arXiv:2302.04444v1 [math.GR] 9 Feb 2023

关于考克斯特群的凯莱图自同构群的非离散性

FEDERICO BERLAI 和 MICHAL FERO V

Abstract. 本文刻画了相对于标准生成集、具有不可数顶点稳定子的考克斯特群凯莱图。作为推论，我们完整确定了所有有限生成考克斯特群中，其相对于标准生成集的凯莱图自同构群在置换拓扑下非离散的那些群。作为应用，我们还给出了新的显式构造，得到了一些顶点传递、度数无限且自同构群局部紧的图。

Contents

1. 引言 1 1.1. 已知结果 4 致谢 4 2. 预备知识 5 2.1. 图 5 2.2. 置换拓扑 6 2.3. 考克斯特群 7 2.4. 约化形式、抛物子群 8 3. 良好分离集 16 4. 局部作用构型 18 5. 超越局部有限图 23 参考文献 25

1. Introduction

连通图 $\Delta = (V\Delta, E\Delta)$ 的自同构群自然地带有一种拓扑，即逐点收敛拓扑，也称为置换拓扑，其单位元处的开集基由以下族给出

$$U_F := \big\{\varphi \in \mathrm{Aut}(\Delta) \mid \varphi(x) = x \ \forall x \in F\big\},$$

其中 $F \subseteq V\Delta$ 是有限的。也就是说，单位元处的基本开集是有限个顶点稳定子的交集。该拓扑是全不连通的。

Date: 2023年2月10日。

当图 Δ是局部有限时，它也是局部紧的，因此群 Aut(Δ) 是一个全不连通局部紧拓扑群（TDLC）。有关置换拓扑的更多细节，请参阅第 2.2 小节。

无论是否局部紧，只要图 Δ 的顶点集至多可数，该拓扑就是第二可数的，因此在这种情况下，群 Aut(Δ) 是离散的，当且仅当它是可数的。

因此，一个自然的问题是，寻找可数图 Δ 上的条件，使 Aut(Δ) 上的这一拓扑为非离散（或者等价地，使群 Aut(Δ) 不可数）。这是一个著名的问题，吸引了数学多个分支的关注。例如，我们必须提及 Halin 的开创性论文 [4] ，该论文给出了不可数性的图论刻画。不过，Halin 结果的更强形式早已为逻辑学家所知（并由他们发表；另参见 [5]）。

本文针对一类特定的图研究上述问题，即考克斯特群的凯莱图（关于本文将使用的精确定义和记号，请感兴趣的读者参阅第 2.3 小节）。在定理 A 中，我们根据定义图 Γ，完整刻画了那些使 $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(W_\Gamma, S)\big)$ 具有不可数顶点稳定子的可数生成考克斯特群 W_Γ 。

若 G 是一个群，且 S 是 G的生成集，那么凯莱定理断言 G 是 $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big)$的一个子群；特别地，它是由带标签图 Cay($G, S$)的保持标签自同构组成的子群。

值得一提的是，近期文献中出现了一些与我们的结果风格相反的结果。事实上，已有证明表明（见 [6,定理 7] ，另见 [7, 定理 1.1]），对于任意一个既非阿贝尔群也非广义二面循环群的有限生成群 G ，若 S_0 是 G 的有限对称生成集，则 $G \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G, S)\big)$，其中 S 是新的生成集（$S_0 \cup S_0^2 \cup S_0^3$）$\setminus \{e\}$。因此， [6, 7] 的结果意味着，总能找到生成集，使得相应的凯莱图的自同构尽可能少。

促使我们证明定理 A 的动机来自 [8]。事实上，在 [8]Taylor 研究了有限生成直角阿廷群关于标准生成集的凯莱图的类似问题，并证明其自同构群可数，当且仅当定义图是完全图；也就是说，当且仅当相应的直角阿廷群是有限生成自由阿贝尔群。

为了陈述定理 A，我们现在需要引入一些记号。给定一个单纯图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$（不一定是有限图），以及一个权函数 $m\colon V\Gamma \times V\Gamma \to \{1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$，满足

c_1) $m(x, y) = m(y, x)$ 对所有 $x, y \in V\Gamma$;
c_2) $m(x, y) = 1$ 当且仅当 $x = y$;

$c_3)$ $m(x,y) = +\infty$ if and only if $\{x,y\} \notin E\Gamma$,

我们可以考虑考克斯特群（注意，只有当图 Γ 有限时，它才是有限生成的）

$$W_\Gamma := \langle V\Gamma \mid (xy)^{m(x,y)} = e \quad \forall\, x,y \in V\Gamma\rangle, \tag{1}$$

其中，按定义，$(xy)^{+\infty} = e$ 表示两个生成元 x 和 y之间没有关系。我们称 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, m)$为加权图。注意，当权函数 m 的取值仅为 $\{1,2,+\infty\}$时，考克斯特群 W_Γ 是直角考克斯特群。在这种情况下，我们通常忽略这个函数，直接考虑单纯图$\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$：对于顶点 $x \neq y$，当且仅当 $m(x,y) = 2$时，$\{x,y\} \in E\Gamma$；当且仅当 $m(x,y) = +\infty$时，$\{x,y\} \notin E\Gamma$。

我们用 $\mathcal{A}_\Gamma$ 表示W_Γ 关于标准生成集 $V\Gamma$的凯莱图的自同构群。此外，令 Aut(Γ) 表示保持权不变的 Γ 的对称群（特别地，若我们只考虑直角考克斯特群，则它就是无权定义图的自同构群）。于是有如下结论。

定理 A. 设 Γ 是一个可数加权图，$\mathcal{C}_\Gamma$ 是考克斯特群 W_Γ 相对于标准生成集 $V\Gamma$的凯莱图。自同构群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的顶点稳定子不可数，当且仅当 Aut(Γ)不可数，或者存在 $x \in V\Gamma$ 以及一个非平凡自同构 $\alpha \in$ Aut(Γ)，使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \mathrm{id}_\Gamma$。

当图 Γ 有限时，其保权对称群 Aut(Γ) 也有限，因而不可数。注意，Γ 有限，当且仅当考克斯特群 W_Γ 有限生成，当且仅当 $\mathcal{C}_\Gamma$ 局部有限。

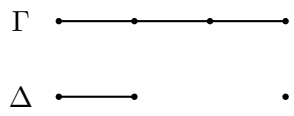
因此，在这种情形下（这正是我们关注的情形），定理 A 表明，全不连通局部紧群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的顶点稳定子不可数，因而该群本身也不可数，当且仅当有限图 Γ 中存在一个具有某种特定性质的顶点 x。

因此，我们立即得到全不连通局部紧群的以下结果：

推论 B. 设 Γ 是一个有限加权图，且 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是考克斯特群 W_Γ 关于标准生成集$V\Gamma$的凯莱图。当且仅当存在$x \in V\Gamma$ 以及一个非平凡自同构 $\alpha \in$ Aut(Γ), 使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \mathrm{id}_\Gamma$时，群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 是一个非离散的全不连通局部紧群。

从定理 A 中我们立即注意到，（直角）考克斯特群的情况与直角阿廷群截然相反：存在一些图 Γ，使得 $\mathcal{A}_\Gamma$ 是可数的，而 Γ 含有一个诱导子图 Δ，使得 $\mathcal{A}_\Delta$ 是不可数的。例如，我们

可以考虑这些图



此外，我们还注意到，考克斯特群 W_Γ 和 W_Δ 是拟等距的。这意味着，在考克斯特群这一类群中，凯莱图（相对于标准生成集）的自同构群具有非离散性这一性质并非拟等距不变量。

本文结构如下。第 2 节介绍图、考克斯特群和置换拓扑的标准记号与定义，并给出关于考克斯特群凯莱图的几何及其自同构的初步结果。第 3 节和第 4 节分别证明定理 A 的两个方向。我们在定义 3.1 中提出良好分离集的概念。根据引理 3.2，存在良好分离集等价于满足定理 A 中出现的条件。最后，第 5 节将展示，为本项目开发的工具也可用于明确构造一些顶点传递图：它们不是局部有限的，但其自同构群仍是局部紧的。

1.1. 已知结果。撰写本文时，作者并不知道此前曾发表过有关考克斯特群的凯莱图自同构群的（非）离散性的研究成果。直到本项目完成后，我们才得知 [2] 和 [3]。

以下是对 [3, 定理 5.12] 的重述。

定理 1.1. 对于有限图 Γ，若存在 $x \in V\Gamma$ 和非平凡自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \mathrm{id}_\Gamma$，则自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(W_\Gamma, V\Gamma))$ 是离散的，并且是 W_Γ 与 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的半直积。否则，若群 W_Γ 按照 Gromov 的意义是词双曲的，则自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(W_\Gamma, V\Gamma))$ 不是离散的。

与上述结果相比，推论 B 更具一般性，因为它对群 W_Γ 的几何性质没有任何假设。

Graham Clarke 硕士论文中提出的结果，特别是 [2,定理 4.2 和命题 4.31], ，与推论 B 等价。不过，我们认为我们的方法更具一般性，证明也不那么繁琐。尤其是，我们打算在后续项目中运用局部作用构型的理论工具。

致谢。本文开始撰写时，Federico Berlai 正在巴斯克地区大学 UPV/EHU 数学系访问，他对该系的热情接待深表感谢。Federico Berlai 获得了奥地利科学基金会 FWF 的资助，项目编号为 J4194，并且

谨此感谢巴斯克政府项目 IT974-16、西班牙政府项目 MTM2017-86802-P（部分经费来自欧洲区域发展基金）以及 PID2020-117281GB-I00 的资助。

本项目的大部分工作是在新冠肺炎全球大流行病期间完成的。当时，澳大利亚边境关闭政策使 Michal Ferov 滞留欧洲长达 21 个月。在此期间以及截至目前，Michal Ferov 一直得到 George Willis 教授的澳大利亚研究理事会桂冠学者奖学金 FL170100032 的资助。

作者谨向 Bruno Duchesne、Robert Kropholler 和 Phillip Wesolek 致谢，感谢他们与我们分享了一篇关于相关主题的旧版未发表预印本。我们感谢 Colin Reid 与我们进行了有益的讨论，并建议将我们的方法应用于无限生成的考克斯特群。我们感谢 Anne Thomas 告知我们她的学生 Graham Clarke 撰写的一篇荣誉学位论文 [2] 以及 Haglund 和 Paulin [3]的工作。

2. Preliminaries

本节将固定记号，并汇集后文将用到的已知结果和预备结果。群 G 的单位元记作 e_G；若群可由上下文明确，则简记为 e 。当$G = \mathrm{Aut}(\Delta)$且 Δ 是某个图时，我们也用 id_Δ 表示 G中的单位元，以表明它是恒等映射 $\mathrm{id}_\Delta\colon \Delta \to \Delta$。同样，若图 Δ 可由上下文明确，我们将省略下标。

若 G 是作用于集合 X上的一个群，那么对于子集 $S \subseteq X$ ，我们用 $\mathrm{stab}_G(S)$ 表示 S 的逐点稳定子，即

$$\mathrm{stab}_G(S) = \{g \in G \mid g \cdot s = s \text{ for all } s \in S\}.$$

关于元素的命名，我们采用以下约定。给定一个考克斯特群 W_Γ，我们用 x、y、.....表示其（固定）生成集 $V\Gamma$中的元素，用 u、v、w、.....表示其凯莱图中的顶点，并将这些顶点视为群 W_Γ的元素；通常用 U、V、W表示字母表 $V\Gamma$上的词，即自由幺半群 $(V\Gamma)^*$ 的元素。字母 σ 通常表示与该考克斯特群相关联的图 Γ 的自同构群中的一个元素，而 α、β、..... 表示 W_Γ的凯莱图的自同构群中的元素。

2.1. 图。在本文中，我们将同时关注凯莱图，以及边上带有权的单纯图。群 G 关于生成集 S 的凯莱图是一个 S 标记的有向图 $\mathrm{Cay}(G, S)$，其中 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 的顶点与 G 的元素一一对应，且有序对 $(v, w) \in G \times G$对应一条以 $s \in S$ 为标记的有向边，当且仅当 $w = vs$。一般而言，凯莱图可能包含重边和自环。然而，由于本文只考虑由互不相同的非平凡对合生成的考克斯特群的凯莱图，我们可以假设 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 是一个 S 标记的单纯图，即一个没有自环和重边的无向图。在讨论

凯莱图的自同构时，我们将考虑保持顶点间邻接关系的顶点集 G 上的双射，但不一定保持标签。

在本文其余部分中，图均指单纯图，即图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$，其中 $V\Gamma$ 是一个集合，而 $E\Gamma \subseteq \binom{V\Gamma}{2}$ 是边的集合，即由顶点组成的无向对，且不存在自环（形如 $\{x, x\}$（其中 $x \in V\Gamma$）的边），同一对顶点之间也不存在重边。若 $\{x, y\} \in E\Gamma$，则称两个顶点 x、$y \in V\Gamma$ 相邻。映射 $\sigma\colon V\Gamma \to V\Gamma$ 是图 Γ 的自同构，当且仅当它是双射且 $\{v, w\} \in E\Gamma$ 当且仅当 $\{\sigma(v)\ \sigma(w)\} \in E\Gamma$。

子图始终指诱导子图，即其边集完全由其顶点确定的子图。给定两个单纯图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 和 $\Delta = (V\Delta, E\Delta)$，若 $V\Gamma \subseteq V\Delta$ 且 $V\Gamma = \binom{V\Gamma}{2} \cup E\Delta$，则称 Γ 是 Δ 的诱导子图。

设 $m\colon V\Gamma \times V\Gamma \to \{1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$ 是满足以下性质的函数：

c_1) $m(x, y) = m(y, x)$ 对所有 $x, y \in V\Gamma$ 均成立；
c_2) $m(x, y) = 1$ 当且仅当 $x = y$；c_3) $m(x, y) = +\infty$ 当且仅当 $\{x, y\} \notin E\Gamma$。

我们称 $(\Gamma, m) = (V\Gamma, E\Gamma, m)$ 为加权图，并称 m 为 Γ 的权。在上下文明确时，我们会在记法中省略 m，并称 Γ 为加权图。

映射 $\sigma\colon V\Gamma \to V\Gamma$ 是加权图 Γ 的自同构，若它是一个双射，且对所有 $x, y \in V\Gamma$，都有 $m(x, y) = m\big(\sigma(x)\ \sigma(y)\big)$。特别地，若 σ 是 Γ 的自同构，则 $\{x, y\} \in E\Gamma$ 当且仅当 $\{\sigma(x)\ \sigma(y)\} \in E\Gamma$。加权图 Γ 的自同构群记作 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$。

如果 m 是满足 $m(V\Gamma \times V\Gamma) \subseteq \{1, 2, +\infty\}$ 的权，那么根据权的定义，$m(x, y) = 1$ 当且仅当 $x = y$，且 $m(x, y) = 2$ 当且仅当 $\{x, y\} \in E\Gamma$，并且 $m(x, y) = +\infty$ 当且仅当 $\{x, y\} \notin E\Gamma$。在这种情况下，$V\Gamma$ 的一个双射是加权图 (Γ, m) 的自同构，当且仅当它是无权图 Γ 的自同构。

顶点 $S \subsetneq V\Gamma$ 的真子集是一个分离集，如果由 $V\Gamma \setminus S$ 张成的诱导子图是不连通的。根据定义，如果 Γ 本身已经不连通，那么空集就是图 Γ 的一个分离集。

2.2. 置换拓扑。本小节回顾置换拓扑的概念及一些基本事实。熟悉相关术语的读者可以跳过本小节。

设 X 为一个集合，并假设 G 是作用在 X 上的一个群。G 上自然地诱导出一种群拓扑，它源于该群在 X 上的作用，即置换拓扑，有时也称为逐点收敛拓扑。单位元的邻域基由形如 $\mathrm{stab}_G(F)$ 的集合组成，其中 $F \subset X$ 是有限的。

于是，对于元素 $g \in G$，其邻域基由所有形如以下形式的集合组成

$$\mathcal{B}(g, F) = \{f \in G \mid f \restriction_F = g \restriction_F\}.$$

其中，子集 $F \subset X$ 仍是有限集。

于是，以下结论可由定义直接得出。

引理 2.1. 子群 $H \leq G$ 在由群 G 对集合 X 的作用所诱导的置换拓扑中是开的，当且仅当它包含某个有限集 $F \subset X$ 的逐点稳定子。

显然，作用的核包含于单位元的每个邻域中，因此它是包含单位元的最小开子集（按包含关系而言）。事实上，作用的核就是单位元的连通分支——由此可知，置换拓扑全不连通当且仅当该作用是忠实的。

此外，若该作用是忠实的，则对于每一对不同的元素$f, g \in G$，都存在 $x \in X$ 使得 $f \cdot x \neq g \cdot x$。特别地，这意味着 $\mathcal{B}(f, \{x\})$和 $\mathcal{B}(g, \{x\})$是分别包含 f和g 的互不相交的开邻域。反过来，根据置换拓扑的定义可知，若由作用在 X 上的作用所诱导的置换拓扑不是豪斯多夫的，则存在 $g \in X$ 包含于单位元的每个邻域中，因此对所有 $x \in X$都有 $g \cdot x = x$。

下面的引理概括了以下两个观察结果。

引理 2.2. G 上的置换拓扑是豪斯多夫的，当且仅当 G 在 X 上的作用是忠实的。此外，G 是全不连通的，当且仅当该作用是忠实的。

在本文的讨论范围内，X 将是一个顶点传递单纯图，带有 $X = (VX, EX)$，其中 VX 表示 X 的顶点集，$EX \subseteq \binom{VX}{2}$ 表示 X的边集，并且 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$。特别地，这意味着 G 是全不连通的。当 X 是局部有限的，也就是说每个顶点仅与有限多个顶点相邻时，很容易看出 $\mathrm{Aut}(X)$是局部紧的。

2.3. 考克斯特群。与不带权的图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$相关联的直角考克斯特群 W_Γ（也缩写为 RACG）是由以下群表示给出的群

$$W_\Gamma := \langle V\Gamma \mid x^2 = e \ \forall x \in V\Gamma,\ xy = yx \ \forall \{x, y\} \in E\Gamma \rangle.$$

更一般地，考克斯特群是由如下形式的群表示给出的群（不一定是有限生成的）：

$$W := \langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \mid (x_i x_j)^{m_{i,j}} = e \ \forall i, j \rangle, \tag{2}$$

其中指数 $m_{i,\ j} \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ 满足：

(1) $m_{i,j} = m_{j,i}$ 对所有 i, j均成立；(2) $m_{i,j} = 1$ 当且仅当 $i = j$，也就是说，生成元都是对合；

(3) 如果 $m(x,y) = +\infty$ 那么，根据定义， x_i和 x_j之间不存在关系。

在文献中，当集合 $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ 有限时，称其为考克斯特生成集，而称二元组 (W, S) 为考克斯特系统，尽管本文不采用这一术语。

对于每个考克斯特系统（我们沿用方程（2）的记号），都可以按以下方式关联一个加权图 Γ 。顶点集 $V\Gamma$ 定义为集合 $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$。两个不同的顶点 x_i 和 x_j 在 Γ 中相连，当且仅当 $m_{i,j} < +\infty$，权函数定义为 $m(x_i, x_j) := m_{i,j}$。

因此，任意考克斯特群都具有如下形式

$$W_\Gamma := \langle V\Gamma \mid (xy)^{m(x,y)} = e \ \forall x, y \in V\Gamma \rangle, \tag{3}$$

其中 (Γ, m) 是一个加权图。同样，$(xy)^{+\infty} = e$ 表示生成元 x 和 y 之间没有施加任何关系。

注意，一个考克斯特群是直角考克斯特群，当且仅当其权函数满足 $m(V\Gamma \times V\Gamma) \subseteq \{1, 2, +\infty\}$。也就是说，我们可以将直角考克斯特群视为所有边的权均为二的考克斯特群。

给定考克斯特群 W_Γ，记 $\mathcal{C}_\Gamma$ 为相对于生成集 $V\Gamma$ 的 W_Γ 的凯莱图，也就是顶点集为 W_Γ 的图，并且两个顶点 v、$w \in W_\Gamma$ 相连当且仅当存在满足 $v = wx$ 的 $x \in V\Gamma$。在这种情况下，边 $\{v, w\}$ 标记为字母 x，也就是说， $\mathcal{C}_\Gamma$ 标记为集合 $V\Gamma$。

注意，凯莱图是正则且连通的，并且每个顶点的度为 $|V\Gamma|$，每条关联边都恰好由 $V\Gamma$ 中的一个元素标记。特别地，当且仅当生成集 $V\Gamma$ 有限时，这个凯莱图才是局部有限的。给定凯莱图中的一个顶点 v 和一个自然数 n，记 $B(v, n)$ 为 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中以顶点 v 为中心、半径为 n 的球。

记 $\mathcal{A}_\Gamma$ 为自同构群 $\mathsf{Aut}(\mathcal{C}_\Gamma)$。当图 Γ 的含义可由上下文明确时，我们常省略下标 Γ ，以简化记号。我们不要求 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的元素保持标记。

2.4. 约化形式、抛物子群。假设 Γ 是一个无权图（或者等价地，一个权函数的像包含于 $\{1, 2, +\infty\}$ 的图）。给定一对顶点 x、$y \in V\Gamma$，即直角考克斯特群 W_Γ 的一对典范生成元，当且仅当对于凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的任意顶点 v ，我们都能在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中找到一个长度为四的嵌入圈，其中 v 是一个顶点，且正方形的相对两边分别标记为 x 和 y （参见图 1），此时 x 和 y 在 Γ 中由一条边连接。我们称这样的嵌入圈为位于 v 、标记为 x 和 y 的交换方形。

同样的观察也适用于加权图，也就是说，适用于考克斯特群的凯莱图：给定 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中任意一个顶点 v ，两个生成元 x 和 y 将

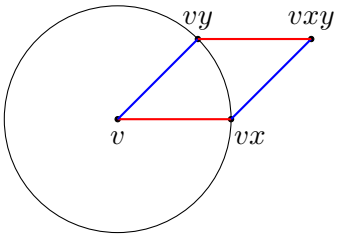


FIGURE 1. 在 v 处的交换方形。

交替标记一个偶数长度的嵌入圈 $2l$ （其顶点之一为 v）的边，当且仅当 $\{x,y\} \in E\Gamma$ 和 $m(x, y) = l$。我们称这个嵌入圈为顶点 v 处 x 和 y 的关系圈。也就是说，交换方形恰好是长度为四的关系圈。

为证明引理 2.8，我们需要一些关于考克斯特群的概念。设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, m)$ 是一个带权单纯图，并考虑自由幺半群 $V\Gamma^*$，也就是由有限个 $V\Gamma$ 元素组成的序列的集合，我们称这些序列为字。字 $W = (x_1, \ldots, x_r) \in V\Gamma^*$ 中的元素 x_1、$\ldots$、x_r 称为该字的音节，并称 r 为该字的长度，记作 $r = |W|$。我们用 ϵ 表示空字。

任何这样的有限序列 $(x_1, \ldots, x_r)$，或称字，都通过求值映射 $\omega : V\Gamma^* \to W_\Gamma$ 定义一个群元素，该映射定义如下：

$$\omega(x_1, \ldots, x_r) := x_1 \ldots x_r \in W_\Gamma,$$

其中 $\omega(\epsilon) := e \in W_\Gamma$。我们称字 $(x_1, \ldots, x_r)$ 表示群元素 $\omega(x_1, \ldots, x_r)$。注意，不同的字可能表示同一个群元素。

考虑对 $V\Gamma^*$ 进行以下初等化简：

s_1) 若 $y \in V\Gamma$，且 $(x_1, \ldots, x_r)$ 中两个连续的音节等于 y，则删除这两个音节，得到一个长度为 $r - 2$ 的序列；s_2) 若 x，$y \in V\Gamma$，且 $(x_1, \ldots, x_r)$ 中连续的 $m(x, y)$ 个音节交替等于 x 和 y，则在这 $m(x, y)$ 个音节中，将所有 x 替换为 y，反之亦然。

若词 w_2 可以通过有限次初等化简由词 w_1 得到，则 $\omega(w_1) = \omega(w_2)$。我们将第二类化简称为辫关系。换句话说，辫关系是一种如下形式的替换

$$(x_1, \ldots, \underbrace{x, y, x, \ldots}_{\text{length } m(x,y)}, \ldots, x_r) \quad \longmapsto \quad (x_1, \ldots, \underbrace{y, x, y, \ldots}_{\text{length } m(x,y)}, \ldots, x_r)$$

在 $V\Gamma^*$ 中的有限序列之间。特别是，只有当 $m(x, y) \neq +\infty$ 时，才会出现辫关系。此外，由于它们显然成立，我们不会考虑 $x = y$ 的辫关系，也就是说，不考虑 $m(x, y) = 1$，如

在这种情况下，辫关系不会改变该序列。辫关系不会影响字的长度，而第一类化简会使长度减少两个单位。

在直角考克斯特群的语境中，辫关系称为音节交换，因为在这种情况下，我们将子词 (x, y) 替换为词 (y, x)。

以下基本结果（参见 [1, 定理 3.3.1]）刻画了表示给定元素$g \in W_\Gamma$的最短词。

定理 2.3. 设 W_Γ 为一个考克斯特群， w_1、 $w_2 \in V\Gamma^*$ 为表示某个元素 $g \in W_\Gamma$ 的最短词。那么， w_1 可以通过有限次应用辫关系由 w_2 得到，反之亦然。

若 $g \in W_\Gamma$ 是考克斯特群 W_Γ中的一个元素，我们用 $\|g\|$ 表示任一表示该元素的最短词 $w \in V\Gamma^*$ 的长度，即

$$\|g\| = \min_{W \in V\Gamma^*} \{|W| \mid \omega(W) = g\}$$

自同构 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ 和凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的顶点 v 唯一确定一个自同构 $\sigma(\alpha, v) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，如下所述。由于 α 是一个自同构，它在与 v 相邻的边与和 $\alpha(v)$相邻的边之间诱导出一个双射，因此也在它们的标签之间诱导出一个双射 $\sigma(\alpha, v)$: $V\Gamma \to V\Gamma$。我们称 $\sigma(\alpha, v)$ 为 α 在 v 处的局部作用，并断言该映射是加权图 Γ的一个自同构，也就是说，对于所有 x、 $y \in V\Gamma$，它都保持权 $m(x, y)$。

为说明这一点，设 $\{x_1, x_2\} \in E\Gamma$ 是一条边，并设 w_1、 w_2 是凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中与 v 相邻的顶点，使得 $\{v, w_1\}$ 的标记为 x_1 ，而 $\{v, w_2\}$ 的标记为 x_2。于是，在凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中，我们可以看到位于顶点 v 和 $\alpha(v)$ 处的两个长度为 $2m(x_1$、 $x_2)$ 的关系圈，分别标记为 x_1、 x_2 和 $\alpha(x_1)$ $\alpha(x_2)$（图 2 中的 $m(x_1$ 、 $x_2) = 2$，不同颜色对应不同的标记： x_1 为蓝色， x_2 为红色， $\{\alpha(v)$ $\alpha(w_1)\}$ 的标记为青色， $\{\alpha(v)$ $\alpha(w_2)\}$ 的标记为品红色）。

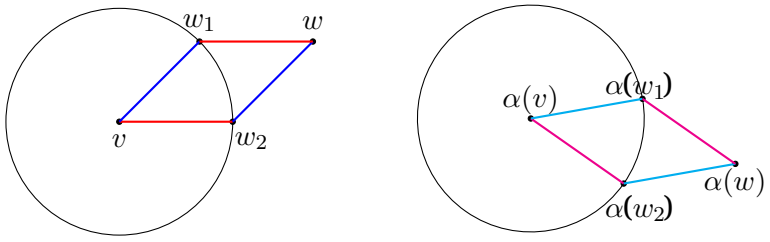


FIGURE 2. 图自同构保持嵌入圈的长度。

由于 α 是一个自同构， v 处带有标记 x_1 和x_2 的关系圈必须映射到 $\alpha(v)$ 处的关系圈，其标记为 $\sigma(\alpha, v)(x_1)$ 和 $\sigma(\alpha, v)(x_2)$。因此， $\sigma(\alpha, v)(x_1)$ 和 $\sigma(\alpha, v)(x_2)$ 由一条

边连接于 Γ 中，并且 $m(x_1,x_2) = m\big(\sigma(\alpha,v)(x_1)\ \sigma(\alpha,v)(x_2)\big)$，也就是说，双射$\sigma(\alpha,v)$保持权。因此，$\sigma(\alpha,v) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$。这意味着我们可以将 σ 视为一个定义良好的映射

$$\sigma\colon \mathcal{A}_\Gamma \times W_\Gamma \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

类似地，对于给定的 $\alpha \in \mathcal{A}\Gamma$，映射 $\sigma(\alpha,\text{–})\colon W_\Gamma \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 是良定义的。

定义 2.4. 设 Γ 是一个加权图，并考虑相应考克斯特群的凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$。我们称 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ 为

(1) 若对所有 $v \in W_\Gamma$ 都有 $\sigma(\alpha,v) = \mathrm{id}_\Gamma$，则称其为平移；也就是说，对于 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的所有边 $\{v,w\}$，边 $\{v,w\}$ 和 $\{\alpha(v)\ \alpha(w)\}$ 具有相同的标记；(2) 若对 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的所有顶点 v,w，都有 $\sigma(\alpha,v) = \sigma(\alpha,w)$，则称其为几乎平移。

等价地，可以说，$\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ 是平移，当且仅当对所有 $v \in W_\Gamma$，$\sigma(\alpha,v) = \mathrm{id}_\Gamma$；而 α 是几乎平移，当且仅当映射 $\sigma(\alpha,\text{–})$ 为常值。

我们称这些自同构为平移，因为它们对应于由 W_Γ-元素进行的左乘，正如引理 2.6 中所述。

给定 $w \in W_\Gamma$，定义 $L_w\colon\ W_\Gamma \to W_\Gamma$ 为 $L_w(v) := wv$。由于凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是右凯莱图，L_w 是 $\mathcal{C}_\Gamma$的自同构群中的一个元素，也就是 $L_w \in \mathcal{A}_\Gamma$。在下面的引理中，我们说明 $w \mapsto L_w$ 是一个单同态，其像是由 $\mathcal{C}_\Gamma$的平移生成的子群。更一般地，该引理适用于任意群（不只是考克斯特群）以及任意生成集。

引理 2.5. 设 G 是一个群，S 是 G的生成集，并考虑（右）凯莱图 $\mathrm{Cay}(G,S)$。映射 $w \mapsto L_w$ 是一个单同态，因此 G 嵌入为 $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big)$的一个子群。

此外，若 $\mathrm{Cay}(G,S)$中的两个平移 α 和 β 满足：对于某个顶点 $v \in \mathrm{Cay}(G,S)$，有 $\alpha(v) = \beta(v)$，则 $\alpha = \beta$。特别地，$\mathrm{Cay}(G,S)$中所有平移组成的集合是一个同构于 G的子群。

证明. 根据凯莱定理，由 $w \mapsto L_w$ 定义的映射 $\iota\colon G \to \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big)$ 是一个单同态，并且对于任意$w \in G$，L_w 都是保持标签的。

设 $v \in \mathrm{Cay}(G,S)$满足 $\alpha(v) = \beta(v)$。因此，由于 α 和 β 都保持标签，我们可以推知它们在 v周围半径为一的球上相同，也就是说，对于所有 $u \in B(v,1)$，都有 $\alpha(u) = \beta(u)$。由于凯莱图是一个连通图，重复这一论证可得 $\alpha = \beta$。

为了证明映射 ι 的像是群 $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big)$ 中的平移集合，即保持标签的自同构集合，考虑一个平移 $\alpha \in \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big)$。那么 $\alpha(e) = L_{\alpha(e)}(e)$，因此根据目前已证明的结果，$\alpha = L_{\alpha(e)}$。□

因此，凯莱图 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 的保持标签自同构子群不取决于生成集 S 的选择。将引理 2.5 特化到我们所关注的情形，即考克斯特群，可得：

引理 2.6. 设 α 和 β 是 $\mathcal{A}_\Gamma$ 中两个平移，且它们在顶点 $v \in \mathcal{C}_\Gamma$ 上的像相同。那么 $\alpha = \beta$。特别地，$\mathcal{A}_\Gamma$ 中所有平移构成一个与 W_Γ 同构的子群。

鉴于引理 2.6，稍微滥用一下记号，我们用 W_Γ 表示平移的集合。因此，表达式 $y \in W_\Gamma$ 和 $L_y \in W_\Gamma$ 都有意义。前者表示我们考虑的是群 W_Γ 中的元素 y，后者则表示我们考虑的是 $\mathcal{A}_\Gamma$ 中的平移 L_y。

引理 2.7. 由固定单位元的几乎平移生成的 $\mathcal{A}_\Gamma$ 子群同构于 Aut(Γ)。

证明. 给定 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，我们构造一个固定单位元顶点的几乎平移 α，使得对于任意顶点 $v \in \mathcal{C}_\Gamma$，都有 $\sigma(\alpha, v) = \sigma$；随后我们将证明映射 $\sigma \mapsto \alpha$ 是一个同构。

若 $\sigma = \mathrm{id}_\Gamma$ 是恒等自同构，则构造显然，因为我们选择 α 为 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的恒等自同构。因此，设 $\sigma \neq \mathrm{id}_\Gamma$。与任意顶点关联的边恰有 $|V\Gamma|$ 条，每条边都标记为 Γ 的一个不同顶点。

定义自同构 α。首先，我们规定 $\alpha(e) = e$。若 $w \in B(e, 1) \setminus \{e\}$ 是一个顶点，且边 $\{e, w\}$ 由字母 x 标记，并且 $\sigma(x) = y \in V\Gamma$，那么我们定义 $\alpha(w) := \tilde{w}$，其中 $\{e, \tilde{w}\}$ 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中与 e 关联且由 y标记的（唯一）一条边。注意，$\tilde{w} \in B(e, 1) \setminus \{e\}$。这仅意味着 $\sigma(\alpha, e) = \sigma$。

为完成 α 的定义，我们按如下方式递归进行。设$w \in \mathcal{C}_\Gamma$ 是一个与 e相距 $l \geqslant 1$ 的顶点，考虑一条路径 γ，其顶点为 $(e, w_1, w_2, \ldots, w_l = w)$，长度为 l，连接 e与 w，且位于 $\mathcal{C}_\Gamma$中；并假设 α 已在 $B(e, l-1)$上定义。因此， w_{l-1} 是一个与 e相距 $l-1$ 的顶点，并且根据归纳假设， $\alpha(w_{l-1})$已经定义。于是， $\alpha(w)$定义为满足以下条件的（唯一）顶点：若边 $\{w_{l-1}, w_l\}$ 的标记为 x，则边 $\{\alpha(w_{l-1})\ \alpha(w)\}$ 的标记为 $\sigma(x)$。

我们断言该定义良好，也就是说，这个赋值不依赖于连接 e 与 w 的路径。事实上，考虑另一条长度为 l 的路径 $\gamma' = (e, w'_1, w'_2, \ldots, w'_l = w)$，它在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中连接 e 与 w。令 w_γ 和 $w_{\gamma'}$ 为考虑 γ 和 γ' 时得到的两个顶点。我们要证明 $w_\gamma = w_{\gamma'}$。

当 $w_{l-1} = w'_{l-1}$ 时，该论断显然成立，也就是说，这两条路径共享最后一条边。还可以证明，若能在 $\gamma' \circ \gamma^{-1}$ 上读出的词具有形式 $(xy)^l$，其中 $\{x, y\} \in E\Gamma$，则 $w_\gamma = w_{\gamma'}$。对于一般情形，假设 γ 和 γ' 的最后一条边不同。由定理 2.3 可知，在 γ 和 γ' 上读出的字可以通过有限次应用辫关系而相互转换。特别地， $\{w_{l-1}, w\}$ 的标记 x 与 $\{w'_{l-1}, w\}$ 的标记 y 必须在 Γ 中由一条边连接。因此，我们可以将此情形归结为前一种情形：也就是说， γ 和 γ' 的一个尾子路径属于 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中长度为 $2m_{x,\ y}$ 的一个诱导圈，因此 $w_\gamma = w_{\gamma'}$。

也就是说，我们定义了凯莱图顶点之间的一个双射 α，它保持顶点间的邻接关系，因而是凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的一个自同构。

现在很容易验证，$\sigma \mapsto \alpha$ 是一个群同态，而且它确实是单射且满射的。□

稍微滥用一下记号，我们将把 Aut(Γ) 与 $\mathcal{A}_\Gamma$ 中由固定单位元顶点的几乎平移构成的子群视为相同。

当然，单位元顶点并没有什么特殊之处，因此我们有：

引理 2.8. 设 Γ 是一个图，$\sigma \in$Aut(Γ)，且 v 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的一个顶点。则存在一个自同构 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，使得 $\alpha(v) = v$，并且对于 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的所有顶点 w，都有 $\sigma(\alpha, w) = \sigma$。

在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中固定一个顶点的任何几乎平移，都共轭于 Aut(Γ) 的一个元素，即共轭于一个固定单位元顶点的几乎平移。事实上，若 α 满足对某个 $v \in \mathcal{C}_\Gamma$ 有 $\alpha(v) = v$，则

$$\alpha = L_v \beta L_{v^{-1}},$$

其中 $R_v \in W_\Gamma$ 且 $\beta \in$ Aut(Γ) $\leqslant \mathcal{A}_\Gamma$。此外，若 α 的另一个不动点为 w，则 $L_v \beta L_{v^{-1}} = L_w \beta L_{w^{-1}}$。我们有 $\sigma(\alpha, v) = \sigma(\beta, e)$。

在下面的推论中，我们沿用引理 2.8 的记号。

推论 2.9. 设 Γ 是一个图，$\sigma \in$Aut(Γ)，且 v 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的一个顶点。自同构 α 逐点固定集合 $\left\{ w \in V\Gamma \mid \text{中存在一条连接 } w \text{ 与 } v \text{ 的路径，其边的标记均为 } \sigma \right\}$.

的不动点

引理 2.10. 由几乎平移生成的 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的子群同构于 $W_\Gamma \rtimes$Aut(Γ)。特别地，若单纯图 Γ 是有限的，则 $W_\Gamma \rtimes$Aut(Γ) 是有限生成的。

证明. 显然，W_Γ 与 Aut(Γ)，也就是平移子群与固定单位元顶点的几乎平移子群，交集平凡。

现在考虑一个不固定 $\mathcal{C}_\Gamma$中任何顶点的几乎平移 α，并假设它不是平移，也就是说 $\sigma(\alpha, -) \neq \mathrm{id}_\Gamma$，因此 $\alpha(e) \neq e$。考虑将顶点 e 映到顶点 $\alpha(e)$的平移 $L_{\alpha(e)} \in W_\Gamma$。于是我们有

$$\alpha = \left(L_{\alpha(e)} \cdot (L_{\alpha(e)})^{-1}\right) \cdot \alpha = L_{\alpha(e)} \cdot \left((L_{\alpha(e)})^{-1} \cdot \alpha\right).$$

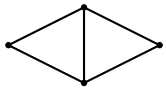
注意到 $(L_{\alpha(e)})^{-1} \cdot \alpha$ 是一个几乎平移，并且根据构造，它固定单位元顶点，也就是说，它是 Aut(Γ) 的一个元素。因此，$\mathcal{A}_\Gamma$ 中的任意几乎平移都可以表示为 W_Γ 中的一个元素与 Aut(Γ) 中一个元素的乘积。

此外，平移子群 W_Γ 是几乎平移子群 $\mathcal{A}_\Gamma$的正规子群。事实上，若 α 是几乎平移且 $L_w \in W_\Gamma$，那么 $\alpha^{-1} L_w \alpha = L_{\alpha(w)}$。

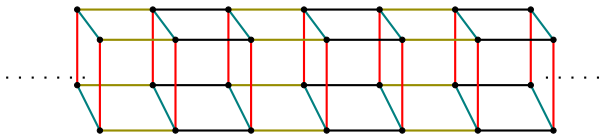
因此，几乎平移子群分裂为半直积 $W_\Gamma \rtimes$Aut(Γ)。若图 Γ 是有限的，则 W_Γ 是有限生成的，且 Aut(Γ) 是有限的，所以 $W_\Gamma \rtimes$Aut(Γ) 也必定是有限生成的。至此，引理得证。□

我们以三个例子结束本节：第一个例子是双端直角考克斯特群，第二个是单端直角考克斯特群，第三个则是无穷端群。前两个例子的凯莱图的自同构群是可数的，而第三个例子的凯莱图的自同构群则是不可数的。

例 2.11. 作为双端直角考克斯特群的一个例子，我们来考虑图 Γ



它是一个四个顶点的完全图，去掉一条边后得到，且所有边的权均为二。它的凯莱图为



根据命题 3.4，自同构群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 是可数的。

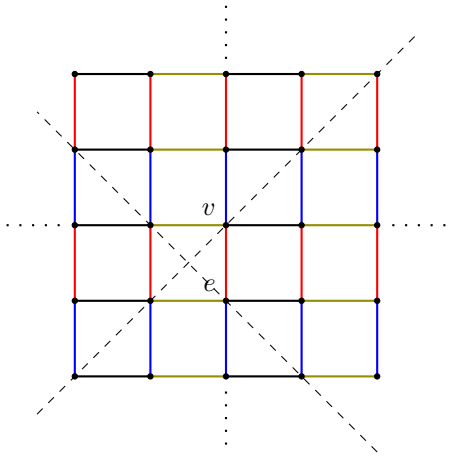
例 2.12. 假设 $\Gamma = C_4$ 是一个四边圈，且所有边的权均为二（也就是说，相应的考克斯特群是直角的），并且 $\sigma \in$Aut(Γ) 是沿虚线轴的反射



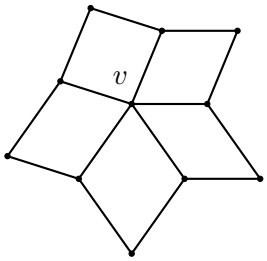
设 v 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中的一个顶点（在图中，v 与单位元顶点的距离为一），这里的 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是下图所示的无限二维网格。自同构 σ 诱导出自同构 $\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma$，即沿着经过 v 的虚线对角线的反射，使得 $\sigma(\alpha, v) = \sigma$。若 β 是沿着经过 e 的虚线对角线的反射，则 $\alpha = L_v \beta L_{v^{-1}}$。两个反射 α 和 β 的轴相互垂直，因为自同构 L_v 固定边 $\{e, v\}$ 并交换其两个顶点，也就是说，$L_v(e) = v$ 且 $L_v(v) = e$。注意，$\sigma(\alpha, v) = \sigma(\beta, e)$。

更一般地，若考虑长度为 $n \geqslant 4$ 的圈 C_n，就会得到由正方形构成的平面镶嵌。

在凯莱图 Cay(C_5) 中，任意顶点 v 都有五个相邻顶点，即 $|VC_5|$，它们构成交换方形（对应于圈 C_5 的边）：



圈 C_5）：

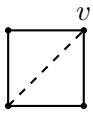


这种图案覆盖一个平面，而此类凯莱图的自同构群是有限生成的，因此是可数的；这一点将由命题 3.4 推出。

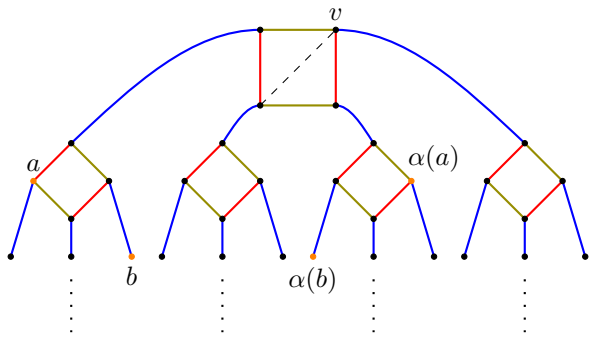
例 2.13. 现在来考虑非连通图 Γ



其中唯一的边权为二。令 Γ_1 表示由两个顶点和一条边组成的连通分支，令 Γ_2 表示由一个顶点组成的连通分支。我们有 $\mathrm{Aut}(\Gamma_1) = \{e, \sigma\}$ 是二阶循环群，并且 $\mathcal{C}_{\Gamma_1}$) 是一个交换方形。令 v 为 $\mathcal{C}_{\Gamma_1}$) 的一个顶点。根据推论 2.9，自同构 σ （它交换 Γ_1 的两个顶点）诱导出一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{\Gamma_1})$)，固定顶点 v，即沿以下虚线的反射（以及凯莱图中每个正方形的一条对角线方向上的反射）：



为 W_Γ 的每个生成元赋予不同的颜色（Γ_2 中的顶点用蓝色，Γ_1 中的两个顶点用红色和橄榄色），我们得到如下情形



其中我们描绘了顶点 a 和 b 及它们在自同构 α 下各自的像。

3. Good separating sets

本节中我们证明定理 A 的一个蕴含。使我们能够做到这一点的一个基本概念是良好分离集。

定义 3.1. 设 $S \subsetneq \Gamma$ 是一个真分离集，使得 $\Gamma \setminus S = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n$ 是 $n \geqslant 2$ 个连通分支的不交并。假设存在一个非空集合 $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$，具有如下性质：固定 $\Gamma_1 := S \sqcup \bigsqcup_{i \in I} C_i$ 和 $\Gamma_2 := S \sqcup \bigsqcup_{i \notin I} C_i$，存在一个非平凡的 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$，使得 $\alpha \restriction_S = \mathrm{id}_S$。那么我们称 S 为良好分离集。

注意，S 可以是空集。例如，对于例 2.13 中讨论的图，唯一的良好分离集就是空集。定义背后的思路如下。存在真分离集 S 时，考克斯特群 W_Γ 可适当地分解为融合积 $W_\Gamma = W_{\Gamma_1} *_{W_S} W_{\Gamma_2}$，其中 Γ_1 和 Γ_2 如定义 3.1 所述。若分离集 S 是良好分离集，那么我们可以对 Γ_1 的典范生成元进行非平凡置换，同时逐点固定 W_S 的典范生成元。直观而言，我们能够在 W_Γ 的（凯莱图）中，对 W_{Γ_1} 的任意陪集构造非平凡自同构，并将其延拓到图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的其余部分。在推论 4.4 中，我们将利用这一思路证明，存在良好分离集时，凯莱图的自同构群是不可数的。

我们可以用图 Γ 中顶点的星来刻画良好分离集。在下述引理中，我们沿用定义 3.1 中的记号。

引理 3.2. 设 Γ 是一个有限单纯图。以下条件等价：

(1) 存在一个顶点 $v \in V\Gamma$ 和一个非平凡的 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(v)} = \mathrm{id}_\Gamma$；

(2) Γ 存在一个良好分离集；(3) 存在 α、$\beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$ 中的不相同元素，使得 $\alpha \restriction_S = \beta \restriction_S$。

证明。假设存在一个顶点 $v \in V\Gamma$ 使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(v)} = \mathrm{id}$。由于 $\alpha \neq \mathrm{id}_\Gamma$，我们有 $\Gamma \setminus \mathrm{star}(v) \neq \emptyset$。因此，$\mathrm{link}(v)$ 是一个良好分离集，且第一个条件蕴含第二个条件。

另一方面，假设存在一个良好分离集 S，其关联的非平凡自同构为 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$，且满足 $\alpha \restriction_S = \mathrm{id}$。对于任意顶点 $v \in \Gamma_2 \setminus S$，我们有 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(v)} = \mathrm{id}$，也就是说，第二个条件蕴含第一个条件。

最后，第二个条件蕴含第三个条件，其中 α是良好分离集 $\beta = \mathrm{id}_\Gamma$所给出的非平凡自同构；考虑非平凡自同构 $\alpha^{-1}\beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，第三个条件则蕴含第二个条件。□

以下引理是证明本节主要结果的关键。

引理 3.3. 设 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，令 v 为 $\mathcal{C}_\Gamma$ 和 $x \in V\Gamma$ 中的一个顶点。那么

$$\sigma(\alpha, v) \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \sigma(\alpha, vx) \restriction_{\mathrm{star}(x)} .$$

证明. 设 $y \in \mathrm{link}(x)$，则在凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中，我们看到一个长度为 $2m(x, y)$ 的关系圈，它以 v 为关联顶点，并交替标记为 x 和 y（图 3 左侧为一般情形，右侧为直角情形，即 $m(x, y) = 2$）。

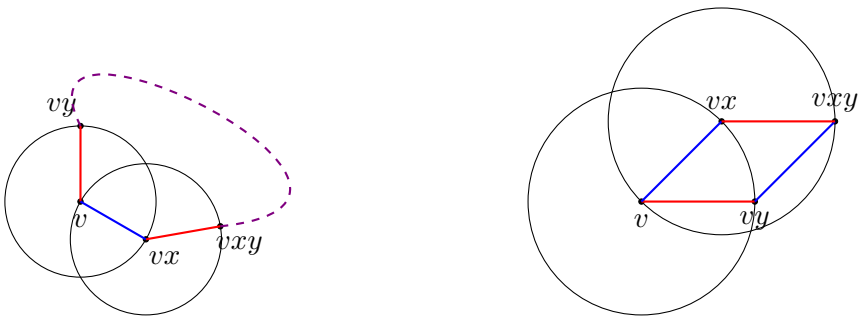


FIGURE 3. 关系圈，交换方形。

边 $\{v, vy\}$ 和 $\{vx, vxy\}$ 标记为 y。此外，由于 α 是图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的一个自同构，它必定将关系圈映射到长度相同的关系圈；特别地，$\sigma(\alpha, v)(y) = \sigma(\alpha, vx)(y)$，也就是说，$\sigma(\alpha, v)$ 和 $\sigma(\alpha, vx)$ 在 $\mathrm{link}(x)$ 上重合。

显然，我们还有 $\sigma(\alpha, v)(x) = \sigma(\alpha, vx)(x)$，因为顶点 v 和 vx 在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中由标记为 x 的边连接。因此，引理得证。□

根据引理 3.2，在 Γ 中存在良好分离集，等价于满足定理 A 陈述中的条件，也就是说，存在某个 $x \in V\Gamma$ 和某个非平凡的 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，使得 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \mathrm{id}_{\Gamma}$。

因此，在命题 3.4 中，我们证明：若图 Γ 是有限的，且不存在任何良好分离集，那么自同构群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 仅有有限的顶点稳定子。请注意，一般来说，即使图 Γ是有限的，群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 也可能不可数（例 2.13 给出了一个具有 $|V\Gamma| = 3$ 的不可数 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的例子）。

命题 3.4. 设 Γ 是一个连通单纯图，并假设 Γ中不存在良好分离集。那么 $\mathcal{A}_\Gamma$ 中的所有元素都是几乎平移，即 $\mathcal{A}_\Gamma = W_\Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$。特别地，若 Γ 是有限的，则自同构群是有限生成的，因此是可数的。

证明. 设 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$、 v 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 和 $x \in V\Gamma$中的一个顶点。由引理 3.3 可知 $\big(\sigma(\alpha, v)^{-1} \circ \sigma(\alpha, vx)\big) \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \mathrm{id}_{\Gamma}$，因此必有$\sigma(\alpha, v) = \sigma(\alpha, vx)$，因为根据引理 3.2，对所有非平凡的 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$以及所有 $x \in V\Gamma$，我们都有 $\sigma \restriction_{\mathrm{star}(x)} \neq \mathrm{id}_{\Gamma}$。

因此，对于所有 $x \in V\Gamma$，都有 $\sigma(\alpha, v) = \sigma(\alpha, vx)$。重复这一过程，并对半径递增的球面上的顶点归纳应用该过程，我们得出 α 是一个几乎平移。

当 Γ 是有限图时， $\mathcal{A}_\Gamma$ 是有限生成的，因此根据推论 2.10，它是可数的。□

4. Configurations of local actions

本节将证明定理 A 的逆命题，即在 Γ 中存在良好分离集，必然导致自同构群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 不可数。

以下两个概念将有助于证明这一点。

定义 4.1. 如果存在 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，使得对所有 $v \in W_\Gamma$， $\overline{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$ 满足 $\overline{\sigma}(v) = \sigma(\alpha, v)$，则称其为合法局部作用构型（简称合法构型）。我们用符号 Σ_Γ 表示 $\mathrm{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$ 中所有合法构型组成的集合。

如果对于所有 $v \in W_\Gamma$ 和所有 $x \in V\Gamma$，都有

$$\overline{\sigma}(v) \restriction_{\mathrm{star}(x)} = \overline{\sigma}(vx) \restriction_{\mathrm{star}(x)} .$$

特别地，给定一个自同构 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，根据定义，元素$\overline{\sigma}_\alpha := \{\sigma(\alpha, u) \mid u \in W_\Gamma\} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$ 是一个合法局部作用构型。另一方面，引理 3.3 保证它满足 $(*)$-条件。

我们将在下面的结果中看到，这两个概念，也就是合法构型和（$*$）-条件，是等价的。

引理 4.2. 设 $\overline{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$ 为任意元素。那么 $\overline{\sigma} \in \Sigma_\Gamma$ 当且仅当 $\overline{\sigma}$ 满足（$*$）-条件。

证明。若 $\overline{\sigma} \in \Sigma_\Gamma$，则根据定义，存在 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，使得对于所有 $v \in W_\Gamma$，$\overline{\sigma}(v) = \sigma_\Gamma(\alpha, v)$。引理 3.3 保证 $\overline{\sigma}$ 满足 $(*)$-条件。

现在，假设 $\overline{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$ 满足 $(*)$-条件。我们将构造 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$，使得对于所有 $v \in W_\Gamma$，$\sigma_\Gamma(\alpha, v) = \overline{\sigma}(v)$。首先，我们通过归纳构造一个映射序列 $\alpha_n\colon B(e,n) \to B(e,n)$，其中$B(e,n)$是图 $\mathcal{C}_\Gamma$中以单位元顶点 e 为中心、半径为 n 的球。

对于 $n = 0$，我们只需令 $\alpha_0(e) := e$。对于 $n \geqslant 1$，我们通过归纳定义$\alpha_n(v) := \alpha_{n-1}(v)$，若 $v \in B(e, n-1)$。另一方面，若 $v \in \partial B(e,n)$，由于凯莱图是连通的，至少存在一个生成元 $x \in V\Gamma$，使得 $vx \in B(e, n-1)$；在这种情况下，我们定义

$$\alpha_n(v) := \underbrace{\alpha_{n-1}(vx)}_{\in V\mathcal{C}_\Gamma}\underbrace{\overline{\sigma}(vx)(x)}_{\in V\Gamma} \in V\mathcal{C}_\Gamma$$

根据定义，顶点 $\alpha_n(v)$ 是凯莱图中唯一一个通过标记为 $\overline{\sigma}(vx)(x)$ 的边与顶点 $\alpha_{n-1}(vx)$ 相连的顶点。

我们将对 n 使用归纳法来证明：对于所有自然数 $n \in \mathbb{N}$，$B(e,n) \to B(e,n)$ 都是图自同构，也就是说，它是集合 $B(e,n)$ 到自身的一个双射，并且保持边。

显然，当 $n = 0$ 时，该命题成立。现在，假设对于所有 $i \leq n$，α_i 都是定义良好的图自同构，并考虑 α_{n+1}：$B(e, n+1) \to B(e, n+1)$。

首先，我们证明 α_{n+1} 在 $B(e, n+1)$ 的所有顶点上都有良好定义。根据归纳假设，α_{n+1} 在 $B(e,n)$ 上有良好定义；因此，令 $w \in \partial B(e, n+1)$，并假设存在两个不同的生成元 $x, y \in V\Gamma$ 和 $u, v \in B(e,n)$，使得 $ux = w = vy$。首先，我们证明

$$\alpha_n(v)\overline{\sigma}(v)(x) = \alpha_n(u)\overline{\sigma}(u)(y).$$

为此，设 $W_u = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $W_v = (y_1, \ldots, y_n)$ 分别是表示 u 和 v的两个约化字（因此，$x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in V\Gamma$）。由此立即可知，$W = (x_1, \ldots, x_n, x)$ 和 $W' = (y_1, \ldots, y_n, y)$ 都是表示 w的约化字。根据定理 2.3，我们看到，通过有限次应用辫关系，可以从 W 得到 W'。特别地，我们看到 $\{x, y\} \in E\Gamma$：设 $m = m(x,y)$ 为相应的权。因此，我们在顶点 $w \in \mathcal{C}_\Gamma$处得到 x 和 y 的一个关系圈，其顶点如下：

$$u_0 = u, \qquad u_1 = uy, \qquad u_2 = uyx, \qquad \ldots$$
$$u_{2m-3} = u(yx)^{m-2}y, \qquad u_{2m-2} = u(yx)^{m-1}.$$

我们有

$$u_{2m-2} = u(yx)^{m-1} = u(yx)^m xy = uxy = wy = v$$

并且 $u_0, u_1, \ldots, u_{2m-2} \in B(e,n)$。显然，顶点 $u_0, u_1, \ldots, u_{2m-2}$ 在 $B(e,n)$ 中构成一条由 y 和 x 标记的路径（这是 x 和 y 在 w 处的关系圈）。特别地，我们看到

$$\overline{\sigma}(u_0)(x) = \cdots = \overline{\sigma}(u_{2m_1})(x) = x'$$
$$\overline{\sigma}(u_0)(y) = \cdots = \overline{\sigma}(u_{2m_1})(y) = y'$$

因为 $\overline{\sigma}$ 满足（$*$）-条件。显然，$\{x', y'\} \in E\Gamma$ 也成立，其中 $m(x', y') = m$。因此，我们看到路径

$$P = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m-2}) \subseteq B(e, n+1)$$

带有交替标记 y, x 映射到一条路径

$$P' = \big(\alpha_n(u_0), \alpha_n(u_1), \ldots, \alpha_n(u_{2m-2})\big) \subseteq B(e, n+1)$$

带有交替标记 y', x'，并且路径 P' 唯一地补全为一条带有交替标记 x', y' 的回路。特别地

$$\alpha_{n+1}(ux) = \alpha_n(u)\overline{\sigma}(u)(x) = \alpha_n(v)\overline{\sigma}(y) = \alpha_{n+1}(vy).$$

我们看到 $\alpha_{n+1}\colon B(\mathrm{id}\ n+1) \to B(\mathrm{id}\ n+1)$ 是良定义的。

为了证明 α_{n+1} 保持边，我们需要证明对于所有 $u, v \in B(e, n+1)$，当且仅当 $\{u, v\} \in E\mathcal{C}_\Gamma$ 时，有 $\{\alpha_{n+1}(u)\ \alpha_{n+1}(v)\} \in E\mathcal{C}_\Gamma$。根据 α_{n+1} 的定义，我们显然可以看出，若 $v = ux$ 且 $\|u\| < \|v\|$，则顶点 $\alpha_{n+1}(u)$ 和 $\alpha_{n+1}(v)$ 由一条标记为 $\overline{\sigma}(u)(x)$ 的边连接。

现在假设存在 $u, v \in \partial B(e, n+1)$，使得 $\|u\| = \|v\|$，并且存在 $x \in V\Gamma$，使得 $u = vx$。令 $W_u = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $W_v = (y_1, \ldots, y_n)$，其中 $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in V\Gamma$，分别为 u 和 v 的某些约化表达式。我们看到，词 $W = (y_1, \ldots, y_n, x, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1})$ 是 $vxu^{-1} = 1$ 的一个表达式。显然，$|W| = 2n+1$。然而，对 (s_1) 进行初等化简恰好使该词缩短 2 个字母，这意味着词 W 永远无法化简为空串，矛盾。由此可见，不可能出现这样的 u, v 和 x，因此映射 α_{n+1} 保持边。

最后，我们证明 α_{n+1} 是一个双射。注意，由构造可知，对于每个 $w \in B(e,n)$，α_{n+1} 在 $B(w, 1)$ 上是单射。现在假设存在 $u, v \in B(e, n+1)$，使得 $\alpha_{n+1}(u) = \alpha_{n+1}(v)$。由于 α_{n+1} 在 $B(e,n)$ 上是单射，我们可知 $\{u, v\} \cap \partial B(e, n+1) \neq \emptyset$。不失一般性，设 $u \in B(e, n+1)$；令 $u' \in B(e,n)$，并取满足 $u = u'x$ 的 $x \in V\Gamma$。显然，$\alpha_{n+1}(u) \in B\big(\alpha_n(u')\ 1\big)$，因此 $n-1 \leq \|\alpha_{n+1}(u)\| \leq n+1$。

假设 $\|\alpha_{n+1}(u)\| = n$，并令 $(x_1', \ldots, x_n')$ 和 $(y_1', \ldots, y_n')$ 为 $x_1', y_1', \ldots, x_n', y_n' \in V\Gamma$ 的一些约化表达式，分别对应 $\alpha_{n+1}(u)$ 和 $\alpha_{n+1}(u')$。由此可知，该表达式

$$W = (x_1', \ldots, x_n', \overline{\sigma}(u')(x), y_n', \ldots, y_1')$$

表示平凡元，因此可以约化为空串，这与事实矛盾，因为化简 (s_1) 总是会减少 2 个音节，并且 $|W| = 2n + 1$。因此 $\|\alpha_{n+1}(u)\| \neq n$。

为证明 $\|\alpha_{n+1}(u)\| = n + 1$，我们考虑划分 $V\Gamma = V_+ \cup V_-$，其中若 $\|u'z\| > \|u'\|$，则 $z \in V_+$；若 $\|u'z\| < \|u'\|$，则 $z \in V_-$。由于 α_{n+1} 必须对所有 $j \leq n$保持球 $B(e, j)$ 不变，因此我们得到 $\overline{\sigma}(u)(V_-) = V_-$。我们立即推得 $\overline{\sigma}(u)(V_+) = V_+$ 也成立，否则 α_{n+1}就不是单射。由于 $\|u'x\| = n + 1 > n = \|u\|$，我们得到 $x \in V_+$，进而得到 $\|\alpha_{n+1}(u)\| = n + 1$。这又意味着 $\|v\| = n + 1$也成立，因此 $u, v \in \partial B(e, n + 1)$。取 $v' \in B(e, n)$，并令 $y \in V\Gamma$ 满足 $v = v'y$。根据定义，

$$\alpha_{n+1}(u) = \alpha_{n+1}(u')\overline{\sigma}(u')(x) = \alpha_{n+1}(v')\overline{\sigma}(v')(y) = \alpha_{n+1}(v).$$

证明的其余部分与第一部分类似，证明了

$$\alpha_{n+1}^{-1} \colon B(e, n + 1) \to B(e, n + 1)$$

是一个良定义的函数。

我们构造了一列部分映射 $\alpha_n \colon B(e, n) \to B(e, n)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，并且满足 α_n 是一个图自同构，且当 $m < n$时，$\alpha_n \restriction_{B(e,m)} = \alpha_m$。现在我们定义一个新映射 $\alpha \colon \mathcal{C}_\Gamma \to \mathcal{C}_\Gamma$，如下：

$$\alpha(v) = \alpha_n(v) \quad \text{whenever} \quad v \in B(e, n).$$

由目前为止所证明的内容可立即推出，对所有 $v \in W_\Gamma$，$\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ 且 $\sigma(\alpha, v) = \overline{\sigma}(v)$。因此，$\overline{\sigma}$ 是一个合法局部作用构型，证明完毕。□

显然，每个 $\alpha \in \mathcal{A}_\Gamma$ 都由一对 $(w, \overline{\sigma}) \in W_\Gamma \times \Sigma_\Gamma$ 完全确定，其中 $w = \alpha(e)$ 且 $\overline{\sigma}(v) = \sigma(\alpha, v)$ 对所有 $v \in W_\Gamma$均成立。特别地，群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 与集合 $W_\Gamma \times \Sigma_\Gamma$ 存在双射，因此，稳定子 $\mathsf{stab}_{\mathcal{A}_\Gamma}(e)$ 与集合 Σ_Γ 存在双射。

引理 4.3. 假设图 Γ 包含一个良好分离集$S \subseteq \Gamma$，并令 Γ_1 为相应的子图，使得存在一个非平凡的 $\nu \in \mathsf{Aut}(\Gamma_1)$，满足 $\nu \restriction_S = \mathsf{id}_S$。那么 $|\Sigma_\Gamma| \geq 2^{|W_\Gamma / W_{\Gamma_1}|}$。

证明. 首先，令 $\nu' \in \mathsf{Aut}(\Gamma)$ 表示将 ν 扩展到整个 Γ上的扩张，即

$$\nu'(x) = \begin{cases} \nu(x) & \text{if } x \in \Gamma_1; \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

任取 $\chi \subseteq W_\Gamma / W_{\Gamma_1}$。我们按以下方式定义一个元素 $\overline{\nu}_\chi \in \mathsf{Aut}(\Gamma)^{W_\Gamma}$：

$$\overline{\nu}_\chi(w) = \begin{cases} \nu' & \text{if } wW_{\Gamma_1} \in \chi; \\ \mathrm{id}_\Gamma & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们断言，$\overline{\nu}_\chi \in \Sigma_\Gamma$，也就是说，$\overline{\nu}_\chi$ 是一个合法局部作用构型。令 $w \in W_\Gamma$ 和 $x \in V\Gamma$ 为任意元素。若 $wW_{\Gamma_1} = wxW_{\Gamma_1}$，则根据定义，$\overline{\nu}_\chi(w) = \overline{\nu}_\chi(wx)$。现在，假设 $wW_{\Gamma_1} \neq wxW_{\Gamma_1}$。这意味着

$x \in V\Gamma\setminus\Gamma_1$，尤其是，$\mathsf{star}(x) \subseteq (V\Gamma\setminus\Gamma_1)\cup S$。我们立即得到 $\overline{\nu}\chi(w)$ $\restriction_{\mathrm{star}(x)}=\mathsf{id}_\Gamma$，同样也得到 $\overline{\nu}\chi(wx)$ $\restriction_{\mathrm{star}(x)}=\mathsf{id}_\Gamma$。根据引理 4.2，$\overline{\nu}\chi$ 是一个合法构型。这意味着 Σ_Γ 包含一个基数为 $2^{|W_\Gamma/W_{\Gamma_1}|}$的子集，因此

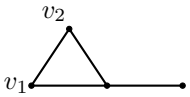
$$2^{|W_\Gamma/W_{\Gamma_1}|} \leq |\Sigma_\Gamma|$$

引理得证。 □

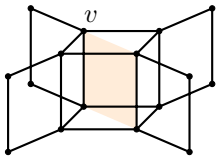
如前所述，稳定子 $\mathsf{stab}_{\mathcal{A}_\Gamma}(e)$ 与集合 Σ_Γ 之间存在自然双射。此外，可以验证，若 $S \subset V\Gamma$ 是一个良好分离集，且 Γ_1 是相应的因子，则子群 W_{Γ_1}在 W_Γ 中的指数为无穷。结合以下简单观察：$\mathsf{stab}_{\mathcal{A}_\Gamma}(w) = w\,\mathsf{stab}_{\mathcal{A}_\Gamma}(e)w^{-1}$，可得：

推论 4.4. 设 Γ 是一个有限加权图。若 Γ 存在良好分离集，则群 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的顶点稳定子不可数。

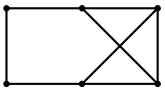
注记 4.5. 关于分离集非空的例子，可以考虑图



以及将顶点 v_1 和 v_2 互换并固定另外两个顶点的自同构 α。推论 4.4 保证凯莱图 $\mathcal{C}_\Gamma$ 的自同构群不可数。若 $v \in \mathcal{C}_\Gamma$ 是一个顶点，则自同构 α_v 由绕对角正方形的反射给出



此外，请注意，推论 4.4 给出了自同构群不可数的单端直角考克斯特群的例子。例如，可以考虑下面的图。



由命题 3.4，我们可以立即推出，与路径图 P_n 和圈图 C_n 相关联的直角考克斯特群的凯莱图是可数的。

路径图，记作 P_n，是一个具有 n 个顶点的连通图，其中恰有两个顶点的度为一，其余 $n-2$ 个顶点的度为二，且所有边的权均为二。圈图，记作 C_n，是一个具有 n 个度为二的顶点、且边的权为二的连通图。

如果 Δ 是 Γ 的诱导子图，那么 $\mathsf{Aut}\big(\mathsf{Cay}(W_\Delta)\big)$ 是 $\mathcal{A}_\Gamma$ 的子群，这种说法并不成立。考虑由两个顶点构成的完全图 Δ，并令 $\Gamma = P_3$，则 Δ 是 Γ 的诱导子图。很容易看出，群 $\mathsf{Aut}\big(\mathsf{Cay}(W_\Delta)\big)$ 不是 $\mathsf{Aut}\big(\mathcal{C}_\Gamma\big)$ 的子群。事实上，$W_\Delta \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，而 $\mathsf{Aut}\big(\mathsf{Cay}(W_\Delta)\big)$ 是二面体群 D_8，即正方形的反射群。特别地，$\mathsf{Aut}\big(\mathsf{Cay}(W_\Delta)\big)$ 中存在一个四阶元素。另一方面，$\mathcal{A}_\Gamma$ 中不存在四阶元素。

还有更强的结论。事实上，根据我们已经证明的结果，我们可以立即观察到，存在一些图 Γ，其诱导子图为 Δ，使得 $\mathcal{A}_\Gamma$ 是可数的，但 $\mathsf{Aut}\big(\mathsf{Cay}(W_\Delta)\big)$ 是不可数的。例如，我们可以取 $\Gamma = P_4$，并令 Δ 为从 Γ 中删去一个度为二的顶点后得到的图。在这种情况下，W_Γ 的凯莱图是……，且其自同构群是可数的

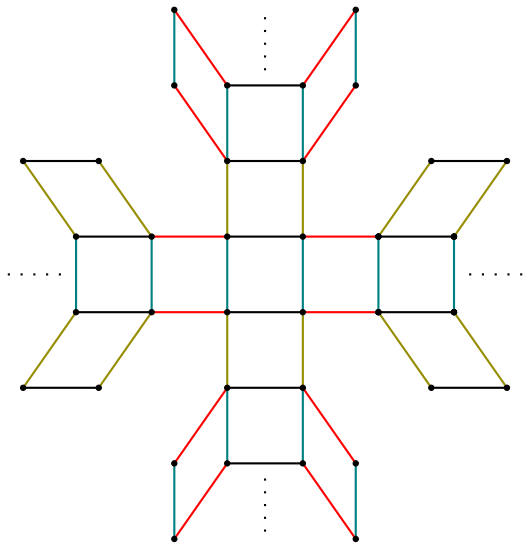


FIGURE 4. W_Γ 的凯莱图，其中 $\Gamma = P_4$。

根据命题 3.4。

这应与直角阿廷群 [8], 的情形进行比较，后者并不存在这种现象。

5. BEYOND LOCALLY FINITE GRAPHS

尽管本札记的主要目标是对那些有限生成的考克斯特群进行分类：它们相对于标准生成集的凯莱图具有非离散的自同构群；但我们为此开发的工具，使我们能够构造出一些无限度的顶点传递图的具体例子，而这些图的自同构群仍是局部紧的。具体而言，例 5.3 给出了一个具有紧顶点稳定子的图的构造，例 5.4 则给出了一个图的具体构造

使得边稳定子是紧开子群，而顶点稳定子并不紧。

继续之前，我们先回顾一些标准记号。给定一个单纯图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$，我们用 Γ^c 表示 Γ的补图，即 $V\Gamma^C = V\Gamma$ 和 $E\Gamma^c = \binom{V\Gamma}{2} \setminus E\Gamma$。显然，$\mathrm{Aut}(\Gamma^c)$ 与 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 以一种自然且显而易见的方式同构：$\phi \in \mathrm{Sym}(V\Gamma)$ 是 Γ 的自同构，当且仅当它是 Γ^c的自同构。

引理 5.1. 设 Γ 是一棵没有叶子的无限树。那么 Γ^c 不具有良好分离集。

证明。我们将使用引理 3.2。

令 $v \in V\Gamma$，并设 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 是一个满足 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}_{\Gamma^c}(v)} = \mathrm{id}_\Gamma$ 的自同构。根据补图的定义，我们看到 $\mathrm{star}_{\Gamma^c}(v) = V\Gamma \setminus \mathrm{star}_\Gamma(v)$，因此 α 必须固定树 Γ 中位于 $V\Gamma \setminus \mathrm{star}_\Gamma(v)$ 之外的所有顶点。由于 Γ 没有叶子，我们看到 v 至少与两个不同的顶点相邻，记为 u_1、u_2。用类似的论证，我们看到 u_1 必须与 $\mathrm{star}_\Gamma(v)$ 之外的某个顶点 u_1'相邻，而 u_2 必须与 $\mathrm{star}_\Gamma(v)$ 之外的某个 u_2' 相邻。根据假设，u_1' 和 u_2' 被 α固定。由于 Γ 是一棵树，顶点序列 $(u_1', u_1, v, u_2, u_2')$ 是 u_1' 与 u_2' 之间的唯一路径，因此顶点 u_1、v、u_2 也必须被 α 固定。由于 Γ 没有叶子，我们看到，如果 $u \in \mathrm{star}_\Gamma(v)$ 是 v 的一个邻居，那么它必须与某个 $u' \in V\Gamma \setminus \mathrm{star}_\Gamma(v)$ 相邻。同样，根据假设，u' 必须被 α 固定，因此，由于 (v, u, u') 是从 v到 u'的唯一路径，我们看到 u 也必须被固定。由此可得 $\alpha = \mathrm{id}_\Gamma$。

因此，对于每个顶点 $v \in V\Gamma$ 以及每个 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \setminus \mathrm{id}_\Gamma$，我们都有 $\alpha \restriction_{\mathrm{star}_\Gamma(v)} \neq \mathrm{id}_\Gamma$，从而根据引理 3.2，$\Gamma$ 不具有良好分离集。□

本节所述构造背后的主要思想依赖于命题 3.4 的以下应用

引理 5.2. 假设 Γ 是一个不具有良好分离集的单纯图。那么对于任意 $v \in W_\Gamma$，稳定子 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$（其中 $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(W_\Gamma, V\Gamma))$）作为拓扑群同构于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$。

证明. 由于图 Γ 不具有良好分离集，根据命题 3.4，我们有$\mathcal{A}_\Gamma \simeq W_\Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$。特别地，对于任意$v \in W_\Gamma$，我们有 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 作为群同构于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$。还需证明该同构是连续的。

如果图 Γ 是有限的，那么 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 和 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 都是有限的，因此是离散的。由此不难得出，$\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 和 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 作为拓扑群也是同构的。

令 $v \in W_\Gamma$ 任意，并令 $\phi\colon \mathrm{Aut}(\Gamma) \to \mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 为映射，它将 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 发送到 α_σ，其中 α_σ 是 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 中唯一满足对所有 $u \in W_\Gamma$都有 $\sigma(\alpha_\sigma, u) = \sigma$ 的元素。令 $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 为开集。不失

一般性，我们可以假设存在 $\beta \in \mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 以及一个有限集$F \subseteq W_\Gamma$，使得

$$\mathcal{O} = \beta \,\mathrm{stab}_A(F) \cap \mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v).$$

事实上，由于 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 中的元素完全由它们在 v 的邻域上的作用所确定，我们可以假设 $F \subseteq B(1, v)$。这意味着存在 $x_1, \ldots, x_n \in V\Gamma$ 使得 $F = \{vx_1, \ldots, vx_n\}$，显然，

$$\phi^{-1}(\mathcal{O}) = \{\sigma' \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid \sigma' \restriction_{F'} = \sigma(\beta, v) \restriction_{F'}\},$$

其中 $F' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V\Gamma$，因此我们看到 $\phi^{-1}(\mathcal{O})$ 在 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 上的置换拓扑中是开集，故 ϕ 连续。证明 ϕ^{-1} 连续的方法基本相同，留作练习。

我们看到 $\phi\colon \mathrm{Aut}(\Gamma) \to \mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 既是群同构，也是拓扑空间之间的同胚，因此 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(v)$ 作为拓扑群同构。□

现在我们利用引理 5.1 和引理 5.2，给出一些具有无限度且自同构群局部紧的顶点传递图的显式构造。

例 5.3. 假设 Γ 是一棵有限度的无限正则根树。那么，$\mathrm{Cay}(W_{\Gamma^c}, V\Gamma^c)$ 是一个无限度的顶点传递图，并且 $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(W_{\Gamma^c}, V\Gamma^c))$ 是一个顶点稳定子紧的局部紧群。特别地，对于任意 $w \in W_{\Gamma^c}$，我们可以看到 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(w)$ 与 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_d)$ 同构（作为拓扑群）。

例 5.4. 假设 $\Gamma = \mathcal{T}_d$ 是一棵无限的 d-正则树。那么，$\mathrm{Cay}(W_{\Gamma^c}, V\Gamma^c)$ 是一个无限度的顶点传递图，并且 $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(W_{\Gamma^c}, V\Gamma^c))$ 是一个局部紧群，其边稳定子是紧的，但顶点稳定子不是紧的。特别地，对于任意 $w \in W_{\Gamma^c}$ 和 $x \in V\Gamma^c$，我们可以看到 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(w)$ 与 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_d)$ 同构（作为拓扑群），而 $\mathrm{stab}_{\mathcal{A}}(\{w, wx\})$ 与 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_d)$ 中的一个顶点稳定子同构，即 $\mathrm{Aut}(T^*_{d,\,d-1})$，其中 $T^*_{d,\,d-1}$ 是一棵无限根树，根有 d 个子节点，其他每个顶点恰有 $d-1$ 个子节点。

References

[1] Anders Bj¨orner 和 Francesco Brenti。《 *Combinatorics of Coxeter groups*》，*Graduate Texts in Mathematics*第 231 卷。Springer，纽约，2005 年。[2] Graham Clarke。《考克斯特群相关几何结构的自同构》，2011 年。[3] Fr´ed´eric Haglund 和 Fr´ed´eric Paulin。《负曲率空间自同构群的简化》。载于《》，第 卷，页码 –。Geom. Topol. Publ.，考文垂，。[4] R. Halin。无限局部有限图的自同构与端同态。《 *Abh.*》，：–。*Math. Sem. Univ. Hamburg* 39 251 283, 1973
[5] Wilfried Imrich 和 Simon M. Smith。关于 Halin 定理。《 *Abh. Math. Semin. Univ.*》，*Hambg.* 87 2 289 297, 2017
（）：–。[6] Paul-Henry Leemann 和 Mikael de la Salle。自同构较少的凯莱图。《 *J. Algebraic Combin.*》，53(4):1117–1146，2021 年。

[7] Paul-Henry Leemann 和 Mikael de la Salle。自同构较少的凯莱图：无限群的情形。《 *Ann. H. Lebesgue*》，5:73–92，2022 年。[8] Thomas Taylor。直角阿廷群的凯莱图的自同构。荣誉学位论文，纽卡斯尔大学，2017 年。（FEDERICO BERLAI）

Department of Mathematics, University of the Basque Coun-try UPV/EHU, Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa, Spain*Email address*，FEDERICO BERLAI：federico.berlai@gmail.com（Michal Ferov）

School of Information and Physical Sciences, University ofNewcastle, University Drive, NSW 2308, Australia*Email address*，Michal Ferov：michal.ferov@gmail.com