arXiv:2302.04470v1 [math.FA] 9 Feb 2023

紧群上的佩戈定理

MANOJ KUMAR

Abstract.佩戈定理通过傅里叶变换刻画了 $\mathbb{R}^n$ 上的平方可积函数中的相对紧子集。我们证明了紧群（不一定是阿贝尔群）上的佩戈定理的类比结果。

1. Introduction

刻画相对紧子集是函数空间理论中的经典课题之一。众所周知，阿尔泽拉-`阿斯科利定理刻画了紧豪斯多夫空间上连续函数空间中的相对紧子集。此外，著名的里斯-科尔莫戈罗夫定理给出了 $L^p(\mathbb{R}^n)$中的相对紧子集的刻画。 关于其历史沿革，请参阅[8] 。Weil [14, 第 52]将其推广到了局部紧群上的勒贝格空间。关于其在局部紧群上的巴拿赫函数空间中的推广，参见 [7] 。

1985年，Pego [13] 利用里斯-科尔莫戈罗夫定理，通过傅里叶变换的某种衰减性质，找到了 $L^2(\mathbb{R}^n)$中相对紧子集的刻画。其表述如下：

定理1.1。[13, 定理2和 3] 设 K 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的有界子集。那么，以下命题等价：

(i) K 是相对紧的。(ii) 当 $r \to \infty$ 趋于某值时，$\int_{|x|>r} |f(x)|^2\, dx \to 0$ 和 $\int_{|\xi|>r} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \to 0$，对 f 中的 $K.$ 均一致成立。(iii) 当 $y \to 0$ 趋于某值时，$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^2\, dx \to 0$，且当 $\omega \to 0$ 趋于某值时，$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi+\omega) - \widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \to 0$，二者对 f 中的 $K.$ 均一致成立。

一项应用 该定理在信息论中的一项应用也已见于 [13] .

佩戈类型定理也通过短时傅里叶变换、小波变换 [2], 拉普拉斯变换 [11] 以及拉盖尔变换和汉克尔变换 [10]进行了研究。佩戈定理已在一些技术性假设下推广到局部紧阿贝尔群[5]。利用庞特里亚金对偶性和阿斯科利-阿泽拉定理， [6]中的作者证明这些技术性假设是多余的。关于局部紧阿贝尔群上佩戈类型定理的 L^1空间类比，请参见 [12]。

2010年数学主题分类。主要分类：43A30、43A77；次要分类：22C05。关键词和短语：紧群、傅里叶变换、紧性。1

在第2节，我们介绍紧群的预备知识。在第3节，我们利用 Weil紧致性定理，将定理1.1 推广到紧群（不一定是阿贝尔群）；见定理3.6。

2. Fourier analysis on compact groups

设 G 是一个紧豪斯多夫群。假设 m_G 表示 G. 上的归一化正哈尔测度。令 $L^p(G)$ 表示关于测度 m_G. 的第 p 个勒贝格空间。空间 $L^p(G)$ 上的范数记作 $\|\cdot\|_p$。

我们设 $\widehat{G}$ 为由 G 的所有不可约酉表示组成的空间，模去酉等价。集合 G 称为 G 的酉对偶，并赋予 $\widehat{\ }$ 离散拓扑。注意，$\pi \in G$ 的表示空间 $\mathcal{H}_\pi$ 是一个有限维复希尔伯特空间。用 d_π 表示 $\mathcal{H}_\pi$. 的维数。

设 $\Lambda \subset \widehat{G}$. 。假设 $\{(X_\pi, \|\cdot\|_\pi) : \pi \in \Lambda\}$ 是一族巴拿赫空间。对于 $1 \leq p < \infty$，我们将巴拿赫空间 $\ell^p\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$ 记作。

$$\left\{(x_\pi) \in \prod_{\pi\in\Lambda} X_\pi : \sum_{\pi\in\Lambda} d_\pi \|x_\pi\|_\pi^p < \infty\right\}$$

赋予范数 $\|(x_\pi)\|_{\ell^p\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi} := \left(\sum_{\pi\in\Lambda} d_\pi \|x_\pi\|_\pi^p\right)^{1/p}$. 称 $\ell^\infty\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$ 为 Banach 空间

$$\left\{(x_\pi) \in \prod_{\pi\in\Lambda} X_\pi : \sup_{\pi\in\Lambda} \|x_\pi\|_\pi < \infty\right\}$$

赋予范数 $\|(x_\pi)\|_{\ell^\infty\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi} := \sup_{\pi\in\Lambda} \|x_\pi\|_\pi$. 类似地，称 $c_0\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$ 为由满足条件 $x_\pi \to 0$（当 $\pi \to \infty$ 时）的 x_π（取自 $\ell^\infty\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$）组成的空间；也就是说，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在有限集 $\Lambda_\epsilon \subset \Lambda$，使得对所有 $\pi \in \Lambda \setminus \Lambda_\epsilon$. 均有 $\|x_\pi\|_\pi < \epsilon$。注意，$c_0\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$ 是 $\ell^\infty\text{-}\bigoplus_{\pi\in\Lambda} X_\pi$ 的闭子空间.

对于 $1 \leq p < \infty$，令 $\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)$ 表示所有满足 $\|T\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)} := (\mathrm{tr}(|T|^p))^{1/p} < \infty$. 的 T 上的有界线性算子所构成的空间。空间 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$ 称为希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$. 上的希尔伯特-施密特算子空间。空间 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$ 是赋予内积的希尔伯特空间

$$\langle T, S\rangle_{\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)} := \mathrm{tr}(TS^*).$$

此外，令 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ 表示由 $\mathcal{H}_\pi$ 上所有赋予算子范数的有界线性算子构成的空间。

设 $f \in L^1(G)$。f 的傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(\pi) = \int_G f(t)\pi(t)^*\, dm_G(t),\ \pi \in \widehat{G}.$$

傅里叶变换算子 $f \mapsto \widehat{f}$ 从 $L^1(G)$ 到 $\ell^\infty\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ 是单射且有界。根据黎曼-勒贝格引理，我们知道 $f \in c_0\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$。 $f, g \in L^1(G)$ 的卷积定义为

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\, dm_G(y).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$那么， $\widehat{f * g}(\pi) = \widehat{g}(\pi)\widehat{f}(\pi)$ $\pi \in G$. 对于 $y \in G$， $f \in L^p(G)$的右平移 R_y 定义为$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{R_y(f)}(x) = f(xy)$ $x \in G$.那么， $\widehat{R_y f}(\pi) = \pi(y)\widehat{f}(\pi)$ $\pi \in G$.

关于紧群的更多信息，请参阅 [4, 9]。

全文中， G 表示一个紧豪斯多夫群（不一定是阿贝尔群）。 G 的单位元记作 e.。我们用 I_{d_π} 表示 $d_\pi \times d_\pi$ 单位矩阵。

3. 佩戈定理在紧群上的应用

本节将通过傅里叶变换讨论 G 上平方可积函数的相对紧子集的刻画。我们需要以下定义。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 $K \subset L^p(G)$。定义 $K := \{f : f \in L^p(G)\}$. K 称为一致 $L^p(G)$-等度连续的，如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，都存在 e的一个开邻域 O ，使得

$$\|R_y f - f\|_p < \epsilon, \ f \in K \text{ and } y \in O.$$

设 $F \subset \ell^p\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)$. F 称具有一致的 $\ell^p\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)$-衰减，如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，都存在有限集 $A \subset G$ ，使得

$$\|\phi\|_{\ell^p\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)} < \epsilon, \ \phi \in F.$$

先介绍一些重要的引理。

引理 3.1. 设 $K \subset L^p(G)$，其中 $p \in [1, 2]$.。若 K 是一致 $L^p(G)$-等度连续的，则 $\widehat{K}$ 具有一致的 $\ell^{p'}\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)$-衰减。

证明。设$(e_U)_{U\in\Lambda}$ 是 G上的一个狄拉克网；参见 [1, 第28]页。根据黎曼-勒贝格$\widehat{\ }$定理 [9, 定理 28.40]， $\widehat{e_U} \in c_0\text{-}\widehat{\bigoplus_{\pi\in G}}\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$。于是，存在有限集 $A \subset G$ ，使得

$$\|\widehat{e_U}(\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} \leq \frac{1}{2}, \ \pi \in \widehat{G} \setminus A.$$

$\widehat{\ }$令 $f \in K$.我们用 $\widehat{e_U}\widehat{f}$表示 $\widehat{e_U}$与 f.的逐点乘积。现在,

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} &\leq \|\widehat{f} - \widehat{e_U}\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} + \|\widehat{e_U}\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} \\ &\leq \|f - \widehat{f * e_U}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} + \|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} \sup_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\|\widehat{e_U}(\pi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)}\end{aligned}$$

$$\leq \|f - \widehat{f * e_U}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} + \frac{1}{2}\|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)}.$$

然后，应用豪斯多夫-杨不等式 [9, 定理 31。22],我们得到

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} \leq & 2\|f - \widehat{f * e_U}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} \\
\leq & 2\|f - f * e_U\|_p \\
= & 2\left(\int_G |f(x) - f * e_U(x)|^p \, dm_G(x)\right)^{1/p} \\
= & 2\left(\int_G \left|\int_G (f(x) - f(xy^{-1}))e_U(y)\, dm_G(y)\right|^p \, dm_G(x)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

因此，利用闵可夫斯基积分不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} \leq & 2\int_G \left(\int_G |f(x) - f(xy^{-1})|^p \, dm_G(x)\right)^{1/p} e_U(y)\, dm_G(y) \\
\leq & 2\sup_{y\in U}\left(\int_G |f(x) - f(xy^{-1})|^p \, dm_G(x)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

设 $\epsilon > 0$. 由于 K 是一致 $L^p(G)$-等度连续的，因此存在 e 的一个开邻域 O ，使得

$$\|R_y f - f\|_p < \frac{\epsilon}{2},\ f \in K \text{ and } y \in O.$$

由 [4, 命题 2.1 (b)], ，可得存在 $U \in \Lambda$ ，使得

$$\|R_y f - f\|_p < \frac{\epsilon}{2},\ f \in K \text{ and } y \in U.$$

因此，

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^{p'}\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_{p'}(\mathcal{H}_\pi)} < \epsilon,\ f \in K.$$ □

引理 3.2. 设 $K \subset L^{p'}(G)$，其中 $p \in [1, 2]$. 。若 $\widehat{K}$ 具有一致的 $\ell^p\text{-}\widehat{\bigoplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)$-衰减，则 K 是一致 $L^{p'}(G)$-等度连续的。

证明。设 $\epsilon > 0$. 由于 K 具有一致的 $\ell^p\text{-}\widehat{\bigoplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)$-衰减，因此存在有限集 $A \subset G$，使得

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^p\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)} < \frac{\epsilon}{4},\ f \in K.$$

令 $f \in K$ 和 $y \in G.$ ，则应用 [9, 推论 31.25], ，可得

$$\begin{aligned}
\|R_y f - f\|_{p'} \leq & \|\widehat{R_y f - f}\|_{\ell^p\text{-}\bigoplus_{\pi\in\widehat{G}}\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)} \\
= & \left(\sum_{\pi\in\widehat{G}} d_\pi \|\widehat{R_y f}(\pi) - \widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{\pi\in A} d_\pi \|\pi(y)\widehat{f}(\pi)-\widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\sum_{\pi\in \widehat{G}\setminus A} d_\pi \|\pi(y)\widehat{f}(\pi)-\widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{\pi\in A}\|\pi(y)-I_{d_\pi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} \left(\sum_{\pi\in A} d_\pi \|\widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p} \\
&\quad + \sup_{\pi\in \widehat{G}\setminus A}\|\pi(y)-I_{d_\pi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} \left(\sum_{\pi\in \widehat{G}\setminus A} d_\pi \|\widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p} \\
&\leq M \sup_{\pi\in A}\|\pi(y)-I_{d_\pi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} + \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

其中 M 是一个正数，使得 $\left(\sum_{\pi\in A} d_\pi \|\widehat{f}(\pi)\|^p_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H}_\pi)}\right)^{1/p} \leq M.$

设 $\pi \in A$. 利用 π 的连续性，我们得到存在 O_π 的一个邻域，使得

$$\|\pi(y)-I_{d_\pi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} < \frac{\epsilon}{2M},\ y\in O_\pi.$$

假设 $O=\cap_{\pi\in A} O_\pi$. 那么，

$$\|\pi(y)-I_{d_\pi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)} < \frac{\epsilon}{2M},\ \pi\in A \text{ and } y\in O.$$

因此，

$$\|R_y f - f\|_{p'} < \epsilon,\ f\in K \text{ and } y\in O. \qquad \square$$

下面的推论是对 [13, 定理 1] 在 $\mathbb{R}^n$以及 [5,定理 1] 和 [3, 引理 2.5] 在局部紧阿贝尔群上的研究的推广。这也改进了紧阿贝尔群上相应的结果，因为我们不要求 $L^2(G)$ 的子集有界。

推论 3.3. 设 $K\subset L^2(G)$。那么，当且仅当 $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-衰减时， K 是一致 $L^2(G)$-等连续的。

证明。 这是引理的直接推论 3.1 和引理 3.2。 $\square$

现在，我们证明一些命题，以便建立紧群上的佩戈定理。

命题 3.4. 设 $K\subset L^2(G)$。若 K 相对紧，则 $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-衰减。

证明。 根据 [14, Pg. 52] (或参见 [7, 定理 3.3]), K 是一致 $L^2(G)$-等度连续的。然后, 应用推论 3.3, 可得 $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-$\pi\in G$衰减。 □

下面给出前一个命题的逆命题。

命题 3.5. 设 K 是 $L^2(G)$ 的有界子集。若 $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-$\pi\in G$ 衰减, 则 K 是相对紧的。

证明。 利用推论 3.3, 可知 K 是一致 $L^2(G)$-等度连续的。对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 我们有

$$\sup_{f\in K} \|f\chi_{G\setminus G}\|_2 = 0 < \epsilon.$$

由于 K 有界, 由 Weil 定理可知 [14, 第 52]（或参见 [7, 定理 3.1]）, 因此 K 是相对紧的。 □

现在, 我们给出紧群上佩戈定理的一个类似结果。结合推论 3.3、命题 3.4和命题 3.5可得以下定理。

定理 3.6。 设 K 是 $L^2(G)$ 的一个有界子集。则以下条件等价:

（i） K 是相对紧的。（ii） $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-衰减。（iii） K 一致地 $L^2(G)$-等度连续。

以下给出了一个集合 $K \subset L^2(G)$ 的例子, 它不是相对紧的, 但 K 一致地 $L^2(G)$-等度连续, 且 $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}_{\pi\in G}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-衰减。

例 3.7。 考虑集合 $K = \{n\chi_G : n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(G)$, 如 [7, 例 42] 中所给。由于 K 仅由常值函数组成, 显然 K 一致地 $L^2(G)$-等度连续。由推论 3.3, $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\oplus}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$- 衰减。由于 K 不是 $\pi\in G$ 有界的, K 不是相对紧的。

现在, 借助我们的主要结果定理 3.6, 我们证明$L^2(G)$的某些子集是相对紧的。

例 3.8。

(i) 令 $r \in \mathbb{R}$. 考虑集合 $K = \{\frac{r}{n}\chi_G : n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(G)$。由于 $\{\frac{r}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是有界的, 且 K 仅由常值函数构成, 因此 K 是有界且一致 $L^2(G)$-等度连续的。因此, 根据定理 3.6, K 是相对紧的。 (ii) 令 A 为 G. 的有限子集。假设 K 是由 [4,Pg 中矩阵元构成的集合的线性张成的有界子集。 139] 中元素的。由于矩阵

元是 $L^2(G)$ K 是有界子集 $L^2(G)$。 对于 $f \in K$，利用舒尔正交关系 [4, 定理 5。8] 我们得到

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2\text{-}\bigoplus\limits_{\pi\in\widehat{G}\setminus A}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)} = 0.$$

因此， $\widehat{K}$ 具有一致的 ℓ^2- $\widehat{\bigoplus}\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\pi)$-衰减。因此，由定理 3.6， K 是相对紧$_{\pi\in G}$的。特别地，由 A 中元素的矩阵元组成的集合的凸包是相对紧的。

Acknowledgment

作者获得了原子能部（DAE）印度政府 NBHM 博士后奖学金，参考编号：0204/3/2021/R&D-II/7356。作者感谢 Sundaram Thangavelu 提供的宝贵意见。

References

[1] A. Deitmer 和 S. Echterhoff，《调和分析原理》，施普林格，2009年。
[2] M. Dörfler、H. G. Feichtinger 和 K. Gröchenig，函数空间中的紧性判据，《Colloq. Math.》，94（2002），37–50。[3] H.G. Feichtinger，平移不变分布巴拿赫空间中的紧性与紧乘子，《J. Math. Anal. Appl.》，102（1984），289–327。[4] G. B. Folland，《抽象调和分析教程》（第2版），CRC出版社，博卡拉顿，2016年。[5] P. Górka，局部紧阿贝尔群上的Pego定理，《J. Algebra Appl.》，13(4)（2014），1350143（5页）。[6] P. Górka 和 T. Kostrzewa，处处Pego，《J. Algebra Appl.》，15（2016），第4期，1650074，3页。[7] P. Górka 和 P. Pośpiech，局部紧群上的巴拿赫函数空间，《Ann. Funct. Anal.》，10（2019），460–471。[8] H. Hanche-Olsen 和 H. Holden，Kolmogorov-Riesz紧性定理，《数学展望》，28（2010），第4期，385–394。[9] E. Hewitt和 K.A. Ross，《抽象调和分析》，第二卷。—《数学科学基础丛书》，施普林格出版社，纽约—柏林，1970年。[10] Á. P. Horváth，通过拉盖尔变换和汉克尔变换判定紧性，《J. Math. Anal. Appl.》，507（2022），125852。[11] M. Krukowski，通过拉普拉斯变换刻画紧族，《Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.》，45（2020），991–1002。
[12] M. Krukowski，如果 Arzel`a 和 Ascoli 生活在 21st 世纪，他们会如何证明 $L^1(G)$ 的佩戈定理？，arXiv:2006.12130。[13] R. L. Pego， L^2 中的紧性与傅里叶变换，《Proc. Amer. Math. Soc.》，95（1985），252–254。[14] A. Weil，《拓扑群中的积分及其应用》，Actual. Sci. Ind. 869，Hermann，巴黎，1940年。

Department of Mathematics
Indian Institute of Science Bangalore
Bangalore - 560012India电子邮箱:
manojk9t3@gmail.com