arXiv:2302.04493v1 [math.GT] 9 Feb 2023

可容许缠结模

Francesco Costantino、Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand

Abstract. 本文引入了与幺半 $\Bbbk$范畴中的一个理想相关联的可容许skein模概念。我们解释了这些模如何推广 Kauffman 编织代数，以及它们如何与源自非半单范畴的重整化量子不变量相关。

Introduction

一般而言，流形的 skein 模 M 是这样一个代数对象：它由 M中嵌入图的形式线性组合构成，并对局部关系取商。这类模的一个重要例子是由 Przyticki [30] 和 Turaev [35]分别独立引入的曲面的 Kauffman 编织代数。它具有简洁的组合定义，其中局部关系由琼斯多项式或等价地由考夫曼括号决定。特别地，与二维球面相关联的 Kauffman 编织代数 $\mathcal{S}(S^2)$ 是一维的，而其对偶 $\mathcal{S}(S^2)^*$ 同构于量子迹的线性张成空间；这些空间的自然配对恢复了琼斯多项式。Kauffman 编织代数的简洁定义隐藏着它与许多有趣对象之间的深刻联系，例如特征簇、拓扑量子场论、量子 Teichm¨uller 空间等，参见例如 [6, 7, 27, 32, 33]。

另一个活跃的研究领域是研究由非半单范畴产生的低维流形的重整化量子不变量（RQI），例如参见 [5, 9, 10, 20]。本文的主要目的是引入与一般幺半 $\Bbbk$–范畴中的理想相关联的可容许缠结模这一概念。该概念是 Kauffman 编织代数的一种自然推广，使我们能够恢复 RQI，而非琼斯多项式。与 Kauffman 编织代数一样，我们将探讨这些可容许缠结模如何与拓扑量子场论等有趣的对象相关联，同时还包含对应于非半单范畴的新特性。

现在简要介绍本文的主要定义和结果。设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小的幺半 $\Bbbk$–范畴。给定一个理想 $\mathcal{I}$ （即一个在张量积和收缩对象下封闭的 $\mathcal{C}$ 全子范畴）以及一个定向二维流形 M，我们将可容许缠结模 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 定义为 M 中 $\mathcal{I}$-可容许带状图在 $\Bbbk$上的张成空间，模去 $\mathcal{I}$–纽结关系的张成空间，参见定义 2.1（若 M 是三维流形，则只要 $\mathcal{C}$ 是带状的，同一定义也适用）。粗略地说， $\mathcal{I}$–纽结关系与通常的纽结关系类似，但要求存在一条以 $\mathcal{I}$ 中的某个对象着色、且未完全包含在局部定义关系中的边。 [5], 中研究了这一概念的一个特例，其中 $\mathcal{I}$ 是展开量子群 $U_q^H(\mathfrak{sl}_2)$上的投射模理想。当 $M=\Sigma$ 是曲面时， Σ 的映射类群会自然作用于 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$，参见命题 2.2。

构造 RQI 的一个重要工具是理想 $\mathcal{I}$in $\mathcal{C}$ 上的 m-迹这一概念。定理 3.1 指出，二维球面 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)^*$ 的可容许skein模的对偶空间，是 $\Bbbk$ 上 $\mathcal{I}$ 的 m-迹所张成的空间（Walker 曾在一次报告中陈述过相关结果 [37]）。该空间与 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)$ 的配对给出了由这些 m-迹导出的链环 RQI（推广了 Kauffman 编织代数、琼斯多项式与量子迹之间的关系）。

$\mathcal{I}$可容许 skein 模的定义自然地出现在源自（非）半单范畴的拓扑量子场论背景中。特别是，在 [11], 本文中，作者与 Virelizier 从任意带有非退化 m-迹的幺模柱对称 $\Bbbk$范畴构造了一个拓扑量子场论，该 m-迹定义在一个 $\mathcal{I}$ 满足若干额外要求的理想上；本文的曲面 Σ 的 $\mathcal{I}$可容许 skein 模恰好是与 Σ相关联的拓扑量子场论空间。此外，这种拓扑量子场论所对应的三维流形不变量与不变量

[10], 有关，它是 Turaev-Viro 不变量和幺模库珀伯格不变量的推广。在这些拓扑量子场论的背景下，定理 4.3 可以理解为：拓扑量子场论赋予把手体的态射，就是定理中给出的线性形式（把手体是一个从其边界到空曲面的配边）。最后，定理 5.10 表明，当一个理想是分次有限时，其 skein 模是分次的，并且每个次数上的维数有限。

在第 6 节中，我们考察三个例子。注意，当 $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ 时，我们对可容许缠结模的定义会退化为通常的定义。当 $\mathcal{C}$ 为半单时，第一个例子将可容许缠结模与标准拓扑量子场论空间联系起来（正如 Bartlett 在 [3]中所证明的）。第二个例子是非受限量子群上的模范畴；其 skein 模带有分级，且每个次数下都是有限的。我们预期这些 skein 模与 [17]中的 TV 型拓扑量子场论空间有关。更一般地，可容许缠结模也可为非幺模范畴定义；构造拓扑量子场论来扩展这些 skein 上的映射类群表示，将会很有意思。非受限量子群的 Borel 子代数上的模范畴尤其值得研究。在最后一个例子中，我们说明，某些李超代数上的模范畴中存在嵌套理想，并且这些理想都有非平凡的可容许缠结模。

还有许多未来研究方向值得探讨。例如，有些范畴并非分次有限，但在某些“平移群”的作用下会变得适当地有限。证明与这些范畴相关联的可容许缠结模是有限维的，将会很有意义。 [5]中定义的加厚曲面的缀 skein 代数就是一个例子。同样地，我们预计，在量子李超代数的情形下，这些可容许 skein 空间应当与超切恩–西蒙斯理论的某种猜想中的微扰版本相关，参见 [21, 26] 及其中的参考文献。最后，过去几年中，skein 模领域出现了若干新的重要结果和思想，包括 [4, 8, 12, 13, 14, 22, 25]中的成果；如果能将这些结果和思想与本文的 skein 联系起来并加以整合，将会很有意义。

致谢。 F.C.感谢位于洛根的犹他州立大学，本工作即在那里开始。他还感谢图卢兹数学研究所CIMI Labex项目ANR 11-LABX-0040（隶属于ANR-11-IDEX-0002-02项目）以及法国ANR CATORE项目ANR-18-CE40-0024所提供的资助。F.C.感谢B. Haioun、D. Jordan、J. Korinman和T. Le的启发性讨论。N.G.的工作部分得到了美国国家科学基金会DMS-2104497拨款以及图卢兹数学研究所的支持。

1. Preliminaries

1.1. 刚性范畴。 设 $\mathcal{C}$ 为一个严格幺半范畴，其张量积为 $\otimes$ ，单位对象为 $\mathbb{I}$。记号 $V \in \mathcal{C}$ 表示 V 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象。

若范畴 $\mathcal{C}$ 具有对偶态射，则称其为刚性范畴

$$\overleftarrow{\text{余评价}}_V : \mathbb{I} \to V \otimes V^*, \qquad \overleftarrow{\text{ev}}_V : V^* \otimes V \to \mathbb{I}, \qquad \overrightarrow{\text{coev}}_V : \mathbb{I} \to V^* \otimes V, \qquad \overrightarrow{\text{ev}}_V : V \otimes V^* \to \mathbb{I}$$

并满足相容性条件（例如参见 [2, 16, 29]）。特别地，态射 $f\colon V \to W$ 在 $\mathcal{C}$ 中的左对偶和右对偶 $f^*\colon W^* \to V^*$ 相同：

$$f^* = (\overleftarrow{\text{ev}}_W \otimes \mathrm{Id}_{V^*})(\mathrm{Id}_{W^*} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{V^*})(\mathrm{Id}_{W^*} \otimes \overleftarrow{\text{coev}}_V) = (\mathrm{Id}_{V^*} \otimes \overrightarrow{\text{ev}}_W)(\mathrm{Id}_{V^*} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{W^*})(\overrightarrow{\text{coev}}_V \otimes \mathrm{Id}_{W^*}).$$

若范畴 $\mathcal{C}$ 是刚性的、辫状的，且具有满足相容性条件的扭结（例如参见 [18]），则称其为带状。

1.2. $\Bbbk$–范畴。设 $\Bbbk$是一个域。 $\Bbbk$–范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$ ，其 Hom 集是有限维的 $\Bbbk$–向量空间，态射的复合是 $\Bbbk$-双线性的，并且典范的 $\Bbbk$–代数映射$\Bbbk \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I})$ $k \mapsto k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{I}}$ 是一个同构。幺半 $\Bbbk$–范畴是一个幺半范畴 $\mathcal{C}$ ，其中 $\mathcal{C}$是一个 $\Bbbk$–范畴，且态射的张量积是 $\Bbbk$-双线性的。

1.3. 刚性范畴中理想上的 M-迹。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性 $\Bbbk$–范畴。这里我们回顾 $\mathcal{C}$中理想上的 m-迹的定义；更多细节请参见 [16, 19]。所谓 $\mathcal{C}$ 的理想，是指 $\mathcal{C}$ 的一个全子范畴 $\mathcal{I}$，它

> **对张量积封闭：**如果 $V\in\mathcal{I}$和 $W\in\mathcal{C}$，那么 $V\otimes W$和 $W\otimes V$都是 $\mathcal{I}$中的对象。**对截缩封闭：**如果 $V\in\mathcal{I}$、 $W\in\mathcal{C}$，且存在态射 $f\colon W\to V$、 $g\colon V\to W$，使得 $gf=\mathrm{Id}_W$，那么 $W\in\mathcal{I}$（我们称 W是 V的直缩）。

右（分别地，左）偏迹属于 $f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U\otimes W)$的定义是态射

$$\mathrm{ptr}_R^W(f)=(\mathrm{Id}_U\otimes\overrightarrow{\mathrm{ev}}_W)(f\otimes\mathrm{Id}_{W^*})(\mathrm{Id}_U\otimes\overleftarrow{\mathrm{coev}}_W),\ \text{resp. }\ \mathrm{ptr}_L^U(f)=(\overleftarrow{\mathrm{ev}}_U\otimes\mathrm{Id}_W)(\mathrm{Id}_{U^*}\otimes f)(\overrightarrow{\mathrm{coev}}_U\otimes\mathrm{Id}_W).$$

右 理想 $\mathcal{I}$上的m-迹是一个线性函数族 $\{\mathrm{t}_V\colon\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)\to\Bbbk\}_{V\in\mathcal{I}}$，满足 ：

> **循环性：** 如果 U， $V\in\mathcal{I}$且 $f\colon V\to U$， $g\colon U\to V$是 $\mathcal{C}$中的任意态射，那么 $\mathrm{t}_V(gf)=\mathrm{t}_U(fg)$.
> **右偏 迹性质：** If $U\in\mathcal{I}, W\in\mathcal{C}, f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U\otimes W)$ then $\mathrm{t}_{U\otimes W}(f)=\mathrm{t}_U(\mathrm{ptr}_R^W(f))$

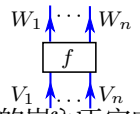
。 $\mathcal{I}$上的左 m-迹是线性函数族 $\{\mathrm{t}_V\colon\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)\to\Bbbk\}_{V\in\mathcal{I}}$，该函数族具有循环性并满足

左偏迹性质： If $U\in\mathcal{I}, W\in\mathcal{C}, g\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(W\otimes U)$ then $\mathrm{t}_{W\otimes U}(g)=\mathrm{t}_U(\mathrm{ptr}_L^W(g))$。理想上的$m$-迹是右 m-迹，同时也是左 m-迹。

注 1.1。由于理想的交仍是理想，我们可以将由一组对象生成的理想定义为包含这些对象的最小理想。

1.4。带色带状图的不变量。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半 $\Bbbk$范畴。

态射 $f\colon V_1\otimes\cdots\otimes V_n\to W_1\otimes\cdots\otimes W_m$ in $\mathcal{C}$可以用一个盒和若干箭头表示，这些箭头称为*coupon*，见右侧的图：



所有 coupon 都有顶面和底面，在我们的图示中，它们是 coupon 的水平面。我们所说的嵌入于定向流形 Σ中的带状图，是指嵌入在 Σ 中的定向紧曲面，该曲面分解为若干基本部分：带、环带和 coupon （见 [34]），并且是一个定向图的加厚。特别地，位于 $\mathrm{Int}\,\Sigma=\Sigma\setminus\partial\Sigma$ 中的图的顶点会加厚为 coupon。一个 $\mathcal{C}$–着色带状图是指其（加厚后的）边以 $\mathcal{C}$ 中的对象着色、coupon 以 $\mathcal{C}$中的态射着色的带状图。要求 $\mathcal{C}$– 着色带状图与 $\partial\Sigma$ 在 Σ 中的交集为空，或仅由度为 1 的顶点组成。当 Σ 是曲面时，带状图就是该图的一个管状邻域。

$\mathcal{C}$–着色带状图在 $\mathbb{R}^2$ （分别在 $S^2=\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$）中称为平面（分别称为球面）。令 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{C}}$ 为平面 $\mathcal{C}$–着色带状图的范畴，并令 $F\colon\mathrm{Rib}_{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}$ 为通过彭罗斯图形演算与 $\mathcal{C}$ 相关联的枢轴函子，参见例如 [19]；注意 F 不保持对偶。令$\mathcal{L}_{adm}$ 为所有球面 $\mathcal{C}$–着色带状图构成的类，这些图是某个(1,1)-带状图 T_V 的辫子闭合，其中其开放边由对象 $V\in\mathcal{I}$着色。给定 $\mathcal{I}$ 上的一个 m-迹 t，我们可以将F 重整化为一个不变量

$$F'\colon\mathcal{L}_{adm}\to\Bbbk\ \text{given by}\ F'(L)=\mathrm{t}_V(F(T_V)) \tag{1}$$

其中 T_V 是任意一个闭合后为 $L\in\mathcal{L}_{adm}$的(1,1)-带状图。m-迹的性质表明，F' 是 L的一个同痕不变量，参见 [19]。

若 $\mathcal{C}$ 是一个带状范畴，则令 $\mathcal{L}_{adm}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中所有 $\mathcal{C}$–着色带状图构成的类，这些图是某个(1,1)-带状图 T_V 的辫子闭合，其中其开放边由对象 $V\in\mathcal{I}$着色。则由公式(1)给出的赋值 F' 是 $\mathbb{R}^3$中 L 的同痕不变量，其中 F 为R-T函子。

2. Admissible Skein Modules

2.1. 可容许 skein 模的定义。令 $\mathcal{C}$ 为一个本质小的幺半对偶 $\Bbbk$–范畴，并带有理想 $\mathcal{I}$。令 M 为二维或三维定向流形。本文中的所有流形均为定向流形；若考虑三维流形的 skein 模，则要求 $\mathcal{C}$ 为带状范畴。

在 M 中的 $\mathcal{I}$–可容许带状图 是一个 $\mathcal{C}$–着色的带状图，其中每个 M 的连通分支都至少包含一条用 $\mathcal{I}$ 中的对象着色的边。

流形 M中一个维数为 $n=2$盒，3 是 $[0,1]^n$到 M的真嵌入。其顶面和底面分别为 $[0,1]^{n-1}\times\{1\}$ 和 $[0,1]^{n-1}\times\{0\}$。如果带状图与盒横截相交于直线 $[0,1]\times\{0,1\}$（当 $n=2$时）和$[0,1]\times\{\frac{1}{2}\}\times\{0,1\}$（当 $n=3$时），则称该带状图横截 于盒。

设 $(a_1,\dots,a_m)\in\Bbbk^m$和 $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m$ 是 $\mathcal{C}$–着色带状图，位于 M 中。若存在 B 中的一个盒，并且对于 $i=1,...,m$，存在一个图 Γ_i'，满足其与 Γ_i同痕、与盒 B横截且在 B之外相同（即 $\Gamma_i'\cap(M\setminus B)=\Gamma_j'\cap(M\setminus B)\ \forall i,j$），使得 (1) $\sum_i a_iF(\Gamma_i'\cap B)=0$作为 $\mathcal{C}$中的一个同态，并且 (2) 每个 Γ_i' 都有一条未完全包含于 B中的 $\mathcal{I}$–着色边，则称形式线性组合 $\sum_i a_i\Gamma_i$为一个 $\mathcal{I}$–纽结关系。如果两个线性组合之差是一个 $\mathcal{I}$–纽结关系，则称它们是 $\mathcal{I}$–纽结等价的。

定义 2.1。将 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 上的可容许skein模 定义为：M 中 $\mathcal{I}$–可容许带状图所张成的 $\Bbbk$–模，模去 $\mathcal{I}$–纽结关系所张成的子模。

由于 $\mathcal{C}$ 本质小，因此 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 总是一个集合；事实上，在纽结等价意义下，我们可以将任意颜色替换为其在 $\mathcal{C}$中的同构类的一个固定代表元。

令 $\mathbf{Emb}_n$ 为如下范畴：其对象为定向的 n维流形，态射为保定向真嵌入的同痕类。以下命题成立：

命题 2.2。设 $n\in\{2,3\}$。我们假设，若 $n=3$，则 $\mathcal{C}$ 是带状的。我们有 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}:\mathrm{Emb}_n\to\mathrm{Vec}$是一个函子。特别地，若 $n=2$，它们给出曲面映射类群的表示。

证明。若 $f\colon M\to M'$是一个嵌入，且 $\Gamma\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$，则 $f(\Gamma)\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M')$。此外，纽结关系在 f 下的像仍是一个纽结关系。□

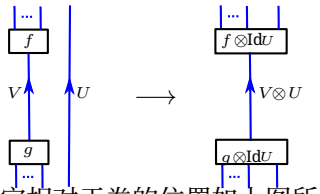
命题 2.3. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是本质小的刚性 $\Bbbk$–范畴。设 $G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个严格刚性函子（见 [36, 第 1.7 节。5]），并设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$的一个理想。设 $\mathcal{J}$ 是由 $G(\mathcal{I})$的对象生成的 $\mathcal{D}$ 的理想。函子 G 诱导一个自然变换 $G_*:\mathcal{S}_{\mathcal{I}}\to\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$。

证明。显然，$\mathcal{I}$–可容许图的像是一个 $\mathcal{J}$-可容许图。此外，应用 G 会将一个 $\mathcal{I}$-纽结关系变换为一个 $\mathcal{J}$-纽结关系；事实上 $F_{\mathcal{D}}\circ G_*=G\circ F_{\mathcal{C}}\colon\mathrm{Rib}_{\mathcal{C}}\to\mathcal{D}$，并且如果盒的补集中包含一条 $\mathcal{I}$-着色边，那么应用 G_* 后，盒的补集中会包含一条 $\mathcal{J}$-着色边。□

命题 2.4. $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 由带状图生成，其中每条边都由 $\mathcal{I}$的一个对象着色 .

证明。通过添加恒等优惠券，很容易看出 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 由这样的带状图生成：每条边都连接两个不同的券。然后，我们可以按照颜色不属于 $\mathcal{I}$ 的边的数量进行归纳。

利用纽结关系，我们可以将一条颜色为 V、且靠近一条颜色为 $U\in\mathcal{I}$ 的边替换为一条颜色为 $V\otimes U\in\mathcal{I}$ 的边，并按下图所示改变券：



请注意，除去与 V 着色边相邻的券邻域中的纽结关系，我们总可以假设它相对于券的位置如上图所示。□

2.2. $\mathcal{I}$-skein 模的代数与模结构。

命题 2.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小的带状 $\Bbbk$–范畴，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{C}$ 的理想。若 Σ 是一个曲面，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 是一个结合代数；若 $\mathcal{I}\neq\mathcal{C}$，则它没有单位元。此外，若 M 是一个3 维流形，且 $i\colon\Sigma\hookrightarrow\partial M$ 是一个保定向（分别为反定向）嵌入，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma)$ 上的左（分别为右）模。

证明。 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 的代数运算由 $\Sigma\times[0,1]$ 中的垂直堆叠给出：若 $\Gamma,\Gamma'\subset\Sigma$ 是带状图，则 $\Gamma\cdot\Gamma'$ 是通过将 Γ 嵌入 $\Sigma\times\{1\}$、将 Γ' 嵌入 $\Sigma\times\{0\}$ 得到的带状图，使它们在 Σ 中的投影横截，然后将所有交叉替换为由 $\mathcal{C}$ 的编织装饰的券，从而得到 Σ 中的带状图。

我们声称，这一运算定义了一个良定义的结合积。事实上，若 Γ and Γ' 是 $\mathcal{I}$–容许图，则 $\Gamma\cdot\Gamma'$ 也是如此。此外，若 Γ' and Γ'' 在盒 B 上满足 $\mathcal{I}$-纽结关系，我们将证明 $\Gamma\cdot\Gamma'$ and $\Gamma\cdot\Gamma''$ 是 $\mathcal{I}$-纽结等价的：经过 Γ 的同痕后，可以假设 $\Gamma\cdot\Gamma'$and $\Gamma\cdot\Gamma''$ 均与 B 横截相交，且 $\Gamma\cap B$ 完全位于 $\Gamma'\cap B$ and $\Gamma''\cap B$ 的左侧。于是 $F(\Gamma\cdot\Gamma'\cap B)=F(\Gamma\cap B)\otimes F(\Gamma'\cap B)$，而 $F(\Gamma\cdot\Gamma''\cap B)=F(\Gamma\cap B)\otimes F(\Gamma''\cap B)$。但由于 $F(\Gamma'\cap B)=F(\Gamma''\cap B)$，我们得出 $F(\Gamma\cdot\Gamma'\cap B)=F(\Gamma\cdot\Gamma''\cap B)$。该运算显然满足结合律。若 $\mathbb{I}\notin\mathcal{I}$，则空图不是 $\mathcal{I}$–容许图，因此 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 不含幺。

假设 $i\colon\Sigma\hookrightarrow\partial M$ 是一个保定向嵌入。我们将证明，由 $[\alpha]\cdot[\beta]=[i(\alpha)\sqcup\beta]$ 给出的映射 $\cdot\colon\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma)\times\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)\to\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是良定义的，其中 α 和 β 分别是$[\alpha]\in\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Sigma)$ 和 $[\beta]\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 的代表元（这里假设 $\beta\subset int(M)$，这可以通过同痕将其推入 M 来实现）。注意，$i(\alpha)\sqcup\beta$ 是 M中的一个 $\mathcal{I}$-容许图。若 β 和 β' 满足由盒 B 给出的$\mathcal{I}$-纽结关系，则不妨在同痕意义下假设 $B\subset int(M)$，这意味着 $i(\alpha)\sqcup\beta$和 $i(\alpha)\sqcup\beta'$ 在 B 中满足 $\mathcal{I}$– 纽结关系。此外，若 α 和 α' 满足由盒 $B\subset\Sigma$ 给出的 $\mathcal{J}$- 纽结关系，则 $i(\alpha)\sqcup\beta$ 和 $i(\alpha')\sqcup\beta$ 在一个 $\mathcal{J}$-关系下相关，该关系位于盒 B' 中，此盒由在M内部稍微加厚 $i(B)$ 得到。由于 $[\beta]\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$，因此在同痕意义下，该关系实际上是一个 $\mathcal{I}$-纽结关系。由此可知，所述作用是良定义的。若 M 在 $i(\Sigma)$上诱导的定向为负，则可类似地证明右作用，其中 $[\beta\cdot\alpha]=[\beta\sqcup i(\alpha)]$ 和 $i(\alpha)$位于 β下方。□

3. Skeins of elementary spheres and balls

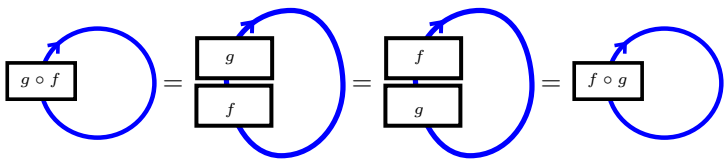
本节将用 m-迹来诠释圆盘和球面的 skein。K. Walker 和 D. Reutter 宣布了一项相关结果，参见 [37]。

定理 3.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小的幺半刚性 $\Bbbk$–范畴，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$的一个理想。那么

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)^*\cong\{\text{关于 }\mathcal{I}\}\cong\{\text{的右 } m\text{-迹 关于 }\mathcal{I}\}\text{ 的左 } m\text{-迹 以及 }\quad\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)^*\cong\{\text{关于 }\mathcal{I}\}\text{的 } m\text{-迹}$$

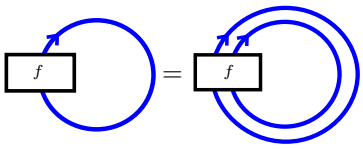
其中 D^2 和 S^2 分别是 2-圆盘和二维球面。

证明。 这里我们证明第一个陈述的右侧版本，左侧版本的证明类似。给定 $T\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)^*$，定义线性函数族 $\{\mathrm{t}_V^T\colon\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)\to\Bbbk\}_{V\in\mathcal{I}}$如下。对于 $f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$，令 $\mathrm{t}_V^T(f)=T(O_f)$，其中 O_f是将用 f着色的券右闭合所得的带状图。由于用 $f\circ g$ 着色的券与用 $\mathcal{I}$-纽结等价于将用f 着色的券与用g着色的券复合，因此，通过交换 f和 g的同痕可知，$O_{f\circ g}$ 与 $O_{g\circ f}$纽结等价：



因此，族 $\{\mathrm{t}_V^T\}_{V\in\mathcal{I}}$满足 m-迹的循环性。

接下来，令 $W\in\mathcal{C}$和 $f\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V\otimes W)$，则 O_f与用 f着色、带有两条分别用 V和 W 着色的入边和出边的券的闭合纽结等价：



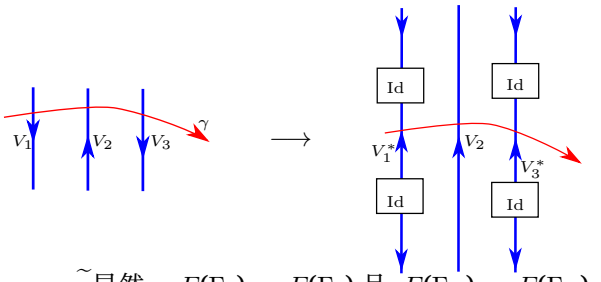
这表明，族 $\{\mathrm{t}_V^T\}_{V\in\mathcal{I}}$ 满足 m-迹的右偏迹性质。

反过来，给定 $\mathcal{I}$ 上的右 m-迹 t，我们可以如下定义 $F'_{\mathrm{t}}\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)^*$ 中的一个元素。设 Γ 是 D^2 中的一个 $\mathcal{I}$–可容许带状图。Γ 的一条切割路径是任意嵌入 $\gamma\colon[0,1]\to D^2$，它从 D^2 的一个边界点出发，终止于 $D^2\setminus\Gamma$ 内部的任意一点，并满足以下条件：a) γ 不与 Γ 的任何券相交；b) γ 与 Γ 的边横截；c) γ 至少与

一条 Γ 的 $\mathcal{I}$ 着色边相交。于是， γ 的管状邻域的补集是一个盒 B_γ，其底部和顶部分别对应于 γ 的左侧和右侧。图 Γ_γ 在 B_γ 中经 RT–函子作用后的像为 $F(\Gamma_\gamma) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_\gamma)$，其中 $V_\gamma \in \mathcal{I}$，因为 γ 与一条 $\mathcal{I}$ 着色边相交。接着定义 $F'_{\mathrm{t}}(\Gamma) = \mathrm{t}^{V_\gamma}(F(\Gamma_\gamma))$。接下来我们证明 $F'_{\mathrm{t}}(\Gamma)$ 与 γ 无关。我们分以下两步进行证明。

步骤 1。假设 γ和 γ'是互不相交的切割路径，并证明 $\mathrm{t}^{V_\gamma}(F(\Gamma_\gamma)) = \mathrm{t}^{V_{\gamma'}}(F(\Gamma_{\gamma'}))$。首先对 Γ进行局部修改，使其与 γ 和 γ' 的所有交点都为正：在$\tilde{}$的管状邻域之外，图 Γ 就是 Γ。

对于 γ 或 γ' 与 Γ的每个交点 p，令e 为 Γ 的一条边在 p附近的一小段。如果该交点的定向为负（相对于 D^2的定向），那么我们就用一段线段替换 e；该线段包含两个标有恒等式的券，两者由一条边相连，该边以正向交叉穿过 γ 或 γ'，并标有 e的对偶颜色：



$\tilde{}$ $\tilde{}$显然，$F(\Gamma_\gamma) = F(\Gamma_\gamma)$ 且 $F(\Gamma_{\gamma'}) = F(\Gamma_{\gamma'})$，因此，只要将 Γ 替换为 Γ，就可以假设 γ 或 γ' 与 Γ 的所有交叉均为正。

在这种情况下，$\gamma \cup \gamma'$ 的管状邻域的补集是一个盒 $B_{\gamma\cup\gamma'}$，它具有一个显然的图$\Gamma_{\gamma\cup\gamma'}$，其左闭合为 Γ_γ，右闭合为 π在 π旋转中的 $B_{\gamma'}$的旋转。我们将后一个图记为 $\mathrm{rot}_\pi(\Gamma_{\gamma'})$。于是 $F(\mathrm{rot}_\pi(\Gamma_{\gamma'})) = F(\Gamma_{\gamma'})^* \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_{\gamma'}^*)$。

令 $g = F(\Gamma_{\gamma\cup\gamma'}) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V_{\gamma'}^* \otimes V_\gamma)$，则

$$\mathrm{t}_{V_\gamma}(F(\Gamma_\gamma)) = \mathrm{t}_{V_\gamma}\left(\mathrm{ptr}_L^{V_{\gamma'}^*}(g)\right) = \mathrm{t}_{V_{\gamma'}^{**}}\left((\mathrm{ptr}_R^{V_\gamma}(g))^*\right) = \mathrm{t}_{V_{\gamma'}^{**}}\left(\left(F(\mathrm{rot}_\pi(\Gamma_{\gamma'}))\right)^*\right) = \mathrm{t}_{V_{\gamma'}}(F(\Gamma_{\gamma'}))$$

其中，第一个和第三个等式来自 $\Gamma_{\gamma\cup\gamma'}$ 的定义，第二个等式由 [19] 的引理 4.b 得出，该引理可重述为：对所有 W^*, $U \in \mathcal{I}$以及$g \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(W^* \otimes U)$，$\mathrm{t}_U(\mathrm{ptr}_L^{W^*}(g)) = \mathrm{t}_{W^{**}}((\mathrm{ptr}_R^U(g))^*)$；最后一个等式则由对任意 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V)$，$\mathrm{t}_{V^{**}}(f^{**}) = \mathrm{t}_V(f)$ 得出。

步骤 2。若 γ和 γ'是交点少于 n 个的切割路径，则 $\mathrm{t}^{V_\gamma}(F(B_\gamma)) = \mathrm{t}^{V_{\gamma'}}(F(B_{\gamma'}))$。我们对 n使用归纳法证明此步骤。基础情形已在步骤 1 中完成。假设该结论对 n 成立，并设 γ 和 γ' 是两条相交 n 次的切割路径。我们断言，存在一条切割路径α，它与 γ和 γ'的交点数都少于 n；于是根据归纳法，有 $\mathrm{t}^{V_\gamma}(F(\Gamma_\gamma)) = \mathrm{t}^{V_\alpha}(F(\Gamma_\alpha)) = \mathrm{t}^{V_{\gamma'}}(F(\Gamma_{\gamma'}))$。

事实上，设 γ'' 为 γ 的一条子弧，它从 ∂D 延伸至 Γ 中第一条由 $\mathcal{I}$ 的某个对象着色的边，然后以一条小弧穿过这条边。显然， γ'' 是一条切割路径（注意，按构造它与一条由 Γ的对象着色的边 $\mathcal{I}$相交）。若 γ'' 与 γ' 的交点少于 n 个，我们可以将 γ'' 稍微向 γ 的一侧推移，从而得到切割路径 α。此时，我们已构造出归纳步骤所需的切割路径。若 γ'' 与 γ' 恰好相交 n 次，设 p 为 γ''的定向上，γ'' 与 γ'之间最后一个交点。考虑这样一条弧：沿 γ' 前行直至到达 p，再沿 γ'' 前行至其末端。根据 p 处 γ 与γ'相交的符号，将这条弧稍微向左或向右推移，即可得到一条切割弧 α，它与 γ 和 γ' 的交点数都少于 n。至此，步骤 2 得证，并表明 $F'_{\mathrm{t}}(\Gamma)$ 与 γ无关。

最后， F'_{t}在 $\mathcal{I}$–可容许纽结关系下是不变量：事实上，总能找到一条切割路径，避开涉及 $\mathcal{I}$–可容许纽结关系的任意盒。总而言之，我们证明了给定一个 m-迹 t，可以构造出一个元素 $F'_{\mathrm{t}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)^*$，反之亦然。显然，这两种构造互为逆运算，从而证明了该定理的第一个同构。

现在考虑球面情形。 T 在 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)$上的任意线性形式都会诱导一个右 m-迹 t^T，它在态射上的定义为 $\mathrm{t}_V^T(f) = T(O_f)$，如上所述（但图 O_f现在位于 S^2中）。由于 O_f和 O_{f^*}在 S^2中同痕，这个右 m-迹等于其对偶；并且 [19, 引理 3] 表明它是一个 m-迹。

反过来，设 t 是 $\mathcal{I}$ 上的一个 m-迹，因此它特别是一个右 m-迹。若 Γ 是 S^2 中的一个 $\mathcal{I}$–可容许带状图，且 $p \in S^2 \setminus \Gamma$，令 $F'_{\mathsf{t}}(\Gamma, p) = F'\mathsf{t}(\Gamma')$，其中 $\Gamma' \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)$位于 $D^2 \simeq S^2 \setminus \{p\}$的内部。我们断言 $F'_{\mathsf{t}}(\Gamma, p)$ 与 p无关： S^2 中针对 Γ 的切割路径是指一条路径 γ，它从一点 $p_1 \notin \Gamma$ 出发并终止于一点 $p_2 \notin \Gamma$，不与 Γ中的任何券相交，横截 Γ 的边，并且$\overleftarrow{}$至少与一条 $\mathcal{I}$着色边相交。令γ 为从 p_2 到 p_1的逆路径。路径 γ 在 D^2 中诱导一条切割路径，用以计算 $F'_{\mathsf{t}}(\Gamma, p_1)$；类似地， $F'_{\mathsf{t}}(\Gamma, p_2)$可用 $\overleftarrow{\gamma}$在 D^2 中诱导的切割路径计算。但沿 γ 和 $\overleftarrow{\gamma}$ 切割得到的两个盒彼此相差一个 π-旋转；由于 t 是一个 m–迹，我们有 $F'_{\mathsf{t}}(\Gamma, p_1) = F'\mathsf{t}(\Gamma, p_2)$。因此， $F'\mathsf{t}(\Gamma) = F'\mathsf{t}(\Gamma, p)$可通过任选一点 p来良好定义。最后，若 S^2 中的一个 $\mathcal{I}$–可容许纽结关系由一个盒 B定义，我们可以为所有涉及的图选取同一个位于盒外的点 p，于是该纽结关系来自D^2 中的一个纽结关系，而 F'_{t} 在该关系上为零。□

推论3.2。 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小的带状 $\Bbbk$–范畴，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个理想。则

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)^* \cong \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^3)^* \cong \{m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}$$

其中 B^3 和 S^3 分别是3-球和3-球面。

证明。 我们将证明 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2)$ 同构于 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)$，那么根据 [19, 备注 9]，由于带状范畴中的任意右m-迹都是一个m-迹，推论将由定理 3.1 得出。

D^2 到 B^3 的包含映射诱导出一个态射 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(D^2) \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(B^3)$。其逆映射定义为：将 B^3 中的任意带状图发送到 D^2 中的一个标准投影，但需将交叉替换为由编织着色的券。任意两个这样的投影都可通过标准的 Reidemeister 型移动相互关联，而这些移动在 D^2 中是纽结等价。最后， B^3 中的一个纽结关系可以经过同痕变换，投影为 D^2 中的一个纽结关系。□

一个循环迹 是线性函数族 $\{h_V \colon \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(V) \to \Bbbk\}_{V \in \mathcal{I}}$，满足：若 $U, V \in \mathcal{I}$，则对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f \colon V \to U$ 和 $g \colon U \to V$，有 $h_V(gf) = h_U(fg)$.

定理 3.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小带状 $\Bbbk$–范畴，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个理想。 *en*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^1 \times [-1,1])^* \cong \{cyclic\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\}.$$

证明。 给定一个 $T \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^1 \times [-1,1])^*$，定义线性函数族 $\{h_V^T \colon \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(V) \to \Bbbk\}_{V \in \mathcal{I}}$ 如下。对于 $f \in \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(V)$，令 $\mathsf{t}_V^T(f) = T(O_f)$，其中 O_f 是由 f 着色的券在环带中的右闭合所得到的带状图。仿照定理 3.1 的证明可知，该函数族是一个循环迹。

反过来，给定 $\mathcal{I}$ 上的循环迹 h，我们可以如下定义 $F'_h \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^1 \times [-1,1])^*$ 的一个元素。令 Γ 为 $S^1 \times [-1,1]$ 中一个 $\mathcal{I}$– 可容许的带状图。我们称 $S^1 \times [-1,1]$ 中形如 $\theta \times [-1,1]$ 的弧为一条半径，条件是：1）它与 Γ 横截相交；2）它不与 Γ 的任何券相交；3）它与至少一条 Γ 的 $\mathcal{I}$ 色边相交。在对 Γ 作同痕的意义下，很容易看出这样的半径存在。

对每条半径，我们可以如下关联一个对象 $V \in \mathcal{I}$ 和一个态射 $f \colon V \to V$。从 $(\theta, -1)$ 出发并沿着半径移动，我们可以将 V 定义为与该半径相交的 Γ 的各边的颜色的张量积，或根据交点的符号取其对偶。通过 R-T 函子， Γ 与半径邻域补集的交表示一个自同态$f \colon V \to V$。定义 $F'_h(\Gamma) = h(f)$。

我们断言， $F'_h(\Gamma)$ 不依赖于半径的选择。事实上，如果 $\theta' \times [-1,1]$ 是另一个半径，那么令 V' 和 f' 分别为其关联的颜色和态射。按照上述方式对两个半径进行切割，我们可以构造出两个态射： $f_1 \colon V \to V'$ 和 $f_2 \colon V' \to V$，使得 $f = f_2 \circ f_1$ 和 $f' = f_1 \circ f_2$。根据循环性， $h(f) = h(f')$。这就证明了该断言。

最后，如果 Γ和 Γ'纽结等价，我们将证明 $F'_h(\Gamma) = F'_h(\Gamma')$。由于我们考虑$\mathcal{I}$-纽结关系，通过同痕，我们可以假设支撑该纽结关系的盒不与 Γ 和 Γ'共有的半径相交。因此，根据纽结关系的定义，与 Γ 和 Γ' 相对应的态射 f 和 f' 相等。由此得证。□

注记 3.4。 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$（$S^1\times[-1,1]$）的 *skein* 模具有一种自然代数结构，该结构由将两个 $S^1\times[-1,1]$ 嵌入 $S^1\times[-1,1]$，分别作为 $S^1\times[-1,0]$ 和 $S^1\times[0,1]$所诱导。一般而言，这个代数不含幺，除非 $\mathcal{I}=\mathcal{C}$；在这种情况下，空 *skein* 表示单位元。

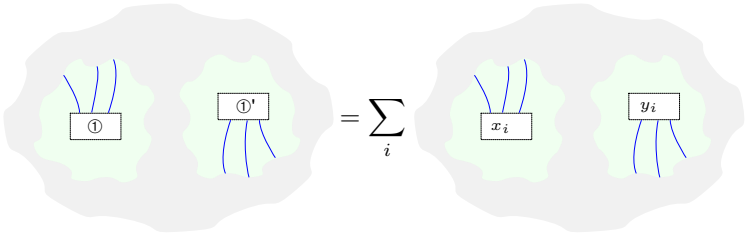
4. Higher genus surfaces and handlebody graphs invariants

4.1. 把手体与 skein 模上的线性泛函。 设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，且 $\mathcal{I}$是 $\mathcal{C}$中的一个理想。若对于任意对象 $P\in\mathcal{I}$，配对

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I},P)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{I})\to\Bbbk,\quad (x,y)\mapsto \mathtt{t}_P(xy)$$

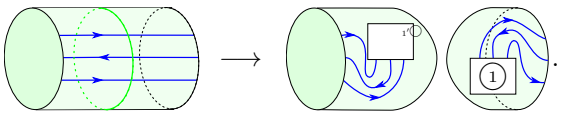
是非退化的，则称 m-迹 t 为非退化的。对于这样的 m-迹，取 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I},\ P)$ 的一组基 $\{x_i\}$，并令 $\{y_i\}$ 为相对于上述配对的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{I})$ 的对偶基。

我们称有限个定向三维把手体的不交并为一个多把手体 。多把手体 $H=\sqcup H_j$ 上的 $\mathcal{I}$–可容许带状图 Γ 是 $\partial H=\sqcup\partial H_j$ 中的一个 $\mathcal{C}$-着色带状图，并且对于每个 j， $\partial H_j\cap\Gamma$ 都是把手体 H_j边界上的一个非空 $\mathcal{I}$–可容许带状图。令 $\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$ 表示所有对 $(H,\ \Gamma)$ 的集合，其中 H 是一个多把手体， Γ 是 H上 $\mathcal{I}$–可容许带状图的线性组合。下文中，我们将纽结片着色按多线性方式扩展。特别地，这使我们能够用余配对 $\sum_i x_i\otimes_{\Bbbk} y_i\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I},\ P)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{I})$ 为一对有序匹配纽结片着色，而这与基的选择无关:



$$=\sum_i \quad . \tag{2}$$

现在我们定义着色图上的切割运算。设 $(H,\ \Gamma)\in\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$，并设 $D\subset H$ 是一个定向的适当嵌入圆盘，其边界 $\partial D\subset\partial H$ 不与 Γ 的券相交，并横截地与 Γ 的边相交于一个非空集合，其中至少包含一条由对象 V 着色的边，且该对象属于 $\mathcal{I}$。沿着 D 切割 $(H,\ \Gamma)$，得到一个新的多把手体图 $(\mathrm{cut}_D(H),\ \mathrm{cut}_D(\Gamma))\in\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$，其中 $\mathrm{cut}_D(\Gamma)$ 是通过切开与 ∂D 相交的 Γ 的边，再将切点连接成 $\partial(\mathrm{cut}_D(H))$ 中两个新的券（切口两侧各一个）而得到的。这些券按照公式 (2) 着色，见下图:



注意，由于 D 与至少一条 $\mathcal{I}$ 着色边相交，且该边属于 Γ，因此 $\mathrm{cut}_D(H)$ 是 $\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$ 的一个元素。此外，H 与 $\mathrm{cut}_D(H)$ 的连通分支数目可能不同，而 $\mathrm{cut}_D(H)$ 的定向由 H 的定向诱导。对 $(H,\ \Gamma)$ 在 D 处进行切割，无法由这些数据唯一确定，因为它取决于集合 $\Gamma\cap\partial D$ 中与定向圆 ∂D 上的循环次序相容的次序。

下述定理是将 [10, 定理 2.1] 推广至 $\mathcal{I}$–可容许带状图的直接推广（在 [10, 定理 2.1] 中，图的所有颜色都必须属于 $\mathcal{I}$）。

定理 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有理想 $\mathcal{I}$ （属于 $\mathcal{C}$ ）和非退化 *m*-迹t （定义在 $\mathcal{I}$上）的枢纽 $\Bbbk$-范畴。则存在唯一的映射 $F'_{\mathtt{t}}\colon\ \mathscr{H}_{\mathcal{I}}\to\Bbbk$ 满足以下四个条件。

(1) $F'_{\mathtt{t}}(H,\Gamma)\in\Bbbk$仅取决于 $(H,\Gamma)\in\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$的保定向微分同胚类。*(2)* 对于 *3*-球 B^3 上任意 $\mathcal{I}$–可容许的带状图 (B^3,Γ)，有 $F'_{\mathtt{t}}(B^3,\Gamma)=F'_{\mathtt{t}}(\Gamma)$，其中 $F'\mathtt{t}$ (Γ) 是通过定理 *3.1*，与 *m*-迹 *t* 相对应的线性泛函在 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(S^2)$ 上的取值。*(3)* 对于任意 (H_1,Γ_1) 、 (H_2,Γ_2) ， $\in\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$有 $F'_{\mathtt{t}}(H_1\sqcup H_2,\Gamma_1\sqcup\Gamma_2)=F'_{\mathtt{t}}(H_1,\Gamma_1)F'_{\mathtt{t}}(H_2,\Gamma_2)$。*(4)* 沿上述 *2*-圆盘 D 切割任意 $(H,\Gamma)\in\mathscr{H}_{\mathcal{I}}$，有 $F'_{\mathtt{t}}(cut_D(H),\ cut_D(\Gamma))=F'\mathtt{t}$ (H,Γ) 。

证明。 证明可对 H 的亏格作归纳，稍作几处微小替换后，论证与 [10] 中完全相同。特别地，归纳基例涉及定义在 3-球不交并上的图。定理 4.1 中的条件 (1) 和 (2) 唯一地确定了拓扑 3-球边界上 $\mathcal{I}$–可容许图的 F'_{t}。条件 (3) 将 F'_{t} 唯一地扩展到 3-球不交并上的 $\mathcal{I}$–可容许图。证明条件 (4) 对 3-球边界上的 $\mathcal{I}$–可容许图（$B^3,\ \Gamma$） $\in \mathscr{H}_{\mathcal{I}}\, B^3$ 成立时，论证与定理 2.1] 的证明完全相同（只需考虑与至少一条 $\mathcal{I}$ 着色边相交的圆盘 D，并将“$\mathcal{I}$–着色图”替换为“$\mathcal{I}$–可容许图”）。此外，作类似替换后，归纳步骤也与定理 2.1] 的证明完全相同。（注意，经过 Γ 同痕后，总可以假设任意切割圆盘都与一条 $\mathcal{I}$–着色边相交。）□

接下来，我们陈述一个纯化过程，它能从一个 m-迹得到一个非退化 m-迹:

定理 4.2. 设 t 是理想 $\mathcal{I}$上的一个 *m*-迹。设 $\pi_{\mathsf{t}}\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$ 为典范幺半函子（见下文关于态射张量理想的定义及引理 *4.5*），其中

$$\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}} = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,W) \mid \mathsf{t}_U(g_1 \circ f \circ g_2) = 0,\ \forall U \in \mathcal{I}, \forall g_1 : W \to U, \forall g_2 : U \to V\}_{V,W \in \mathcal{C}}$$

是t的核。设 $\mathcal{J}$ 是由 $\pi_{\mathsf{t}}(\mathcal{I})$生成的 $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$ 的理想。则存在唯一的定义在 $\mathcal{J}$上的非退化 *m*-迹 $\bar{\mathsf{t}}$，使得 $\mathsf{t} = \bar{\mathsf{t}} \circ \pi_{\mathsf{t}}$。

我们将在第 4.2 小节证明定理 4.2。注意，由命题 2.3，函子 π_{t} 在 skein 模层面上诱导映射 $(\pi_{\mathsf{t}})_*$。

定理 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个本质小的幺半枢轴范畴，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$的一个理想。设 Σ 是一个曲面， $\mathcal{H}_\Sigma$ 是满足 $\partial H = \Sigma$的多手柄体 H 的类。则存在一个映射

$$\Psi : \{m\text{-}traces\ on\ \mathcal{I}\} \times \mathcal{H}_\Sigma \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)^*\ \ given\ by\ \Psi(\mathsf{t}, H) = \Big(\Gamma \mapsto F'_{\bar{\mathsf{t}}}\big(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma)\big)\Big)$$

其中 π_{t} 和t 由定理 *4.2* 给出，而 $F'_{\bar{\mathsf{t}}}$ 是不变量定理 *4.1*。

证明。我们需要证明，若 Γ 和 Γ' 是 $\mathcal{I}$–纽结等价的 $\mathcal{I}$–可容许带状图，且位于 Σ 中，则$F'_{\bar{\mathsf{t}}}(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma)) = F'_{\bar{\mathsf{t}}}(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma'))$。 $\mathcal{I}$– 纽结等价在 Γ 和 Γ' 之间诱导出 $(\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma)$ 与 $(\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma')$ 之间的 $\mathcal{J}$– 纽结等价。只需假设此等价由支撑在盒 B中的单个纽结关系给出。根据定理 4.1，为了计算 $F'_{\bar{\mathsf{t}}}(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma))$ 和 $F'_{\bar{\mathsf{t}}}(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma'))$，我们可以选取互不相交的 2-圆盘 $D_1, \ldots, D_n$，它们将 H切割成互不相交的 3-球 $B^3_1, \ldots B^3_m$。令 $(\mathrm{cut}(H), \mathrm{cut}(\Gamma))$（以及相应地，$(\mathrm{cut}(H), \mathrm{cut}(\Gamma'))$）表示沿圆盘 $D_1, \ldots, D_n$ 切割 $(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma))$（相应地，$(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma'))$）所构造的多把手体上的图（此处切割 $(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma))$ 和 $(H, (\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma'))$ 时，我们使用相同的基和对偶基来填充 coupon）。经过同痕后，我们可以假设盒 B不与圆盘 $D_1, \ldots, D_n$的任何边界相交。那么，盒 B恰好包含在其中一个球 $B^3_1, \ldots B^3_m$的边界中；不妨重新编号，使其包含在 B^3_1中。由于 $(\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma)$ 和 $(\pi_{\mathsf{t}})_*(\Gamma')$ 在盒 B 之外相等，因此对所有$i \neq 1$，都有 $\mathrm{cut}(\Gamma) \cap B^3_i = \mathrm{cut}(\Gamma') \cap B^3_i$。此外，$\mathrm{cut}(\Gamma) \cap B^3_1$和 $\mathrm{cut}(\Gamma') \cap B^3_1$通过 B中的纽结关系而 $\mathcal{J}$–纽结等价，因此定理 3.1 蕴含 $F'_{\bar{\mathsf{t}}}(\mathrm{cut}(\Gamma) \cap B^3_1) = F'_{\bar{\mathsf{t}}}(\mathrm{cut}(\Gamma') \cap B^3_1)$。于是， $F'_{\bar{\mathsf{t}}}(\mathrm{cut}(H), \mathrm{cut}(\Gamma)) = F'_{\bar{\mathsf{t}}}(\mathrm{cut}(H), \mathrm{cut}(\Gamma'))$，证明完毕。□

4.2. **纯化与态射张量理想**。 我们通过构造一个以通常的半简化构造为蓝本的纯化过程，来证明定理 4.2。我们认为这一过程在本文之外也会很有用；尤其是在构造相对模范畴时，见 [1]。

设 $\mathcal{C}$ $\Bbbk$-范畴具有枢轴结构。态射张量理想 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$是 $\mathcal{C}$中的一族 $\Bbbk$–子模 $\overrightarrow{\mathcal{N}}(V,W) \subset$同态集$_{\mathcal{C}}(V,W)$，并且在与$\mathcal{C}$中任意态射进行复合及张量积运算下封闭，其中 V 和 W 遍历 $\mathcal{C}$中的所有对象。文献 [23] 研究了张量理想，但我们的视角与之略有不同： [23] 考察由底环的一个理想给出的滤过，而我们研究域 $\Bbbk$上的线性范畴。了解这两种视角之间的联系将会很有意思。

引理 *4.4*。*</style}*定理 *4.2* 中定义的族 $\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$ 是一个态射张量理想。

证明。设 $f\colon V \to W$属于 $\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$，并设 $h_1\colon W \to W'$和 $h_2\colon V' \to V$是 $\mathcal{C}$中的态射。对于任意$U \in \mathcal{I}$，若 $g_1\colon U \to V'$和 $g_2\colon W' \to U$是态射，则 $\mathsf{t}_U(g_1(h_1 f h_2)g_2) = \mathsf{t}_U((g_1h_1)f(h_2g_2)) = 0$。因此 $h_1 f h_2 \in \overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$。给定态射 $g_1\colon U \to V' \otimes V \otimes V''$和 $g_2\colon V' \otimes W \otimes V'' \to U$，令

$$g_1' = (\overleftarrow{\mathrm{ev}}_{V'} \otimes \mathrm{Id}_V \otimes \overrightarrow{\mathrm{ev}}_{V''})(\mathrm{Id}_{(V')^*} \otimes g_1 \otimes \mathrm{Id}_{(V'')^*}) \quad g_2' = (\mathrm{Id}_{(V')^*} \otimes g_2 \otimes \mathrm{Id}_{(V'')^*})(\overrightarrow{\mathrm{coev}}_{V'} \otimes \mathrm{Id}_W \otimes \overleftarrow{\mathrm{coev}}_{V''})$$

态射 $g_1'\colon U' \to V$和 $g_2'\colon W \to U'$，其中 $U' = (V')^* \otimes U \otimes (V'')^* \in \mathcal{I}$。那么

$$\mathsf{t}_U(g_2(\mathrm{Id}_{V'} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{V''})g_1) = \mathsf{t}_U\big(\mathrm{ptr}_L^{(V')^*}\big(\mathrm{ptr}_R^{(V'')^*}(g_1' f g_2')\big)\big) = \mathsf{t}_{U'}(g_1' f g_2') = 0$$

因此 $\mathrm{Id}_{V'} \otimes f \otimes \mathrm{Id}_{V''} \in \overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$。结合证明的第一部分可知，$\mathcal{N}_{\mathsf{t}}$ 在与任意态射作张量积后仍然封闭。□

引理 4.5. 若 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$是某个幺半 $\Bbbk$–范畴 $\mathcal{C}$中的态射张量理想，则以 $\mathcal{C}$ 中的对象为对象、以 同态集$(V,W)/\overrightarrow{\mathcal{N}}$ (V,W) 为态射的范畴 $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}$是一个幺半 $\Bbbk$–范畴。

证明。由于 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$是态射理想，$\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}$中态射的复合与张量积定义良好，且为 $\Bbbk$-双线性的。因此，$\mathcal{C}$ 中关于结构态射的复合与张量的所有恒等式，都直接转化为 $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}$中相应的恒等式。□

定理 $4\ 2$ $\mathcal{J}$ $U' \otimes \pi\ V\ \otimes W'$ $V \in \mathcal{I}$ $U'\ W' \in$ $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}$ $U'\ W'$ π $U\ W \in \mathcal{C}$ $U \otimes V \otimes W \in \mathcal{I}$ $U' \otimes \pi\ V\ \otimes W' \in \pi\ \mathcal{I}$ 的证明。对象是元素 ( ) 的直缩对象，其中 ，且 ， 。由于， 是某个 的像，且 ，因此 ( ) ( )。因此，$\mathcal{J}$ 的对象是 $\pi(W)$ 的对象，它们是某个 $V \in \mathcal{I}$ 对应的 $\pi(V)$ 的直缩对象。于是存在 $i\colon W \to V$, $p\colon V \to W$，使得对于某个 $n \in \overrightarrow{\mathcal{N}}\mathsf{t}(W,W)$，有 $pi = \mathrm{Id}_W + n$ in $\mathcal{C}$。对于 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}}(\pi_{\mathsf{t}}(W))$，我们将证明赋值 $\mathsf{t}_{\pi(W)}(f) = \mathsf{t}_V(ifp)$ 在 $\mathcal{J}$ 上定义了一个良定义且唯一的 m-迹。如果 t 存在，那么 $\mathsf{t}_V(ifp) = \mathsf{t}_{\pi(V)}(\pi(i)f\pi(p)) = \mathsf{t}_{\pi(W)}(\pi(p)\pi(i)f) = \mathsf{t}_{\pi(W)}(f)$，因此它由 t 唯一确定。为证明其定义良好，设 f', i', p' 为其他选择，则 $f - f' \in \overrightarrow{\mathcal{N}}\mathsf{t}(V,V)$ 且 $p'i' = pi = \mathrm{Id}_W \bmod \overrightarrow{\mathcal{N}}\mathsf{t}(W,W)$。因此，

$$\mathsf{t}_V(ifp) = \mathsf{t}_V(if'p) = \mathsf{t}_V(if'p'i'p) = \mathsf{t}_V(i'pif'p') = \mathsf{t}_V(i'f'p').$$

最后，我们来考察 t 的非退化性：设 $\pi_{\mathsf{t}}(W) \in \mathcal{J}$（是 $\pi_{\mathsf{t}}(V)$ 的一个直缩，且满足 $V \in \mathcal{I}$），并设 $f\colon \pi_{\mathsf{t}}(W) \to \pi_{\mathsf{t}}(\mathbb{I})$ 是 $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$ 中的一个非零态射。对任意提升 $f\colon W \to \mathbb{I}$of f 不属于 $\overrightarrow{\mathcal{N}}_{\mathsf{t}}$，因此存在 $U \in \mathcal{I}$ 以及态射 $g_1\colon \mathbb{I} \to U$ 和 $g_2\colon U \to W$，它们属于 $\mathcal{C}$，使得 $\mathsf{t}_U(g_1 f g_2) \neq 0$。根据定义，$\mathsf{t}_{\pi(W)}((g_2g_1)f) = \mathsf{t}_V(ig_2g_1fp) = \mathsf{t}_U(g_1 f g_2) \neq 0$。因此，$f$ 在配对中非零。类似地，该配对在左侧也是非退化的。□

本节最后，我们记录一些关于理想与态射张量理想之间关系的事实。这些事实稍加努力即可证明，但我们在此不会用到它们。

(1) 如果 $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ 是加性理想（即 $\mathcal{I}$ 中任意两个对象在 $\mathcal{I}$ 中都有直和），那么所有可经由 $\mathcal{I}$ 中某个对象分解的态射构成 $\overrightarrow{\mathrm{Ar}}(\mathcal{I})$ 的态射张量理想。(2) 如果 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射张量理想，那么 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$-可忽略对象（即满足 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V) \subset \overrightarrow{\mathcal{N}}$ 或等价地 $\mathrm{Id}_V \in \overrightarrow{\mathcal{N}}$ 的对象 $V \in \mathcal{C}$）构成 $\mathcal{C}$ 中的理想。(3) 如果 $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ 是加性理想，那么 $\mathcal{I}$ 就是 $\overrightarrow{\mathrm{Ar}}(\mathcal{I})$- 可忽略对象的理想。(4) 如果 $\mathcal{C}$ 是幂等完备的（即任意幂等元都经由一个直缩分解），且 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射张量理想，那么 $\mathcal{C}/\overrightarrow{\mathcal{N}}$ 的不可分解对象的同构类与 $\mathcal{C}$ 的非 $\overrightarrow{\mathcal{N}}$-可忽略不可分解对象的同构类一一对应。

5. Graded admissible skein modules

5.1. **齐次 $\mathcal{I}$-容许图**。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半对偶 $\Bbbk$–范畴，G 是一个群。$\mathcal{C}$ 上的 G-分级是线性范畴的一个等价 $\mathcal{C} \cong \bigoplus_{g\in \mathrm{G}} \mathcal{C}_g$，其中 $\{\mathcal{C}_g \mid g \in \mathrm{G}\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一族全子范畴，满足以下条件：1) $\mathbb{I} \in \mathcal{C}_1$，2) 若 $V \in \mathcal{C}_g$，则 $V^* \in \mathcal{C}_{g^{-1}}$，3) 若 $V \in \mathcal{C}_g$，$V' \in \mathcal{C}_{g'}$，则 $V \otimes V' \in \mathcal{C}_{gg'}$；4) 若 $V \in \mathcal{C}_g$，$V' \in \mathcal{C}_{g'}$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, V') \neq \{0\}$，则 $g = g'$。

定义 5.1. 若一个 $\mathcal{C}$-着色图 Γ 的每条边 e 都属于 $\mathcal{C}_{g(e)}$ 中的某个 $g(e) \in$G，且其每个券 c 都填入 $\mathcal{C}_{g(c)}$ 中某个 $g(c) \in$G的态射，则称其为齐次。

引理 5.2. 每个 $\mathcal{I}$–可容许图都与齐次 $\mathcal{I}$–可容许图的线性组合 $\mathcal{I}$-纽结等价。

证明. 若 $V \in \mathcal{C}$，则根据 G-分次的定义，存在有限多个齐次对象V_i 使得 $V = \oplus V_i$。此外，若 $V \in \mathcal{I}$，则每个 V_i 都属于 $\mathcal{I}$，因为 V_i 是 V的直缩。令$p_i \colon V \to V_i$ 和 $j_i \colon V_i \to V$为投影和包含映射，使得 $\mathrm{Id}_V = \sum_i j_i \circ p_i$。

若 Γ 含有一条以 V着色的边，则通过应用一个 $\mathcal{I}$-纽结关系，我们可以将该边的一小段子弧替换为若干弧的形式和，每条弧上都分别带有两个装饰为 j_i 和 p_i的券，因为 $\mathrm{Id}_V = \sum_i j_i \circ p_i$.。然后，对装饰为 j_i和 p_i的券分别进行同伦变形，通过一个 $\mathcal{I}$-纽结关系将它们“吸收”到边端点处的券中。对所有非齐次边重复这一论证即可得出结论。□

5.2. **以 G 为系数的同调作为 skein 模**。设 G 为一个群。定义 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$ 为如下 $\Bbbk$范畴：其对象为 $\{g, g \in \mathrm{G}\}$，自同态为一维，其余态射均为零。$\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$ 上的严格幺半结构由 $g \otimes h = gh$ 给出，刚性结构则由 $g^* = g^{-1}$ 以及所有（余）求值态射都是 $\mathbb{I}$的恒等态射这一事实给出。范畴 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$ 按 G 分级，每个次数恰有一个对象。若 G 是阿贝尔群，我们便在 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$上赋予由 $g\otimes h \to h\otimes g$给出的对称编织，其中 gh 取恒等映射，从而使 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$ 成为带状范畴。有鉴于此，设 M 为一个二维或三维流形；在后一种情况下，我们假设 G 是阿贝尔群，使得 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$ 为带状范畴。

若一个以 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$着色的带状图是齐次的，且其所有券都以恒等态射着色，我们就称它为群状。可以证明，任意齐次图都等价于 λ 乘以某个 $\lambda \in \Bbbk^*$的群状带状图。此外，若盒中的 Γ 是一个群状的 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$着色带状图，那么它在 Reshetikhin-Turaev 函子 F 下的像是 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$的恒等态射。还可以验证，$\mathcal{S}_{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}}(M)$是一个自由的 $\Bbbk$-向量空间，其基为群状 $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}$着色带状图在如下关系下的等价类：若 $\Gamma - \Gamma'$ 是一个纽结关系，则由 $\Gamma \sim \Gamma'$ 生成该关系。利用这些事实，可以证明以下引理。

引理 5.3. 若G是阿贝尔群，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}}(M) = \Bbbk[H_1(M;\mathrm{G})]$，其中该同构由将一个$g$着色的缠结映射到其 g着色元素的同调类所诱导。特别地，$\mathcal{S}_{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}}(M)$ 中群状元素的等价类集合可与 $H_1(M;\mathrm{G})$等同。

上述引理启发我们，通常将 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}}(M)$ 中群状元素的等价类集合称为系数取自 G 的 M 的“非交换 H_1”。请注意，与交换情形不同，这个系数取自非交换系数的 H_1 并不是一个群。

定义 5.4. 我们用 $H_1(M;\mathrm{G})$表示 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}}(M)$中的群状元素集合。

5.3. **分次可容许 skein 模**。设 M 和 G 与上一小节中的定义相同。

定义 5.5. 设 Γ 是 M 中一个齐次的、由 $\mathcal{I}$着色的可容许图。我们称 Γ 的次数 为元素 $h_\Gamma \in H_1(M, G)$，它由将 Γ 的所有边的颜色替换为其次数（并将每个券替换为恒等态射）后得到的群状 $\mathcal{C}_G$着色图所表示。

命题 5.6. 我们有以下 $\Bbbk$-向量空间分解：$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M) = \bigoplus_{h\in H_1(M;\mathrm{G})} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M)$其中 $\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M)$ 是次数为 h 的齐次 $\mathcal{I}$–可容许图 M 的 $\Bbbk$-张成空间。

证明。 根据引理 5.2，自然的 $\Bbbk$-线性映射 $\omega\colon \bigoplus_{h\in H_1(M;\,\mathrm{G})} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(M) \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是满射，且齐次的 $\mathcal{I}$–可容许图是 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 的生成元系。我们现在断言， $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 中的任意纽结关系都是如下纽结关系之和：其中每个纽结关系都涉及具有相同齐次次数的图；这将证明 ω 是单射。设 $\sum_{i=1}^{k} c_i\Gamma_i = 0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(M)$ 是与一个盒 B 相关联的纽结关系。应用引理 5.2 的证明过程，我们可以将 Γ_i 分解为在 B 外齐次的图的线性组合。这就归结为如下情形：纽结关系中的所有 Γ_i 在 B外都是齐次的。现在，若 Γ 和 Γ' 是盒 B 外相同的任意两个齐次图，则有 $h_\Gamma = h_{\Gamma'}$，因为它们都等价于这样的 $\mathcal{C}_G$-图：其中盒 B被一个用恒等态射着色的券所替代。因此，在盒内应用引理 5.2 的证明过程，可得到具有相同次数的齐次图的线性组合。□

5.4. **有限维性**。 在本小节中， $\mathcal{C}$ 是一个加性幺半对偶 G-分次 $\Bbbk$–范畴（通过令 G 为平凡群，也涵盖了非分次范畴的情形）。令 Σ 为一个曲面。

定义 5.7。 若 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个理想，并且对每个 $g \in \mathrm{G}$，子范畴 $\mathcal{I}\cap\mathcal{C}_g$都有一个生成元 V_g，则称 $\mathcal{I}$ 为分次有限的；也就是说， $\mathcal{I}\cap\mathcal{C}_g$ 中的任意对象都是某个 n的直缩，其中 $V_g^{\oplus n}$。

回顾命题 5.6，根据该命题有 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma) = \bigoplus_{h\in H_1(\Sigma;\mathrm{G})} \mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma)$。

命题 5.8。 设 Σ 为一个边界非空的紧连通曲面，则对每个分次有限理想 $\mathcal{I}\subset\mathcal{C}$ 以及每个 $h \in H_1(\Sigma;\mathrm{G})$，都有维数$_{\Bbbk}\,\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) < \infty$。

证明。 存在一组互不相交的简单曲线 $c_1,\dots c_k$，它们适当地嵌入 Σ 中，使得 $\Sigma\backslash(c_1\sqcup\ldots\sqcup c_k)$是一个圆盘。若 $\Gamma \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Sigma)$是齐次的，则不妨经同痕假设它与每个 c_i横截相交；根据命题 2.4，其所有边都带有 $\mathcal{I}$颜色。接着，将与每个 c_i相交的所有边融合后， Γ 与一个纽结等价，该图与每个 c_i 至多相交一次；令 $h_i \in$G 为这种交点的次数，并令 V_{h_i} 为 $\mathcal{I}\cap\mathcal{C}_{h_i}$的生成元。然后，对每个 c_i 应用一次纽结关系，可将 Γ 替换为若干图的线性组合，这些图都通过一条带 V_{h_i}颜色的单边与 c_i 相交。我们可以将这些图分别表示为若干图的线性组合，其中每个图都含有一个由圆盘 $\Sigma\setminus(c_1\sqcup\cdots\sqcup c_k)$中的同态集 $\mathrm{Hom}(\mathbb{I}, V_{h_1}\otimes\cdots\otimes V_{h_k})$内的态射装饰的单个券。因此，若 $h \in H_1(\Sigma,\mathrm{G})$是 Γ 的同调类，我们刚刚证明了 $\dim_{\Bbbk}\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) \le \dim_{\Bbbk}\mathrm{Hom}(\mathbb{I}, V_{h_1}\otimes\cdots\otimes V_{h_k}) < \infty$。□

命题 5.9。 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个理想，则集合 $\mathrm{G}_{\mathcal{I}} = \{g \in \mathrm{G}\colon\ \mathcal{I}\subset\mathcal{I}_{\mathcal{C}_g}\}$ 是 G 的一个子群，其中$\mathcal{I}_{\mathcal{C}_g}$ 是由 $\mathcal{C}_g$的所有对象生成的理想。

证明。 设 $g,\ g'\in\mathrm{G}_{\mathcal{I}}$和 $V\in\mathcal{I}$，则 V是 $U\otimes W'$的一个直缩，对某个 $U\in\mathcal{C}$成立，而 $W'\in\mathcal{C}_{g'}$意味着 V也是 $(V\otimes V^*\otimes U)\otimes W'$的一个直缩（使用 $\overleftarrow{\mathrm{coev}}_V$和 $\overleftarrow{\mathrm{ev}}_V$）。因此我们可以假设 $U\in\mathcal{I}$，但此时 U是 $U'\otimes W$的直缩，对某个 $U'\in\mathcal{C}$成立，而 $W\in\mathcal{C}_g$意味着 V是 $U'\otimes(W\otimes W')$的一个直缩。因此， $gg'\in\mathrm{G}_{\mathcal{I}}$。对左张量积进行类似论证可知， $g'g\in\mathrm{G}_{\mathcal{I}}$。□

定理 5.10. 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 的分次有限理想。假设 G 是阿贝尔群，或者 $\mathrm{G}=\mathrm{G}_{\mathcal{I}}$。设 Σ 是无边界的紧致定向曲面，则对每个 $h \in H_1(\Sigma;\mathrm{G})$，有 维数$_{\Bbbk}\,\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma) < \infty$。

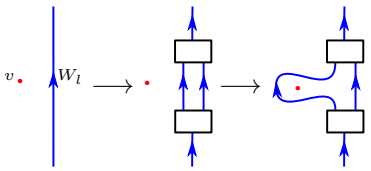
证明。 只需证明该结论对 Σ紧连通曲面成立。考虑 Σ的一个胞腔分解，该分解由一个顶点 v、 $2g$条闭曲线 $c_1,\dots,c_{2g}$以及一个圆盘 D组成。若 Γ是次数为 h的齐次图，则如上所述，我们可以假设它与每条 c_i 横截相交，且包含于 $\Sigma\setminus v$中。仿照命题 5.8 的证明可知， Γ纽结等价于以下形式图的一个线性组合：一个圆的花束 B，其中每条边与一条单边 c_i 相交一次，并带有某个 $V_{h_i}\in\mathcal{I}$颜色；这些边最终汇入一个券，其颜色属于包含在 D中的某个 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, V_{h_1}\otimes V_{h_2}\otimes V_{h_1}^*\otimes V_{h_2}^*\otimes\cdots\otimes V_{h_{2g-1}}\otimes V_{h_{2g}}\otimes V_{h_{2g-1}}^*\otimes V_{h_{2g}}^*)$。特别地， h可以表示为 h_B，它是花束 B，其中与 c_i 相交的边带有 h_i颜色。

我们断言，若 Γ' 是次数为 h 的齐次图，则存在一个与 Γ'纽结等价的 Γ''，使得对每个 i， Γ'' 都有一条与 c_i 相交的单边，该边带有 V_{h_i}颜色。由此即可完成证明，因为

$$\dim_{\Bbbk}(\mathcal{S}^h_{\mathcal{I}}(\Sigma)) \le \dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, V_{h_1} \otimes V_{h_2} \otimes V^*_{h_1} \otimes V^*_{h_2} \otimes \cdots \otimes V_{h_{2g-1}} \otimes V_{h_{2g}} \otimes V^*_{h_{2g-1}} \otimes V^*_{h_{2g}}) < \infty.$$

让我们证明这个断言。回忆定义 5.5 中给出的 Γ 的群状 $\mathcal{C}_G$ 着色图 h_Γ 。由于 $h_{\Gamma'}$ 在 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_G}(\Sigma)$ 中与 h_B 纽结等价，因此存在一个由有限个同痕和 $\mathcal{C}_G$–纽结关系组成的序列，其中盒包含在 2-胞腔 D 内，可将 $h_{\Gamma'}$ 变为 h_B。在 D 中，纽结关系不会改变边上诱导的次数。如果在某次同痕过程中， $h_{\Gamma'}$ 没有穿过顶点 v，那么在同痕过程中，每条边 c_i 上诱导的次数都保持不变。当 G 为阿贝尔群时，即使同痕穿过顶点 v，交度也不会改变。

最后，在 $G = G_{\mathcal{I}}$ 的情况下，如果同痕使一条 $g \in G$ 着色边穿过 v，那么假设 v 附近有一条 $W_l \in \mathcal{I} \cap \mathcal{C}_l$ 着色边，我们对 Γ' 应用下图所示的纽结等价，其中图中的 coupon 表示 W_l 作为 $W_g \otimes W_{g^{-1}l}$ 的直缩；由于 $l \in G_{\mathcal{I}}$，这样的直缩存在。



对 Γ' 进行这些修改后，我们像在 v 的补集中对 Γ 所做的那样，将所得的图融合；然后得到的图为 Γ''。□

注 5.11。 可以用类似的方法证明：如果 $\mathcal{C}_G$ 是带状的，且 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$ 的分次有限理想，那么对于紧*3*-流形，定理 *5.10* 的类似结论也成立。

6. 示例

6.1. 模范畴。 本小节将讨论如何把skein 模解释为某些半单范畴的拓扑量子场论空间。假设 $\mathcal{C}$ 是Turaev意义下的模范畴（即它是带状的、有限半单的，且 S-矩阵可逆）。这里，由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，它唯一的理想就是 $\mathcal{C}$ 本身，而唯一的m-迹（相差一个标量）就是通常的量子迹。在这种情况下，可容许skein模的定义就简化为通常的定义。令 $\mathrm{Z}_{RT,\,\mathcal{C}}$ 为与$\mathcal{C}$ 相关的Reshetikhin–Turaev拓扑量子场论函子，如 [34]中所述。以下引理归功于J. Roberts，证明可见 [32]。

引理 6.1。 给定一个紧致3维流形 M，其边界 Σ 是一个可能不连通的闭曲面，则 $\mathrm{Z}_{RT,\,\mathcal{C}}(\Sigma) = \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(M)$。

若紧致定向曲面 Σ 的边界非空，则可以验证 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Sigma)$ 同构于 $\mathrm{Z}_{RT,\,\mathcal{C}}(D(\Sigma))$，其中 $D(\Sigma)$ 是通过将 Σ加厚得到的把手体。

引理 6.2。 设 Σ 是一个闭曲面， H 是一个把手体，且 $\partial H = \Sigma$。那么 $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Sigma)$ 同构于 $End(\mathrm{Z}_{RT,\,\mathcal{C}}(\Sigma))$。

证明。 引理 6.1 表明

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Sigma) = \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Sigma \times [-1,1]) = \mathrm{Z}_{RT,\mathcal{C}}(\Sigma \sqcup \overline{\Sigma}) = \mathrm{Z}_{RT,\mathcal{C}}(\Sigma) \otimes \mathrm{Z}_{RT,\mathcal{C}}(\overline{\Sigma}) = \mathrm{Z}_{RT,\mathcal{C}}(\Sigma) \otimes \mathrm{Z}_{RT,\mathcal{C}}(\Sigma)^* = \mathrm{End}(V(\Sigma)).$$

□

最后，设 $\mathcal{D}$ 为球面融合范畴，$\mathrm{Z}_{TV,\,\mathcal{D}}$ 为与之关联的 Tureav-Viro 拓扑量子场论。由 [3]（另见 [28]）可知，若 Σ 是定向闭曲面，则 $\mathrm{Z}_{TV}(\Sigma) \simeq \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\Sigma)$，并且由 $\mathrm{Z}_{TV,\,\mathcal{D}}$ 给出的 Σ 的映射类群表示同构于命题 2.2 中给出的表示。

6.2. 非受限量子群。设 $\ell \geq 2$、 $\xi = e^{2i\pi/\ell}$，并且当 ℓ 为偶数时取 $r = \ell/2$，否则取 $r = \ell$。考虑由生成元 E、F、$K^{\pm 1}$ 及关系 $KE = q^2EK$、$FK = q^2KF$、$[E,F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$ 定义的非受限量子群 $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$。设 $\mathcal{C}$ 为 U 上的有限维权模范畴，并设 Proj 为其投射对象构成的理想。由 [17]，$\mathcal{C}$ 是一个球面 $\mathbb{C}$–范畴，并按由成对元素 $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & \varepsilon\\ 0 & \kappa\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\kappa & 0\\ \varphi & 1\end{smallmatrix}\right)\right)$ 组成的群 G 分次，其中 ε、$\varphi \in \mathbb{C}$、$\kappa \in \mathbb{C}^*$，群运算为逐项矩阵乘法。特别地，对每个 $g \in \mathsf{G}$，设 I_g 为由 $K^r - \kappa$、$E^r - (q-q^{-1})^{-r}\varepsilon$ 和 $F^r - (-1)^{\ell}(q-q^{-1})^{-r}\varphi\kappa^{-1}$ 生成的 U 的理想，则 $\mathcal{C}_g$ 是 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，其对象为 I_g 作用为零的模。此外，$\mathcal{C}_g$ 是有限维 U_g-模范畴，其中 $U_g = U/I_g$，其左正则表示是次数为 g 的 Proj 的生成元；这意味着 Proj 是分次有限的。注意，$\mathsf{G} = \mathsf{G}^{\mathrm{Proj}}$（见命题 5.9），因为 Proj 包含于每个理想中。因此，由定理 5.10 可得 $\mathcal{S}^g$ Proj(Σ) 是有限维的。[17] 的 TV 型拓扑量子场论空间自然映射到 $\mathcal{S}_{\mathrm{Proj}}$，且该映射与映射类群的作用相容。

6.3. **基本经典李超代数**。这里我们讨论由基本经典李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 产生的丰富的嵌套理想实例，更多细节请参见例如 [15, 16]。令 $\mathcal{C}$ 为有限维 $\mathfrak{g}$-超模构成的范畴，其中这些超模作为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模完全可约，并且态射为所有保持 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $\mathfrak{g}$-超模同态。对于 $V \in \mathcal{C}$，令 $\mathcal{I}_V$ 为所有这样的超模构成的理想：它们是某个 $V \otimes W$ 的直和项，其中 W 属于 $\mathcal{C}$。给定最高权为 λ 的简单 $\mathfrak{g}$-超模 $L(\lambda)$，令 atyp(λ) 表示 λ 的非典型度。在 [15, 猜想 6.3.2], 中，提出了 Kac-Wakimoto 猜想的以下推广：

猜想 6.3。设 $\mathfrak{g}$ 为基本经典李超代数。那么，简单 $\mathfrak{g}$-超模 $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{I}_{L(\lambda)}$ 上存在一个 m-迹 t。若 $L(\mu)$ 是另一个简单超模，且 $\mathrm{atyp}(\mu) \leq \mathrm{atyp}(\lambda)$，则 $L(\mu)$ 是 $\mathcal{I}_{L(\lambda)}$ 的一个对象，并且 $\mathrm{atyp}(\mu) \leq \mathrm{atyp}(\lambda)$ 当且仅当 $\mathrm{t}^{L(\mu)}(\mathrm{Id}^{L(\mu)}) \neq 0$.

这一猜想已在若干情形下得到证明：Serganova [31] 证明了 $\mathfrak{g} = gl(m|n)$ 的情形，Kujawa[24] 证明了 $\mathfrak{g} = osp(m|2n)$ 的情形。对于这些 $\mathfrak{g}$，该猜想意味着存在理想 $\mathcal{I}_k$，对应于 k =0、1、.....、min(m、n)，每种非典型度各有一个，使得 Proj $= \mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{I}_{\min(m,n)} = \mathcal{C}$，且这些理想中的每一个都有非零 m-迹。因此，定理 3.1 和 3.2 意味着 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_k}(B^3)$ $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_k}(S^3)$ $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_k}(D^2)$ 和 $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_k}(S^2)$ 都是非平凡的一维对象，因为 $\mathcal{I}_k$ 由一个简单模生成。

References

[1] C. Anghel、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand, *Relative (pre)-modular categories from special linear Lie superalgebras,* [2010 13759] arXiv: . . [2] J. Barrett、B. Westbury, *Spherical categories.* Adv. Math. **143** （1999年），357–375。[3] B. Bartlett - *Three-dimensional TQFTs via string-nets and two-dimensional surgery,* 预印本 arXiv:2206.13262。[4] A. Brochier、D. Ben-Zvi、D. Jordan, *Integrating quantum groups over surfaces,* 《Journal of Topology》2018年，第11卷第4期，第874–917页。[5] C. Blanchet、F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand, *Non-Semisimple TQFTs Reidemeister Torsion and ,,* Adv. Math. （），–。[6] *Kashaev's Invariants* **301** 2016 1 78 D. Bullock, *Rings of $SL_2(\mathbb{C})$-characters and the Kauffman bracket skein module*。Comment. Math. Helv., 72, 第4期, （ 1997 521 ）, [7] F. Bonahon 和 H. Wong, *Quantum traces for representations of surface groups in $SL_2(\mathbb{C})$* *Geom. Topol.* **15** （2011年）. [8] F. Bonahon、H. Wong 和 T. Yang, *Asymptotics of quantum invariants of surface diffeomorphisms I.* *conjecture and algebraic computations* 2112 12852 ，预印本 arXiv: . .[9] F. Costantino、N. Geer、B. Patureau-Mirand, *Quantum invariants of 3-manifolds via link surgery presentations and non-semisimple categories* 2014 7 4 1005 1053 ,Journal of Topology （） （）–。[10] F. Costantino、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 V. Turaev, *Kuperberg and Turaev-Viro Invariants in Unimodular Categories* 306 2020 2, 421 450 , Pacific J. Math. （），第–期。[11] F. Costantino、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 A. Virelizier, *Non-compact 2+1-tqfts from non-semisimple spherical categories* , arXiv 预印本。

[12] *Stated skein algebras of surfaces* 24 2022 12, 4063 4142 F. Costantino 和 T.Q. Le, 。[13] *Stated skein modules of 3-manifolds and TQFT* 2206 10906 J. Eur. Math. Soc.（），第期，第–页。F. Costantino 和 T.Q. Le, ,预印本，arXiv: . .[14] C. Frohman、J. Kania-Bartoszynska、T. Le, *Unicity for Representations of the Kauffman bracket Skein Algebra*, Invent. Math. **215** （2019年），第2期，609–650。

[15] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand, *Generalized trace and modified dimension functions on ribbon categories*, Selecta Math., 第 17 卷，第 2 期（2011年），第 453–504 页。[16] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand, *Ambidextrous objects and trace functions for nonsemisimple categories*, Proc. Amer. Math. Soc. 141（2013年），2963–2978。[17] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand, *Topological invariants from non-restricted quantum groups.* Algebraic Geom. Topol. 13, 3305–3363（2013年）。[18] N. Geer 和 B. Patureau-Mirand, *The trace on projective representations of quantum groups.* Letters in Mathematical Physics 108（2018年），第 1 期，117–140。[19] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 A. Virelizier, *Traces on ideals in pivotal categories.* Quantum Topology 4（2013年）。[20] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 V. Turaev, *Modified quantum dimensions and re-normalized link invariants. Compos.*（），第 *Math.* **145** 2009 212 1 期，196– 。[21] N. Geer 和 M. Young, *Three dimensional topological quantum field theory from U_q gl 1|1 and U 1|1 Chern–Simons*（（））*theory* 2210 04286（），预印本，arXiv: 。.[22] S. Gunningham、D. Jordan 和 P. Safronov, *The finiteness conjecture for skein modules*，预印本，arXiv:1908.05233。[23] T. Heidersdorf 和 H. Wenzl, *Generalized negligible morphisms and their tensor ideals*, Selecta Math., 28，31（2022年）。[24] J. Kujawa, *The generalized Kac-Wakimoto conjecture and support varieties for the Lie superalgebra osp*（$m|2n$）。《李代数、群与表示论的新进展》，201–215，Proc. Sympos. Pure Math.，86，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2012年。[25] T.Q. Le 和 A. Sikoran, *Stated SL(n)-Skein Modules and Algebras*，预印本 arXiv:2201.00045。[26] V. Mikhaylov 和 E. Witten, *Branes and supergroups.* Comm. Math. Phys.，340(2):699–832，2015年。[27] G. Muller, *Skein algebras and cluster algebras of marked surfaces*，预印本 arXiv:1204.0020。[28] A. Kirillov Jr, *String-net model of Turaev-Viro invariants*，预印本，arXiv:1106.6033。[29] G. Maltsiniotis, *Traces dans les catégories monoïdales dualité et catégories monoïdales fibrées [Traces in monoidal , , categories, duality and fibered monoidal categories]* ´ ´ ´ 36 1995 195 288 Cahiers Topologie Geom. Differentielle Categ.（），–。[30] J. Przytycki, *Fundamentals of Kauffman bracket skein modules*, *Kobe J. Math.* **16**（1999年）45–66。[31] V. Serganova, *On superdimension of an irreducible representation of a basic classical lie superalgebra Supersymmetry , , in Mathematics and Physics* 2027，2011 Lecture Notes in Mathematics，第（）卷。[32] A. Sikora, *Skein modules and TQFT.*《希腊结论 '98》（德尔斐），436–439, Ser. Knots Everything，24，World Sci. Publ.，River Edge，NJ，2000年。[33] D. Thurston, *Positive basis for surface skein algebras*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111**（2014年），9725–9732。[34] V. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3–manifolds.* de Gruyter 数学研究丛书，18。Walter de Gruyter & Co.，柏林，（1994年）。[35] V. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, *Ann. Sci. Sc. Norm. Sup.*（4）24（1991年）。[36] V. Turaev 和 A. Virelizier, *Monoidal Categories and Topological Field Theory* Progress in Mathematics 丛书（2017年）。[37] K. Walker, *Going from $n+\epsilon$ to $n+1$ in non-semisimple oriented TQFTs*, UQSL 研讨会报告，2022年2月，https://canyon23.net/math/talks/np1.pdf

Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, Toulouse F-31062
Email address: francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Mathematics & Statistics, Utah State University, Logan, Utah 84322, USA
Email address: nathan.geer@gmail.com

Univ Bretagne Sud, CNRS UMR 6205, LMBA, F-56000 Vannes, France
Email address: bertrand.patureau@univ-ubs.fr