arXiv:2302.04472v1 [math.AG] 9 Feb 2023

通过 $\mathbb{C}^*$作用刻画管型不可约厄米对称空间

YINGQI LIU

Abstract. 射影簇 X 上的 $\mathbb{C}^*$作用称为在光滑不动点 x 处为欧拉型，如果 $\mathbb{C}^*$ 在 T_xX 上的各向同性作用是标量乘法。本文证明，皮卡数为一的光滑射影簇 X 同构于管型不可约厄米对称空间，当且仅当对于 X上的一般点对 x、y，存在 X上的 $\mathbb{C}^*$作用，该作用在 x 处为欧拉型，且其逆作用在 y处为欧拉型。

1. Introduction

1.1. 主要结果。复环面作用在代数簇上的研究是《代数几何》中的经典课题。对具有特殊 $\mathbb{C}^*$作用的代数簇进行分类是一个有趣的问题。设 X 为光滑射影簇。若 $\mathbb{C}^*$作用在 X 上的某个不动点 x处的各向同性作用的任意权等于 0 或 ± 1，则称该作用在 x处等化。若该作用在每个不动点处都等化，则称其为等化作用。记 $\mathbb{C}^*$作用的不动点集合为 $X^{\mathbb{C}^*}$。 $X^{\mathbb{C}^*}$ 的一个不可约分支若与一般 $\mathbb{C}^*$轨道闭包相交，则称其为极端分支。在 [RW20] [ORSW22] [ORSW21], 这一系列工作中，作者研究了射影流形上具有孤立极端不动点分支的等化 $\mathbb{C}^*$作用。对于有理齐性空间，他们证明了以下结论：

定理1.1。 *[ORSW21]* 设 $X = G/P$ 是皮卡数为一的有理齐性空间，则X 具有一个等化的 $\mathbb{C}^*$-作用，且有两个孤立极端不动点，当且仅当 X 同构于下列空间之一：

(i) 光滑超二次曲面 $\mathbb{Q}^n$。(ii) 格拉斯曼簇 $Gr(n, 2n)$。
(iii) 拉格朗日格拉斯曼簇 $Lag(n, 2n)$。(iv) 旋量簇
$\mathbb{S}_{2n}$。(v) 27 维 E_7-簇 E_7/P_7。

上述分类的簇恰好是管型不可约紧致厄米对称空间（简称 IHSS）。回顾一下，若一个 IHSS 的对偶作为有界对称域与某个自对偶锥上的管域全纯等价，则称其为管型。在 [Mok02] Mok 证明了，一个 IHSS 为管型，当且仅当对于一点 $o \in X$， $T_o(X)$ 中秩达到最大值的向量的补集是一个超曲面。用 $\mathbb{C}^*$-作用的语言来表述，可以将定理1.1视为 Mok 结果对有理齐性空间的推广。

因此，在更一般的背景下，利用 $\mathbb{C}^*$ 作用刻画管型不可约Hermitian对称空间是一个自然的问题。若射影流形 X 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用在不动点 x 处的各向同性作用 $\mathbb{C}^*$ 在 T_xX 上为标量乘法，则称该作用在该点处为欧拉型；等价地， $\mathbb{C}^*$ 作用在 x 处是等化的，且 x 是一个孤立极端不动点。在定理 1.1 中，通过在 $Aut^0(X)$ 中取 $\mathbb{C}^*$ 的某些共轭，可以证明，对于 X 上的一般点对 x、y，存在一个在 x 处为欧拉型的 $\mathbb{C}^*$ 作用，且其逆作用在 y 处为欧拉型（更多细节见第 4 节）。这里， X 上的一般点对是指属于 $X \times X$ 的某个 Zariski开稠密子集的点对。我们的主要结果证明了其逆命题：

定理 1.2. 设 X 是一个皮卡数为一的光滑射影簇，则 X 同构于一个管型不可约Hermitian对称空间，当且仅当对于 X 上的一般点对 x、y，存在一个作用于 X 的 $\mathbb{C}^*$ 作用，该作用在 x 处为欧拉型，且其逆作用在 y 处为欧拉型。

1.2. 证明概要。证明的主要依据是 Hwang 和 Mok 建立的 VMRT理论。设 X 是皮卡数为一的 Fano 流形，并设 $\mathcal{K}$ 是 X 上一个固定的不可约支配极小有理曲线族。极小有理切向量簇（简称 VMRT）

Date: 2023年2月10日。

在一般点 $x \in X$ 处是闭子簇 $\mathcal{C}_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$，由经过 x 的 $\mathcal{K}$ 中所有曲线在 x 处的切方向组成。流形在一般点 x 处的大部分整体几何由 VMRT $\mathcal{C}_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$ 控制。第一步是证明定理 1.2 中的 X 是向量群的等变紧化，因此可通过 Cartan-Fubini 型定理 [HM01，定理 1.2]，从其 VMRT 恢复 X。然后我们采用 [HM05] [FH12] 中发展的方法，通过研究其无穷小线性自同构的延拓来分类射影子簇 $\mathcal{C}_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$。

定义 1.3. (1) 设 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 是一个李子代数，则 $\mathfrak{g}$ 的第 k 阶延拓是由满足以下条件的对称多重线性同态 $A: Sym^{k+1}V \to V$ 构成的空间：对于任意固定的 $v_1, ..., v_k \in V$，同态 $A_{v_1,...,v_k}: V \to V$ 定义如下：

$$v \in V \to A(v, v_1, ..., v_k) \in V$$

属于 $\mathfrak{g}$。

(2) 设 $S \subseteq \mathbb{P}V$ 是一个射影子簇。设 $\hat{S} \subseteq V$ 为其仿射锥，$T_\alpha(\hat{S})$ 为光滑点 $\alpha \in S$ 处的切空间。S 的无穷小线性自同构的李代数为

$$\mathfrak{aut}(\hat{S}) = \{g \in End(V) | g(\alpha) \in T_\alpha(\hat{S}) \text{ 对任意光滑点 } \alpha \in \hat{S}\} = \{g \in End(V) | exp(tg) \cdot \hat{S} \subset \hat{S}, t \in \mathbb{C}\}.$$

其第 k 次延拓 $\mathfrak{aut}(\hat{S})^{(k)}$ 称为 $S \subseteq \mathbb{P}V$ 的第 k 次延拓。

我们证明中的一个关键步骤是以下结果。

定理 1.4. 设 X 是皮卡数为一的光滑射影簇。假设对于一般的一对点 $(x, y) \in X \times X$，存在一个作用于 X 的 $\mathbb{C}^*$-作用，该作用在 x 处为欧拉型，且其逆作用在 y 处为欧拉型，那么对于 VMRT $\mathcal{C}_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$，我们有：

$$dim(\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}_x})^{(1)}) = dim(X) \tag{1.1}$$

恒等式 (1.1) 已知对任意不可约紧致厄米对称空间均成立。设 $X = G/P$ 是由半单代数群 G 和极大抛物子群 P 定义的不可约紧致厄米对称空间。记 P^- 为 P 的对偶群，并令 $x = eP, y = \dot{w}_0 x$，其中 w_0 是 Weyl 群中的最长元。于是，存在一个等化的$\mathbb{C}^*$-作用于 X，使得 x 是一个孤立极端不动点。而 $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}_x})^{(1)}$ 可识别为 $R_u(P)$ 的李代数，它由李代数 $\mathfrak{g} = Lie(G)$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次诱导。当 X 为管型时，y 也是 $\mathbb{C}^*$-作用的孤立极端不动点，且 X 是 $R_u(P)$ 的等变紧化，其开轨道为 $R_u(P) \cdot y$。因此，在这种情况下，$\hat{\mathfrak{aut}}(\mathcal{C}_x)$ 的非零延拓来自 X 上以 y 为原点的向量群紧化。

通常假设 X 满足定理 1.2 的条件。于是，T_yX和 T_xX 对自身的向量群作用可以延拓为 X上的向量群等变紧化。选取 $X \subseteq \mathbb{P}V$的一个适当的非退化射影嵌入。T_yX 和 T_xX 对 X 的作用可以提升为 V上的线性作用。将 $Lie(T_yX)$ $Lie(T_xX)$与它们在 $\mathfrak{gl}(V)$中的像认同后，$\mathfrak{gl}(V)$中这两个李子代数的伴随作用将导出如下认同：$Lie(T_yX) \cong \mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}_x})^{(1)}$。

在 [FH12] Fu 中，Hwang 对具有非零延拓的不可约、非退化、光滑射影子簇 $S \subseteq \mathbb{P}V$进行了分类。其中大多数是某个不可约紧致厄米对称空间的 VMRT，或某个不可约紧致厄米对称空间的光滑线性截面。通过逐案计算 $dim(\mathfrak{aut}(\hat{S})^{(1)})$，我们证明 $\mathcal{C}_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$ 与某个不可约紧致厄米对称空间的 VMRT 射影同构。于是，根据一个 $\mathbb{C}^*$-等变 Cartan-Fubini 延拓定理，我们得出 X 与一个不可约紧致厄米对称空间同构。$\mathbb{C}^*$在不可约紧致厄米对称空间上的作用已在 [ORSW21],中得到详细研究；作为推论，当且仅当它与一个管型不可约 Hermitian对称空间同构时，它有两个孤立极端不动点。

本文结构如下。第 2 节中，我们首先回顾 [FH20] to associate$\mathbb{C}^*$-作用与向量群作用相关联的方法，然后将其应用于 $\mathbb{C}^*$-作用具有两个孤立极端不动点的情形。第 3 节中，我们研究射影簇的延拓，首先证明定理 1.4，然后计算具有非零延拓的某些射影子簇的延拓维数。第 4 节中，我们完成主要结果的证明。

记号。本文始终在复数域上进行。设簇 X 上有线丛 $\mathcal{L}$，截面 $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ 的主开子集记为 $D_+(s) = \{x \in X : s(x) \neq 0\}$，而 s 的循环理论零点集记为 $Z(s)$。对于维数为 n 的向量空间 V，我们将 V 上的正则函数与对称多重线性形式的全体空间 $\mathbb{C}[V] \cong \oplus_{k \geqslant 0} Sym^k(V^*)$ 认同：将 V 上的函数 f 赋给 $P_f = \sum_{k \geqslant 0} P_{f,k}$，使得 $f(v) = \sum_{k \geqslant 0} P_{f,k}(v, v..., v)$。

2. From $\mathbb{C}^*$-action to vector group action

首先回顾一些关于 $\mathbb{C}^*$-作用的基本事实和概念。设 X 是一个带有 $\mathbb{C}^*$-作用的光滑射影簇。对于 X 上一点 z 的非平凡 $\mathbb{C}^*$- 轨道，轨道映射 $\psi_z: \mathbb{C}^* \to X$ 唯一延拓为态射 $\Psi_z: \mathbb{P}^1 \to X$。我们将该轨道的源点（分别为汇点）记为 $\lim_{t\to 0} tz = \Psi_z(0)$（分别为 $\lim_{t\to\infty} tz = \Psi_z(\infty)$）。记 $X^{\mathbb{C}^*}$ 的不可约分支集合为 $\mathcal{Y}$。那么对于每个 $Y \in \mathcal{Y}$，Y 都是光滑闭子簇。$\mathbb{C}^*$ 在 $TX|_Y$ 上的各向同性作用给出 $TX|_Y = T^+(Y) \oplus T^-(Y) \oplus TY$ 的分解，其中 $T^+(Y)$ $T^-(Y)$ 是 $TX|_Y$ 的子丛，$\mathbb{C}^*$ 在这些子丛上的作用分别具有正权和负权。记 $C^{\pm}(Y) = \{x \in X : \lim_{t^{\pm 1}\to 0} tx \in Y\}$。我们回顾 Białynicki-Birula 的以下定理 [BB73]。

定理 2.1. 假设 X 是一个带有 $\mathbb{C}^*$ 作用的光滑射影簇，则：(1) 对每个 $Y \in \mathcal{Y}$，$C^{\pm}(Y)$ 都是局部闭子集，并且存在如下分解：

$$X = \bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} C^+(Y) = \bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} C^-(Y)$$

(2) 对每个 $Y \in \mathcal{Y}$，存在 $\mathbb{C}^*$-同构 $C^+(Y) \cong T^+(Y)$ 以及 $C^-(Y) \cong T^-(Y)$，它们提升了自然映射 $C^{\pm}(Y) \to Y$。映射 $C^{\pm}(Y) \to Y$ 是代数的，且是一个 $\mathbb{C}^{v^{\pm}(Y)}$-纤维化，其中我们设 $v^{\pm}(Y) = rank(T^{\pm}(Y))$。

我们称满足 $C^+(Y)$（分别为 $C^-(Y)$）稠密的唯一 Y 为该作用的源点（分别为汇点）。对于任意两个分支 Y、$Y' \in \mathcal{Y}$，若存在一点 $x \in X$ 使得 $lim_{t\to 0} t\cdot x \in Y$ 且 $lim_{t\to\infty} t\cdot x \in Y'$，则称 $Y \prec Y'$。

命题 2.2。 *[ORSW22，引理 2.8]* 以及 *[RW20，引理 3.5]*
设 X 是 Picard数为一的光滑射影簇。假设存在一个 $\mathbb{C}^*$-作用在 X上，且在 x处为欧拉型，则存在唯一的 $Y \in \mathcal{Y}$ 使得

$$\{Y' \in \mathcal{Y} : Y' \prec Y\} = \{x\}. \tag{2.1}$$

此外，$C^-(Y)$ 是一个定义在 Y 上的线丛，即 $v^-(Y) = 1$。

为将 $\mathbb{C}^*$-作用与向量群作用联系起来，我们回顾 Fu 和 Hwang 在 [FH20] 中定义的欧拉对称簇。

定义 2.3。设 $Z \subseteq \mathbb{P}V$ 是一个射影子簇。若 $\mathbb{C}^*$-作用在 Z 上于非奇异点 x 处的各向同性作用在切空间 T_xZ 上是标量乘法，则称该作用在此处为欧拉型。若对一般点 $x \in Z$，存在一个在 x 处为欧拉型的 $\mathbb{C}^*$-作用，且该 $\mathbb{C}^*$-作用来自 $GL(V)$ 的一个乘法子群，则称$Z \subseteq \mathbb{P}V$ 为欧拉对称簇。

由 [FH20, 定理 3.7] 可知，任意 Euler 对称簇都是向量群的等变紧化。此外，根据 [FH20, 定理 3.7], 我们还有如下结论。

命题 2.4. 假设 X 是一个正规射影簇，且 $\mathcal{L}$ 是 X 上的非常 ample 线丛，则以下条件等价：

(1) 对于 X 上的一般点 x，存在一个在 x 处为欧拉型的 $\mathbb{C}^*$-作用。(2) X 是向量群的等变紧化，且向量群上的 $\mathbb{C}^*$ 的标量乘法可延拓为 X 上的 $\mathbb{C}^*$-作用。(3) 射影子簇 $X \subset \mathbb{P}H^0(X,\mathcal{L})^\vee$ 是 Euler 对称的。

下文中，我们始终假设 X 是皮卡数为一的光滑射影簇。我们从局部射影微分几何的角度，按照 [LM03] 和 FH20 的思路研究 X 上的 $\mathbb{C}^*$-作用，

定义 2.5. (1) 设 $x \in X \subseteq \mathbb{P}V$ 是非退化射影簇的一个光滑点，并设 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)|_X$ 是 X 上的线丛。对于每个非负整数 k，$\mathfrak{m}_{x,X}^k$ 是极大理想 $\mathfrak{m}_{x,X}$ 的 k 次幂。对于截面 $s \in H^0(X,\mathcal{L})$，设 $j_x^k(s)$ 为 s 在 x 处的 k-喷射，使得 $j_x^0 = s_x \in \mathcal{L}_x$。诱导的同态：

$$(V^* \cap Ker(j_x^{k-1}))/(V^* \cap Ker(j_x^k)) \to \mathcal{L}_x \otimes Sym^k T_x^* X$$

是单射。对于每个 $k \geqslant 2$，由此同态的像所定义的子空间 $\mathbb{F}_x^k \subseteq Sym^k T_x^* X$ 称为 X 在 x 处的第 k 个基本形式。令 $F_x^0 = \mathbb{C}$ 和 $F_x^1 = T_x^* X$，子空间族 $\mathbb{F}_x = \oplus_{k\geqslant 0}\mathbb{F}_x^k \subset \oplus_{k\geqslant 0} Sym^k T_x^* X$ 称为 X 在 x 处的基本形式系。

(2) 设 W 为一个向量空间。对于 $w \in W$，定义收缩同态 ι_w：$Sym^{k+1}W^* \to Sym^k W^*$，它将 $\phi \in Sym^{k+1}W^*$ 映为 $\iota_w\phi \in Sym^k W^*$：

$$\iota_w\phi(w_1, ..., w_k) = \phi(w, w_1, ..., w_k)$$

对任意 w_1，...，$w_k \in W$。按照惯例，我们定义 $\iota_w(Sym^0 W^*) = 0$。

(3) 若子空间 $\mathbb{F} = \oplus_{k\geqslant 0}F^k \subset \oplus_{k\geqslant 0}Sym^k W^*$ 满足 $F^0 = \mathbb{C}$、$F^1 = W^*$、$F^r \neq 0$，且对所有$i \geqslant 1$ 都有 $F^{r+i} = 0$，则称其为秩为 r 的符号系统；若对任意 $w \in W$ 和任意 $k \geqslant 0$，都有 $\iota_w F^{k+1} \subseteq F^k$。

我们回顾 Cartan 的以下定理（例如参见 [LM03，第 2.1] 节）。

定理 2.6. 设 $X \subseteq \mathbb{P}V$ 是一个非退化子簇，且 $x \in X$ 是一个一般点。则基本形式系 $\mathbb{F}_x \subset \oplus_{k\geqslant 0}Sym^k T_x^* X$ 是一个符号系统。

现在假设 X 在不动点 x 处具有欧拉型的 $\mathbb{C}^*$-作用。记 $\mathcal{L}$ 为 X 上的一个非常 ample 线丛，且 $V = H^0(X, \mathcal{L})^\vee$。在 $\mathcal{L}$ 上选取一个 $\mathbb{C}^*$- 线性化，使得若将 $H^0(X, \mathcal{L}) = \oplus_{k=0}^r H^0(X, \mathcal{L})_{w_k}$ 写成关于 $\mathbb{C}^*$-作用的非零权子空间之和，则有 $0 = w_0 > w_1 > w_2 > ... > w_r$。$X \subset \mathbb{P}V$ 在 x 处的基本形式可作如下识别。

引理 2.7。（1）子空间 $\{s \in H^0(X, \mathcal{L}) \mid D_+(s) = C^+(x)\}$ 的维数为一，且等于 $H^0(X, \mathcal{L})_0$。取一个满足 $D_+(s_0) = C^+(x)$ 的非零截面 s_0，并考虑线性映射：

$$\eta : H^0(X, \mathcal{L}) \to \mathbb{C}[C^+(x)]$$
$$s \to \eta(s)$$

定义为：$s|_{C^+(x)} = \eta(s)s_0|_{C^+(x)}$，对任意 $s \in H^0(X, \mathcal{L})$。于是：

(2) η 是一个单射的 $\mathbb{C}^*$-等变线性映射，其中 $\mathbb{C}[C^+(x)]$ 上的 $\mathbb{C}^*$-作用由 $z \cdot f(u) = f(z^{-1} \cdot u)$ 给出，对任意 $z \in \mathbb{C}^*$、$u \in C^+(x)$ 和 $f \in \mathbb{C}[C^+(x)]$。

(3) 将 $\mathbb{C}[C^+(x)] \cong \mathbb{C}[T_x X] \cong \oplus_{k\geqslant 0}Sym^k T_x^* X$ 视为.....，则 η 的像可视为 $\mathbb{F}_x$，在此识别下，$\eta(H^0(X, \mathcal{L})_{w_k}) = \mathbb{F}_x^{-w_k}$。此外，$w_1 = -1$ 和 $\eta|_{H^0(X,\mathcal{L})^{w_1}}$ 是同构。

证明。由于 $C^+(x)$ 同构于仿射空间 $T_x X$，根据 Hartgo 定理，$D_x := X \backslash C^+(x)$ 是一个除子，并且 $Cl(X)$ 由 D_x 的不可约分支自由生成。再由我们的假设，X 的皮卡数为一，D_x 是 $Cl(X)$ 的素生成元。因此，对某个正整数 r_0，可写作 $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(r_0 D_x)$。对于任意满足 $D_+(s) = C^+(x)$ 的非零截面 s，可写作 $Z(s) = rD_x$，其中 r 是某个正整数。于是得到 $rD_x \sim r_0 D_x$，这表明 $r = r_0$，从而子空间$\{s \in H^0(X, \mathcal{L}) : D_+(s) = B^+(x)\}$ 的维数为一。该子空间在 $\mathbb{C}^*$ 下不变，我们将其权记为 w'。取该子空间中的一个非零截面 s_0，并按上述方式定义 η，则 $C^+(x)$ 是开集，因此 η 是单射。对于任意 $s \in H^0(X, \mathcal{L})$、$z \in \mathbb{C}^*$ 和 $u \in C^+(x)$，有：

$$(z \cdot s)(u) = z \cdot s(z^{-1} \cdot u) = z \cdot (\eta(s)(z^{-1} \cdot u)s_0(z^{-1} \cdot u)) = \eta(s)(z^{-1}u)\,(z \cdot s_0)(u) = z^{w'}(z \cdot \eta(s))(u)s_0(u)$$

这意味着 $\eta(z \cdot s) = z^{w'}(z \cdot \eta(s))$。对于任意 $s \in H^0(X, \mathcal{L})_{w_k}$，将 $\eta(s)$ 视为通过 $C^+(x) \cong T_x X$ 在$T_x X$ 上的正则函数，则有：

$$\eta(z \cdot s)(u) = z^{w_k}\eta(s)(u),\ z \cdot \eta(s)(u) = \eta(s)(z^{-1} \cdot u) = \eta(s)(z^{-1}u)$$

对任意 $u \in T_x X$。结合 $\eta(z \cdot s) = z^{w'}(z \cdot \eta(s))$，可知 $\eta(s)$ 是定义在 $T_x X$ 上的齐次多项式，且满足 $deg(\eta(s)) = w' - w_k \geqslant 0$。这意味着 $w' = w_0 = 0$ 和 $deg(\eta(s)) = -w_k$。因此，η 是 $\mathbb{C}^*$-等变的；对于任意非零截面 $s \in H^0(X, \mathcal{L})_0$，$\eta(s)$ 是一个常数，这表明 $C^+(x) = D_+(s)$，从而证明了 (1) 和 (2)。

对于截面 $s \in H^0(X, \mathcal{L})$，将 $\eta(s) = \sum \eta_k(s)$ 写成齐次函数之和。s 在 x 处的 k 阶$_{k\geqslant 0}$喷射等于 $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k$ 中 $\eta(s)|_x$ 的等价类，因此在此同一化下，它由 $\sum_{k-1}\eta_i(s)$ 表示。另一方面，我们已证明 η 将 $H^0(X, \mathcal{L})_{w_k}$ 映入次数为 $-w_k$ 的齐次 $_{i=0}$ 多项式空间。因此，根据基本形式的定义，我们有 $\eta(H^0(X, \mathcal{L})_{w_k}) = \mathbb{F}_x^{-w_k}$ 且 $\mathrm{Im}(\eta) = \mathbb{F}_x$。最后，由于 $\mathcal{L}$ 非常丰沛，根据 [Ha77, Proposition 7.2]，$\mathrm{Im}(\eta)$ 生成作为 $\mathbb{C}-$ 代数的 $\mathbb{C}[C^+(x)]$。因此 $\mathrm{Im}(\eta)$ 包含线性函数空间 $T_x^* X$，而该空间必定是 $H^0(X, \mathcal{L})_{w_1}$ 的像。于是可得 $w_1 = -1$，且 $\eta|_{H^0(X,\mathcal{L})_{w_1}}$ 是一个同构。□

根据引理 2.7， x 处的基本形式由对每个 k 的线性单射 $\eta|_{H^0(X,\mathcal{L})_{w_k}}$ 组成。对偶地，它由对每个 k 的满射线性映射 Π_k： $Sym^{-w_k}(T_xX) \to H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_k}$ 组成，其中 Π_0： $\mathbb{C} \to H^0(X,\mathcal{L})^\vee_0$ 将 1 映至唯一的 $e_0 \in H^0(X,\mathcal{L})^\vee_0$，使得 $e_0(s_0) = 1$，并且根据引理 2.7 (3)，Π_1 是一个同构。记 f： $X \to \mathbb{P}H^0(X,\mathcal{L})^\vee$ 为射影嵌入。$_r$那么，在同一化 $C^+(x) \cong T_xX$ 下，对每个 $u \in T_xX_{k=1}$，我们有 $f(u) = [e_0 + \sum \Pi_k(u,...,u)]$，且 $f(x) = f(0) = [e_0]$。此时我们可以推出一个简单的推论：

推论 2.8. 设 X、$\mathcal{L}$、x 如上，若 $r = 1$，则 X 同构于一个射影空间。

证明. 记 $V = H^0(X,\mathcal{L})^\vee$，且 $W = H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_1}$。于是我们有 $V = \mathbb{C}e_0 \oplus W$，并且 $C^+(x) = f(T_xX) = \{[e_0 + w]: w \in W\}$，因为 Π_1 是满射。因此，该作用的汇点等于 $\mathbb{P}W$，从而 f 是到 $\mathbb{P}V$ 上的同构。□

现在假设 x 取为一般点。定义 2.5(2) 中的收缩同态定义了 T_xX 在 $\oplus_{k\geqslant 0}Sym^kT^*_xX$ 上的局部幂零作用。由定理 2.6， $\mathbb{F}_x$ 是有限维的 T_xX-不变子空间。对偶地，它定义了 T_xX 在 $H^0(X,\mathcal{L})^\vee$ 上的幂零作用，该作用经过每个 Π_k。更确切地，对于每个 $0 \leqslant k \leqslant r$ 以及任意 $v \in T_xX$，记 $\Gamma_v|_{H^0(X,\ \mathcal{L})^\vee_{w_k}}$： $H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_k} \to H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_{k+1}}$ 为：

$$\Gamma_v \circ \Pi_k(v_1,...,v_k) = \Pi_{k+1}(v,v_1,...,v_k), \quad \forall k \geqslant 1 \text{ and } \Gamma_v(e_0) = \Pi_1(v), \Gamma_v(H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_r}) = 0. \tag{2.2}$$

$_r$那么 $f|_{T_xX}$ 也可以写成： $f(w) = \sum \Gamma^k_w(e_0)$，对任意 $w \in T_xX$ 均成立。$_{k=0}$

下文中，对每个 k，我们记 $V_k = H^0(X,\mathcal{L})^\vee_{w_k}$。容易验证，诱导的线性映射 Γ： $T_xX \to \mathfrak{gl}(V)$ 是李代数之间的同态。由于 x 是一般点，根据命题 2.4， $X \subset \mathbb{P}V$ 是 Euler 对称，其中 X 上的向量群作用由线性表示 ρ_x： $T_xX \to GL(V)$ 给出，定义如下（参见 [FH20，定理 3.7] 的证明）：

$$\rho_x(u)(v) = \sum_{l=0}^{r}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\Gamma_u^{l-k}(v_k), \tag{2.3}$$

$_r$对任意 $u \in T_xX$ 和 $v = \sum v_k \in V$ 均成立，其中对每个 k， $v_k \in V_k$。$_{k=0}$

命题 2.9. 设 X、$\mathcal{L}$、ρ_x、f 如上，其中 x 取为一般点。则 :

(1) 对于每个 $0 \leqslant k \leqslant r$、{v₂}。

(2) 对于每个 $k \geqslant 1$ 以及任意 u_1， ...， $u_k \in T_xX$、 $\Pi_k(u_1$， ...， $u_k) = \Gamma_{u_1} \circ ... \circ \Gamma_{u_k}(e_0)$。

(3) T_xX 在 $\mathbb{P}V$ 上的诱导作用保持 X 不变，并提升 T_xX 在 $C^+(x)$ 上的作用。此外，记 $d\rho_x$： $T_xX \to \mathfrak{gl}(V)$ 为 ρ_x 的微分映射，则对于每个 k， $d\rho_x|_{V_k} = (k+1)\,\Gamma|_{V_k}$。特别地，我们有

$$d\rho_x(u) \cdot V_k \subseteq V_{k+1},$$

对于任意 $u \in T_xX$、任意 $k \geqslant 0$ 以及 $d\rho_x(u)(e_0) = \Pi_1(u) = \Gamma_u(e_0)$。

证明。由于 x 是一般点， $\mathbb{F}_x$ 是符号系统。因此，对于满足 $\mathbb{F}_x^{l+1} \neq 0$ 的任意 l，我们同样有 $\mathbb{F}_x^l \neq 0$。于是根据引理 2.7 (3)，我们得到对于每个 k， $\mathbb{F}_x = \oplus_{k=0}^r\mathbb{F}^r_x$、 $w_k = -k$ 以及 $\eta(H^0(X,\mathcal{L})_{w_k}) = \mathbb{F}^k_x$。(2) 直接由我们在 (2.2) 中的定义得出。对于 (3)，要证明第一个断言，只需验证对于任意 u、 $u' \in T_xX$， $\rho_x(u') \cdot f(u) = f(u+u')$。对于任意 u、 $u' \in T_xX$，我们有：

$$f(u+u') = [\sum_{k=0}^{r}\Gamma^k_{u+u'}(e_0)] = [\sum_{l=0}^{r}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\Gamma^k_u \circ \Gamma^{l-k}_{u'}(e_0)] = [\rho_x(u')(\sum_{k=0}^{r}\Gamma^k_u(e_0))] = \rho_x(u') \cdot f(u).$$

$_r$现在，对于任意 $u \in T_xX$ 和 $v = \sum v_k \in V$：$_{k=0}$

$$d\rho_x(u)(v) = \frac{d}{d_z}_{|z=0}(\rho_x(zu)(v)) = \frac{d}{d_z}_{|z=0}(\sum_{l=0}^{r}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}z^{l-k}\Gamma_u^{l-k}(v_k)) = \sum_{l=1}^{r} l \cdot \Gamma_u(v_{l-1}).$$

换句话说，对于任意 $k \geqslant 0$，我们有 $d\rho_x|_{V_k} = (k+1)\,\Gamma|_{V_k}$。特别是，对于任意 $u \in T_xX$，$d\rho_x.V_k \subseteq V_{k+1}$ 和 $d\rho_x(u)(e_0) = \Gamma_u(e_0) = \Pi_1(u)$。□

接下来，我们将其应用于汇点和源点均为孤立点的情形。假设对于 X 上的一般点对 x, y，X 上存在一个 $\mathbb{C}^*$-作用，它在源点 x 处是欧拉型，且其逆作用在 y 处是欧拉型。在 $\mathcal{L}$ 上对逆作用进行线性化，使得相应权子空间的分解为 $H^0(X,\mathcal{L}) = \oplus_{k=0}^{r} H^0(X,\mathcal{L})'_{w'_k}$，其中 $0 = w'_0 > ... > w'_r$。应用命题 2.9，可得：

推论 2.10. 设 $X, \mathcal{L}, x$ 和 y 如上所述，则：

(1) 我们有 $H^0(X,\mathcal{L})_{w_k} = H^0(X,\mathcal{L})_{w'_{r-k}}$ 和 $w_k = -r - w'_{r-k}$.

(2) 我们有 $V_r = H^0(X,\mathcal{L})'_{w'_0} = \{s \in H^0(X,\mathcal{L}) : D_+(s) = X^-(y)\}$ 和 $dim(H^0(X,\mathcal{L})'_{w'_0}) = 1$。此外 $f(y) = [e_r]$ 其中 e_r 是 V_r 中的非零元素。

(3) 存在一个 T_yX 在 V 上的向量群作用，即 $\rho_y : T_yX \to GL(V)$，使得其在 $\mathbb{P}V$ 上的诱导作用保持 X 不变，并且提升了 T_yX 在 $C^-(y)$ 上的作用。此外，对于微分映射 $d\rho_y$，有 $d\rho_y \cdot V_0 = 0$ 以及：

$$d\rho_y(w) \cdot V_{k+1} \subseteq V_k,$$

对于任意 $w \in T_yX$ 以及任意 $k \geqslant 0$。

证明。(1) 直接由 w'_k 的定义得出。(2) 由 (1)、引理 2.7 (1) 和命题 2.9 (3) 得出。对于 (3)，对偶地，对于每个 k，记 $V'_k = (H^0(X,\mathcal{L})'_{w'_k})^\vee$。由 (1) 可得 $V'_k = V_{r-k}$。根据命题 2.9 (3)，存在一个 T_yX 在 V 上的向量群作用，使得其在 X 上的诱导作用延拓了 T_yX 在 $C^-(y)$ 上的作用。此外，$d\rho_y \cdot V'_k \subseteq V'_{k+1}$，等价地，对于任意 $k \geqslant 0$ 和 $d\rho_y \cdot V_0 = 0$，有 $d\rho_y \cdot V_{k+1} \subseteq V_k$。□

3. Prolongations of projective subvarieties

本节按照 [FH12] [HM05] 的思路，分两步研究射影子簇的延拓。首先，我们研究欧拉对称簇在一般点处的 VMRT 的延拓。然后，我们计算某些具有非零延拓的 $S \subset \mathbb{P}V$ 中 $\mathfrak{aut}(\hat{S})^{(1)}$ 的维数；这一问题已在 [FH12] 中明确提出。

3.1. VMRT 的延拓。本节将应用第 2 节中建立的结果来证明定理 1.4。整个本节中，假设 X 是一个皮卡数为一的 Fano流形。下面回顾 VMRT 的定义。

定义 3.1. 若有理曲线空间 $\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ 的一个不可约分支 $\mathcal{K}$ 满足：参数化经过一般点 $x \in X$ 的曲线的 $\mathcal{K}$ 的子簇 $\mathcal{K}_x$ 非空且适当，则称 $\mathcal{K}$ 为极小有理分支。由 $\mathcal{K}$ 参数化的曲线称为极小有理曲线。令 $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$ 为万有族，$\mu : \mathcal{U} \to X$ 为求值映射。切映射 $\tau : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathbb{P}T(X)$ 定义为 $\tau(u) = T_{\mu(u)}(\mu(\rho^{-1}(\rho(u))))$. 其像的闭包 $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}T(X)$ 是极小有理切向量簇的全空间。自然投影 $\mathcal{C} \to X$ 是一个适当满射态射，其一般纤维 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_xX$ 称为点 $x \in X$ 处的极小有理切向量簇（简称 VMRT）。

Euler 对称簇在一般点处的 VMRT 与其基本形式的关系如下。

定义 3.2. 假设对于 X 上的一般点 x，存在一个作用于 X 的 $\mathbb{C}^*$-作用，且该作用在 x 处为欧拉型。取 X 上的一个非常 ample 线丛 $\mathcal{L}$，并记射影嵌入为 $f : X \to \mathbb{P}H^0(X,\mathcal{L})^\vee$。记 X 在 x 处的基本形式为 $\mathbb{F}_x$，并取引理 2.7 中的 η。对于每个 $k \geqslant 2$，记：

$$Bs(\mathbb{F}_x^k) = \{[w] \in \mathbb{P}T_xX : \phi(w,...,w) = 0, \forall \phi \in \mathbb{F}_x^k \subset Sym^k T_x^*X\}$$

则 $Bs(\mathbb{F}_x^k) = \{[w] \in \mathbb{P}T_xX : \eta(s)(w) = 0, \forall s \in H^0(X,\mathcal{L})_{w_k}\}$，并且有以下包含关系：$Bs(\mathbb{F}_x^2) \subset Bs(\mathbb{F}_x^3) \subset ... \subset Bs(\mathbb{F}_x^r)$，因为 $\mathbb{F}_x$ 是一个符号系统。记 x 处基本形式的基点集为 $Bs(\mathbb{F}_x) = Bs(\mathbb{F}_x^{l_0})$，其中 l_0 是使 $Bs(\mathbb{F}_x^l)$ 非空的最小整数 l。

命题 3.3. *[FH20，命题 4.4 和命题 5.4(iii)]*
设 X、x、$\mathcal{L}$ 如上所述。设 $\mathcal{K}$ 为 X 上的极小有理曲线族，$\mathcal{C} \subset \mathbb{P}T(X)$ 为 X 上的 VMRT 结构。那么 $\mathcal{C}_x = Bs(\mathbb{F}_x) \subset \mathbb{P}T_xX$，它是一个不可约、光滑且非退化的射影子簇。

接下来，我们旨在研究 $C_x \subseteq \mathbb{P}T_xX$ 的无穷小线性自同构的延拓，其中最重要的例子是不可约紧致厄米对称空间的情形。

例 1. 设 G 为单代数群， $B \subset G$ 为博雷尔子群， $T \subset B$ 为极大环面。记 Φ 为根系， $\Delta \subset \Phi$ 为单根， $\mathcal{D}$ 为 Dynkin 图。令 $\mathfrak{g} = Lie(G)$ 为 G 的李代数， $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为 Cartan 子代数。对于子集 $I \subset \Delta$, 记 P_I 为由 I 索引的标准抛物子群，并记 $P_I^- \subset G$ 为 P_I 的对偶群。我们将商空间 G/P_I 记为 $\mathcal{D}(I)$, 它是皮卡数为 $|I|$ 的光滑射影有理簇。下文中，我们始终假设对于单根 $\alpha \in \Delta$， $I = \{\alpha\}$ 。对于任意根 $\beta \in \Phi$, 单根 α 在 β 中的重数记为 $m_\alpha(\beta)$。记 $y = eP$ 和 $x = \dot{w}_0 P$, 其中 w_0 是 G 的 Weyl 群中的最长元。

写入 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$, 其中 $\mathfrak{g}_k = \bigoplus_{m_\alpha \beta()=k} \mathfrak{g}_\beta$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}$均成立。若 $\mathfrak{g}$ 满足……, 则称 $X = G/P_\alpha$ 为不可约紧致厄米对称空间。 ts

一个短分次： $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, 或者等价地， $R_u(P_\alpha^-)$ 和 $R_u(P_\alpha)$ 是向量群（例如参见 Ar11）。在这种情况下， G/P_α 是向量群 $R_u(P_\alpha^-)$ 的等变紧化，其原点为y。通过余特征 σ_α 在 $\mathcal{D}(I)$ 上定义一个 $\mathbb{C}^*$-作用： $\mathbb{G}_m \to T$, 使得 $\sigma_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}, \forall \beta \in \Delta$。该$\mathbb{C}^*$-作用在汇点 y 处是等化的，并且 $C^-(y) = R_u(P^-) \cdot y$。这表明，根据命题 2.4， $\mathcal{D}(I)$ 是 Euler 对称的。记 $H \subset P_\alpha$ 为 P 的 Levi 部分，则 y 是 H- 不动的。并且 $\mathfrak{g}_0 = Lie(H)$ $\mathfrak{g}_1 = Lie(R_u(P_\alpha))$， $\mathfrak{g}_{-1} = Lie(R_u(P_\alpha^-))$。最后， $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_y)$ 的延拓可解释为简单分次代数 $\mathfrak{g}$ 中的伴随作用，如下所示。(1) T n $^yX = \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}_{-1}$. $\mathbb{P}T_yX \cong \mathbb{P}\mathfrak{g}_{-1}$ 和 $\mathcal{C}_y \subset \mathbb{P}T_yX$ 是 H 各向同性作用的唯一闭轨

(2) $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}_y}) \cong \mathfrak{g}_0$ 由 $\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathfrak{g}_{-1}$上的伴随作用给出。

(3) $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}_x})^{(1)} \cong \mathfrak{g}_1$ 由伴随作用给出：

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &\to Hom(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) \\ \alpha &\to (\beta \to [\alpha, \beta]), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，由于 $\mathfrak{g}_{-1}$是阿贝尔的，像位于 $Sym^2 T_x^* X \otimes T_x(X)$中。我们在下表中列出不可约紧致厄米对称空间及其最小有理切线簇。

Table 1. 不可约紧致厄米对称空间及其最小有理切线簇

不可约紧致厄米对称空间 $X = G/P$	$\mathbb{Q}^n$	$Gr(\{v_2\}, a+b)$	$\mathbb{S}_n$	$Lag(\{v_2\}, 2n)$	E_6/P_1	E_7/P_7
VMRT $\mathcal{C}_x$	$\mathbb{Q}^{n-2}$	$\mathbb{P}^{a-1} \times \mathbb{P}^{b-1}$	$Gr(2,n)$	$\mathbb{P}^{n-1}$	$\mathbb{S}_5$	E_6/P_1
$\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(v_2)$	超二次曲面	塞格雷	普吕克	二次维罗内	旋量	塞韦里

现在回到一般情形，假设对于 X 上的一般点对 x、 y ，存在一个在 x 处为欧拉型的 $\mathbb{C}^*$ 作用，且其逆作用在 y 处为欧拉型。取 X 上的一个非常 ample 线丛 $\mathcal{L}$ ，并记 $V = H^0(X, \mathcal{L})^\vee$。令 f : $X \to \mathbb{P}V$ 为射影嵌入。回顾一下， T_xX 和 T_yX 分别在 V 上诱导的线性作用为 ρ_x、 ρ_y。我们将 $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{I}m(d\rho_x) \subset \mathfrak{g}l(V)$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}_{-1} = \mathrm{I}m(d\rho_y) \subset \mathfrak{g}l(V)$ 记为。根据定义， $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{aut}(X)$, 因此 $\forall \alpha \in \mathfrak{g}_1$, $\forall \beta \in \mathfrak{g}_{-1}$, $\gamma := [\alpha, \beta]$ 也属于 $\mathfrak{aut}(\hat{X})$。记 $G_\gamma := \{exp(z\gamma) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset GL(V)$ 为该单参数子群。于是， G_γ 对 $\mathbb{P}V$ 的作用保持 X 不变。此外，我们有：

引理 3.4. x 和 y 由 G_γ固定。记 $\Phi_\gamma : G_\gamma \to GL(T_xX)$ 为 G_γ 在 T_xX上诱导的各向同性作用，则对于任意 $w \in T_xX$ ，有：

$$\Pi_1((d\Phi_\gamma)(\gamma)(w)) = [\gamma, d\phi_x(w)] \cdot e_0 \in V_1. \tag{3.2}$$

证明。由命题 2.9(iii) 和推论 2.10(3)， $\alpha \cdot V_k \subset V_{k+1}$, 且对每个 $0 \leqslant k \leqslant r-1$， $\beta \cdot V_{k+1} \subset V_k$。因此，对任意 $0 \leqslant k \leqslant r$， $\gamma \cdot V_k \subset V_k$, 从而对每个 k， $G_\gamma \cdot V_k \subset V_k$。这特别表明， x 和 y 在 G_γ 作用下保持不动，因为 $x = [e_0]$、 $y = [e_r]$ 和 V_0、 V_r 的维数均为一。这也意味着 G_γ 的作用与 $\mathbb{C}^*$ 作用可交换。现在，任取非零切向量 $w \in T_xX$, 在识别 $C^+(x) \cong T_xX$ 的条件下，考虑 X 上经过 x 的全纯弧 θ_w :

$$\begin{aligned} \theta_w : \mathbb{C} &\to X \subset \mathbb{P}V \\ z &\to f(zw) = [\sum_{k=0}^{r} z^k \Gamma_w^k(e_0)] \end{aligned}$$

将其像的闭包记为 C_w。则 C_w 是一个非平凡的 $\mathbb{C}^*$ 轨道闭包，其源点为 x。由于 G_γ 的作用与 $\mathbb{C}^*$ 作用可交换，对于任意 $g \in G_\gamma$， $g \cdot C_w$ 也是经过 $g \cdot x = x$ 的非平凡 $\mathbb{C}^*$ 轨道闭包。这意味着对于任意 w， $g \cdot f(w) \in C^+(x)$；换言之，我们有 $g \cdot C^+(x) \subset C^+(x)$。

现在我们计算 G_γ 通过 $T_xX \cong C^+(x)$ 在 T_xX 上的作用。令 $\gamma \cdot e_0 = ce_0$ 为某个 $c \in \mathbb{C}$，则对任意 $g_t = exp(t\gamma)$，有：

$$f(g_t \cdot w) = [\sum_{k=0}^{r} \Gamma^k_{g_t \cdot w}(e_0)] = [e_0 + \Gamma^1_{g_t \cdot w}(e_0) + \sum_{k=2}^{r} \Gamma^k_{g_t \cdot w}(e_0)],$$

$$g_t \cdot f(w) = g_t \cdot [\sum_{k=0}^{r} \Gamma^k_w(e_0)] = [e_0 + e^{-tc} g_t \cdot \Gamma^1_w(e_0) + \sum_{k=2}^{r} e^{-tc} g_t \cdot \Gamma^k_w(e_0)].$$

因此，由 $f(g_t.w) = g_t \cdot f(w)$ 可得：

$$\Pi_1(g_t \cdot w) = \Gamma^1_{g_t \cdot w}(e_0) = exp(t\,\gamma|_{V_1} - tc\ \mathrm{Id}|_{V_1}) \cdot \Pi_1(w), \tag{3.3}$$

由此可见， G_γ 通过 $T_xX \cong C^+(x)$ 在 T_xX 上的作用是线性的。又由于同构 $T_xX \cong C^+(x)$ 在 $0 \in T_xX$ 处的微分映射等于 $\mathrm{Id}|_{T_xX}$，我们得出 $\Phi_\gamma(g)(w) = g \cdot w$。因此：

$$\begin{aligned}\Pi_1(d\Phi_\gamma)(\gamma)(w)) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\Pi_1(g_t \cdot w)) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(e^{-tc}e^{t\gamma} \cdot \Pi_1(w)) \\ &= -c\,\Pi_1(w) + \gamma.\Pi_1(w) = [\gamma, d\phi_x(w)].e_0\end{aligned}$$

由 $\Pi_1(w) = \Gamma_w(e_0) = d\phi_x(w) \cdot e_0$。 □

由于 G_γ 固定 x，它作用于经过 x 的极小有理曲线族。因此， Φ_γ 的像包含于 $Aut^0(\hat{\mathcal{C}}_x)$，且 $d\Phi_\gamma(\gamma) \in \mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)$。在识别 Π_1 下，我们可以将引理 3.4 改写如下，这是对映射 (3.1) 的推广。

推论 3.5. 考虑线性映射 $\lambda: \mathfrak{g}_{-1} \to Sym^2(V_1^*) \otimes V_1$，定义如下：

$$\begin{aligned}\lambda(d\phi_y(\beta)): \quad V_1 \times V_1 &\longrightarrow V_1 \\ (\Pi_1(\alpha), \Pi_1(\xi)) &\longrightarrow [[d\phi_y(\beta), d\phi_x(\alpha)], d\phi_x(\xi)].e_0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

对任意 $\beta \in T_yX$ 以及任意 $\alpha, \xi \in T_xX$。那么，在同一化 Π_1下，$\mathrm{Im}(\lambda) \subset \mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)}$。

证明. 只需验证 $\lambda(d\phi_y(\alpha)$ 是对称的，这由 $\mathfrak{g}_1$ 是阿贝尔群这一事实可得。 □

现在，定理 1.4 是以下命题的推论。

命题 3.6. λ 诱导出一个从 $\mathfrak{g}_{-1}$ 到 $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)}$ 的同构。

证明. 根据 [HM05, 定理1.1.3] ，存在一个自然嵌入： $\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^1 \hookrightarrow (T_xX)^\vee$，因此只需证明 λ 是单射。

否则，假设对于某个非零的 $\beta \in T_yX$，有 $\lambda(d\phi_y(\beta)) = 0$。对于任意 $\alpha \in T_xX$，记作$\gamma_\alpha = [d\phi_y(\beta)\ d\phi_x(\alpha)]$。现在我们证明，对于某个 $l \in (T_xX)^\vee$，有 $\gamma_\alpha = l(\alpha)\,\mathrm{Id}_V$。为此，只需证明 G_{γ_α} 通过标量乘法作用于 V。由引理 3.4 可得 $d\Phi_{\gamma_\alpha}(\gamma_\alpha) = 0$。由 (3.3) 可知， G_{γ_α} 在 $C^+(x)$ 上平凡作用，因而也在 X 上平凡作用，因为 $C^+(x)$ 在 X 中开且稠密。因此，对于任意非零向量 $v \in X$， v 都是 G_{γ_α} 在线性作用下作用于 V所得的特征向量。对于任意 $g \in G_{\gamma_\alpha}$，记 $\{V_{g(c)} : c \in J_g\}$ 为 g 在 V上的作用的特征子空间，则 $X \subset \cup_{c \in J_g} \mathbb{P}V_{g(c)}$。由于 X 是非退化且不可约的，存在某个 $c \in J_g$ 使得 $V_{g(c)} = V$，即 g 通过标量乘法作用于 V。

现在记 $U_\beta = \{exp(d\phi_y(t\beta)) : t \in \mathbb{C}\} \subset GL(V)$ 为 $Im(\phi_y)$ 的一维向量子群，并记 $V_l = \{exp(d\phi_x(\alpha)) : l(\alpha) = 0\}$ 为 $\mathrm{Im}(\phi_x)$ 的向量子群。根据推论 2.10 x 被 U_β 固定，因为 $x = [e_0]$ 且 $d\phi_y(\beta) \cdot e_0 = 0$。因此，$V_l.x$ 也被 U_β 固定，因为根据我们对 l 的定义， U_β 和 V_l 在 X上的作用可交换。另一方面，由于 $\beta \neq 0$, U_β 在 $C^-(y) \cong T_yX$上自由作用。这意味着 $V_l \cdot x \subset C^+(x) \backslash C^-(y)$。我们证明这会导致矛盾：

若 $l = 0$，则 $V_l = Im(\rho_x)$ 和 $V_l \cdot x = C^+(x)$。但是 $C^+(x) \cap C^-(y)$ 非空，因为它们在 X 中都是开稠密集。

若 $l \neq 0$，则 $V_l \cdot x$ 是 $C^+(x) \cong T_xX$ 中的一个超平面。由引理 2.7 的证明可知， $D_y := X \backslash C^-(y)$ 是 X 的一个不可约除子。因此，作为 D_y 的一个开子集， $C^+(x) \backslash C^-(y)$ 是 $C^+(x)$ 的一个不可约除子。这意味着 $C^+(x) \backslash C^-(y)$ 等于超平面 $V_l \cdot x$。另一方面，由推论 2.10 可将 $C^+(x) \backslash C^-(y) = \{w \in T_xX : \eta(s_r)(w) = 0\}$ 写为，其中 s_r 是 $H^0(X, \mathcal{L})_{w_r}$ 中的一个非零截面。因此

$Bs(\mathbb{F}_x^r) = \{[w] \in \mathbb{P}T_xX : \eta(s_r)(w) = 0\}$ 是 $\mathbb{P}T_xX$ 中的一个超平面。但这样一来，$\mathcal{C}_x = Bs(\mathbb{F}_x) \subset Bs(\mathbb{F}_x^r)$ 在 $\mathbb{P}T_xX$ 中是线性退化的，这与命题 3.3 矛盾。□

3.2. 具有非零延拓的射影子簇。下面回顾 Fu 和 Hwang 对具有非零延拓的射影子簇的分类结果。

定理 3.7. *[FH12, 主定理]* 和 *[FH18, 定理 7.13]* 设 $S \subset \mathbb{P}V$ $\mathfrak{aut}(\hat{S})^1 \neq 0$是一个不可约光滑非退化簇。那么 $S \subset \mathbb{P}V$射影等价于以下对象之一：

(1) 不可约紧致厄米对称空间的 VMRT。(2) 辛格拉斯曼流形的 VMRT。(3) $Gr(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ 的余维 6 2 的光滑线性截面。(4) $\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$ 的余维 6 3 的光滑 $\mathbb{P}^4$-一般线性截面。(5) (1) 和 (2) 的具有非零延拓的双正则投影，已在 *[FH12]* 第 4 节中完整描述。

注记 3. 8. 如 FH18 中命题 2.11], 所述，所有 $Gr(2,5)$ 的光滑截面 $\subset \mathbb{P}^9$，其余维为 i-余维 s 6 3 均射影等价。

本小节的主要结果是以下基于定理 3.7 的结果。

命题 3.9. 设 $S \subset \mathbb{P}V$ 是定理 3.7 (2)(3)(4)(5) 中的一个射影子簇，则：

$$dim(\mathfrak{aut}(\hat{S})^{(1)}) < dim(V). \tag{3.5}$$

我们将根据定理 3.7 逐案证明此命题。

3.2.1. 情形（2）和（5）。在这些情形中，$\mathfrak{aut}(\hat{S})$ 的延拓已在 [FH12] 中明确给出。我们先考虑情形（2）及（2）中的双正则投影情形：

引理 3.10. 设 W 和 Q 是维数分别为 $k \geqslant 2$ 和 m 的向量空间。令 $L = Sym^2(Q) \subset V = Sym^2(W \oplus Q)$ 和 $U = V/L$。对于 $\phi \in Sym^2(W \oplus Q)$，用 $\phi^\# \in Hom(W^\vee \oplus Q^\vee, W \oplus Q)$ 表示经由自然包含 $Sym^2(W \oplus Q) \subset Hom((W^\vee \oplus Q^\vee, W \oplus Q)$ 所对应的同态。对于 $L_2 \subset U$，令 $\mathrm{Im}(L_2)$ 为 $\{\mathrm{Im}(\phi^\#) : \overline{\phi} \in L_2\}$ 的线性空间。定义 $\mathrm{Im}_W(L_2) = P_Q(Im(L_2)) \subset W$，其中 $P_Q : W \oplus Q \to W$ 是到第一因子的投影，则：

(i) 记 $p_L : \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}(V/L)$ 为从 $\mathbb{P}L$ 出发的投影。令 $v_2 : \mathbb{P}(W \oplus Q) \to \mathbb{P}(Sym^2(W \oplus Q))$ 为二次 Veronese 嵌入，Z $Im(v_2)$ 的像。则 $Z \subset \mathbb{P}V/L = \mathbb{P}U$ 同构于辛 Grassmannian $Gr_w(k, \Sigma)$ 在一般点处的 VMRT，且 $\mathfrak{aut}(\hat{Z})^{(1)} \cong Sym^2(W^\vee)$。

(ii) If $Z \cap \mathbb{P}L_2 = \emptyset$, then $\mathfrak{aut}(\widehat{p_{L_2}(Z)})^{(1)} \cong Sym^2(W/Im_W(L_2))^\vee$.

(iii) $dim(\mathfrak{aut}(Z)^{(1)}) < dim(V/L)$。令 $L_2 \subset U$ 如 (ii) 中所述，若 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_{L_2}(Z)})^{(1)} \neq 0$，则：

$$dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_{L_2}(Z)})^{(1)}) < dim(U/L_2).$$

证明。(i) 和 (ii) 出自 [FH12, 命题 4.18]。

在如下识别下：$V = Sym^2(W \oplus Q) \subset Hom(W^\vee \oplus Q^\vee, W \oplus Q)$，我们写作 $U = V/L = Sym^2(W) \oplus Hom(Q^\vee, W)$，其中将 $Sym^2(W)$ 视为包含在 $Hom(W^\vee, W)$ 中。因此 $dim(V/L) > dim(\mathfrak{aut}(\widehat{Z})^{(1)})$，作为 $Hom(Q^\vee, W) \neq 0$。取 $Im_W(L_2)$ 的一个基为 $e_1, ..., e_t$，并将其扩充为 W 的一个基：$e_1, ..., e_t, e_{t+1}, ..., e_k$。于是根据 $Im_W(L_2)$ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned} L_2 \subset & \{(\phi, \eta) \in Sym^2(W) \oplus Hom(Q^\vee, W) \mid Im(\phi^\#) \subset Im_W(L_2) \text{ and } Im(\eta) \subset Im_W(L_2)\} \\ & \cong Sym^2(Im_W(L_2)) \oplus Hom(Q^\vee, Im_W(L_2)), \end{aligned}$$

由此得到 $dim(L_2) \leqslant \frac{t(t+1)}{2} + mt$。于是：

$$\begin{aligned} dim(U/L_2) - dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_{L_2}(Z)})^{(1)}) &\geqslant \frac{k(k+1)}{2} + km - \frac{t(t+1)}{2} - tm - \frac{(k-t)(k-t+1)}{2} \\ &= (m+t)(k-t) > 0, \end{aligned}$$

其中 $k - t > 0$ 作为 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_{L_2} Z})^{(1)} \neq 0$。 □

根据 [FH12, 主定理 (C)], , (5) 中的其他情形分别是 $Gr(a, a+b)$ $\mathbb{S}_n$ 和 $Lag(n, 2n)$ 的 VMRT 的双正则投影。我们通过下面三个引理证明这些情形。

引理 3.11. 设 A 和 B 为向量空间，且 $a = dim(A) \geqslant b = dim(B) \geqslant 3$。设 $V = Hom(A, B)$。对于子空间 $L \subset V$，置 $\mathrm{Im}(L) = \{\mathrm{Im}(\phi) \subset B : \phi \in L\}$。$Ker(L) = \bigcap_{\phi \in L} Ker(\phi)$。于是：

(i) $S = \{[\phi] \in \mathbb{P}V : rank(\phi) \leqslant 1\} \subset \mathbb{P}V$ 与 $Gr(a, a+$ 的 VMRT 射影同构 $b)$.

(iii) 令 $L \subset V$ 使得 $L \cap Sec(S) = \emptyset$，则 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \cong Hom(B/Im(L)\ Ker(L))$ （iii）令 $L \subset V$ 如(ii)中所述，若 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \neq 0$，则 $dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)}) < dim(V/L)$。

证明。(i) 和 (ii) 来自 [FH12，命题 4。10]。对于(iii)，记 $s = dim(Ker(L))$ 和 $t = dim(Im(L))$，根据定义，我们有

$$L \subset \{\phi \in Hom(A, B) : \phi|_{Ker(L)} = 0, Im(\phi) \subset Im(L)\} = Hom(A/Ker(L), Im(L)),$$

从而 $dim(L) \leqslant (a-s)t$。于是

$$dim(V/L) \leqslant dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_L(S)}))^{(1)}) = ab - dim(L) - (b-t)s \geqslant ab - (a-s)t - (b-t)s = (a-t)(b-t) + st >$$

其中 $s < a$ 和 $t < b$ 作为 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \neq 0$。 □

引理 3.12. 设 W 是一个维数为 $n \geqslant 6$的向量空间。 $V = \wedge^2 W$。对于每个 $\phi \in \wedge^2 W$，通过包含映射 $\wedge^2 W \subset W \otimes W = Hom(W^\vee, W)$，记 $\phi^\# \in Hom(W^\vee, W)$。对于子空间 $L \subset V$，定义 $Im(L) \subset W$ 为 $\{Im(\phi^\#) \subset W, \phi \in L\}$的线性张成。则：

(i) $S = \{[\phi] \in V : rk(\phi) \leqslant 2\} \subset \mathbb{P}V$ 与 $\mathbb{S}_n$的 VMRT 同构。(ii) 若 $L \subset V$满足 $\mathbb{P}L \cap Sec(S) = \emptyset$，则 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \cong \wedge^2(W/Im(L))^\vee$。(iii) 设 $L \subset V$如 (ii) 中所述，若 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \neq 0$，则 $dim(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)}) < dim(V/L)$。

证明。(i) 和 (ii) 见 [FH12，命题 4.11]。对于 (iii)，取 $Im(L)$ 的一组基为 $e_1, ..., e_t$，并将其扩充为 W 的一组基：$e_1, ..., e_t, e_{t+1}, ..., e_n$。设 $W^\vee$ 的对偶基为 $f_1, ..., f_n$，使得$f_i(e_j) = \delta_{i,\ j}$对任意 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 均成立。通过以下方式将 $Hom(W^\vee, W)$ 与 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 等同：

$$\begin{aligned} Hom(W^\vee, W) &\longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ \mathcal{A} &\longrightarrow A = (a_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n) \end{aligned} \tag{3.6}$$

使得 $\mathcal{A}(f_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$。于是 V对应于所有反对称矩阵。现在

$$L \subset \{\mathcal{A} \in V : Im(\mathcal{A}) \subset Im(L)\} = \{\mathcal{A} \in V : a_{ij} = 0 \text{ if } i \geqslant r+1 \text{ or } j \geqslant r+1\},$$

因此 $dim(L) \leqslant t(t-1)/2$。于是：

$$\begin{aligned} dim(V/L) - dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_L(S)})^{(1)}) &= \frac{n(n-1)}{2} - dim(L) - \frac{(n-t)(n-t-1)}{2} \\ &\geqslant \frac{n(n-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2} - \frac{(n-t)(n-t-1)}{2} = t(n-t) > 0, \end{aligned}$$

其中 $t > 0$ 作为 $L \neq 0$，而 $t < n$ 作为 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \neq 0$。 □

引理 3.13。设 W是一个维数为 $n \geqslant 3$ 的向量空间。 $V = Sym^2 W$。对于每个 $\phi \in Sym^2 W$，通过包含映射 $Sym^2 W \subset W \otimes W = Hom(W^\vee, W)$，记 $\phi^\# \in Hom(W^\vee, W)$。对于子空间$L \subset V$，定义 $Im(L) \subset W$为 $\{Im(\phi^\#) \subset W, \phi \in L\}$ 的线性张成。于是：

(i) $S = \{[\phi] \in V : rk(\phi) \leqslant 1\} \subset \mathbb{P}V$与 $Lag(n, 2n)$ 的 VMRT 同构。(ii) 如果 $L \subset V$ 使得 $\mathbb{P}L \cap Sec(S) = \emptyset$，那么 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \cong Sym^2(W/Im(L))^\vee$。(iii) 设 $L \subset V$ 如 (ii) 中所述，若 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)} \neq 0$，则 $dim(\widehat{p_L\ S}(\ ))^{(1)}) < dim(V/L)$。

证明。（i）和（ii）由 [FH12, 命题 4.12] 得出。对于（iii），与引理 3.11 中一样，我们取 $Im(L)$ 的一组基为 $e_1, ..., e_r$，并将其扩充为 W 的一组基 $e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n$。记其对偶基为 $f_1, ..., f_n$。保持标识（3.5），则 V 对应于所有对称矩阵，并且我们有

$$L \subset \{\mathcal{A} \in V : Im(\mathcal{A}) \subset Im(L)\} = \{\mathcal{A} \in V : a_{ij} = 0 \text{ if } i \geqslant r+1 \text{ or } j \geqslant r+1\},$$

这意味着 $dim(L) \leqslant \frac{r}{(r+1)}2$，因此

$$dim(V/L) - dim(\mathfrak{aut}(\widehat{p_L(S)})^{(1)}) = \frac{n(n+1)}{2} - dim(L) - \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$$
$$\geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} - \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} = r(n-r) > 0,$$

其中 $r > 0$ 为 $L \neq 0$，而 $r < n$ 为 $\mathfrak{aut}(\widehat{p_L(S)})^{(1)} \neq 0$。 □

3.2.2. 情形 (3)。设 $X = Gr(2,5) \subset \mathbb{P}^9$。对于每个 $k = 1, 2$，记 $X_k \subset \mathbb{P}^{9-k}$ 为余维 k的光滑线性截面。于是情形 X_1 由 [FH12，第 3 节4] 推出，而情形 X_2 由 [BFM20，引理 4.6]推出。

3.2.3. 情形 (4)。设 $S = \mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$。对于每个 $k = 1, 2, 3$，记 $S_k \subset \mathbb{P}^{15-k}$ 为如 [FH18，命题 2.12]所述的余维 k 的光滑 $\mathbb{P}^4$-一般线性截面。

(i) 情形 S_1 由 [FH12，第 3 节3]推出。

（ii）根据 [FH18，命题 7.6] S_3 是二次对称的。S_3 在一般点处的 VMRT 是 $Gr(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ 的一个余维为 3 的光滑线性截面，根据定理 ˆ 3.7，它没有非零延拓。因此根据 [FH12，定理 6.15] 的证明，我们得到 $\mathfrak{aut}(S_3) \cong \mathbb{C}$。

（iii）为证明情形 S_2，我们回顾 Kuznetsov 证明的关于 S_2 的以下刻画。

定理 3.14. [Ku18，命题 6.1 和引理 6.7] 设 $S_K \subset S$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个光滑线性截面，其余维为 2，则以下条件等价：

(a) S_K 与 S_2射影等价；(b) S_K 上线性 4-维空间的希尔伯特空间 $F_4(S_K)$ 非空；(c) 存在一条直线 L，使得 S_K 中

$$\mathcal{N}_{L/S_K} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(-2) \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus 6} \tag{3.7}$$

此外，这条直线是唯一的，且等于 S_K上所有 4维子空间的交集。

现在反设 $dim(\mathfrak{aut}(\hat{S}_2)^{(1)}) = dim(V)$。取定理 3.14 中定义的直线 L。对于任意点 $x = [\hat{x}] \in L$，取一个线性函数 $l \in V^\vee$，使得 $l(\hat{x}) \neq 0$。由 HM05 的命题 2.3.1]，存在唯一的 $\mathcal{A} \in \mathfrak{aut}(\hat{S}_2)^{(1)}$，使得对于任意 $\alpha \in \hat{S}_2$，都有 $\mathcal{A}_{\alpha,\alpha} = l(\alpha)\alpha$。此外，记 $\hat{P}_\alpha = T_\alpha(S_2)$ 为 S_2 在 α 处的切空间，则有：

$$2\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = l(\alpha)\beta + l(\beta)\alpha, \tag{3.8}$$

对任意 $\alpha \in \hat{S}_2$ 以及任意 $\beta \in P_\alpha$。记 s 为 $\mathcal{A}_{\hat{x}}$的半单部分。根据 HM05 的证明，定理 1.1.3]，单参数子群 $\{exp(2ts) : t \in \mathbb{C}\}$ 在 S_2 上诱导出一个 $\mathbb{C}^*$-作用，该作用在 x处为欧拉型。我们将从 $\mathbb{C}^*$-作用推出矛盾。

首先我们断言，$\mathbb{C}^*$-作用在 V上恰有三个不同的权子空间。事实上，由 $\mathcal{A}_{\hat{x}}(V) \subset P_{\hat{x}}$ 以及 (3.8) 可知，$\mathbb{C}^*$ 在 V 上的线性作用至多有三个不同的权子空间。另一方面，记 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)|_{S_2}$。由于 S_2 在 $\mathbb{P}V$中是线性正规子群，$(S_2, \mathcal{L}, x)$ 满足引理 2.7 的条件。因此由推论 2.8 可知，它恰有三个加权子空间。在第 2 节的设定下，我们有 $r = 2$。记 $W = H^0(S_2, \mathcal{L})^\vee_{-1}$、$U = H^0(S_2, \mathcal{L})^\vee_{w_2}$ 和$f : S_2 \to \mathbb{P}V$为射影嵌入。于是我们有：$dim(V) = 14$、$dim(W) = dim(T_x S_2) = 8$ 以及$dim(U) = dim(V) - 1 - dim(W) = 5$。现在我们来验证 $\mathbb{C}^*$-作用在 S_2上满足以下两个性质。

(a) $X^{\mathbb{C}^*}$恰有三个不可约分支：孤立源点 $\{x\}$、包含于 $\mathbb{P}W$ 中的唯一分支 Y_1，以及包含于 $\mathbb{P}U$ 中的唯一分支 Y_2。首先注意，对于任意$Y \in \mathcal{Y}$，都有 $Y \subset \mathbb{P}V_k$，其中 k 为某个值。若 $Y \subset \mathbb{P}W$，则汇点位于 Y 中的某个 $\mathbb{C}^*$-轨道，其源点必为 x。因此由命题 2.3，这样的 Y 是唯一的，并且 $C^-(Y)$ 是 Y 上的线丛。若 $Y \subset \mathbb{P}U$，则可见 $v^+(Y) = 0$，因此 Y 是 $\mathbb{C}^*$-作用的唯一汇点。

(b) 我们有 $dim(Y_1) > 0$。否则，假设 $Y_1 = \{y\}$ 是一个单点。若 $dim(Y_2) = 0$，则由命题 2.3 和 (a) 可得 $v^+(Y_1) = v^-(Y_1) = 1$，进而 $dim(S_2) = dim(T_y S_2) = v^+(Y_1) + v^-(Y_1) = 2 < 8$，这就产生矛盾。若 $dim(Y_2) > 0$，则有 $D_x = S_2 \backslash C^+(x) = C^+(y) \cup Y_2$。这意味着，作为 D_x 的一个除子，Y_2 的维数为 6，这与 $Y_2 \subset \mathbb{P}U \cong \mathbb{P}^4$ 矛盾。

由于 L 是 X_2中所有 4维子空间的交集，因此它是 $\mathbb{C}^*$-不变的。此外，由于 $x \in L$ 且该作用在 x处为欧拉型，我们得出 L 是一个非平凡的 $\mathbb{C}^*$-轨道闭包，其源点为 $x = [e_0]$。将该轨道记为 $\mathbb{C}^* \cdot f(w) = \{[e_0 + z\Pi_1(w) + z^{-w_2}\Pi_2(w, w)]$：对某个非零的 $w \in T_x S_2$成立，并将该轨道的汇点记为 y。那么必有 $\Pi_2(w, w) = 0$ 以及 $y \in Y_1$。否则，该轨道的汇点

将是 $[\Pi_2(w,w)] \in \mathbb{P}U$。那么直线 L将包含于 $\mathbb{P}(\mathbb{C}e_0 \oplus U)$中，这与 $\Pi_1(w) \neq 0$ 矛盾，因为根据引理 2.7 (3)， Π_1 是单射。现在任取一点 $y' \in Y_1$，记 $L_{y'}$为唯一一个汇点为 y'、源点为 x的非平凡 $\mathbb{C}^*$-轨道闭包。那么 $L_{y'}$ 恰好是连接x 和 y'的直线。根据 ORSW22，引理 2.16] ，以及 ORSW22，命题 2. 17], 的证明， $T_{S_2}|_{L_{y'}}$ 的分裂型由 $\mathbb{C}^*$ 在 $T_{y'}S_2$上的各向同性作用的权决定。由于 Y_1 不可约，当 y' 在 Y_1中变化时， $\mathbb{C}^*$ 在 $T_{y'}S_2$ 上的权保持不变。这意味着$T_{S_2}|_{L_{y'}}$ 的分裂型也保持不变，这与 L 作为 $dim(Y_1) > 0$的唯一性矛盾。因此我们得出$dim(\mathfrak{aut}(\hat{}S_2)^{(1)}) < dim(V)$。命题 3.9 的证明至此完成。

4. Proof of main result

本节将证明定理 1.2。首先回顾 Hwang 和 Mok [HM01]证明的 Cartan-Fubini 型延拓定理。我们将使用取自 [FH12, 定理 6.8]的以下版本

定理 4.1. 设 X_1 和 X_2 是两个皮卡数为 1 且不同于射影空间的 Fano 流形。设 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 分别是定义在 X_1 和 X_2 上的极小有理曲线族。假设对于一般点 $x \in X_1$，VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X_1)$ 是不可约且光滑的。设 $U_1 \subset X_1$ 和$U_2 \subset X_2$ 是连通的解析开子集。假设存在一个双全纯映射 $\phi\colon U_1 \to U_2$，使得对于一般点 $x \in U_1$，微分 $d\phi_x\colon \mathbb{P}T_x(U_1) \to \mathbb{P}T_{\phi(x)}(U_2)$ 将 $\mathcal{C}_x$ 同构地映射到 $\mathcal{C}_{\phi(x)}$。则存在一个双正则态射 $\Phi\colon X_1 \to X_2$，使得 $\phi = \Phi|U_1$。

延拓定理使我们能够通过 VMRT 刻画 Euler 对称簇。为方便起见，我们给出一个 $\mathbb{C}^*$-等变版本。

推论 4.2. 设 X, X' 是两个皮卡数为 1 的 Fano 流形， $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ 分别是 X, X' 上的极小有理曲线族。设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}T(X)$ 和 $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}T(X')$ 分别是 X 和 X' 上相应的极小有理曲线切向锥结构。假设对于 X 上的一般点 x 以及 X' 上的一般点 x'，分别存在 X 和 X' 上的 $\mathbb{C}^*$-作用，且这些作用在 x 和 x' 处分别为欧拉型。若 $\mathcal{C}_x$ 与 $\mathcal{C}'_x$ 射影同构，则存在一个 $\mathbb{C}^*$-等变同构 $\Phi : X \to X'$，将 x 映到 x'。

证明. 设 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_xX$ 与 $\mathcal{C}'_{x'} \subset \mathbb{P}T_{x'}X'$ 之间的射影同构由线性同构 $\phi\colon T_xX \to T_{x'}X'$ 给出。于是，识别 $C^+(x) \cong T_xX$ 和 $C^+(x') \cong T_{x'}X'$ 后，得到一个同构 $\overline{\phi}\colon C^+(x) \to C^+(x')$。由命题 3.3，它们在一般点处的最小有理切线簇均不可约且光滑。要延拓 $\overline{\phi}$，只需验证 $\overline{\phi}$ 的微分映射保持一般点处的最小有理切线簇。由于 x 和 x' 均取为一般点，由命题 2.10 (3)， T_xX 在 $C^+(x)$ 上的作用以及 $T_{x'}X'$ 在 $C^+(x')$ 上的作用，分别可以延拓为 X 和 X' 上的作用。这表明 $C^+(x)$ 和 $C^+(x')$ 上的极小有理曲线切向锥结构均局部平坦。因此，根据我们对 $\overline{\phi}$ 的定义，对于任意点 $y \in C^+(x)$， $d\overline{\phi}_y$ 必须将 $\mathcal{C}_y$ 同构地映到 $\mathcal{C}'_{\overline{\phi}(y)}$ 上。由此可知 Φ 存在。最后，根据假设， $\overline{\phi}$ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的，因此 Φ 也是 $\mathbb{C}^*$-等变的，因为 $C^+(x)$ 是开稠密的。□

现在设 $X = G/P = \mathcal{D}(I)$ 是一个皮卡数为一的有理齐性空间，由单代数群 G 和抛物子群 P 定义，其中 P 由简单正根 $\alpha \in \Delta$ 对应的 $I = \{\alpha\}$ 给出。我们回顾一些关于有理齐性空间上 $\mathbb{C}^*$ 作用的事实，其中大部分取自 [ORSW21]。

除复合一个特征外， X 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用由余特征 $\sigma\colon \mathbb{G}_m \to T$ 以及极大环面 T 在 G 上的左乘给出。对于单根 β，我们将余特征 σ_β 记为：对任意 $\eta \in \Delta$，令 $\sigma_\beta(\eta) = \delta_{\eta,\,\beta}$。对于余特征 σ，记 $\mathfrak{g}_k = \bigoplus_{\theta \in \Phi : \sigma(\theta) = k} \mathfrak{g}_\theta$.

命题 4.3. 设 $X = G/P = \mathcal{D}(I)$ 是一个皮卡数为一的有理齐性空间，then：

（i）由余特征 $\sigma \in X_*(T)$ 给出的 X 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用是等化的，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的分次是短分次，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$。在这种情况下，经过共轭后，我们可以假设 $\sigma = \sigma_\beta$，其中 $\beta \in \Delta$。

（ii）由余特征 σ_β 给出的 $\mathcal{D}(I)$ 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用是等化且具有孤立汇点，当且仅当 $\alpha = \beta$ 和 σ_α 定义了 $\mathfrak{g}$ 的短分次；等价地， X 是一个不可约紧致厄米对称空间，且 $\sigma = \sigma_\alpha$。在这种情况下， $\mathbb{C}^*$ 作用在汇点 $x' = eP$ 处是权为 -1 的等化作用；当且仅当 $X = \mathcal{D}(I)$ 是管型不可约Hermitian对称空间时，它具有孤立源点，该孤立源点为 $y' = w_o x'$。

(iii) 假设 $X = \mathcal{D}(I)$ 是一个不可约紧致厄米对称空间，其 $\mathbb{C}^*$-作用由 σ_α 给出。最大维布鲁哈特胞腔为 $C^-(x') = R_u(P^-) \cdot x'$，且 X 是 $R_u(P^-)$ 的等变紧化。若 X 是管型的，则 $C^+(y') = R_u(P) \cdot y'$，且 X 是 $R_u(P)$ 的等变紧化。

现在假设 $X = \mathcal{D}(I)$ 是一个不可约紧致厄米对称空间，其中 $I = \{\alpha\}$ 对某个单根 α 成立，并考虑由余特征 $-\sigma_\alpha$ 给出的 $\mathbb{C}^*$-作用于 X。那么该作用在 $x = eP$ 处是欧拉型，而其逆作用在 $y = \dot{w}_0 \cdot x$ 处是欧拉型。根据 (iii)， $\mathbb{C}^*$- 作用满足命题 2.4 (ii) 的条件。现在我们来证明主要结果。

定理 1.2 的证明。若 $X = \mathcal{D}(I)$ 是管型不可约Hermitian对称空间，则记 $\mathbb{C}^*$-作用在 X 上的作用为 $-\sigma_{\alpha\circ}$ 那么X分别是 $R_u(P^-)$ 和 $R_u(P)$ 的等变紧化，其中 $x = eP$在$R_u(P)$下不动，而 $y = \dot{w}_0 x$ 在 $R_u(P^-)$下不动。考虑态射 $R_u(P) \times R_u(P^-) \to X \times X$: $(u, v) \to (uv \cdot x, u \cdot y)$，其像是稠密且可构造的，因而包含一个稠密开子集。此外，对于像中的任意元素 $(u \cdot y, uv \cdot x)$，我们可以在 X 上定义一个 $\mathbb{C}^*$-作用:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times X &\longrightarrow X \\ (\ t\ ,\ x\ ) &\longrightarrow uv\, t\, (uv)^{-1} \cdot x, \end{aligned}$$

使得 $\mathbb{C}^*$-作用在源点 $\tilde{y} = uv \cdot y = u \cdot y$ 处是欧拉型的，而其逆作用在欧拉 er 型点处 $\tilde{x} = uv \cdot x$。

反过来，假设对于 X 上一般的一对点 x、y，存在一个 $\mathbb{C}^*$-作用，它在 x 处是欧拉型，且其逆作用在 y 处是欧拉型。取 $\mathcal{K}$ 为 X 上一族极小有理曲线，并令 $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}T(X)$ 为 VMRT 结构。由定理 1.4，对于射影嵌入 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_xX$，有 $dim(\mathfrak{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)}) = dim(T_xX)$。因此，由定理 3.7 和命题 3.9， $\mathcal{C}_x$ 与某个不可约紧致厄米对称空间的 VMRT 射影同构。将该不可约紧致厄米对称空间记为 $X' = \mathcal{D}(I)$，并考虑由 $-\sigma_\alpha$ 给出的 X' 上的 $\mathbb{C}^*$-作用，其孤立源为 x'。于是 (X, x, X', x') 满足推论 4.2 的条件，因此 X 与 X' 是 $\mathbb{C}^*$-等变同构的。由于 X 上的 $\mathbb{C}^*$-作用有孤立汇点和孤立源，根据命题 4.3 (ii)， X' 必为管型不可约Hermitian对称空间。□

Acknowledgements

我非常感谢我的导师 Baohua Fu 与我分享关于欧拉对称簇的宝贵见解。在论文准备期间，他也给予了我许多有益的建议，对此我深表感激。感谢丁聪阅读本文初稿，并提出有益的讨论和建议。感谢罗志军与我进行有益的讨论。

References

[Ar11] Ivan V. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 3, 783–786.[BFM20] Chenyu Bai, Baohua Fu 和 Laurent Manivel, *On Fano complete intersections in rational homogeneous varieties*, Mathematische Zeitschrift 295 (2020), no. 3, 289–308. [BB73] A. Bia lynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) 98 (1973), 480–497.[FH12] Baohua Fu 和 Jun-Muk Hwang, *Classification of non-degenerate projective varieties with non-zero prolongation and application to target rigidity* **189** 2012 2, 457 513 , Invent. Math. ( ), no. – . [FH18] Baohua Fu 和 Jun-Muk Hwang, *Special birational transformations of type* (2, 1), J. Algebraic Geom. 27 (2018), no. 1, 55–89.[FH20] Baohua Fu 和 Jun-Muk Hwang, *Euler-symmetric projective varieties*, Algebr. Geom. 7 (2020), no. 3, 377–389. [Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 52, Springer-Verlag, 纽约, 1977.[HM 01] *Cartan-Fubini type extension of holomorphic maps for Fano manifolds of Picard number 1* 9 **80** 2001 575 Jun-Muk Hwang 和 Ngaiming Mok, , J. Math. Pures Appl. ( ) ( ), no. 6, 563– .[HM 05] *Prolongations of infinitesimal linear automorphisms of projective varieties and rigidity of rational homogeneous spaces of Picard number 1 under Kähler deformation* **160** 2005 Jun-Muk Hwang 和 Ngaiming Mok, , Invent. Math. ( ), no. 3, 591–645. [Ku18] Kuznetsov Alexander, *On linear sections of the spinor tenfold*, I. Izv. Math 82 (2018), 694–751. [LM03] Joseph M. Landsberg 和 Laurent Manivel, *On the projective geometry of rational homogeneous varieties*, Com- ment. Math. Helv. 78 (2003), no. 1, 65–100.[Mok 02] *Characterization of certain holomorphic geodesic cycles on quotients of bounded symmetric do- mains in terms of tangent subspaces* **132** 2002 3, 289 309 Ngaiming Mok, , Compositio Math. ( ), no. – . [ORSW 22] *Small bandwidth* $\mathbb{C}^*$*-actions and birational geometry* 1911 12129 4, Gianluca Occhetta, Eleonora A. Romano, Luis E. Sola Conde, 和 Jaros law A. Wisniewski, , arXiv: . v 即将在 J. Algebraic Geom. 发表。[ORSW 21] *Rational homo- geneous spaces as geometric realizations of birational transformations* 2112 15130 Gianluca Occhetta, Eleonora Anna Romano, Luis E. Sola Conde, 和 Jaros law A. Wisniewski, , arXiv: . . [RW20] Eleonora A. Romano 和 Jaros l aw A. Wi´sniewski, *Adjunction for varieties with a* $\mathbb{C}^*$*-action*, Transformation Groups 27 (2020), 1431 – 1473.

Yingqi Liu, AMSS, Chinese Academy of Sciences, 55 ZhongGuanCun East Road, Beijing, 100190, China and University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, China*Email address*: liuyingqi@amss.ac.cn