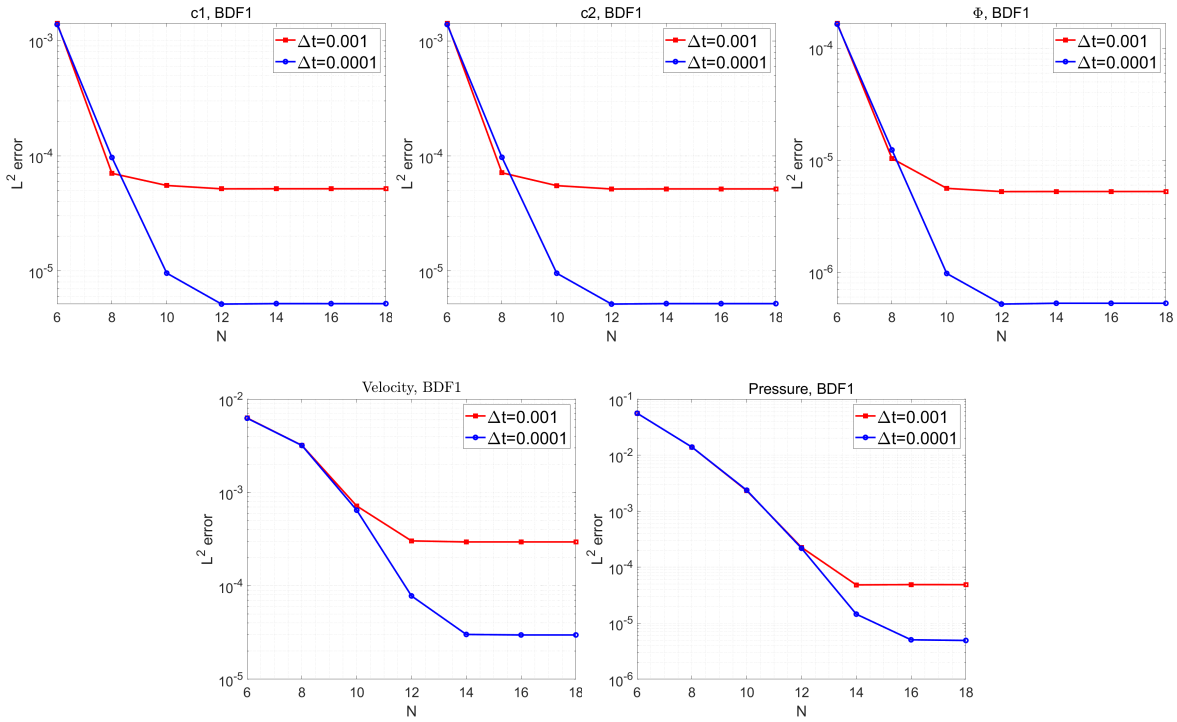


FIGURE 5.1. (例1) 使用一阶格式时，误差在 L^2-范数下随 N 变化的半对数尺度图，参数为 Δt =0.001，0.0001。

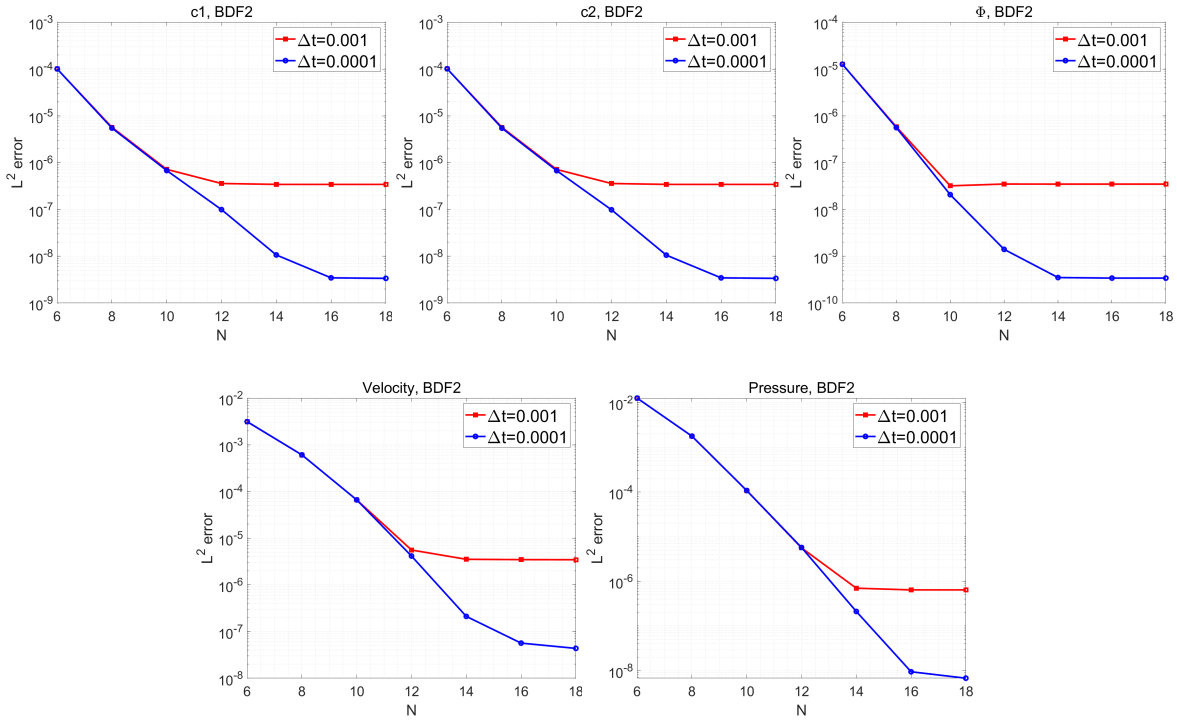


FIGURE 5.2. (例1) 使用二阶格式时，误差在 L^2-范数下随 N 变化的半对数尺度图，参数为 Δt =0.001，0.0001。

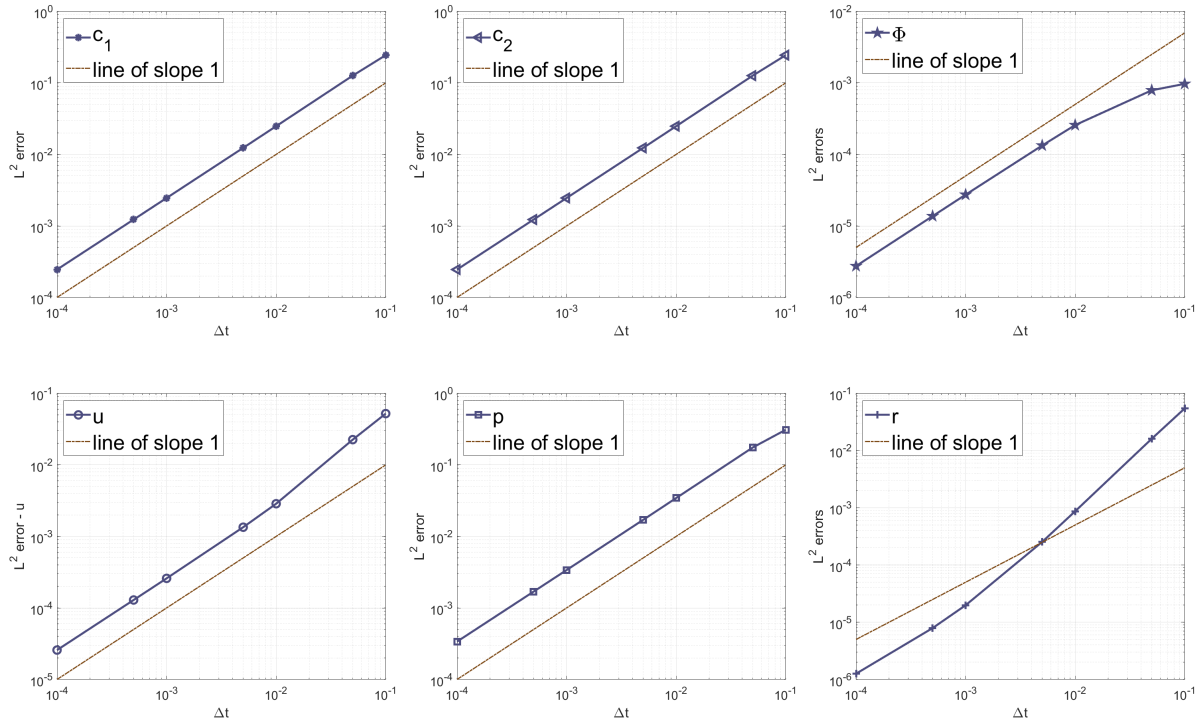


FIGURE 5.3. (例1) L^2误差随 Δt 变化的双对数坐标图，一阶格式 e.

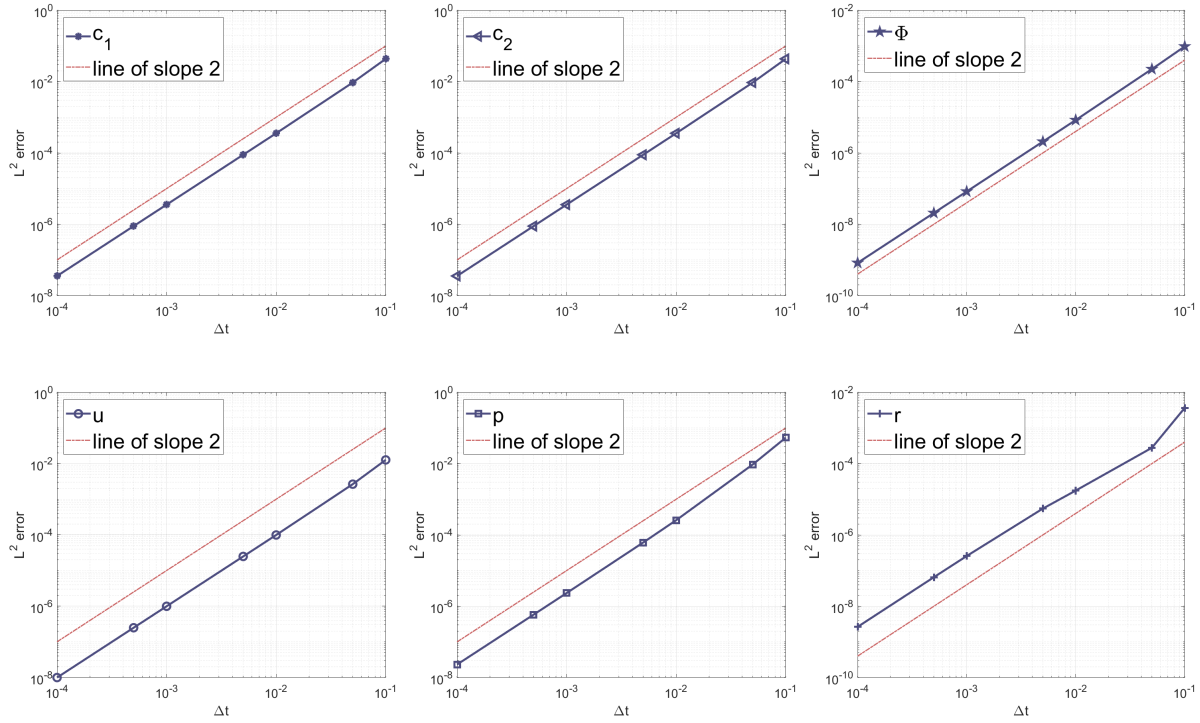


FIGURE 5.4. (例1) L2误差随 Δt 变化的双对数坐标图，二阶格式。

TABLE 5.1. 在 $T = 1$ 处，采用 **Scheme2-SM** 和 **Scheme2b-SM** 计算得到的速度 L^2-误差和压力 L^2-误差随时间步长的变化。

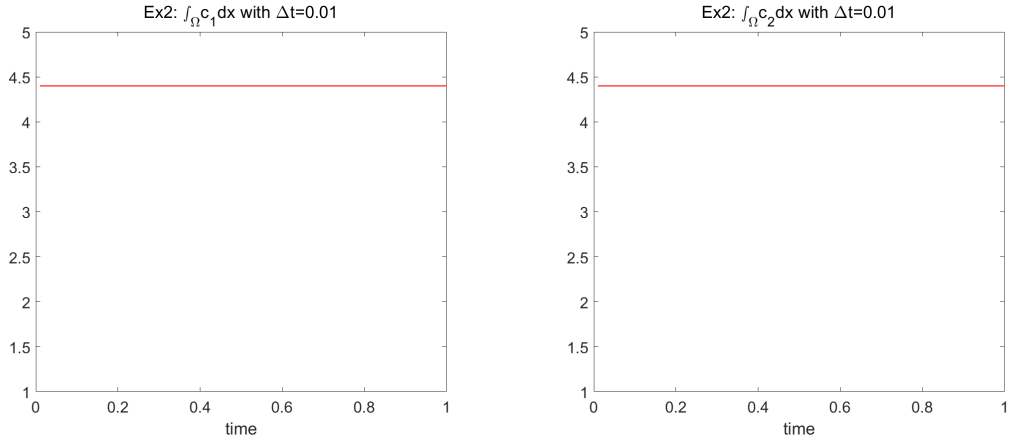
Δt	L^2 速度误差		L^2 压力误差	
	Scheme2-SM	**Scheme2b-SM**	**Scheme2-SM**	**Scheme2b-SM**
10^{-1}	1.26768E-02	1.26935E-02	5.33609E-02	5.33894E-02
10^{-2}	9.92445E-05	9.90649E-05	2.58586E-04	2.57952E-04
10^{-3}	9.92721E-07	9.92952E-07	2.34312E-06	2.34164E-06
10^{-4}	9.93110E-09	9.93277E-09	2.31898E-08	2.31877E-08

Scheme2-SM 与**Scheme2-SM** 和**Scheme2b-SM** 的精度对比见表5.1。表中列出的速度 L^2 误差和压力 L^2误差表明，这两种方案的精度几乎相同。对其他变量的误差比较（此处未列出）也得出了类似结果。

例*2*。设定 $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $D_1 = D_2 = 1$, $\epsilon = 1$, $\nu = 0.01$ 和 $N = 64$。本例旨在验证保正性、质量守恒和稳定性。我们使用**Scheme2b-SM** 及以下初始条件:

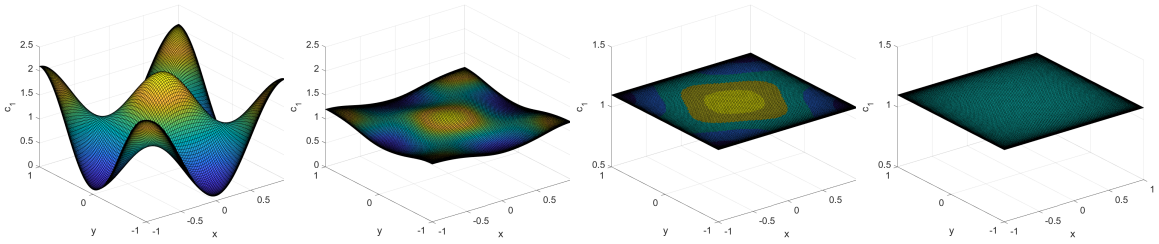
$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, 0) = (\pi \sin(2\pi y)\sin^2(\pi x), -\pi \sin(2\pi x)\sin^2(\pi y))$$
$$c_1(\boldsymbol{x}, 0) = 1.1 + \cos(\pi x)\cos(\pi y)$$
$$c_2(\boldsymbol{x}, 0) = 1.1 - \cos(\pi x)\cos(\pi y).$$

图5.5绘出了使用 Scheme2b-SM 计算得到的离散质量 $\int_\Omega c_i d\boldsymbol{x}$, $i = 1,2$ 随时间的演化，展示了该方案的质量守恒性质。图5.6–5.9分别给出了变量 c_1, c_2 以及速度的两个分量 u_1 和 u_2 在 $t = 0, 0.1, 0.6, 1.0$ 时的快照。从图5.6和5.7可以看出，浓度$\{c_i\}$ 在时间演化过程中保持正性。



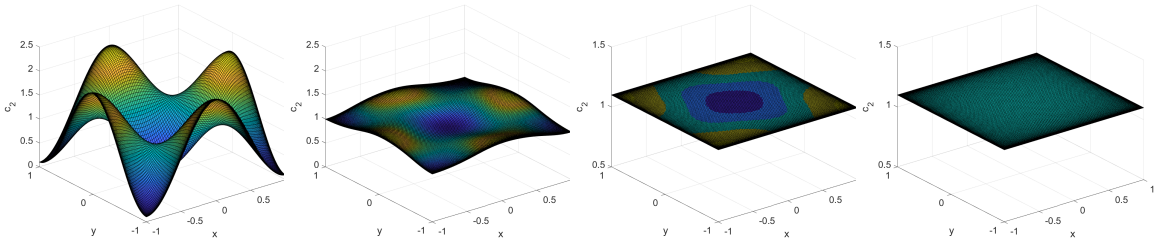
(a) (b

)FIGURE 5.5. (例2) 离散质量的时间演化 $\int_\Omega c_1 d\boldsymbol{x}$ (a) 和$\int_\Omega c_2 d\boldsymbol{x}$ (b) 使用 Scheme2b-SM 计算。



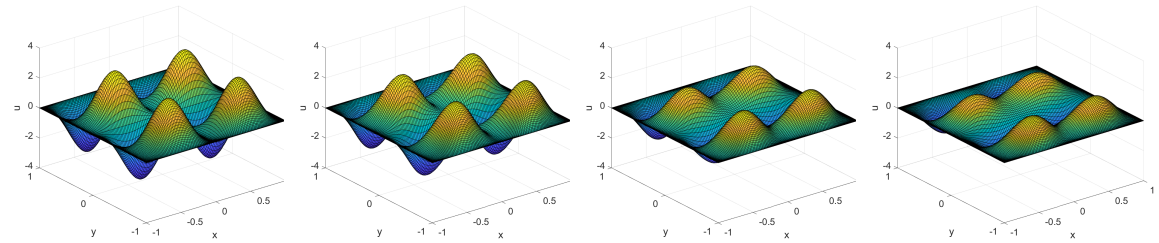
(a) c_1 在 $t=0$ (b) c_1 在 $t=0.1$ (c) c_1 在 $t=0.6$ (d) c_1 在 $t=1$

FIGURE 5.6. (例2) c_1的快照。



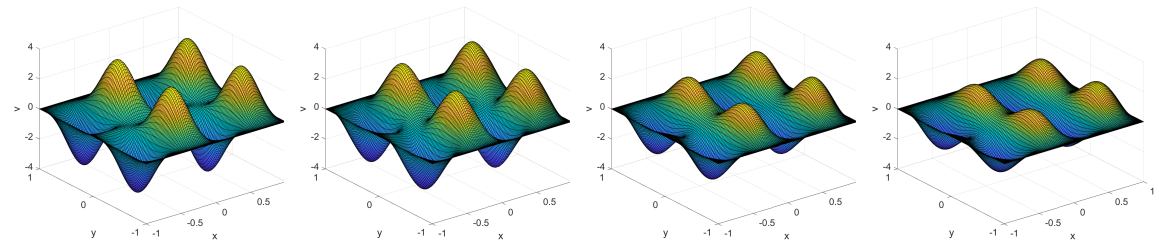
(a) c_2 在 $t=0$ (b) c_2 在 $t=0.1$ (c) c_2 在 $t=0.6$ (d) c_2 在 $t=1$

FIGURE 5.7. （例2） c_2的快照。



(a) u_1 在 $t=0$ (b) u_1 在 $t=0.1$ (c) u_1 在 $t=0.6$ (d) u_1 在 $t=1$

FIGURE 5.8. (例2) u_1的快照。



(a) u_2 在 $t=0$ (b) u_1 在 $t=0.1$ (c) u_2 于 $t=0.6$ (d) u_2 于 $t=1$

FIGURE 5.9. (例2) u_2 的快照。

5.2. 含三个离子的情况。

例*3.* 令 $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2$, $D_1 = D_2 = D_3 = 1$, $\epsilon = 0.5$, $\nu = 0.1$, 我们使用以下构造的精确解验证所提出格式的时间收敛率:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (\pi \sin(2\pi y)\sin^2(\pi x), -\pi \sin(2\pi x)\sin^2(\pi y))e^{-t} \\
p &= \sin(\pi x)\sin(\pi y)e^{-t} \\
c_1 &= \cos(\pi x)\cos(\pi y)e^{-t} + 2e^{-t} \\
c_2 &= -2\cos(\pi x)\cos(\pi y)e^{-t} + 6e^{-t} \\
c_3 &= -\cos(\pi x)\cos(\pi y)e^{-t} + 2e^{-t} \\
\Phi &= \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\cos(\pi y)e^{-t}.
\end{aligned}
$$

源项由精确解得到。图 5.10 和 5.11 展示了 L^2 离子、静电势、速度和压力的误差随时间步长变化的情况，分别由 **Scheme1-SM**和 **Scheme2-SM**计算得到。从图中可以看出，**Scheme1-SM** 的收敛阶为一阶，而 **Scheme2-SM**的收敛阶为二阶。这与理论预测吻合良好。

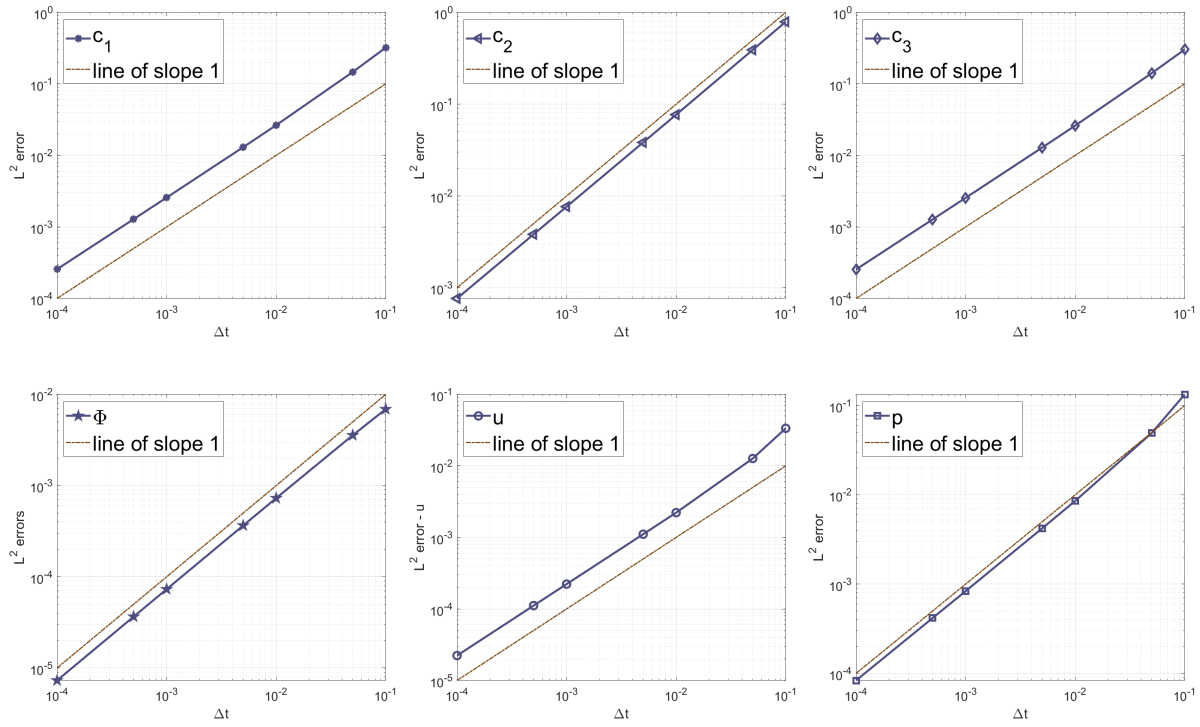


FIGURE 5.10. (例3) L^2 误差与 Δt 的关系，采用一阶格式，在每个空间方向上均使用 $N = 64$ ，以双对数坐标表示。

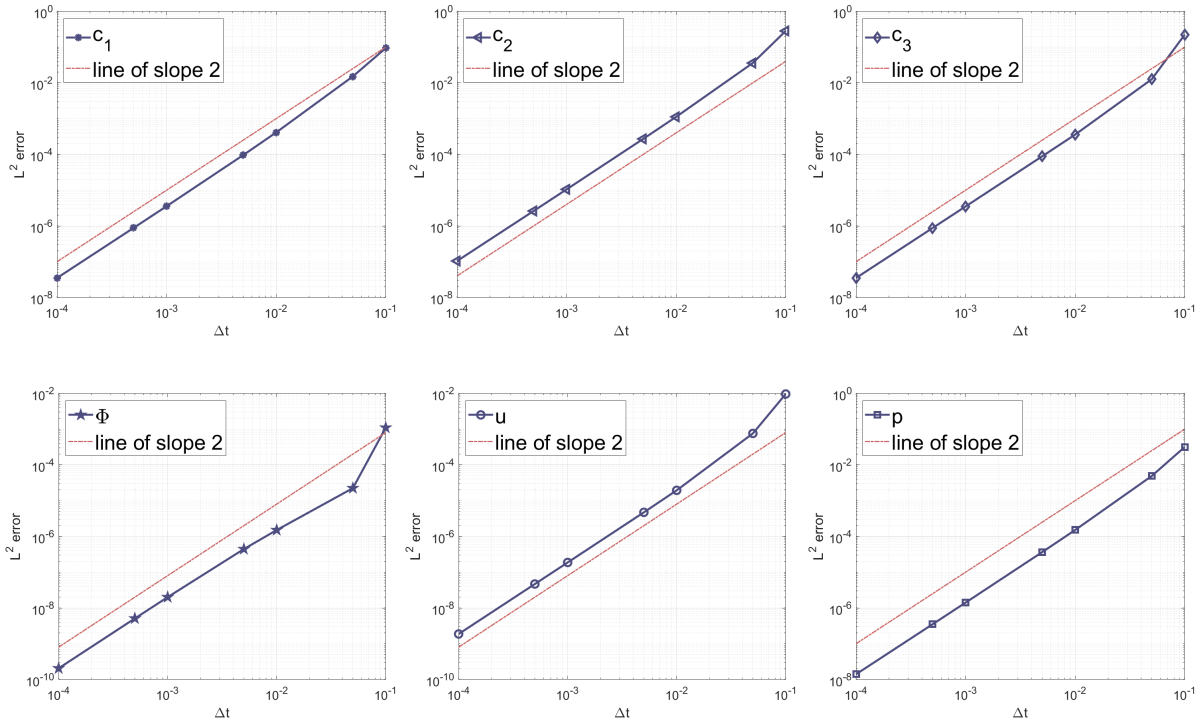


FIGURE 5.11. (例3) L^2 误差与 Δt 在使用 Scheme2-SM 且每个空间方向取 $N = 64$ 时的双对数坐标图。

6. CONCLUDING REMARKS

本文针对纳维–斯托克斯-Nernst-Planck-Poisson 方程构造了高效的时间步进格式。所提出的格式基于纳维–斯托克斯方程的辅助变量方法，并对耦合纳维–斯托克斯方程与 Nernst-Planck-Poisson 方程的项进行了精细处理。通过为辅助变量引入动力学方程，并将原方程重写为一个等价系统，我们为该问题构造了一阶和二阶半隐式线性化格式。我们进行了严格的分析，证明整体格式无条件稳定，并且能够保持离子浓度解的正性和质量守恒。实现结果表明，该格式可以高效地实现：每个时间步只需求解若干个具有常系数的解耦线性方程，计算复杂度较低。我们提供了若干数值算例，以验证理论结论。需要强调的是，即使在全离散层面，上述优良性质仍然成立。据我们所知，这是首个在离散层面满足上述所有性质的、针对纳维–斯托克斯-Nernst-Planck-Poisson 方程的二阶方法。

REFERENCES

[1] L. ANGERMANN AND S. WANG，三维指数拟合协调四面体

有限元用于半导体连续性方程，《应用数值数学》，*46*（*2003*），第*19–43*页。
[2] M. Bazant, K. Thornton, and A. Ajdari，电化学系统中的弥散电荷动力学，《物理评论*E*》，*70*（*2004*），第*021506*页。[3] D. Bothe, A. Fischer, and J. Saal，电动流的整体适定性与稳定性，《工业与应用数学学会数学分析杂志》，*46*（*2014*），第*1263–1316*页。
[4] A. Bousquet, X. Hu, M. S. Metti, and J. Xu，漂移–扩散方程和电动方程的牛顿求解器，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，*40*（*2018*），第*B982–B1006*页。
[5] Q. Cheng and J. Shen，多重标量辅助变量（*MSAV*）方法及其在相场囊泡膜模型中的应用，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，*40*（*2018*），第*A3982–A4006*页。
[6] Q. Cheng and J. Shen，梯度流的全局约束保持型标量辅助变量格式，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，*42*（*2020*），第*A2489–A2513*页。[7] P. Constantin and M. Ignatova，论能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统，《理性力学与分析档案》，*232*（*2018*），第*1379–1428*页。[8] P. Constantin, M. Ignatova, and F.-N. Lee，平衡态附近的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统，预印本，（*2020*）。[9] C. Deng, J. Zhao, and S. Cui，负指标特里贝尔-利佐金空间和贝索夫空间中的纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松系统的适定性，《数学分析及其应用杂志》，*377*（*2011*），第*392–405*页。[10] J. Guermond and J. Shen，旋转压力校正投影方法的误差估计，《数学计算》，*73*（*2004*），第*1719–1737*页。
[11] M. He and P. Sun，泊松–能斯特–普朗克/斯托克斯耦合的混合有限元分析，《计算与应用数学杂志》，*341*（*2018*），第*61–79*页。[12] D. Hou, M. Azaïez, and C. Xu，梯度流的一种标量辅助变量方法变体，《计算物理学杂志》，*395*（*2019*），第*307–332*页。
[13] F. Huang and J. Shen，耗散系统的有界性/保正性与能量稳定标量辅助变量格式：在*Keller–Segel*方程和泊松–能斯特–普朗克方程中的应用，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，*43*（*2021*），第*A1832–A1857*页。[14] J. Jerome，运动介质中电荷传输的解析方法，《传输理论与统计物理学》，*31*（*2002*），第*333–366*页。[15] M. Li and C. Xu，纳维–斯托克斯–卡恩–希利亚德方程的新型高效时间步进格式，《计算机与流体》，*231*（*2021*），第*105174*页。
[16] X. Li, J. Shen, and Z. Liu，纳维–斯托克斯方程的新型*SAV*压力校正方法：稳定性与误差分析，《数学计算》，*91*（*2022*），第*141–167*页。[17] X. Li, J. Shen, and Z. Liu，纳维–斯托克斯方程的新型*SAV*压力校正方法：稳定性与误差分析，《数学计算》，*91*（*2022*），第*141–167*页。

[18] L. Lin, N. Ni, Z. Yang, and S. Dong, 具有周期更新系数矩阵的不可压缩 *Navier-Stokes* 方程能量稳定格式，《计算物理学杂志》，*418 (2020)*，第 *109–624* 页。[19] L. Lin, Z. Yang, and S. Dong, 基于辅助能量变量的不可压缩 *Navier-Stokes* 方程数值近似，《计算物理学杂志》，*388 (2019)*，第 *1–22* 页。[20] X. Liu and C. Xu, 纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松方程的高效时间推进/谱方法，《计算物理通讯》，*21 (2017)*，第 *1408–1428* 页。[21] M. S. Metti, J. Xu, and C. Liu, 电荷传输和电动学模型的能量稳定离散格式，《计算物理学杂志》，*306 (2016)*，第 *1–18* 页。[22] P. Constantin, M. Ignatova, and F.-N. Lee, 远离平衡态的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统，《数学分析文献》，*240 (2021)*，第 *1147–1168* 页。
[23] A. Prohl and M. Schmuck, 纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松系统的收敛有限元离散，《*ESAIM*数学建模与数值分析》，*44 (2010)*，第 *531–571* 页。[24] I. Rubinstein, 离子电扩散，工业与应用数学学会，*1990*。[25] R. Ryham, 电流体力学耗散系统模型的存在性、唯一性、正则性及长期行为，*arXiv:0910.4973v1*，*(2009)*。[26] M. Schmuck, 纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松系统分析，《数学模型与应用科学方法》，*19 (2009)*，第 *993–1014* 页。[27] J. Shen, 高效谱伽辽金方法 *I*：使用勒让德多项式求解二阶和四阶方程的直接求解器，《工业与应用数学学会科学计算杂志》，*15 (1994)*，第 *1489–1505* 页。[28] J. Shen, J. Xu, and J. Yang, 梯度流的标量辅助变量（*SAV*）方法，《计算物理学杂志》，*353 (2018)*，第 *407–416* 页。[29] J. Shen, J. Xu, and J. Yang, 一类新型高效稳健的梯度流能量稳定格式，《工业与应用数学学会评论》，*61 (2019)*，第 *474–506* 页。[30] L. Timmermans, P. Minev, and F. Van De Vosse, 使用谱元求解不可压缩流的近似投影格式，《国际数值方法：流体》, *22 (1996)*，第 *673–688* 页。
[31] C. Tsai, R. Yang, C. Tai, and L. Fu, 毛细管电泳微芯片中电动注入技术的数值模拟，《电泳》，*26 (2005)*，第 *674–686* 页。[32] R. Yang, L. Fu, and C. Hwang, 微通道中的电渗入口流，《胶体与界面科学杂志》，*244 (2001)*，第 *173–179* 页。[33] H. Yao, M. Azaïez, and C. Xu, 纳维–斯托克斯方程的新型无条件稳定格式，《计算物理通讯》，*30 (2021)*，第 *1083–1117* 页。[34] Z. Zhang and Z. Yin, 二维纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松系统的整体适定性，《应用数学快报》，*40 (2015)*，第 *102–106* 页。[35] J. Zhao, C. Deng, and S. Cui, 勒贝格空间中电流体力学耗散系统模型的适定性，《微分方程与应用》，*3 (2011)*，第 *427–448* 页。[36] X. Zhou, M. Azaïez, and C. Xu, 基于.....的艾伦–卡恩方程降阶建模

关于标量辅助变量方法，J. Math. Study, 52 (2019), pp. 258–276.