arXiv:2302.04506v1 [math.FA] 9 Feb 2023

与扰动类问题相关的两类算子

´MANUEL GONZALEZ 和 MARGOT SALAS-BROWN

ABSTRACT. 设 $\mathcal{SS}$ 和 $\mathcal{SC}$ 分别为作用于巴拿赫空间之间的严格奇异算子和严格余奇异算子，并设 $P\Phi_+$ 和 $P\Phi_+$ 分别为上半 Fredholm 算子和下半 Fredholm 算子的扰动类。我们研究满足 $\mathcal{SS} \subset \Phi\mathcal{S} \subset P\Phi_+$ 和 $\mathcal{SC} \subset \Phi\mathcal{C} \subset P\Phi_-$的两类算子 $\Phi\mathcal{S}$ 和 $\Phi\mathcal{C}$ 。我们给出了一些使这些包含映射成为等式的条件，并由此为半弗雷德霍姆算子的扰动类问题导出了一些肯定解。

1. INTRODUCTION

扰动类问题是问：上半 Fredholm 算子 $P\Phi_+$ 和下半 Fredholm 算子 $P\Phi_-$ 的扰动类，是否分别与严格奇异算子 $\mathcal{SS}$ 和严格余奇异算子 $\mathcal{SC}$的类相同。该问题由 [10] 提出（另见 [6, 22]），在某些情况下已有肯定答案 [12, 14, 15, 16, 24], ，但一般情况下两者的答案都是否定的 [11], [9, 定理 4.5]。然而，在特殊情况下找到肯定答案仍然很有意义，因为 $\mathcal{SS}$ 和 $\mathcal{SC}$ 的定义具有内在性：要检验 K 是否属于其中之一，只需考察 K的作用；而要检验 K 是否属于 $P\Phi_+$ 或 $P\Phi_+$，则必须研究 $T + K$ 对大量算子中 T的性质。

In t本文考察了 [3] 中引入的两类 $\Phi\mathcal{S}$ 和 $\Phi\mathcal{C}$，它们满足

$$\mathcal{SS}(X,Y) \subset \Phi\mathcal{S}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y) \text{ and } \mathcal{SC}(X,Y) \subset \Phi\mathcal{C}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y),$$

我们研究巴拿赫空间 X、Y 上的条件，使得这四个包含映射中的某些映射成为等式，并针对半弗雷德霍姆算子的扰动类问题得出了新的肯定答案。在 $\Phi_+(X、Y) \neq \varnothing$ 的情形下，我们证明了当 $Y \times Y$ 与 Y 同构时，$\Phi\mathcal{S}(X、Y) = P\Phi_+(X、Y)$；当 X 的某些商空间嵌入 Y 时，$\mathcal{SS}(X、Y) = \Phi\mathcal{S}(X、Y)$（定理 3.4）；综合起来，我们得到了一些条件，从而可以推出 $\mathcal{SS}(X、Y) = P\Phi_+(X、Y)$（定理 3.6）。在 $\Phi_-(X、Y) \neq \varnothing$ 的情形下，我们证明了类似的结果（定理 4.4 和 4.6）。我们还提出了一些有关类 $\Phi\mathcal{S}$ 和 $\Phi\mathcal{C}$ 的问题。

记号。全文中，X、Y和 Z 表示巴拿赫空间，$\mathcal{L}(X、Y)$ 表示从 X 到 Y的有界算子集合。当 $X = Y$时，我们记作 $\mathcal{L}(X)$。给定

日期：2023年2月10日。部分受 MINCIN 项目 PID2019-103961 资助。2010年数学主题分类。主要分类：47A53，47A55。

一个 X的闭子空间 M，我们用 J_M 表示从 M 到 X的包含映射，用 Q_M 表示从 X 映到 X/M 的商映射。若存在 $c>0$ 使得对每个 $x\in X$都有 $\|Tx\|\geqslant c\|x\|$，则算子 $T\in\mathcal{L}(X、Y)$ 是同构。

当不存在 M 的 X 的无限维闭子空间，使得限制 TJ_M 是同构时，算子 $T\in\mathcal{L}(X Y)$ 是严格奇异的，记作 $T\in\mathcal{SS}$；当不存在 N 的 Y 的无限余维闭子空间，使得 Q_NT 是满射时，T 是严格余奇异的，记作 $T\in\mathcal{SC}$。此外，当值域 $R(T)$ 是闭的且核 $N(T)$ 是有限维时，T 是上半 Fredholm 的，记作 $T\in\Phi_+$；当 $R(T)$ 是有限余维的（因而是闭的）时，T 是下半弗雷德霍姆的，记作 $T\in\Phi_-$；当它既是上半 Fredholm 的又是下半弗雷德霍姆的时，T 是弗雷德霍姆的，记作 $T\in\Phi$；当对每个 $S\in\mathcal{L}(Y$ 都有 $I_X-ST\in\Phi X)$ 时，T 是非本质的，记作 $T\in\mathcal{I}n$。

2. Preliminaries

算子类 $\mathcal{S}$ 的扰动类 $P\mathcal{S}$ 定义如下：

定义 2.1. 设 $\mathcal{S}$ 表示类 Φ_+、Φ_- 或 Φ 之一。对于满足 $\mathcal{S}(X、Y)\neq\varnothing$ 的空间 X、Y，

$$P\mathcal{S}(X,Y)=\{K\in\mathcal{L}(X,Y):\ for\ each\ T\in\mathcal{S}(X,Y),T+K\in\mathcal{S}\}.$$

当 $\mathcal{S}(X、Y)$ 为空时，我们可以定义 $P\mathcal{S}(X、Y)=\mathcal{L}(X、Y)$，但这并无实际用途。$P\Phi$ 的分量与非本质算子算子理想 $\mathcal{I}n$ 的分量一致（若它们有定义）[2],；但是，给定 $S\in\mathcal{L}(Y、Z)$ 和 $T\in\mathcal{L}(X、Y)$，S 或 T 属于 $P\Phi_+$ 并不意味着 $ST\in P\Phi_+$，$P\Phi_-$ [11] 的情形也类似。不过，以下结果成立，且对我们很有用。

命题 2.2. 假设 $K\in P\Phi_+(X、Y)$、$L\in P\Phi_-(X、Y)$、$S\in\mathcal{L}(Y)$ 和 $T\in\mathcal{L}(X)$。则 SK、$KT\in P\Phi_+(X、Y)$ 且 SL、$LT\in P\Phi_-(X、Y)$。

证明。假设 $K\in P\Phi_+(X,Y)$，并令 $S\in\mathcal{L}(Y)$ 和 $U\in\Phi_+(X,Y)$。若 S 是双射，则 $S^{-1}U\in\Phi_+(X,Y)$，因此 $U+SK=S(S^{-1}U+K)\in\Phi_+$；故 $SK\in P\Phi_+(X,Y)$。一般情况下，$S=S_1+S_2$，其中 S_1,S_2 是双射；因此 $SK=S_1K+S_2K\in P\Phi_+(X,Y)$。

其余三个结果的证明类似。 □

3. The perturbation class for Φ_+

给定两个算子 $S,T\in\mathcal{L}(X,Y)$，我们用 (S,T) 表示从 X 到 $Y\times Y$ 的算子，其定义为 $(S,T)x=(Sx,Tx)$，其中 $Y\times Y$ 配备乘积范数 $\|(y_1,y_2)\|_1=\|y_1\|+\|y_2\|$。

受 Friedman 的研究成果启发，[7]，[3]的作者定义了以下算子类。

定义 3.1. 设 $\Phi_+(X,Y)\neq\varnothing$，并令 $K\in\mathcal{L}(X,Y)$。若对每个 $S\in\mathcal{L}(X,\ Y)$，$(S,K)\in\Phi_+$ 都蕴含 $S\in\Phi_+$，则称 K 为 Φ-奇异的，并记作 $K\in\Phi\mathcal{S}$。

$\Phi\mathcal{S}(X,Y)$ 的定义与 $P\Phi_+(X,Y)$ 的定义相似，但前者更容易处理，因为当我们考虑 (S,K) 而非 $S+K$ 时， S 和 K 的作用是解耦的。

用我们的记号， [7, 定理 3 和 4] 可表述如下：

命题 3.2. [3, 命题 2.2] 设 $\Phi_+(X,Y)\neq\varnothing$。 n

$$\mathcal{SS}(X,Y)\subset\Phi\mathcal{S}(X,Y)\subset P\Phi_+(X,Y).$$

注意， $\mathcal{SS}$是一个算子理想，但 $P\Phi_+$不是； $P\Phi_+(X,Y)$是 $\mathcal{L}(X,Y)$的一个闭子空间，而 $P\Phi_+(X)$是 $\mathcal{L}(X)$的一个理想。

命题 3.3. $\Phi\mathcal{S}(X,Y)$在 $\mathcal{L}(X,Y)$中是闭的

证明。设 $\{T_n\}$是 $\Phi\mathcal{S}(X,Y)$中的一个序列，并收敛于 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$。假设 $S\in\mathcal{L}(X,Y)$且 $(S,T)\in\Phi_+(X,Y\times Y)$。注意，序列 (S,T_n)收敛于 (S,T)，因为 $\|(S,T_n)-(S,T)\|=\|T_n-T\|$。

由于 $\Phi_+(X,Y\times Y)$ 是一个开集，存在一个正整数 N，使得 $(S,T_N)\in\Phi_+(X,Y\times Y)$。于是 $T_N\in\Phi\mathcal{S}(X,Y)$ 蕴含 $S\in\Phi_+(X,Y)$。因此 $T\in\Phi\mathcal{S}(X,Y)$。□

我们提出关于类 $\Phi\mathcal{S}$ 的一些基本问题。

问题 1. 假设 $\Phi_+(X,Y)\neq\varnothing$。

(a) $\Phi\mathcal{S}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$的子空间吗？(c) $\Phi\mathcal{S}$ 是一个算子理想吗？(c) 命题 2.2 对于 $\Phi\mathcal{S}$ 是否成立？

在回答 [7], 中的一个问题时， [3, 例 2.3], 给出了一个算子 $K\in P\Phi_+\backslash\Phi\mathcal{S}$ 的例子，但我们不知道另一个包含映射是否可能是严格的。

问题 2. 假设 $\Phi_+(X,Y)\neq\varnothing$。 $\mathcal{SS}(X,Y)=\Phi\mathcal{S}(X,Y)$吗？

对问题 2 给出否定回答，将为 Φ_+的扰动类问题提供一个新的反例。

我们来看看，在某些情况下，命题 3.2 中的包含映射会变成等式。

在许多情况下，无限维巴拿赫空间 Y 与其自身的平方同构，记作 $Y\times Y\simeq Y$： $L_p(\mu)$ 和 $\ell_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$、 c_0 以及 $C[0,1]$。另一方面，詹姆斯空间 J 以及某些定义在紧空间上的连续函数空间（例如 $C[0,\omega_1]$ ）与其自身的平方不同构，其中 ω_1 是第一个不可数序数。参见 [5] 和 [23]。

定理 3.4。设空间 X 和 Y 满足 $\Phi_+(X,Y)\neq\varnothing$。

(1) 若 $Y\times Y\simeq Y$，则 $\Phi\mathcal{S}(X,Y)=P\Phi_+(X,Y)$。(2) 若 X 的每个无限维子空间都含有一个无限维子空间 N，使得 X/N 嵌入 Y，则 $\mathcal{SS}(X,Y)=\Phi\mathcal{S}(X,Y)$。

证明。(1) 设 $U\colon Y\times Y\to Y$ 是一个双射同构，并设 V、$W\in\mathcal{L}(Y)$ 满足 $U(y_1$、$y_2)=Vy_1+Wy_2$。

若 $K \in P\Phi_+(X、Y)$，对于每个满足 $(S、K) \in \Phi_+$ 的 $S \in \mathcal{L}(X、Y)$，我们有$U(S、K) = VS+WK \in \Phi_+$。根据命题 2.2，$WK \in P\Phi_+(X、Y)$。于是 $VS \in \Phi_+$，因此 $S \in \Phi_+$。由此可得 $K \in \Phi\mathcal{S}(X、Y)$。

(2) 设 $K \in \mathcal{L}(X、Y)$、$K \notin \mathcal{SS}$。根据假设，存在 X 的一个无限维子空间 N，使得 KJ_N 是一个同构，并且存在一个同构 $U\colon X/N \to Y$。于是，$S = UQ_N \in \mathcal{L}(X、Y)$ 不是上半 Fredholm。我们将通过证明 $(S、K) \in \Phi_+$ 来证明 $K \notin \Phi\mathcal{S}$。

回忆 $\|Q_N x\| = \mathrm{dist}(x、N)$。我们可以选择同构 U，使得对于每个 $x \in X$，$\|Sx\| = \|UQ_N x\| \geqslant \mathrm{dist}(x、N)$。此外，存在一个常数 $c > 0$，使得对于每个 $n \in N$，$\|Kn\| \geqslant c\|n\|$。

设 $x \in X$ 满足 $\|x\| = 1$，并设 $0 < \alpha < 1$ 使得 $c(1-\alpha) = 2\|K\|\alpha$。

如果 $\mathrm{dist}(x, N) \geqslant \alpha$，那么 $\|Sx\| \geqslant \alpha$。否则，存在 $y \in N$，使得 $\|x-y\| < \alpha$；因此 $\|y\| > 1-\alpha$。所以

$$\|Kx\| \geqslant \|Ky\| - \|K(x-y)\| \geqslant c(1-\alpha) - \|K\|\alpha = \|K\|\alpha.$$

于是 $\|(S,K)x\|_1 = \|Sx\| + \|Kx\| \geqslant \min\{\|K\|\alpha, \alpha\}$，因此 (S,K) 是一个同构；特别是 $(S,K) \in \Phi_+$，正如我们想要证明的那样。□

在已知的例子中，当 $\mathcal{SS}(X,Y) \neq P\Phi_+(X,Y)$ 属于 $[11, 9],$时，空间 Y有一个可补子空间，该子空间按照[4, 17, 18]的意义是遗传不可分解的。因此问题随之而来。

问题 3. 假设 X和 Y满足 $\Phi_+(X,Y) \neq \varnothing$ 和 $Y \times Y \simeq Y$。那么 $\mathcal{SS}(X,Y) = P\Phi_+(X,Y)$吗?

巴拿赫空间 X 是子投射的，如果 X 的每个闭无限维子空间都包含一个在 X中可补的无限维子空间。空间 c_0、ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ 和 $L_q(\mu)$ $(2 \leqslant q < \infty)$ 都是子投射的 [25]。更多示例参见 [8, 21]。

推论 3.5. 假设 $\Phi_+(X、Y) \neq \varnothing$ 且空间 X 是子投射的。那么$\mathcal{SS}(X、Y) = \Phi\mathcal{S}(X、Y)$。

证明. X 的每个闭无限维子空间都包含一个无限维子空间 N，该子空间在 X中是可补子空间；因此 X/N 同构于 N的补空间。由于 $\Phi_+(X、Y) \neq \varnothing$，商空间 X/N同构于 Y 的一个子空间，因此我们可以应用定理 3.4。□

下一个结果是定理 3.4 的一个精化，证明使用了前面的论证。

定理 3.6. 假设 $\Phi_+(X、Y) \neq \varnothing$、$Y \times Y$ 嵌入 Y，且 X 的每个无限维子空间都包含一个无限维子空间 N，使得 X/N 嵌入 Y。那么 $\mathcal{SS}(X、Y) = P\Phi_+(X、Y)$。

证明。由于 $Y \times Y$嵌入于 Y，存在同构 $V, W \in \mathcal{L}(Y)$，使得$R(V) \cap R(W) = \{0\}$，且 $R(V) + R(W)$是闭的。因此，存在 $r > 0$，使得

$\|y_1+y_2\| \geqslant r(\|y_1\|+\|y_2\|)$ 对于 $y_1 \in R(V)$ 和 $y_2 \in R(W)$成立，并且显然我们可以选择V, W，使得 $r=1$。

令 $K \in \mathcal{L}(X$，其中 $Y)$ $K \notin \mathcal{SS}$。选取 M 的一个无限维子空间 X，使得 KJ_M 是一个同构，并令 N 为 M 的一个无限维子空间，使得存在一个同构 $U:\ X/N \to Y$。我们可以假设，对于每个 $z \in X/N$，$\|Uz\| \geqslant z$。

算子 $S=VUQ_N \notin \Phi_+$，按照定理 3.4 中证明 (2) 的方法，我们可以证明 $S+WK \in \Phi_+$。于是，根据命题 2.2，$WK \notin P\Phi_+$，从而 $K \notin P\Phi_+$。□

推论 3.7。如果 X 是可分的，$Y \times Y$ 嵌入 Y，并且 Y 包含 $C[0$ 的一个副本，$1]$，那么 $\mathcal{SS}(X、Y)=\Phi_+(X、Y)$。

证明。众所周知，空间 $C[0,1]$ 包含每个可分巴拿赫空间的一个副本。□

类 $\Phi\mathcal{S}$ 在以下意义下是内射的：

命题 3.8。给定一个算子 $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ 和一个（到上的）同构$L \in \mathcal{L}(Y,Y_0)$，若 $LK \in \Phi\mathcal{S}(X,Y_0)$，则 $K \in \Phi\mathcal{S}(X,Y)$。

证明。设 $K \in \mathcal{L}(X,Y)$，并设 $L \in \mathcal{L}(X,Y_0)$ 是到 Y_0 中的一个同构，使得$LK \in \Phi\mathcal{S}(X,Y_0)$。取 $S \in \mathcal{L}(X,Y)$，并假设 $(S,K) \in \Phi_+(X,Y\times Y)$。于是$(LS,LK)=(L\times L)(S,K) \in \Phi_+(X$, $Y_0 \times Y_0)$，其中 $(L\times L) \in \mathcal{L}(X\times X, Y_0\times Y_0)$ 由 $(L\times L)(x_1,x_2)=(Lx_1,Lx_2)$定义。

由于 $LK \in \Phi\mathcal{S}(X,Y_0)$，我们得到 $LS \in \Phi_+(X,Y_0)$。因此 $S \in \Phi_+(X,Y)$，从而 $K \in \Phi\mathcal{S}(X,Y)$。□

4. The perturbation class for Φ_-

给定两个算子 $S,T \in \mathcal{L}(X,Y)$，记 $[S,T]$ 为从 $X\times X$到 Y的算子，其定义为 $[S$, $T](x_1,x_2)=Sx_1+Tx_2$，其中 $X\times X$ 赋予最大范数 $\|(x_1,x_2)\|_\infty=\max\{\|y_1\|,\|y_2\|\}$。

定义 4.1. 设 $\Phi_-(X,Y)\neq\varnothing$，并令 $K \in \mathcal{L}(X,Y)$。我们称 K是 Φ-余奇异的，并记作 $K \in \Phi\mathcal{C}$；若对每个 $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $[S,K] \in \Phi_-$，都有 $S \in \Phi_-$。

与 $\Phi\mathcal{S}$ 的情形类似，$\Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 的定义与 $P\Phi_-(X,Y)$ 的定义相似，但前者更容易处理，因为当我们考虑 $[S,K]$ 而非 $S+K$ 时，S 和 K 的作用是彼此分离的。

命题 4.2. $[3,$ 命题 2.5$]$ 设 $\Phi_-(X,Y)\neq\varnothing$。则

$$\mathcal{SC}(X,Y) \subset \Phi\mathcal{C}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y).$$

注意，$\mathcal{SC}$ 是一个算子理想，但 $P\Phi_-$ 不是；$P\Phi_-(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的闭子空间，而 $P\Phi_-(X)$ 是 $\mathcal{L}(X)$ 的理想。

命题 4.3. $\Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 在 $\mathcal{L}(X,Y)$中是闭的

证明。设 $\{T_n\}$ 是 $\Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 中的一个序列，且收敛于 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$。假设 $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 $[S,T] \in \Phi_-(X \times X, Y)$。注意，序列 $[S,T_n]$ 收敛于 $[S,T]$。

由于 $\Phi_-(X \times X, Y)$ 是开集，存在一个正整数 N，使得 $[S,T_N] \in \Phi_-(X \times X, Y)$。因此，$T_N \in \Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 蕴含 $S \in \Phi_-(X,Y)$。□

问题4。假设 $\Phi_-(X,Y) \neq \varnothing$。

(a) $\Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的子空间吗? (c) $\Phi\mathcal{C}$ 是算子理想吗? (c) 命题 2.2 对 $\Phi\mathcal{C}$ 是否成立?

在回答问题 [7], 时，文献 [3], 中给出了一个算子 $K \in P\Phi_-\backslash\Phi\mathcal{C}$ 的例子，但我们不知道另一个包含映射是否可能是严格包含。

问题5。假设 $\Phi_-(X,Y) \neq \varnothing$。$\mathcal{SC}(X,Y) = \Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 吗?

问题5的否定回答将为 Φ_-的扰动类问题提供一个新的反例。

接下来，我们将证明，命题 4.2 中的包含映射在某些情况下会成为等式。

定理 4.4. 设空间 X 和 Y满足 $\Phi_-(X,Y) \neq \varnothing$.

(1) 若 $X \times X \simeq X$，则 $\Phi\mathcal{C}(X,Y) = P\Phi_-(X,Y)$. (2) 若 Y的每个无限余维闭子空间都包含于 N 的一个无限余维闭子空间中，且该子空间与 X 的一个商空间同构，则$\Phi\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$.

证明. (1) 设 $U\colon X \to X \times X$ 是一个双射同构，并设 $U_1, U_2 \in \mathcal{L}(X)$使得 $U(x) = (U_1x, U_2x)$. 若 $K \in P\Phi_-(X,Y)$，则对每个满足$[S,K] \in \Phi_-(X \times X, Y)$ 的 $S \in \mathcal{L}(X,Y)$，有 $[S,K]U = SU_1 + KU_2 \in \Phi_-(X, Y \times Y)$. 根据命题 2.2，$KU_2 \in P\Phi_-(X,Y)$. 于是 $SU_1 \in \Phi_-(X,Y)$，因此 $S \in \Phi_-(X,Y)$. 由此得出结论：$K \in \Phi\mathcal{C}(X,Y)$.

(2) 设 $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ $K \notin \mathcal{SC}$。那么存在 Y 的一个无限余维闭子空间 M，使得 Q_NK 是满射。根据假设，存在一个无限余维闭子空间 N，使得 $M \subset N$，以及一个满射算子 $V \in \mathcal{L}(X,M)$。

注意到 $S = J_NV \in \mathcal{L}(X,Y)$ 不属于 Φ_-。我们通过证明 $[S,K] \in \Phi_-(X \times X, Y)$ 来证明 $K \notin \Phi\mathcal{C}$。

事实上，注意到 $R(S) = N$。此外，Q_NK 满射意味着 $R(K) + N = Y$。由于 $R([S,K]) = R(S) + R(K)$, $[S,\ K]$ 是满射。□

在已知的例子中，$\mathcal{SC}(X,Y) \neq P\Phi_-(X,Y)$ 属于 $[11,\ 9],$，空间 X 有一个遗传不可分解的可补子空间。因此，问题随之而来。

问题6. 假设 $\Phi_-(X、\ Y) \neq \varnothing$ 和 $X \times X \simeq X$。

Is $\mathcal{SC}(X,Y) = P\Phi_-(X,Y)$.

如果巴拿赫空间 X 的每个无限余维闭子空间都包含于某个有补的无限余维子空间中，则称该空间为超投射空间。空间 c_0、ℓ_p $(1<p<\infty)$ 和 $L_q(\mu)$ $(1<q\leqslant 2)$ 都是超投射的。更多示例请参见 [8, 13] 。

推论 4.5。假设 $\Phi_-(X、Y)\neq\varnothing$，且空间 Y 是超投射的。那么 $\Phi\mathcal{C}(X、Y)=\mathcal{SC}(X、Y)$。

证明。Y 的每个闭的无限余维子空间都包含于一个无限余维的可补子空间 N 中。由于 $\Phi_-(X、Y)\neq\varnothing$，存在 $T\in\mathcal{L}(X$，使得 $Y)$ 满足 $R(T)\supset N$；将其与 Y 上到 N 的投影 P 复合，我们得到 $R(PT)=N$，于是可以应用定理 4.4。□

下面的结果是本节前述结果的一个精化 .

定理 4.6。假设 $\Phi_-(X、Y)\neq\varnothing$，存在从 $X\times X$ 到 X 的满射，并且 Y 的每个闭的无限余维子空间都包含于一个闭的无限余维子空间 N 中，而该子空间同构于 X 的一个商空间。那么 $P\Phi_-(X、Y)=\mathcal{SC}(X、Y)$。

证明。$K\in\mathcal{L}(X,Y), K\notin\mathcal{SC}$。于是存在 Y 的一个无限余维子空间 N，使得 Q_NK 是满射。根据假设，我们可以假设存在一个满射算子 $U\colon X\to N$。于是 $S=J_NU\in\mathcal{L}(X,Y)$ 不属于 Φ_-。此外，$[S,K]$ 是满射：$R([S,K])=R(S)+R(K)=N+R(K)=Y$，因此 $[S,K]\in\Phi_-(X\times X,Y)$。

设 $V\colon X\to X\times X$ 是一个满射，并设 $V_1,V_2\in\mathcal{L}(X)$ 满足对每个 $x\in X$ 都有 $V(x)=(V_1x,V_2x)$。于是 $[S,K]V=SV_1+KV_2\in\Phi_-(X,Y)$。由于 $SV_1\notin\Phi_-$，我们得到 $KV_2\notin P\Phi_-$；因此由命题 2.2 可得 $K\notin P\Phi_-$。□

推论 4.7. 若 Y可分，则存在从 $X\times X$ 到 X的满射，并且若X 有一个与 ℓ_1 同构的商空间，则 $\mathcal{SC}(X,Y)=\Phi_-(X,Y)$。

证明. 众所周知，每个可分巴拿赫空间都同构于 ℓ_1的一个商空间。□

类 $\Phi\mathcal{C}(X,Y)$ 在以下意义下是满射的：

命题 4.8. 给定 $K\in\mathcal{L}(X,Y)$ 以及一个满射算子 $Q\in\mathcal{L}(Z,X)$，若$KQ\in\Phi\mathcal{C}(Z,Y)$，则 $K\in\Phi\mathcal{C}(X,Y)$。

证明. 令 $S\in\mathcal{L}(X,Y)$ 使得 $[S,K]\in\Phi_-(X\times X,Y)$，并设 $Q\colon Z\to X$是一个满射算子。那么，由 $(Q\times Q)(a,b)=(Qa,Qb)$ 定义的算子 $Q\times Q\in\mathcal{L}(Z\times Z,X\times X)$ 是满射的。因此 $[S,K](Q\times Q)=[SQ,KQ]$ 属于$\Phi_-(Z\times Z,Y)$。由于 $KQ\in\Phi\mathcal{C}(Z,Y)$，我们得到 $SQ\in\Phi_-(Z,Y)$，于是 $S\in\Phi_-(X,Y)$，从而得出 $K\in\Phi\mathcal{C}(X,Y)$。□

对偶空间 $(X\times X,\|\cdot\|_\infty)^*$可以用显然的方式与 $(X^*\times X^*,\|\cdot\|_1)$ 等同。因此，共轭算子 $[S,T]^*$可以与 (S^*,T^*)等同。

事实上，对于 $x^* \in X^*$ 和 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned}\langle [S,T]^* x^*, x\rangle &= \langle x^*, [S,T]x\rangle = \langle x^*, Sx + Tx\rangle \\ &= \langle S^*x^* + T^*x^*, x\rangle = \langle (S^*, T^*)x^*, x\rangle.\end{aligned}$$

因此，$[S,T] \in \Phi_-$ 当且仅当 $(S^*, T^*) \in \Phi_+$。类似地，$(S,T)^*$ 可与 $[S^*, T^*]$等同。

以下结果描述了 Φ-奇异算子类和 Φ-余奇异算子类在对偶下的行为。

命题 4.9。设 $K \in \mathcal{L}(X,Y)$。

(1) 若 $K^* \in \Phi\mathcal{S}(Y^*, X^*)$，则 $K \in \Phi\mathcal{C}(X,Y)$。

(2) 若 $K^* \in \Phi\mathcal{C}(Y^*, X^*)$，则 $K \in \Phi\mathcal{S}(X,Y)$

证明。(1) 设 $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ 满足 $[S,K] \in \Phi_-(X \times X, Y)$。则 $[S,K]^* \in \Phi_+$。由于 $[S,K]^* \equiv (S^*, K^*)$，我们有 $(S^*, K^*) \in \Phi_+(Y^*, X^* \times X^*)$，并由$K^* \in \Phi\mathcal{S}(Y^*, X^*)$ 可得 $S^* \in \Phi_+(Y^*, X^*)$；因此 $S \in \Phi_-(X,Y)$，从而$K \in \Phi\mathcal{C}(X,Y)$。

（2）的证明类似。 □

STATEMENT. 作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

REFERENCES

[1] P. Aiena, M. Gonz´alez. 本质不可比较的巴拿赫空间与弗雷德霍姆理论。爱尔兰皇家科学院院刊 93A (1993), 49–59.[2] P. Aiena, M. Gonz´alez. 关于非本质算子与非投射算子。数学研究 131 (1998), 271-287[3] P. Aiena, M. Gonz´alez and A. Mart´ınez-Abej´on. 通过扰动类刻画严格奇异算子和严格余奇异算子。格拉斯哥数学杂志 54 (2011), 87–96.[4] S.A. Argyros, V. Felouzis, 遗传不可分解巴拿赫空间的插值。J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 243–294.[5] C. Bessaga, A. Pe lczy´nski. 不同构于自身笛卡尔平方的巴拿赫空间。I，Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astr. Phys. 8 (1960), 77–80.[6] S. Caradus, W. Pfaffenberger and B. Yood. 巴拿赫空间中的卡尔金代数与算子代数。M. Dekker纯数学与应用数学讲义。纽约，1974.[7] T. L. Friedman. 将严格奇异算子与条件 $X < Y \bmod (\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 联系起来，并由此产生扰动。《分析》（慕尼黑）22 (2002), 347–354.[8] E.M. Galego, M. Gonz´alez, J. Pello. 关于次投射性与超投射性。数学结果 71 (2017), 1191–1205.[9] J. Gim´enez, M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on. 巴拿赫空间乘积上的半弗雷德霍姆算子的扰动。算子理论杂志 68 (2012), 501–514.[10] I. C. Gohberg, A. S. Markus and I. A. Feldman. 正规可解算子及与之相关的理想。Bul. Akad. ˇ Stiince RSS Moldoven 10 (76) (1960), 51–70. 译文：美国数学会译丛 (2) 61 (1967), 63–84.[11] M. Gonz´alez. 弗雷德霍姆理论中的扰动类问题。泛函分析杂志 200 (2003), 65–70.

[12]M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on and M. Salas-Brown. 子投射空间和超投射空间上半弗雷德霍姆算子的扰动类。Ann. Acad. Sci. Fennicae Math. 36 (2011), 481–491.[13] M. Gonz´alez, J. Pello. 超投射巴拿赫空间。J. Math. Anal. Appl. 437 (2016) 1140– 1151.[14] M. Gonz´alez, J. Pello, M. Salas-Brown. 巴拿赫格中半弗雷德霍姆算子的扰动类。J. Math. Anal. Appl. 420 (2014) 792–800.[15] M. Gonz´alez, J. Pello, M. Salas-Brown. 子投射与超投射巴拿赫空间的扰动类问题。J. Math. Anal. Appl. 489 (2020)[16] M. Gonz´alez and M. Salas-Brown. $L_p(\mu)$-空间中半弗雷德霍姆算子的扰动类。J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), 11-17.[17] W. T. Gowers and B. Maurey. 无条件基序列问题。J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851–874.[18] W. T. Gowers and B. Maurey. 算子空间较小的巴拿赫空间。Math. Ann. 307 (1997), 543-568.[19] J. Flores, F.L. Hern´andez, N.J. Kalton, P. Tradacete. 巴拿赫格上严格奇异算子的刻画。J. London Math. Soc. 2 (79) (2009), 612–630.[20] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. 经典巴拿赫空间 I。序列空间。Springer，柏林，1977.[21] T. Oikhberg, E. Spinu. 子投射巴拿赫空间。J. Math. Anal. Appl. 424 (2015) 613– 635.[22] A. Pietsch. 算子理想。North-Holland，阿姆斯特丹，1980.[23] Z. Semadeni. 不同构于自身笛卡尔平方的巴拿赫空间。II，Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astr. Phys. 8 (1960), 81–84.[24] L. Weis. 半弗雷德霍姆算子的扰动类。Math. Z. 178 (1981), 429–442.[25] R. J. Whitley. 严格奇异算子及其共轭算子。Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), 252–261.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, E-39071 Santander, España电子邮箱地址：manuel.gonzalez@unican.es

Escuela de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá,Colombia电子邮箱地址：salasbrown@gmail.com