基于增广协方差矩阵的脑机接口脑电分类

IgorCarrara[1,2] ThéodorePapadopoulo[1,2]1 蔚蓝海岸大学（UCA）[2] 蔚蓝海岸大学法国国家信息与自动化研究所中心，Cronos团队 igor.carrara@inria.fr和theodore.papadopoulo@inria.fr

arXiv:2302.04508v1 [cs.HC] 9 Feb 2023

摘要

目标：脑电图信号被记录为多维数据集。我们提出一种基于从自回归模型中提取的增广协方差的新框架，以改进运动想象分类。方法：通过自回归模型可以推导出尤尔-沃克方程，由此可得到一个对称正定矩阵：增广协方差矩阵。协方差矩阵分类的先进方法基于黎曼几何。因此，一个相当自然的想法是利用这些增广协方差矩阵扩展标准方法。构建增广协方差矩阵的方法与Takens针对动力系统提出的延迟嵌入定理存在自然联系。这种嵌入方法基于两个参数：延迟和嵌入维数，分别对应于自回归模型的滞后和阶数。除标准网格搜索外，该方法还提供了计算超参数的新方法。结果：增广协方差矩阵的表现明显优于所有先进方法。我们将使用MOABB框架，在多个数据集和多个受试者上测试该方法，并进行会话内和跨会话评估。结论：结果的提升是因为增广协方差矩阵不仅纳入了空间信息，还纳入了时间信息，并通过嵌入过程纳入信号的非线性成分，从而能够利用动力系统算法。显著性：这些结果拓展了基于黎曼距离的分类算法的概念和成果。

关键词 增广协方差、自回归模型、脑机接口、黎曼几何、Takens定理。

1 引言

脑电图（EEG）是一种模态，可在头部外部被动测量主要由大脑电活动产生的电位。在t 时刻，传感器获得的测量值是大脑皮层区域内一组“源”在同一t 时刻电活动的线性组合。这些源的时间依赖关系遵循一种复杂的生物物理模型，但该模型尚未得到充分理解（因为它涉及许多参数），因此不容易建立。皮层源之间的时间依赖关系仍未得到充分理解，也难以获取，至少在我们试图紧密遵循生物物理模型时是如此。不过，也存在一些简单模型，即使它们并未得到生物学的完全论证，也足够通用，可以用于脑电图测量。自回归模型（AR）就是一个例子。这些模型基于这样的假设：信号可以用其过去值与某种称为新息的随机因素的组合来解释。自回归模型在多种场合以不同方式得到应用。例如，它们可以对

认知任务期间大脑不同区域之间的交互作用 [1], ，从信号中提取信息 [2] 或检测状态变化 [3]。最后，自回归模型有时会与机器学习方法结合，用于执行分类任务 [4]。

脑电信号分析的一项前景广阔的应用是脑机接口。脑机接口是一种测量大脑活动并将其转换为数字系统指令或命令的技术。本文聚焦于基于脑电图的脑机接口（脑机接口脑电），这种技术具有非侵入性、时间分辨率高且相对廉价等特点。凭借这些特性，从面向日常使用的大规模部署角度来看，脑机接口脑电有望成为主流脑机接口技术。具体而言，本文聚焦于运动想象脑机接口范式：用户通过想象身体某个部位的运动来改变大脑活动。

尽管脑机接口最初是为医疗目的而开发的，但这项技术的应用范围已不断扩大，并延伸至非医疗领域，涵盖从无人机控制 [5], 神经系统疾病康复，到虚拟现实与增强现实 [6] 或电子游戏等应用。

然而，尽管过去十年取得了令人瞩目的进展，脑机接口领域仍处于起步阶段。事实上，我们尚未达到足以支持日常生活应用的准确率。此外，对于一些存在“脑机接口不适用现象”的特定受试者而言，分类性能尤其不理想：有研究估计，尽管这些受试者接受了与正常受试者相同的训练流程，但在现有技术条件下，约有 30% 的脑机接口用户无法达到至少 70% 的准确率 [7]。这一问题极大地限制了未来可能的应用，因为它损害了脑机接口系统的普适性。

过去 10 年间，基于黎曼距离的分类范式在脑机接口脑电分类方面展现出有趣的性能 [8]。该方法的核心思想是将协方差矩阵映射到适当的几何空间中：对称正定（SPD）矩阵空间。该空间实际上是一个具有自然黎曼结构的可微流形 [9]。因此，很自然地可以尝试将自回归模型的思想融入黎曼方法，以优化其在最难处理的受试者身上的性能。

为了创建一种新的脑机接口脑电分类算法，我们必须关注以下基本特性：计算效率高；与最先进水平相比提高准确率；确保改进适用于所有可能的脑机接口范式；训练与模型相关的超参数时不需要耗费过多时间。迄今为止，已有若干尝试旨在改进基于黎曼距离的算法 [10] 所取得的结果。然而，这些尝试虽然表现更优，却是通过引入额外问题才获得这些结果，而这些问题需要对超参数进行复杂优化。

本研究旨在提升分类算法的性能，充分利用脑电信号中的非线性成分，并将这一方法与基于黎曼距离的分类器相结合。因此，我们的思路是进一步拓展黎曼算法的逻辑，定义一个恰当的对称正定矩阵，以最大限度地提取脑电信号中与特定任务相关的信息。

自回归模型可以通过尤尔-沃克方程计算，该方程涉及一个对称正定矩阵，即包含滞后项的增广协方差矩阵。因此，一个相当自然的想法是使用这些包含滞后项的增广协方差矩阵，扩展标准的黎曼方法。近期也有人提出了使用包含延迟的增广协方差矩阵这一思路 [11]，并将其与线性判别分析算法结合，应用于事件相关电位数据集。据作者所知，将增广协方差与黎曼分类相结合的方法完全是一项创新。

从动力系统的角度也可以理解这种方法：由于自回归尤尔-沃克矩阵是延迟协方差矩阵，我们可以利用将原始系统嵌入

到高维空间后得到的标准协方差矩阵，提取出相同的矩阵。因此，这种矩阵包含了脑电信号的非线性特性。因此，我们的方法自然与 Takens [12] 在非线性动力系统背景下提出的延迟嵌入定理相关联。大多数脑电分类算法都基于这样一种假设：信号可以通过线性模型来描述。然而，研究表明，脑电信号遵循非线性模型 [13] ，而且由于这种非线性成分，使用基于线性假设的信号分析技术可能会丢失重要特征。直到最近，才开始有人提出基于非线性系统理论背景下定义的量（如关联维数、李雅普诺夫指数、互信息和最小嵌入维数 [14, 15]）的分类算法。然而，这些特征的计算成本极高。我们方法的基本思路是运用非线性动力学理论，将脑电数据嵌入高维空间，然后在黎曼框架下对脑电信号进行分类。从这个意义上说，我们结合了这两种方法各自的优势：利用信号的非线性成分，以及基于黎曼距离的算法的性能。

为了验证这些方法，我们分别采用两种分类方式应用本方法：一种是在黎曼曲面上使用均值最小距离进行分类，另一种是在切空间上使用支持向量机进行分类。我们将借助 MOABB框架 [16], ，在多个数据集和多位受试者上测试本方法，并进行会话内和跨会话评估。

本文结构如下：第 2 节首先介绍模型所依据的理论方法，然后介绍所采用的数据集及所进行的统计分析。第 3 节列出会话内和跨会话评估所得的结果。最后，第 4 节分析该方法的意义及其当前局限性。第 5 节总结本研究的结果。

2 材料与方法

2.1 脑机接口分类

脑电信号可以表示为多变量时间序列 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times T}$，其中 T 表示采样数据点的数量，d 表示电极的数量。

本研究聚焦于运动想象分类任务，例如，我们关注的是预测受试者想象自己在移动右手还是左手（见图 1）。我们将脑电图数据集分割为多个较短的时间窗或时间段，每个时间窗或时间段对应一项运动任务。每个时间窗或时间段都根据受试者实际完成的运动任务进行标注。例如，为了区分右手和左手，我们会得到一些标记为左手的时间段，以及另一些标记为右手的时间段。我们对每个时间段进行特征提取，以创建互不重叠的训练数据集和测试数据集。训练数据集用于训练分类算法。训练完成后，我们使用分类器预测测试数据集的结果。

2.2 黎曼几何

过去 10 年间，基于黎曼距离的分类范式在对称正定矩阵分类中表现出令人关注的性能 [8]。该方法的核心思想是将协方差矩阵映射到适当的几何空间中。对称正定矩阵构成的空间是一个具有自然黎曼结构的可微流形 [9]。

$n \times n$ 实方阵和实对称矩阵的空间分别记为 $M(n)$ 和 $S(n)$：$S(n) = \{\mathbf{S} \in M(n),\ \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$。对称正定矩阵的空间定义为 $P(n) = \{\mathbf{P} \in S(n),\ \mathbf{P} > 0\}$。这样，我们可以将矩阵 $\mathbf{P} \in S(n)$ 表示为维数为 $n(n+1)/2$ 的黎曼曲面上的一个点。由于对称正定矩阵的空间是一个具有非零曲率的流形，因此我们不能使用欧几里得几何的概念，因为它们并不可靠，必须转而依赖黎曼几何。

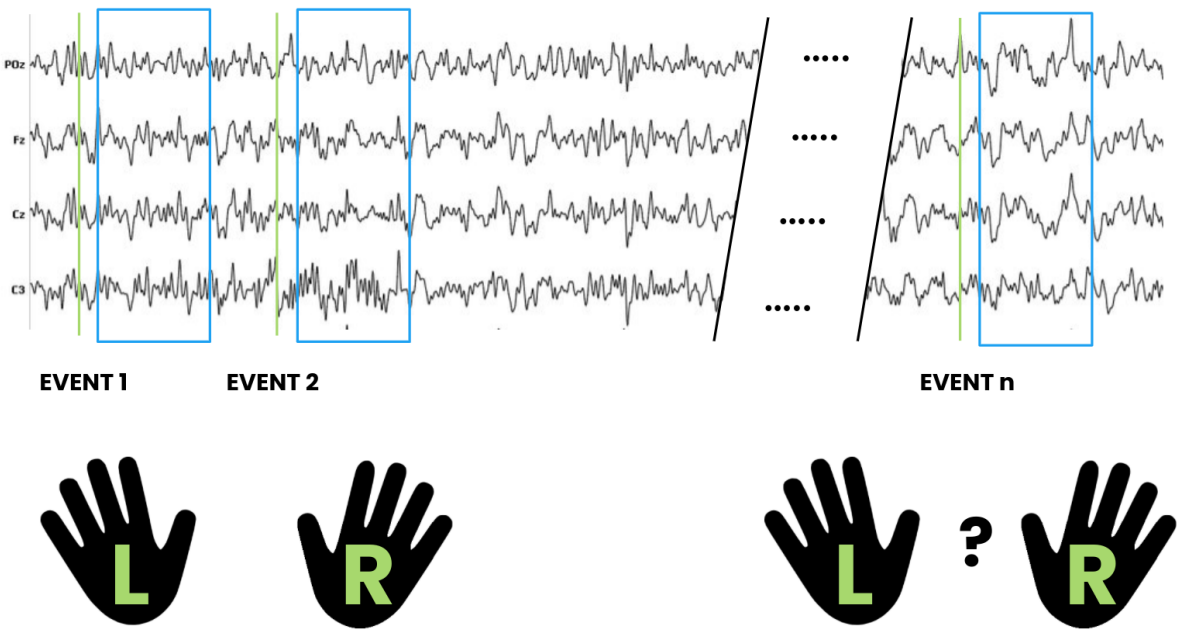


图 1：由 4 个电极组成的脑电图数据集示例。该数据集用于一项运动想象任务，旨在区分右手和左手。实验范式要求受试者在特定时刻想象身体某个部位（本例中为左手或右手）的运动，这些时刻以绿色线条标记。每条绿色线对应采集一个时间段的数据（蓝色方框），并将其标记为左手或右手。部分时间段构成训练数据集。之后，当输入一个新的时间段（未包含在训练数据集中）时，我们希望能够判断受试者想象的是右手还是左手的运动。

距离不可靠，因此必须转而依赖黎曼几何。可以将黎曼曲面上连接 $\mathbf{P}_1$ 和$\mathbf{P}_2$ 的测地线长度定义为 $P(n)$ 中两个对称正定矩阵 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$ 之间的距离。本文采用仿射不变度量 [17]

$$\delta_R\left(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2\right)=\left\|\log\left(\mathbf{P}_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-\frac{1}{2}}\right)\right\|_F=\left[\sum_{i=1}^{n}\log^2\lambda_i\right]^{1/2} \tag{1}$$

其中，$\|\cdot\|_F$表示弗罗贝尼乌斯范数，$Log()$表示矩阵的对数，λ_i表示$_1$ $_1^-$ $^-$的特征值$\mathbf{P}$ $_2\bar{1}$ $\mathbf{P}_2\mathbf{P}$ $_2\bar{1}$ 。度量的选择并非唯一，但我们选择该度量，是因为它具有适用于脑机接口应用的相关性质：对重排序不变、对合同变换不变，以及对求逆不变 [18]。为了定义 m 个对称正定矩阵（$\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_m$）的均值，我们采用弗雷歇均值的概念 [17]

$$\overline{\mathbf{P}}=\underset{\mathbf{P}\in P(n)}{\operatorname{argmin}}\sum_{i=1}^{m}\delta_R^2\left(\mathbf{P},\mathbf{P}_i\right) \tag{2}$$

在黎曼意义下，$\mathbf{P}$ 称为（$\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_m$)的几何均值或质心。注意，对于 $m>2$，目前尚无闭式表达式，因此我们需要采用迭代算法 [19]。由于式（1）的性质，几何均值具有合同不变性 [18]。几何均值还具有稳健性，既能抵御离群值，也适用于跨会话和跨受试者应用。

对于完备黎曼空间中的每个点$\mathbf{P}_i\in P(n)$，我们可以在黎曼曲面上点$\mathbf{P}\in P(n)$处的切空间中定义一个点$\mathbf{S}_i\in S(n)$。该切空间具有

零曲率，因此可以使用标准机器学习算法和其他经典工具。黎曼曲面到切空间以及切空间到黎曼曲面的映射分别由黎曼 Exp 和 Log 映射提供 [17](见图 2)：

$$\mathrm{Exp}_{\mathbf{P}}\left(\mathbf{S}_i\right) = \mathbf{P}^{1/2}\,\mathrm{Exp}\left(\mathbf{P}^{-1/2}\mathbf{S}_i\mathbf{P}^{-1/2}\right)\mathbf{P}^{1/2} \tag{3}$$

$$\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}\left(\mathbf{P}_i\right) = \mathbf{P}^{1/2}\,\mathrm{Log}\left(\mathbf{P}^{-1/2}\mathbf{P}_i\mathbf{P}^{-1/2}\right)\mathbf{P}^{1/2} \tag{4}$$

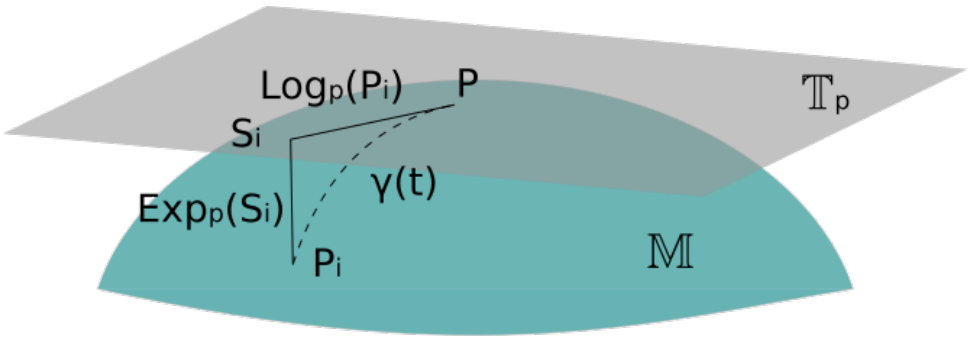


图 2：黎曼流形及映射到切平面和从切平面映射的示意图。

在基于黎曼距离的分类算法中，我们采用空间样本协方差估计量的标准方法，为每个时间窗估计一个空间协方差矩阵

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \frac{1}{Time-1}\sum_{i=1}^{Time}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i^T \tag{5}$$

其中 T 是转置算子。估计协方差并非只有这一种方法。我们也可以使用其他估计器，但这种方法的优点是，当电极数量远小于一个时间窗中包含的时间点数量时，它是无偏的。

由于协方差矩阵属于对称正定矩阵空间，因此可以使用黎曼框架对不同的心理状态进行分类。请注意，分类既可以在黎曼曲面上进行，使用专门为黎曼流形定义的算法，例如均值最小距离（MDM）；也可以将点映射到切空间，再使用标准分类算法，例如支持向量机（SVM）或逻辑回归 [10]。

2.3 增广协方差

本节讨论自回归模型，以及构建增广协方差方法的动机。我们的方法是将记录到的脑电信号视为某个多元随机过程的一次实现，而该过程的规律未知。在一定假设下，我们可以确认该随机过程遵循自回归模型。

脑电时间序列并非平稳：信号属性会随时间根据潜在的心理过程而变化，但在心理任务保持不变的足够短的时间窗口内，我们可以将信号视为弱平稳，这意味着 $\mathbb{E}\left(\tilde{\mathbf{X}}\right)$ 和 $\mathbb{E}\left(\widetilde{\mathbf{X}_{t+i}}, \widetilde{\mathbf{X}_t}^T\right)$ 在每个窗口 i 内均与时间 t 无关。

在弱平稳假设下，我们可以将该信号建模为遵循自回归模型的随机过程：这意味着未来值表示为过去值的函数，再加上一个称为新息的随机分量。因此，我们可以对多变量

脑电信号使用阶数为 p [20]的自回归模型进行建模

$$\mathbf{X}_t = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \mathbf{X}_{t-i\tau} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t} \tag{6}$$

其中，$\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{d\times 1}$ 表示时间 t的脑电信号，$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 表示自回归系数，τ表示滞后，$\boldsymbol{\varepsilon}_t \in \mathbb{R}^{d\times 1}$ 表示新息分量。

过程的阶数 p、延迟以及自回归系数 $\mathbf{A}_i$ 均为未知量，必须根据信号进行估计。估计自回归系数的经典方法是使用尤尔-沃克方程。为推导该方程，只需将方程（6）右乘$\mathbf{X}_{t-k}$ 并计算期望值。记 $\boldsymbol{\Gamma}(i) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-k}^T) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为滞后 i 的自协方差矩阵，记$\mathbf{U}$ 为假设与过去值相互独立的新息的自协方差矩阵，则可得关于 $i \in [1, p]$的以下方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}(-k\tau) + \mathbf{U} & \text{for } i = 0 \\ \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{i}) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}(i - k\tau) & \text{for } i \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

将第二个方程（7）写成矩阵形式可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_{-1} & \boldsymbol{\Gamma}_{-2} & \cdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_{-1} & \cdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} & \boldsymbol{\Gamma}_{p-2} & \boldsymbol{\Gamma}_{p-3} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \\ \boldsymbol{\Gamma}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_p \end{bmatrix} \tag{8}$$

自回归系数$\mathbf{A}_i$ 是线性方程组的解。我们将增广协方差矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 定义为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{Aug} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_{-1} & \boldsymbol{\Gamma}_{-2} & \cdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_{-1} & \cdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} & \boldsymbol{\Gamma}_{p-2} & \boldsymbol{\Gamma}_{p-3} & \cdots \end{bmatrix} \tag{9}$$

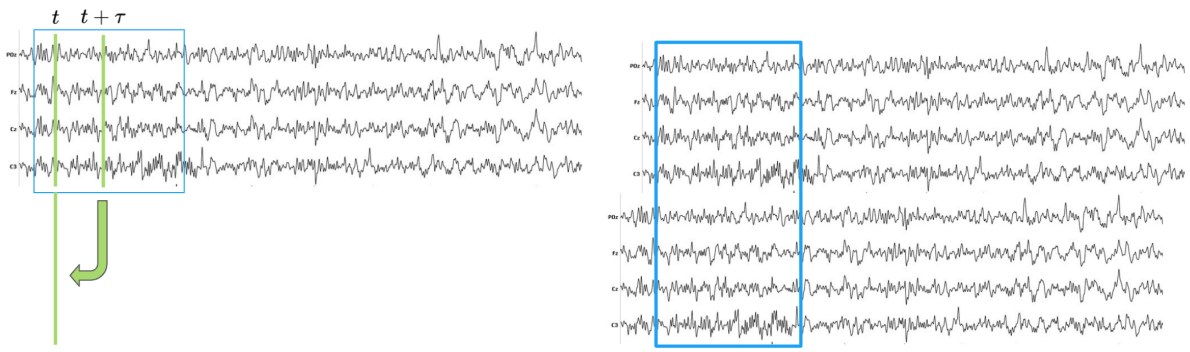
$\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 根据构造具有对称性，因为 $\boldsymbol{\Gamma}_i = \boldsymbol{\Gamma}_{-i}$。因此，一个相当自然的想法是使用这些$\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 矩阵，在黎曼框架下进行分类。

$\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 将空间协方差与信号的一些时间信息结合起来。也可以通过嵌入脑电图数据集，构造一个增广数据集，其维度等于 $d \times p$，并采用固定延迟 τ（图 3）。将这个新的增广数据集划分为时间窗并计算时间段协方差矩阵，得到的结果恰好就是相同的 $\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 矩阵。

样本协方差矩阵是实际协方差矩阵 [21]的一种高效无偏估计量。在脑机接口应用中，我们处于有限观测大维度极限条件（FOLDL） [22]。在 $\boldsymbol{\Gamma}_{aug}$ 的情况下，时间样本数 T 保持固定，而维度则趋于扩大至嵌入维数的倍数。样本协方差的性能不再可靠，且该估计量不再相合。使用如下定义的收缩估计量可以获得可靠的估计量:

$$\widehat{\mathbf{C}}_{shrink} = (1-\lambda)\widehat{\mathbf{C}}_{sample} + \lambda \frac{Tr\left(\widehat{\mathbf{C}}_{sample}\right)}{d} I \tag{10}$$

具体而言，我们将使用 Ledoit-Wolf 提出的收缩估计量 [23], ，他们为此开发了一种解析公式，用于求出参数 λ，使估计协方差矩阵与真实协方差矩阵之间的均方误差最小。



(a) (b)

图 3：（a）考虑一个包含 4 个通道和一个时间窗（蓝色方框）的脑电信号，并将其在时间 t 处的值与时间 $t+\tau$处的值拼接，创建一个新的数据集。（b）在数据集的每个点执行上述操作的结果。对于固定延迟 τ和维度 $d \times p$（此处 $d=4$和 $p=2$），这将得到一个维度更高的数据集。原始信号 $\mathbf{\Gamma}_{aug}$ 的增广协方差矩阵恰好是这个拼接数据集的标准协方差矩阵。

2.4 非线性动力学方法

使用增广数据集来表述该问题，自然地体现了它与 Takens 提出的延迟嵌入定理 [12] 之间的联系，这一定理适用于非线性动力系统。

大多数脑电分类算法都基于这样的假设：信号可以通过线性理论描述。然而，近期研究已证明，脑电信号遵循非线性模型 [13]。由于存在这一非线性成分，采用基于线性假设的信号分析技术可能会丢失重要特征。近期已有一些算法被提出，它们将非线性系统理论范畴内定义的量用作分类特征，但这些量的计算极为耗时。

现在，让我们尝试理解基于 Takens定理的相空间重构背后的思想。通常，我们在实验中观测到的并非相空间中的对象，而是时间序列，最常见的情况是只有一系列标量测量值，因此，研究对象的动力学中涉及的并非所有动力学变量都能通过测量过程获取。因此，在大多数情况下，时间序列可以看作部分可观测动力系统中观测变量所取的值。显然，即使精确了解测量过程，也可能无法根据数据重构原系统的状态空间。幸运的是，数据分析并不真正需要重构原始相空间，有时甚至不希望这样做。只需构造一个在动力学上与原空间等价的新空间即可。图 4 很好地概括了我们刚才阐述的过程。

考虑到测量过程会生成一个时间序列 $s(n)$。根据 Takens定理，可以从可观测量 $s(n)$ 中展开系统多变量动力学的几何结构，该可观测量位于由延迟向量构造的 D 维空间中

$$\mathbf{s}_E(n) = [s(n), s(n-\tau), ..., s(n-(D-1)\tau)]^T \tag{11}$$

其中，τ是称为嵌入延迟的正整数，D 是嵌入维数。因此，$\mathbf{s}_E(n) \in \mathbb{R}^D$ 是原始相空间的一个嵌入。如前所述，增广协方差矩阵等价于在高维空间中对嵌入后的脑电数据使用标准协方差矩阵。因此，该方法与非线性动力学理论相关；但与试图识别动力学参数不同，我们使用黎曼框架对心理状态进行分类。从这个意义上说，这两种方法各自的优势得以结合：

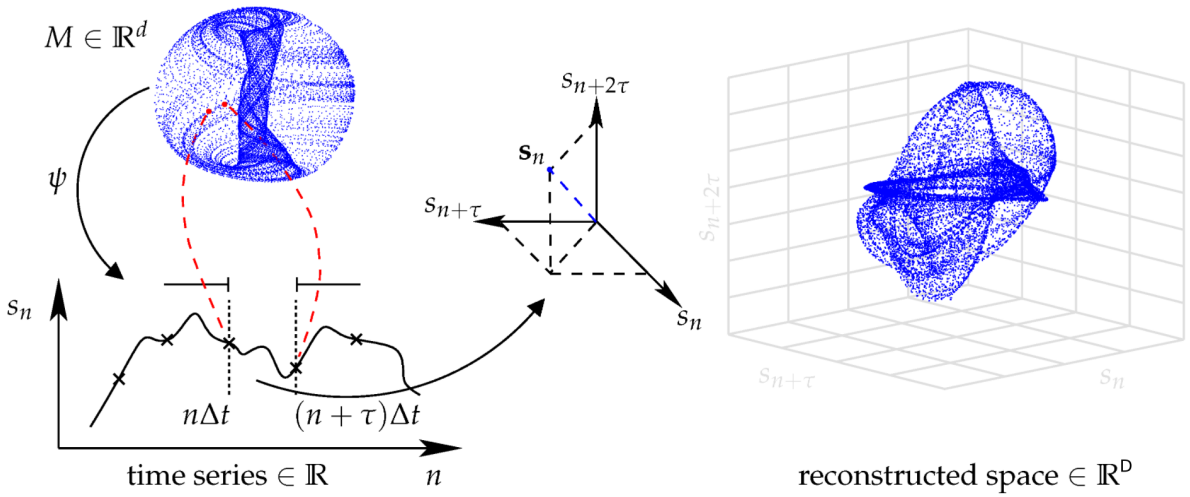


图 4：延迟嵌入定理概念示意图。经 Ana González-Marcos 许可转载 [24]

利用信号的非线性成分，以及基于黎曼距离的算法的性能。事实证明，我们的方法是基于黎曼距离的分类方法的自然扩展，该方法考虑了包含从信号中提取的、可用于动力系统理论的最大信息量的对称正定矩阵。因此，基于黎曼框架的分类方法通过考虑经由数据嵌入测得的信号中的某些非线性特征，变得更加有效。

2.5 所考虑的数据集

为了测试我们方法的性能，我们使用了 MOABB 框架中实现的开放访问数据集。我们考虑了五个运动想象脑机接口数据集，每个数据集包含若干受试者，每位受试者有若干会话。表 1 列出了所考虑数据集的所有详细信息。

数据集	受试者	通道	采样率	会话	任务	每类试次	时间窗（秒）
Zhou2016 [25]	3	14	250 赫兹	3	3	160	[0, 5]
BNCI2014001 [26]	9	22	250 赫兹	2	4	144	[2, 6]
BNCI2015001 [27]	12	13	512 赫兹	1	2	200	[0, 5]
BNCI2014002 [28]	14	15	512 赫兹	5	2	80	[3, 8]
BNCI2014004 [29]	9	3	250 赫兹	1	2	360	[3, 7.5]

表 1：本研究中考虑的数据集

对于所有数据集，我们针对运动想象任务应用范围为 [8; 35] Hz 的标准带通滤波器。我们考虑长度等于任务条件持续时间的时间段，该持续时间因所研究的数据集而异。这些数据集中的所有类别均保持平衡。

2.6 参数估计

我们的模型取决于两个超参数：自回归模型的阶数（等同于嵌入维数 D）和延迟 τ。为计算每个数据集和每位受试者对应的这两个参数，我们开发了两种不同的策略：一种基于网格搜索算法，另一种基于非线性动力系统的概念。在采用会话内和跨会话评估方法进行性能评估时，我们会为每位受试者选择超参数。

2.6.1 网格搜索

为了找到超参数，我们在由以下范围定义的域内对两个参数进行网格搜索： $D \in [1, 10]$ 和 $\tau \in [1, 10]$。网格搜索采用与评估过程完全相同的流程，具体细节将在后文说明。请注意，网格搜索应始终能在所探索的域内找到最佳解（也可能存在多个极小值）。

2.6.2 非线性动力学方法

也可以利用非线性动力系统的概念来估计参数 D 和 τ。在噪声条件下，有多种用于估计最优参数的算法，可分为两类：传统方法和统一方法。这两种方法均使用 DynamicalSystem.jl 库 [30]实现。

传统方法 传统方法尝试分别找出最佳时间延迟τ 和最优嵌入维数 D。我们的方法基于计算平均互信息（AMI） [31]，并使用 Cao算法 [32]计算邻居数量。嵌入定理对重构过程中的时间延迟选择没有限制。理论上，在测量次数无限且无噪声的情况下，任何延迟都同样有效，但周期信号的某些精确周期的倍数除外。实际上，数据量有限，因此需要某种约束来确定最佳时间延迟 τ。AMI算法将互信息的第一个极小值所在位置作为 τ的最优值。虽然没有经验法则规定最小重构维数 D，但在所有可能的方法中，带有 Cao修正的假近邻（FNN）方法尤为突出。该算法基于这样的考虑：在维数很低的重构空间中，两点看起来比实际距离更近。因此，只有当重构维数增加时两点间的距离仍保持不变，才将它们视为真正的邻居。嵌入维数取 FNN 饱和在 1 附近时对应的值。

由于这些算法是为处理单变量数据而创建的，我们累积各通道和时间窗的结果，并选择 τ 作为总体互信息的第一个极小值。采用类似的考量，我们计算嵌入维数 D，即总体假近邻数饱和在 1 附近时对应的值。

统一方法 统一方法同时找到 τ 和 D的最优组合。对于这种方法，我们使用 MDOP算法 [33]。MDOP算法通过迭代同时寻找最佳延迟和嵌入维数。该算法从当前数据集开始，通过找到合适的 τ 值，将该数据集的滞后版本添加其中，使坐标之间的冗余最小化，也就是说，最大化 β统计量 [33]。每个嵌入周期结束后，都会检查 FNN统计量 [34]；一旦该统计量低于阈值，算法便终止。需要指出的是，该算法在每个嵌入周期都会产生不同的 τ 值，因此我们决定将这些值的平均值选作 τ 的最优值，同时将周期数选作 D。

2.7 处理流程

我们旨在评估增广协方差方法（ACM）作为一种通用技术，如何在不同设置下提升性能。具体而言，如表2所示，我们考虑了黎曼曲面和切空间上的几种分类方法。

我们将最佳方法“ACM+TANG+SVM”（使用支持向量机并通过网格搜索在切空间上进行分类）与脑机接口领域文献中的若干算法进行比较。

曲面	标准算法	增广算法		
		网格搜索	传统方法	统一方法
黎曼曲面	MDM	ACM+MDM	ACM+MDM AMI aFNN	ACM+MDM MDOP
切空间	TANG+支持向量机	ACM+TANG+支持向量机	ACM+TANG+支持向量机AMI aFNN	ACM+TANG+支持向量机 MDOP

表2： 考察了在黎曼曲面和切空间上进行分类的处理流程 e.

1. “CSP+线性判别分析”，该方法将共同空间模式（CSP）算法与收缩线性判别分析（LDA）分类相结合 [35]。2. “FgMDM”，一种在应用测地线滤波后，采用均值最小距离进行分类的方法 [36]。

3. “COV+EN”，一种在切空间中使用弹性网络作为分类器的分类方法 [37]。

对于分类得分，我们根据所考虑的范式采用不同的模型验证技术：对于会话内评估（WS），我们采用五折交叉验证；对于跨会话评估（CS），我们采用留一会话法。

本研究中使用的分类器的所有超参数均通过网格搜索进行优化。表3总结了这些网格搜索所覆盖的范围。

处理流程	参数	值
"COV+EN"	L1 比率	[0.15, 0.30, 0.45, 0.60, 0.75]
"TANG+SVM"	C	[0.5, 1, 1.5]
	核函数	["线性", "径向基函数"]
"CSP+线性判别分析"	滤波器数量	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
"ACM+TANG+支持向量机"	C	[0.5, 1, 1.5]
	核函数	["线性", "径向基函数"]
	阶数	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
	Lag	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
"ACM+MDM"	阶数	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
	Lag	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

表3：各流水线考虑的参数

2.8 统计分析

为了从统计学角度验证最佳处理流程，我们使用 MOABB框架提供的工具。该算法结合了置换检验和非参数检验，以保持算法的快速性。对于受试者少于 20 人的数据集，MOABB框架使用单尾基于置换的配对t检验 [38]；否则使用 Wilcoxon 符号秩检验 [39] 。该统计检验用于生成一个 p值，以比较每对处理流程。随后使用 Stouffer方法 [40]合并 p值，从而为每个假设得出最终 p值。为了避免假阳性问题，我们采用 Bonferroni校正 [41]。这样，我们便可以利用多个受试者和多个数据集验证结果。

得分通过受试者工作特征（ROC）曲线下面积（AUC）计算得出。AUC 的取值范围为 0 到 1，AUC 值越高，分类器的性能越好。对于多分类，使用的指标是准确率。

3 结果

本节报告增广协方差方法在黎曼曲面和切空间上的分类结果。为验证该方法的稳健性和有效性，我们使用 MOABB框架，在不同的数据集、受试者和任务上测试该算法。根据定义，只要最优解位于搜索域内，网格搜索就总能为增广方法找到最佳解。因此，网格搜索与非线性动力学方法的比较总是有利于前者，因为我们选择了足够大的网格搜索域。

3.1 右手与左手

我们选取了3个不同的数据集：BNCI2014001、BNCI2014004和Zhou2016，采用会话内和跨会话评估流程，对右手与左手任务进行分类。

3.1.1 黎曼曲面分类

如表4所示，所有使用ACM的方法相较于标准MDM算法均有所改进。使用ACM并通过网格搜索选择超参数，可将性能提升3%–7%；而采用传统方法和统一方法选择超参数，则结果相近（但传统方法的曲线下面积最多下降3%，统一方法最多下降5%）。这些趋势在会话内（WS）和跨会话（CS）框架下均成立。图7和图8对这些结果的显著性进行了详细的统计分析。

数据集	Eval	MDM	ACM+网格搜索	ACM+传统	ACM+统一
BNCI2014001	WS	0.84 ± 0.14	$\mathbf{0.91 \pm 0.11}$	0.89 ± 0.12	0.86 ± 0.14
BNCI2014004	WS	0.78 ± 0.16	$\mathbf{0.83 \pm 0.14}$	0.82 ± 0.15	0.81 ± 0.16
Zhou2016	WS	0.89 ± 0.08	$\mathbf{0.93 \pm 0.07}$	0.90 ± 0.07	0.91 ± 0.08
BNCI2014001	CS	0.83 ± 0.15	$\mathbf{0.91 \pm 0.11}$	0.88 ± 0.13	0.86 ± 0.13
BNCI2014004	CS	0.79 ± 0.15	$\mathbf{0.83 \pm 0.14}$	$\mathbf{0.83 \pm 0.14}$	0.81 ± 0.15
Zhou2016	CS	0.92 ± 0.05	$\mathbf{0.95 \pm 0.04}$	0.93 ± 0.04	0.93 ± 0.04

表4：使用基于MDM的算法时，右手与左手的表现（曲线下面积）。

3.1.2 切空间分类

如表5所示，采用支持向量机的切空间分类通常比黎曼曲面分类方法更有效。这一点对基线方法和 ACM 方法都成立。采用基于动力系统理论进行参数估计的基于 ACM 的方法，其结果与使用标准协方差矩阵得到的结果相当（曲线下面积变化范围为 -1% 至 +2%）。然而，与在该数据集上表现相似的所有其他方法相比，采用网格搜索的 ACM 带来了显著提升（视数据集而定，为 3%–7%）。同样，这些提升在 WS 和 CS 框架下均以相似方式出现。图9和图10详细分析了这些结果的统计显著性。

3.1.3 最先进水平

表6将我们最佳的方法（采用 TANG+支持向量机分类的 ACM，并通过网格搜索确定超参数）与先进的最先进水平方法进行了比较（这些方法通常比基线方法表现更好）。该方法相较于所有这些方法都取得了显著改进

数据集	评估 TANG+支持向量机		ACM+网格搜索	ACM+传统 ACM+统一	
BNCI2014001	WS	0.89 ± 0.11	$\mathbf{0.95 \pm 0.07}$	0.89 ± 0.12	0.88 ± 0.13
BNCI2014004	WS	0.81 ± 0.15	$\mathbf{0.88 \pm 0.12}$	0.81 ± 0.16	0.81 ± 0.15
Zhou2016	WS	0.93 ± 0.07	$\mathbf{0.96 \pm 0.05}$	0.94 ± 0.06	0.93 ± 0.07
BNCI2014001	CS	0.86 ± 0.13	$\mathbf{0.93 \pm 0.09}$	0.88 ± 0.12	0.88 ± 0.12
BNCI2014004	CS	0.81 ± 0.14	$\mathbf{0.85 \pm 0.14}$	0.80 ± 0.16	0.81 ± 0.15
Zhou2016	CS	0.92 ± 0.07	$\mathbf{0.95 \pm 0.04}$	0.93 ± 0.05	0.93 ± 0.06

表5： 使用 TANG+支持向量机算法区分右手与左手的性能（曲线下面积） .

AUC 平均提高了 2%–9%，同时这些数值的标准差也显著降低，这意味着各受试者之间的结果更加相合。图11和图12详细分析了这些结果的统计显著性。

数据集	评估 CSP+线性判别分析		ACM+TANG+支持向量机（网格搜索）	COV+EN	FgMDM
BNCI2014001	WS	0.86 ± 0.13	$\mathbf{0.95 \pm 0.07}$	0.89 ± 0.11	0.88 ± 0.11
BNCI2014004	WS	0.80 ± 0.15	$\mathbf{0.88 \pm 0.12}$	0.80 ± 0.15	0.79 ± 0.16
Zhou2016	WS	0.93 ± 0.08	$\mathbf{0.96 \pm 0.05}$	0.94 ± 0.07	0.91 ± 0.08
BNCI2014001	CS	0.86 ± 0.14	$\mathbf{0.93 \pm 0.09}$	0.87 ± 0.13	0.85 ± 0.14
BNCI2014004	CS	0.81 ± 0.14	$\mathbf{0.85 \pm 0.14}$	0.81 ± 0.14	0.80 ± 0.14
Zhou2016	CS	0.93 ± 0.07	$\mathbf{0.95 \pm 0.04}$	0.93 ± 0.07	0.90 ± 0.09

表6：使用 ACM+TANG+支持向量机算法对比最先进水平的右手与左手曲线下面积（AUC）性能。

3.2 右手与双脚

此分类任务使用 4 个不同的数据集：BNCI2014001、BNCI2014002、BNCI2015001 和 Zhou2016，通过会话内评估和跨会话评估程序，对右手与双脚任务进行分类。

3.2.1 黎曼曲面分类

如表7所示，所有使用 ACM 的方法相较于标准MDM算法均有所改进。使用 ACM 并通过网格搜索选择超参数时，性能最佳（曲线下面积提高了 3%–6%）。采用传统方法获得的参数也能取得接近的结果（性能最多降低 3%）。统一方法通常不如传统方法。与之前一样，在 WS 和 CS 框架下的趋势相似。图13和图14对统计显著性进行了详细研究。

数据集	Eval	MDM	ACM+网格搜索	ACM+传统 ACM+统一	
BNCI2014001	WS	0.91 ± 0.10	$\mathbf{0.96 \pm 0.05}$	0.95 ± 0.06	0.93 ± 0.10
BNCI2014002	WS	0.77 ± 0.15	$\mathbf{0.83 \pm 0.15}$	0.81 ± 0.15	0.78 ± 0.17
BNCI2015001	WS	0.86 ± 0.13	$\mathbf{0.91 \pm 0.11}$	$\mathbf{0.90 \pm 0.11}$	0.89 ± 0.12
Zhou2016	WS	0.92 ± 0.05	$\mathbf{0.96 \pm 0.04}$	0.93 ± 0.05	0.94 ± 0.05
BNCI2014001	CS	0.90 ± 0.12	$\mathbf{0.95 \pm 0.06}$	0.93 ± 0.07	0.92 ± 0.10
BNCI2015001	CS	0.87 ± 0.12	$\mathbf{0.91 \pm 0.09}$	$\mathbf{0.91 \pm 0.10}$	0.89 ± 0.11
Zhou2016	CS	0.93 ± 0.06	$\mathbf{0.96 \pm 0.04}$	0.95 ± 0.05	0.95 ± 0.05

表7：使用基于MDM的算法时右手与双脚的性能（曲线下面积）。

3.2.2 切空间分类

与左手与右手情形一样，如表8所示，使用支持向量机的切空间分类通常比黎曼曲面分类方法更有效。基于 ACM 的方法采用基于动力系统理论的参数估计时，其结果与标准协方差矩阵相当（在一个数据集上，性能略有下降）。然而，相较于所有其他方法，使用 ACM 进行网格搜索取得了显著的改进（1%–4%）；其他方法在这些数据集上的表现相近。鉴于基线方法已经取得了非常高的曲线下面积值，这一结果尤其值得注意。图15和图16对这些结果的统计显著性进行了详细研究。

数据集	评估	TANG+支持向量机	ACM+网格搜索	ACM+传统	ACM+统一
BNCI2014001	WS	0.95 ± 0.07	$\mathbf{0.98 \pm 0.02}$	0.95 ± 0.06	0.95 ± 0.07
BNCI2014002	WS	0.87 ± 0.12	$\mathbf{0.91 \pm 0.10}$	0.86 ± 0.13	0.85 ± 0.15
BNCI2015001	WS	0.92 ± 0.08	$\mathbf{0.95 \pm 0.06}$	$\mathbf{0.93 \pm 0.09}$	0.92 ± 0.09
Zhou2016	WS	0.97 ± 0.03	$\mathbf{0.99 \pm 0.01}$	0.97 ± 0.02	0.97 ± 0.04
BNCI2014001	CS	0.94 ± 0.07	$\mathbf{0.97 \pm 0.04}$	0.94 ± 0.07	0.93 ± 0.08
BNCI2015001	CS	0.90 ± 0.10	$\mathbf{0.94 \pm 0.07}$	0.92 ± 0.08	0.91 ± 0.09
Zhou2016	CS	0.96 ± 0.05	$\mathbf{0.99 \pm 0.01}$	0.98 ± 0.02	0.98 ± 0.03

Tabl使用 TANG+SVM 算法对右手与双脚进行分类的性能（曲线下面积） s.

3.2.3 最先进水平

表 9 将我们表现最佳的方法（采用 TANG+SVM 分类的 ACM，以及通过网格搜索找到的超参数）与其他最先进的方法进行了比较。与所有这些方法相比，该方法带来了显著提升。图 17 和图 18 对这些结果的统计显著性进行了详细分析。

数据集	评估	CSP+线性判别分析	ACM+TANG+支持向量机（网格搜索）	COV+EN	FgMDM
BNCI2014001	WS	0.93 ± 0.10	$\mathbf{0.98 \pm 0.02}$	0.95 ± 0.06	0.94 ± 0.08
BNCI2014002	WS	0.86 ± 0.12	$\mathbf{0.91 \pm 0.10}$	0.87 ± 0.12	0.85 ± 0.12
BNCI2015001	WS	0.90 ± 0.10	$\mathbf{0.95 \pm 0.06}$	0.92 ± 0.08	0.90 ± 0.10
Zhou2016	WS	0.95 ± 0.04	$\mathbf{0.99 \pm 0.01}$	0.97 ± 0.03	0.96 ± 0.03
BNCI2014001	CS	0.90 ± 0.12	$\mathbf{0.97 \pm 0.05}$	0.94 ± 0.07	0.93 ± 0.08
BNCI2015001	CS	0.89 ± 0.11	$\mathbf{0.94 \pm 0.07}$	0.91 ± 0.09	0.90 ± 0.10
Zhou2016	CS	0.95 ± 0.05	$\mathbf{0.99 \pm 0.01}$	0.96 ± 0.04	0.95 ± 0.06

表 9：使用 ACM+TANG+支持向量机算法进行右手与双脚分类时的曲线下面积（AUC）表现，与最先进水平进行比较。

3.3 右手、左手与双脚

在本例中，我们使用两个不同的数据集 BNCI2014001 和 Zhou2016，通过会话内和跨会话评估流程，对右手、左手与双脚任务进行分类。

3.3.1 黎曼曲面分类

在所有情况下，使用ACM的方法相较于标准MDM算法均有所改进，如表10所示。通过网格搜索进行参数优化可带来6%至9%的提升。采用另外两种方法（标准方法或统一方法）所获得的提升较低，为1%至6%。同样，在所有情况下，标准差均较低，表明不同受试者之间的结果更加相合。图19和图20对统计显著性进行了详细研究。

数据集	Eval	MDM	ACM+网格搜索	ACM+传统 ACM+统一	
BNCI2014001	WS	0.72 ± 0.15	$\mathbf{0.81 \pm 0.11}$	0.78 ± 0.13	0.76 ± 0.14
Zhou2016	WS	0.75 ± 0.07	$\mathbf{0.81 \pm 0.04}$	0.76 ± 0.06	0.79 ± 0.05
BNCI2014001	CS	0.66 ± 0.13	$\mathbf{0.75 \pm 0.11}$	0.74 ± 0.12	0.70 ± 0.12
Zhou2016	CS	0.70 ± 0.09	$\mathbf{0.75 \pm 0.06}$	0.72 ± 0.09	0.72 ± 0.09

表10：使用基于MDM的算法时，右手与左手及双脚的性能（准确率）。

3.3.2 切空间分类

与前面的结果一样，如表 11 所示，使用支持向量机进行切空间分类比采用黎曼曲面分类方法更有效。在这种情况下，计算 ACM 超参数的传统方法表现不如基线，未能选出一组合适的参数。统一方法略有改善，提升了 1%–2%。使用网格搜索的 ACM 取得了最佳结果，相较于基线方法有显著提升（7%–8%）。图 21 和图 22 对统计显著性进行了详细分析。

数据集	评估 TANG+支持向量机		ACM+网格搜索	ACM+传统 ACM+统一	
BNCI2014001	WS	0.79 ± 0.13	$\mathbf{0.87 \pm 0.09}$	0.79 ± 0.13	0.80 ± 0.14
Zhou2016	WS	0.84 ± 0.05	$\mathbf{0.88 \pm 0.03}$	0.83 ± 0.03	0.86 ± 0.04
BNCI2014001	CS	0.69 ± 0.13	$\mathbf{0.80 \pm 0.10}$	0.74 ± 0.12	0.73 ± 0.14
Zhou2016	CS	0.74 ± 0.09	$\mathbf{0.81 \pm 0.07}$	0.79 ± 0.08	0.76 ± 0.08

表 11：使用基于 TANG+支持向量机的算法对右手、左手和双脚进行分类的性能（准确率）。

3.3.3 最先进水平

我们表现最佳的方法（采用 ACM 与 TANG+支持向量机进行分类，并通过网格搜索确定超参数）与最先进水平的方法进行了比较，结果见表 12。与所有这些方法相比，该方法取得了显著提升（7%-11%）。图 23 和图 24 对这些结果的统计显著性进行了详细分析。

数据集	评估 CSP+线性判别分析		ACM+TANG+支持向量机（网格搜索）	COV+EN	FgMDM
BNCI2014001	WS	0.76 ± 0.15	$\mathbf{0.87 \pm 0.09}$	0.80 ± 0.14	0.77 ± 0.14
Zhou2016	WS	0.83 ± 0.06	$\mathbf{0.88 \pm 0.03}$	0.85 ± 0.05	0.81 ± 0.06
BNCI2014001	CS	0.68 ± 0.15	$\mathbf{0.80 \pm 0.10}$	0.70 ± 0.11	0.69 ± 0.13
Zhou2016	CS	0.74 ± 0.13	$\mathbf{0.81 \pm 0.07}$	0.75 ± 0.10	0.72 ± 0.10

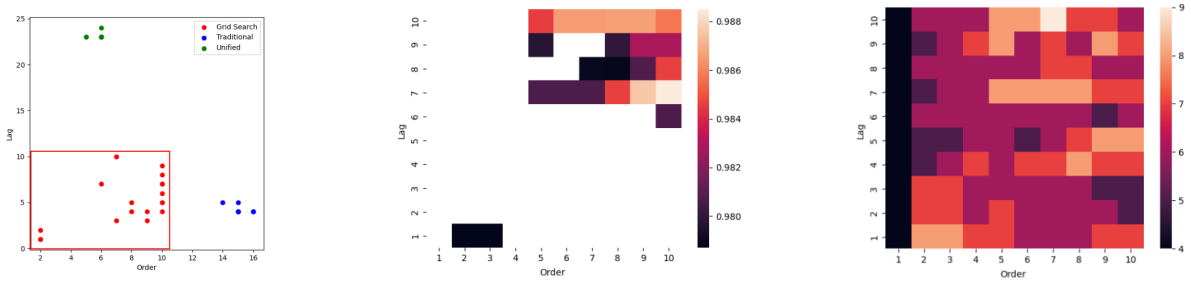
表 12：使用 ACM+TANG+支持向量机算法，对比最先进水平时右手与左手及双脚的性能（准确率）。

4 讨论

在不同的分类任务（二分类和多分类）上进行的大量测试表明，在所考察的所有情况下，增广协方差方法的性能始终更优。与最先进水平的算法进行比较也证实了这一结果，而且在会话内和跨会话框架下均如此。性能提升

当基线方法初始表现更好时，性能提升自然不那么显著，但这确实表明，增广协方差方法为这些数据集的分类问题带来了有价值的信息。显然，通过网格搜索可以选出性能最佳的超参数（因为我们采用了足够大的搜索域）。不过，基于非线性动力学概念的模态通常也表现出优于标准算法的性能（只有少数例外），而传统方法总体上略优于统一方法。

然而，在算法训练阶段，通过网格搜索选择超参数非常耗时；并且由于研究表明这些值取决于受试者，因此必须为每位受试者搜索合适的超参数。图5 (a) 展示了不同受试者和会话中阶数和滞后超参数的分布示例。对于18名受试者的 $\times$ 个会话，通过网格搜索找到了15组参数。相比之下，统一方法和传统方法得到的点集更加集中。可以看出，这些方法只能正确识别两个超参数中的一个，分别是滞后和阶数，却无法同时识别二者。此外，这些算法会选择搜索域之外的参数，从而生成维度极高的 ACM，需要通过 Ledoit-Wolf [23] 方法进行正则化，这可能是它们性能较低的原因。尽管如此，这些基于非线性系统理论的方法为高效寻找合适的超参数奠定了重要的理论基础；即使找到的超参数远非最优，通常也能提升会话内和跨会话评估的性能。图5 (b) 展示了准确率达到最佳值的99%的参数集合。在这个例子中，可以看到有许多几乎等效的超参数组合，这表明过于关注实际最优值或许过于严格。图5 (c) 是一张投票图，统计不同受试者的$\times$ 个会话中，每对超参数落入该99%区域的次数。可以看出，最高票数为9，仅为最大可能值18的50%。这表明最优超参数的分布并非单峰分布，因此很难找到一个适用于所有情况的固定值。其他分类任务和数据集也表现出类似的情况。



(a) (b) (c)

图5：（a）在使用数据集 BNCI2014001 的左右手任务中，各会话和受试者对应的 ACM+MDM算法最佳超参数图。红框表示网格搜索的范围。（b）热图显示了包含可获得最高得分99% 的超参数的区域。此结果展示的是 BNCI2014001 中会话E的受试者1在右手与左手任务中的情况。（c）总体热图显示了最佳超参数区域出现次数最多的位置。该图通过统计所有会话和受试者的图（b）中非空方框数量得出。

尽管我们的方法已被证明能够在许多脑机接口运动想象任务应用中提高准确率，但仍存在一些局限性。首先，与其他方法一样，该方法依赖于样本协方差估计器有效这一假设。

当使用的时间窗远大于协方差矩阵的维度时，这一假设仍然成立。但随着自回归阶数提高，该维度会迅速增大。在这种情况下，矩阵仍是对称正矩阵，但不再是正定矩阵，因此无法再使用黎曼度量。为解决这一问题，可以采用收缩估计或其他方法来估计协方差 [23, 42, 43]。

最后需要指出的是，与标准协方差相比，增广协方差的维度增加，因此增强方法会增加计算时间 [44]，如图6所示。不过，即使在较高阶数下，将总时间除以分类窗口数后也表明，增广方法适用于实时计算。

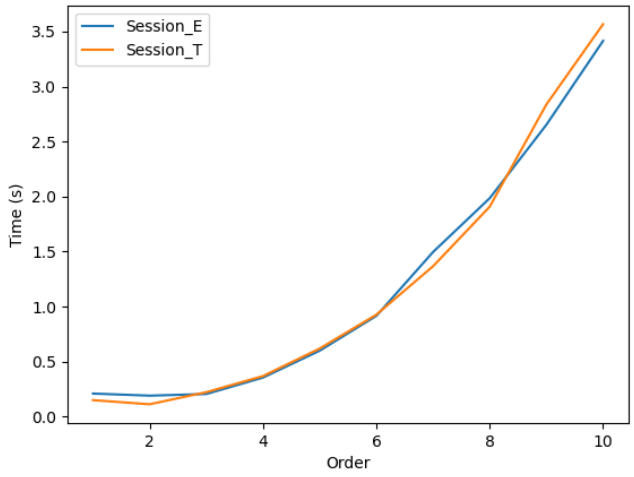


图6：在 MOABB 会话内评估中，对 BNCI2014001 的受试者1执行右手与双脚任务时的总评估计算时间。阶数为1时的计算时间对应于标准协方差。其他评估流程、受试者、任务和数据集也呈现出类似的情况。

5 结论

本研究探讨了在脑电脑机接口中使用增广协方差矩阵对脑电图运动想象任务进行分类。该方法将时间信息整合到常规空间协方差中；与基于黎曼距离的分类算法结合使用时，相较于最先进水平，分类结果有了显著提升。增广协方差矩阵仍存在正定性方面的问题，这是由协方差矩阵维度的扩增所导致的。另一个问题是超参数的选择，这一过程代价高昂。不过，我们表明，受 Takens定理 启发的方法能够以降低提升幅度为代价，给出合理的参数值（但在大多数情况下仍有提升）。

本研究聚焦于离线分类。我们的下一步将是把该方法扩展到在线分类。为此，有必要在更短的时间段窗口上测试这些算法，并将其与滑动窗口方法相结合。增强方法的另一项重要改进，是检验它在训练数据集规模较小的情境下是否同样有效，即电极数量较少或训练样本较少时。这将显著提升脑机接口的易用性，并有望缩短设备设置和/或校准所需的时间。我们已经发现，对于仅有 3 个电极的 BNCI2014004 数据集，该方法的性能优于最先进水平；但这一结果还需要推广到其他数据集以及训练样本数量更少的情形。

另一项研究方向是更深入地分析超参数的分布，旨在确定一种使分类器无需设置参数的方法（例如采用集成分类器方法）。

致谢

本研究部分由 EUR DS4H/Neuromod奖学金资助。作者感谢 Université Côte d'Azur 的 OPAL基础设施提供资源与支持。

数据与代码可用性

用于生成本研究结果的代码已公开发布于以下 GitHub 仓库：
https://github.com/carraraig/Augmented_Covariance_BCI。

参考文献

[1] Brahim Belaoucha 和 Théodore Papadopoulo。“利用结构连接重建脑激活以及脑区之间的有效连接”。载于：《神经工程学杂志》17.3（2020年6月），第035006页。doi: 10.1088/1741-2552/ab8b2b。网址：https: //hal.inria.fr/hal-02945585.[2] Mingzhou Ding 等。“通过自适应多变量自回归建模对皮层事件相关电位进行短窗谱分析：数据预处理、模型验证与变异性评估”。载于：《生物控制论》83.1（2000年），第35–45页。[3] Claudia Kirch、Birte Muhsal 和 Hernando Ombao。“多元时间序列变化检测及其在脑电数据中的应用”。载于：《美国统计学会杂志》110.511（2015年），第1197–1216页。[4] Farhad Faradji、Rabab K Ward 和 Gary E Birch。“一种基于自定步调双状态心理任务、使用少量脑电通道的脑机接口”。载于：脑机接口新前沿。IntechOpen，英国伦敦，2019年。[5] Xu Duan 等。“使用非侵入式多模态脑机接口进行四旋翼飞行控制”。载于：《神经机器人学前沿》13（2019年），第23页。[6] Dong Wen 等。“脑机接口与虚拟现实在神经系统疾病康复中的结合：叙述性综述”。载于：《物理医学与康复医学年鉴》64.1（2021年），第101404页。[7] Benjamin Blankertz 等。“基于SMR的脑机接口性能的神经生理学预测因子”。载于：《神经影像》51.4（2010年），第1303–1309页。[8] Alexandre Barachant 等。“应用于脑机接口分类的黎曼几何”。载于：潜变量分析与信号分离国际会议。施普林格。2010年，第629–636页。[9] Wolfgang Förstner 和 Boudewijn Moonen。“协方差矩阵的一种度量”。载于：大地测量学——第三个千年的挑战。施普林格，2003年，第299–309页。[10] Alexandre Barachant 等。“基于黎曼几何的 A Brain-Switch”。载于：第五届国际脑机接口会议论文集（*2011*）。奥地利格拉茨，2011年9月，第64–67页。网址：http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00629110.[11] Jan Sosulski 和 Michael Tangermann。“引入块托普利兹协方差矩阵，改进事件相关电位脑机接口的线性判别分析”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2202.02001*（2022年）。

[12] Floris Takens。“检测湍流中的奇异吸引子”。载于：动力系统与湍流，*Warwick 1980*。施普林格，1981年，第366–381页。[13] Martin C Casdagli 等。“颞叶癫痫患者侵入式脑电记录中的非线性”。载于：脑电图与临床神经生理学102.2（1997年），第98–105页。[14] Yonghui Fang、Minyou Chen 和 Xufei Zheng。“提取脑机接口中脑电信号相空间的特征”。载于：神经计算151（2015年），第1477–1485页。[15] Behshad Hosseinifard、Mohammad Hassan Moradi 和 Reza Rostami。“利用机器学习技术和脑电信号的非线性特征，对抑郁症患者和正常受试者进行分类”。载于：生物医学中的计算机方法与程序109.3（2013年），第339–345页。[16] Vinay Jayaram 和 Alexandre Barachant。“MOABB：用于脑机接口的可信算法基准测试”。载于：《神经工程学杂志》15.6（2018年），第066011页。[17] M. Moakher。“求对称正定矩阵几何均值的微分几何方法”。载于：*SIAM*矩阵分析与应用杂志26.3（2005年4月），第735–747页。[18] Marco Congedo、Alexandre Barachant 和 Rajendra Bhatia。“基于脑电的脑机接口中的黎曼几何：入门与综述”。载于：脑机接口4.3（2017年），第155–174页。[19] X. Pennec、P. Fillard 和 N. Ayache。张量计算的黎曼框架。技术报告5255。法国国家信息与自动化研究所，索菲亚科技园，2004年7月。[20] Helmut Lütkepohl。多元时间序列分析新导论。施普林格科学与商业媒体，2005年。[21] Trevor Hastie 等。统计学习要素：数据挖掘、推断与预测。第2卷。施普林格，2009年。[22] Daniel Bartz。高维协方差矩阵估计的进展。柏林工业大学（德国），2016年。[23] Olivier Ledoit 和 Michael Wolf。“一种适用于大维协方差矩阵的良态估计量”。载于：多元分析杂志88.2（2004年），第365–411页。[24] Javier de Pedro-Carracedo 等。“从生物时间序列重构相空间：光电容积脉搏波信号案例研究”。载于：应用科学10.4（2020年），第1430页。[25] Bangyan Zhou 等。“一种用于优化运动想象脑机接口的全自动试次选择方法”。载于：公共科学图书馆·综合11.9（2016年），e0162657。[26] Michael Tangermann 等。“脑机接口竞赛第四届综述”。载于：《神经科学前沿》（2012年），第55页。[27] Josef Faller 等。“自动校准与循环适应：迈向即插即用的在线事件相关去同步化脑机接口”。载于：*IEEE*神经系统与康复工程汇刊20.3（2012年），第313–319页。[28] David Steyrl 等。“随机森林在非侵入式感觉运动节律脑机接口中的应用：一种实用、便捷的非线性分类器”。载于：生物医学工程/生物医学技术61.1（2016年），第77–86页。[29] R. Leeb 等。“脑机通信：探索虚拟公寓的动机、目标与影响”。载于：*IEEE*神经系统与康复工程汇刊15.4（2007年），第473–482页。[30] George Datseris。“DynamicalSystems.jl：用于混沌与非线性动力学的 Julia 软件库”。载于：开源软件杂志3.23（2018年），第598页。doi：10.21105/joss. 00598。网址：https://doi.org/10.21105/joss.00598。

[31] Andrew M Fraser 和 Harry L Swinney。“利用互信息确定奇异吸引子的独立坐标”。载于：《物理评论 *A*》33.2 (1986)，第 1134 页。[32] Liangyue Cao。“确定标量时间序列最小嵌入维数的实用方法”。载于：《物理学 *D*：非线性现象》110.1-2 (1997)，第 43–50 页。[33] Chetan Nichkawde。“利用投影流形上的导数进行最优状态空间重构”。载于：《物理评论 *E*》87.2 (2013)，第 022905 页。[34] Matthew B Kennel、Reggie Brown 和 Henry DI Abarbanel。“利用几何构造确定相空间重构的嵌入维数”。载于：《物理评论 *A*》45.6 (1992)，第 3403 页。[35] Fabien Lotte 和 Cuntai Guan。“借助其他受试者的数据缩短脑机接口校准时间”。载于：国际音频、语音与信号处理会议（*ICASSP*）。美国达拉斯，2010 年 3 月，第 614–617 页。网址：http: //hal.inria.fr/inria-00441670。[36] FlorianYger、Maxime Berar 和 Fabien Lotte。“脑机接口中的黎曼方法：综述”。载于：《*IEEE* 神经系统与康复工程汇刊》25.10 (2016)，第 1753–1762 页。[37] Marie-Constance Corsi 等。“用于提升脑机接口性能的功能连接集成方法（FUCONE）”。载于：《*IEEE* 生物医学工程汇刊》(2022)。[38] Student。“均值的概差”。载于：《*Biometrika*》(1908)，第 1–25 页。[39] Frank Wilcoxon。“采用排序方法进行个体比较”。载于：《统计学突破》。施普林格，1992 年，第 196–202 页。[40] Samuel A Stouffer 等。《美国士兵：军旅生活中的适应（第二次世界大战社会心理学研究），第 *1* 卷》。普林斯顿大学出版社，1949 年。[41] Carlo Bonferroni。“类的统计理论与概率计算”。载于：《佛罗伦萨皇家高等经济与商业科学研究所出版物》8 (1936)，第 3–62 页。[42] Daniel Bartz 和 Klaus-Robert Müller。“自相关数据的协方差收缩”。载于：《神经信息处理系统进展》27 (2014)。[43] David Sabbagh 等。“无需源建模、基于 MEG/EEG脑信号进行预测的流形回归”。载于：《神经信息处理系统进展》32 (2019)。[44] Kisung You 和 Hae-Jeong Park。“相关流形上的功能脑网络几何学习”。载于：《科学报告》12.1 (2022)，第 1–13 页。

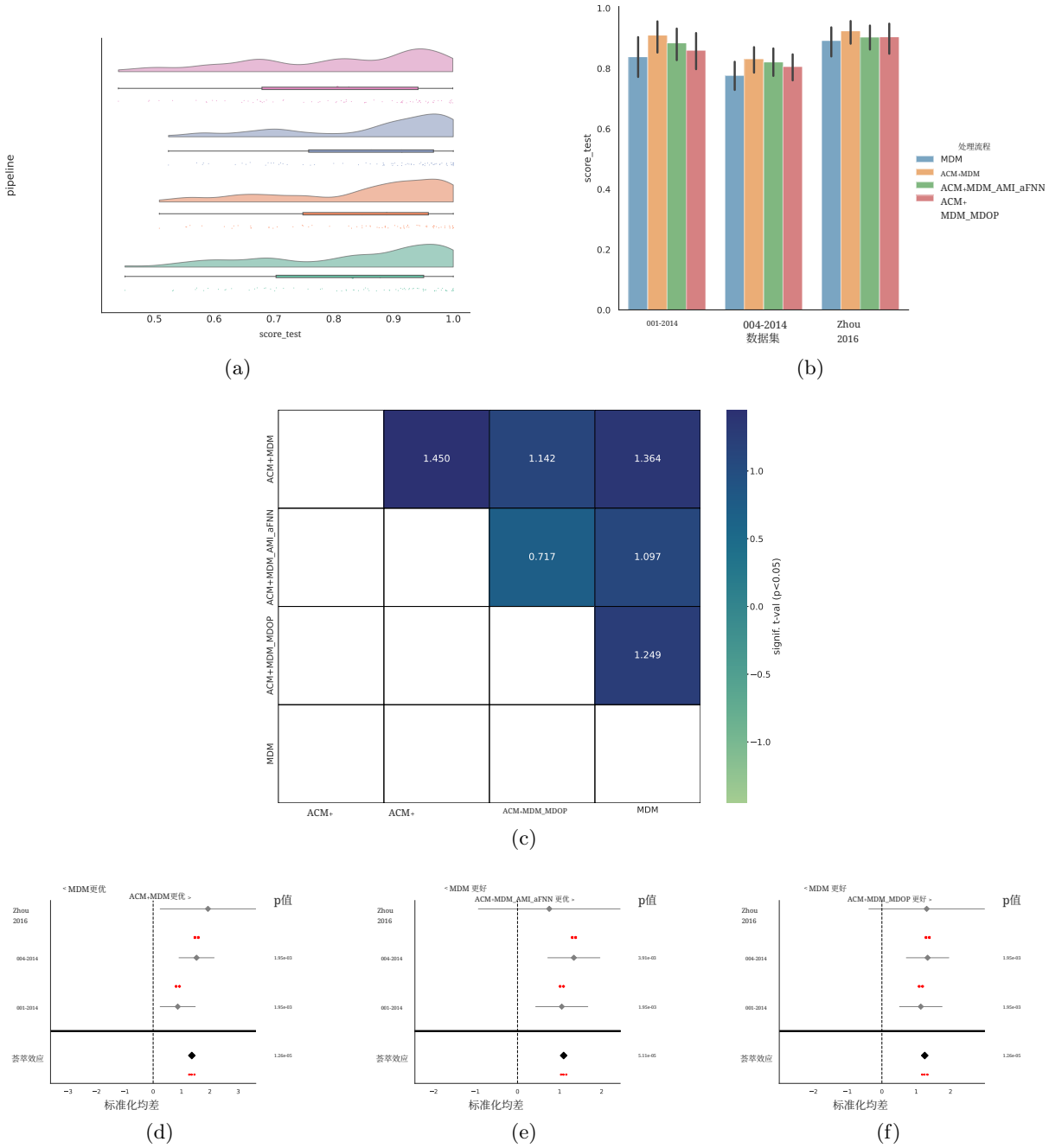


图7：使用MDM算法进行右手与左手分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准MDM算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。这里，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

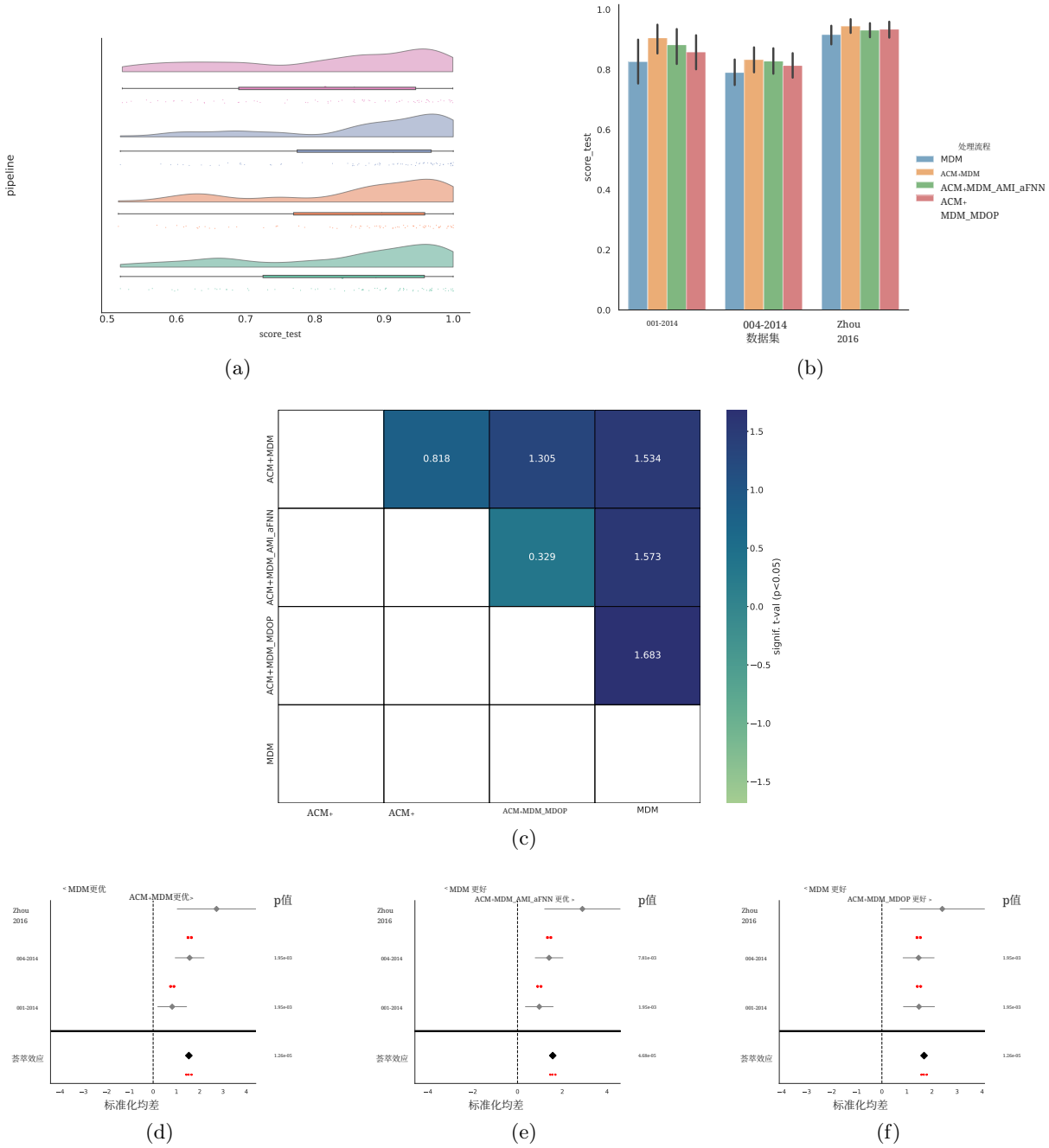


图8：使用MDM算法进行右手与左手分类的结果，采用跨会话评估。(a) 展示了各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示了条形图，其中包含所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分及误差。(c) 展示了所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅显示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示了标准MDM算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别采用基于网格搜索、传统方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值则通过单侧Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设见图标题，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示 $p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

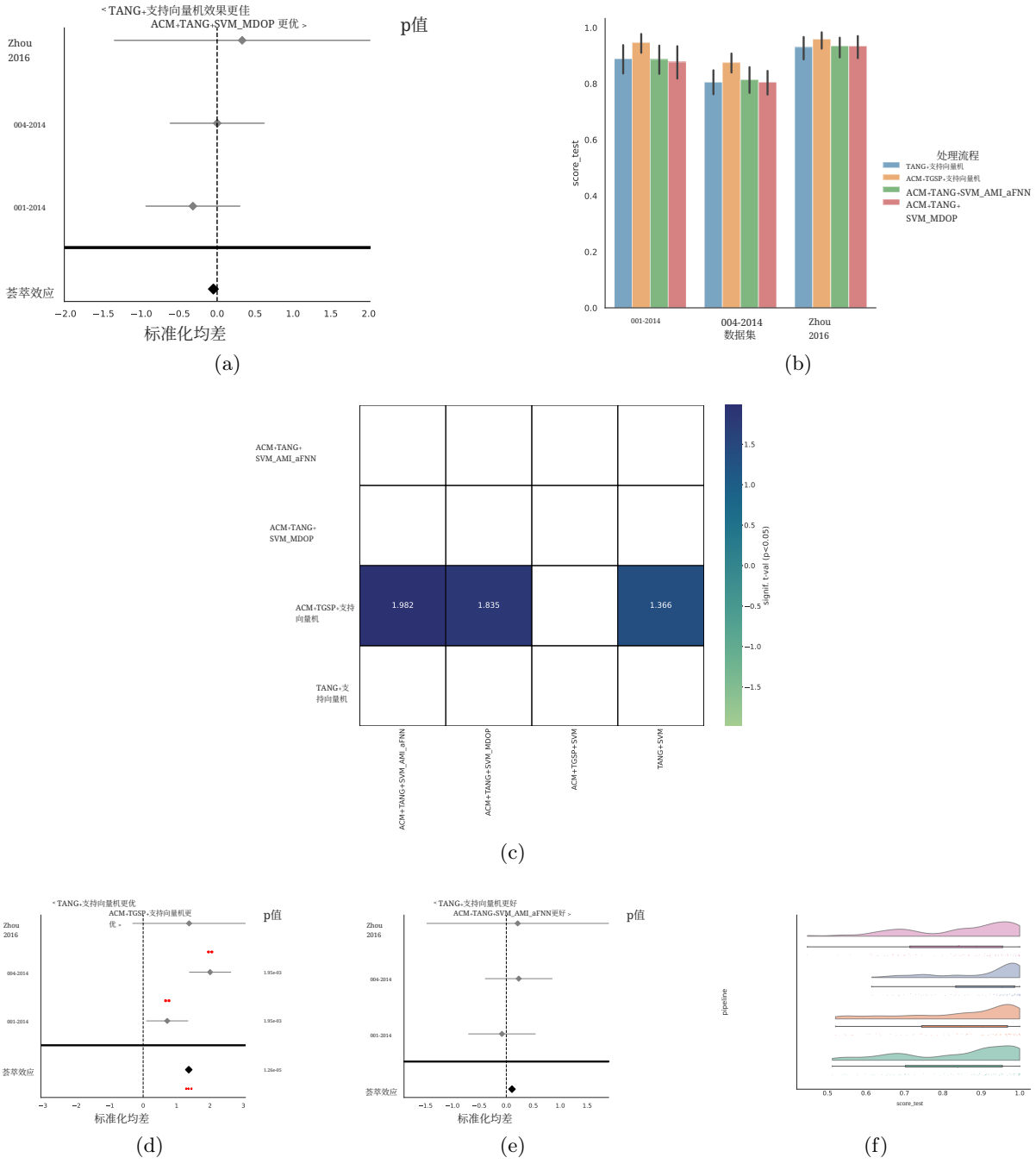


图9：使用TANG算法进行右手与左手分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者得分的分布。(b) 展示所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准TANG算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别基于网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

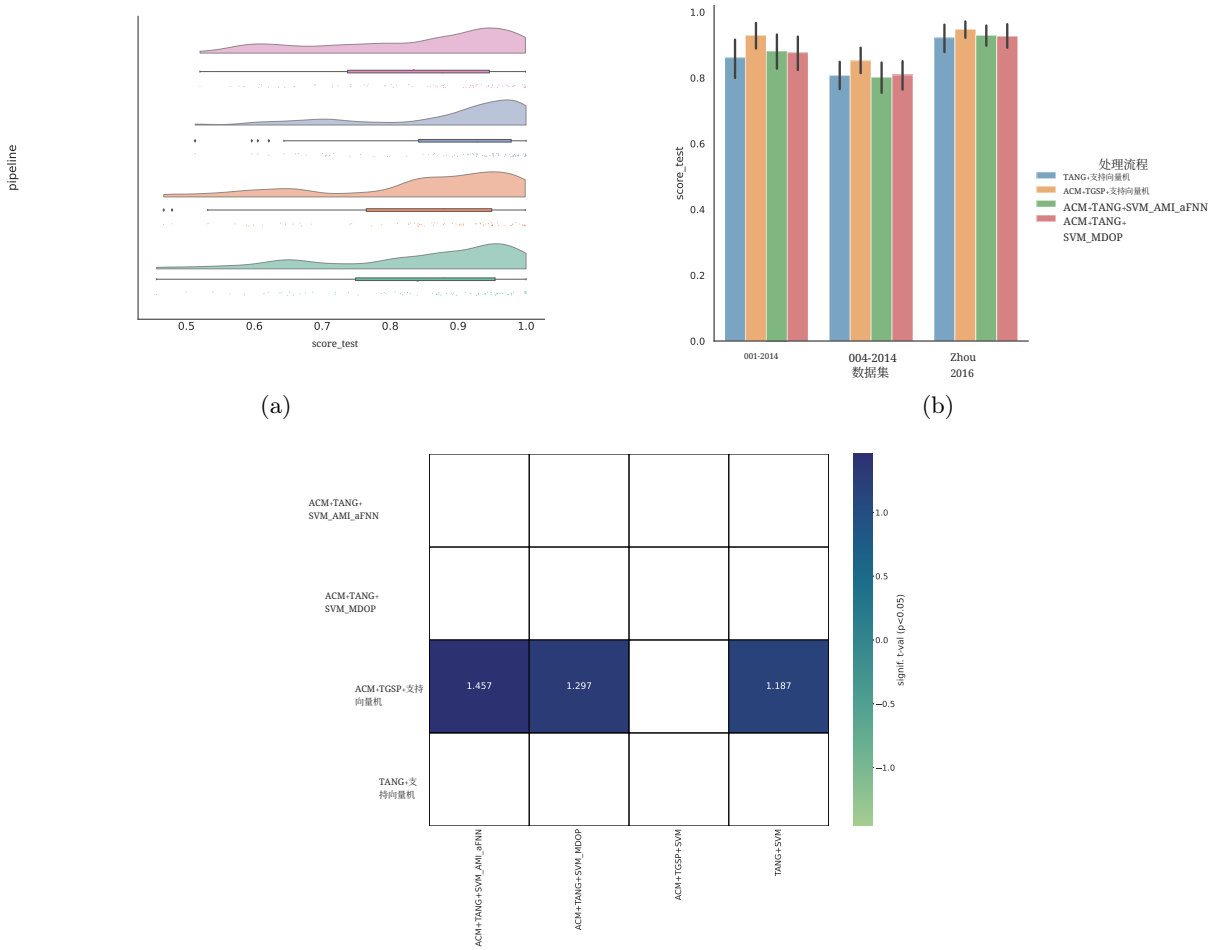


图10：使用 TANG算法进行右手与左手分类的结果，采用跨会话评估。(a) 展示了每种处理流程的雨云图，呈现每位受试者的得分分布。(b) 展示了所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示了所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以 t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d) (e) (f) 分别展示了标准TANG算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾 Wilcoxon符号秩检验计算，检验假设为图标题所示的假设，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示 $p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

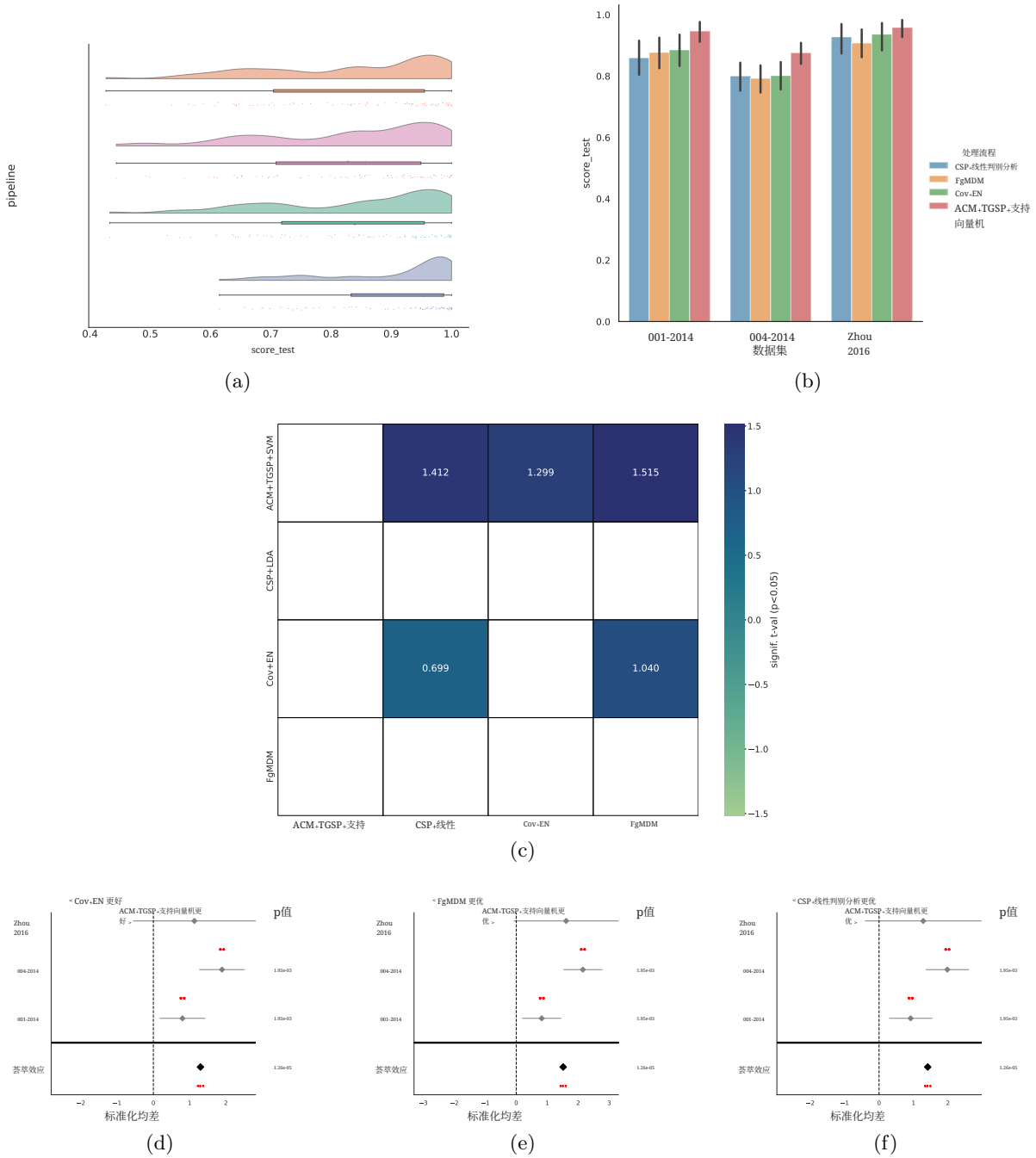


图11：采用会话内评估进行右手与左手分类的结果。(a) 展示各处理流程的雨云图，呈现每位受试者的得分分布。(b) 展示各处理流程在每个所考察数据集上的得分条形图及误差。(c) 展示所考察各处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 展示增强方法与支持向量机相较于最先进水平的荟萃分析。我们展示标准化均值差；p值则根据图标题所述假设，采用单尾Wilcoxon符号秩检验计算，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示$p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

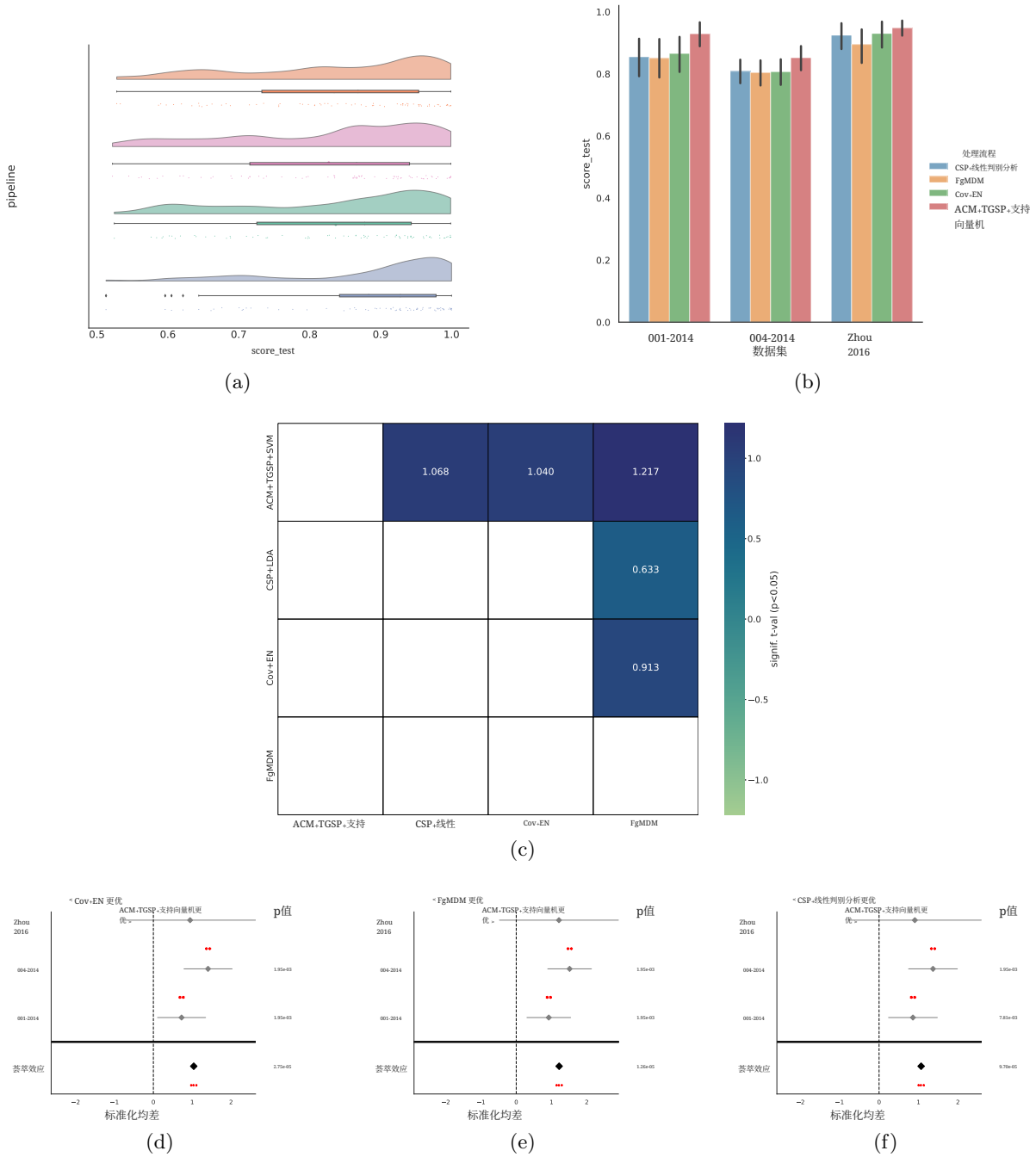


图12：跨会话评估下右手与左手分类的结果。(a) 展示各处理流程的雨云图，呈现每位受试者的得分分布。(b) 展示各数据集所考虑的不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值衡量，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 展示增强方法与支持向量机相对于最先进水平的荟萃分析。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示$p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

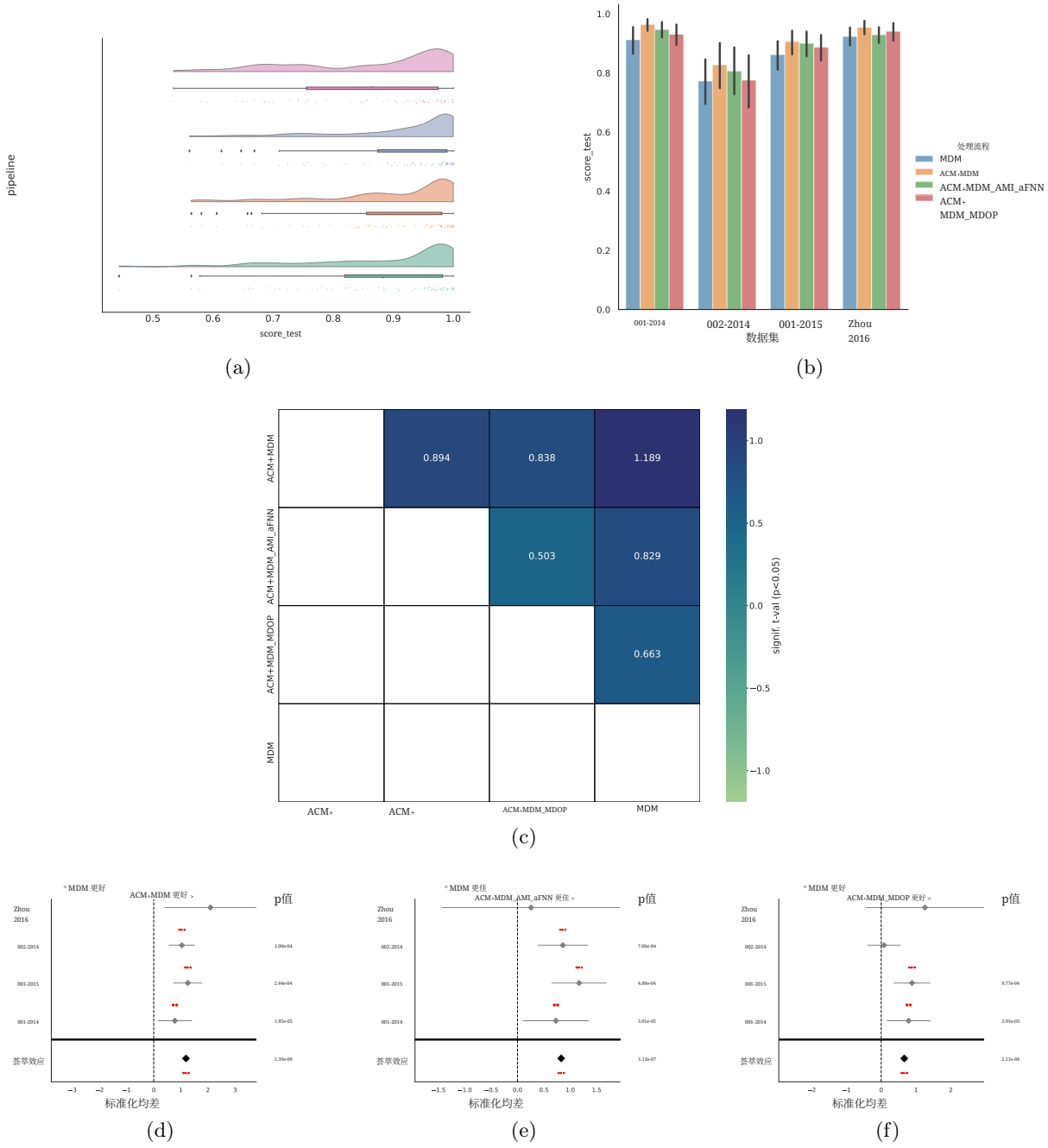


图 13：使用MDM算法进行右手与双脚分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者得分的分布。(b) 展示所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准MDM算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值采用单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示 $p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

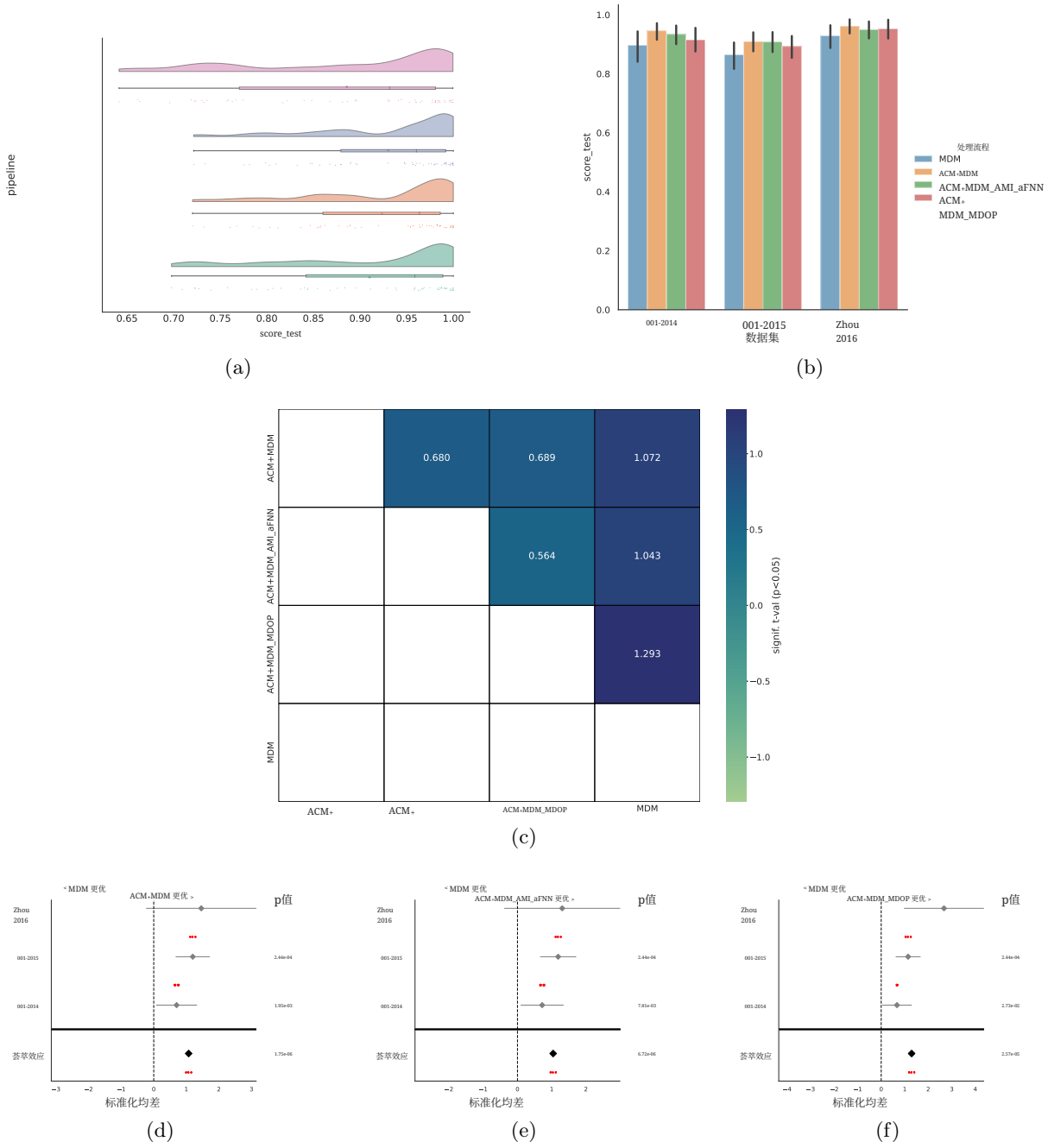


图14：使用MDM算法进行右手与双脚分类的结果，采用跨会话评估。(a) 显示每种处理流程的雨云图，展示每位受试者的得分分布。(b) 显示所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 显示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图展示了纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示了标准MDM算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示 $p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

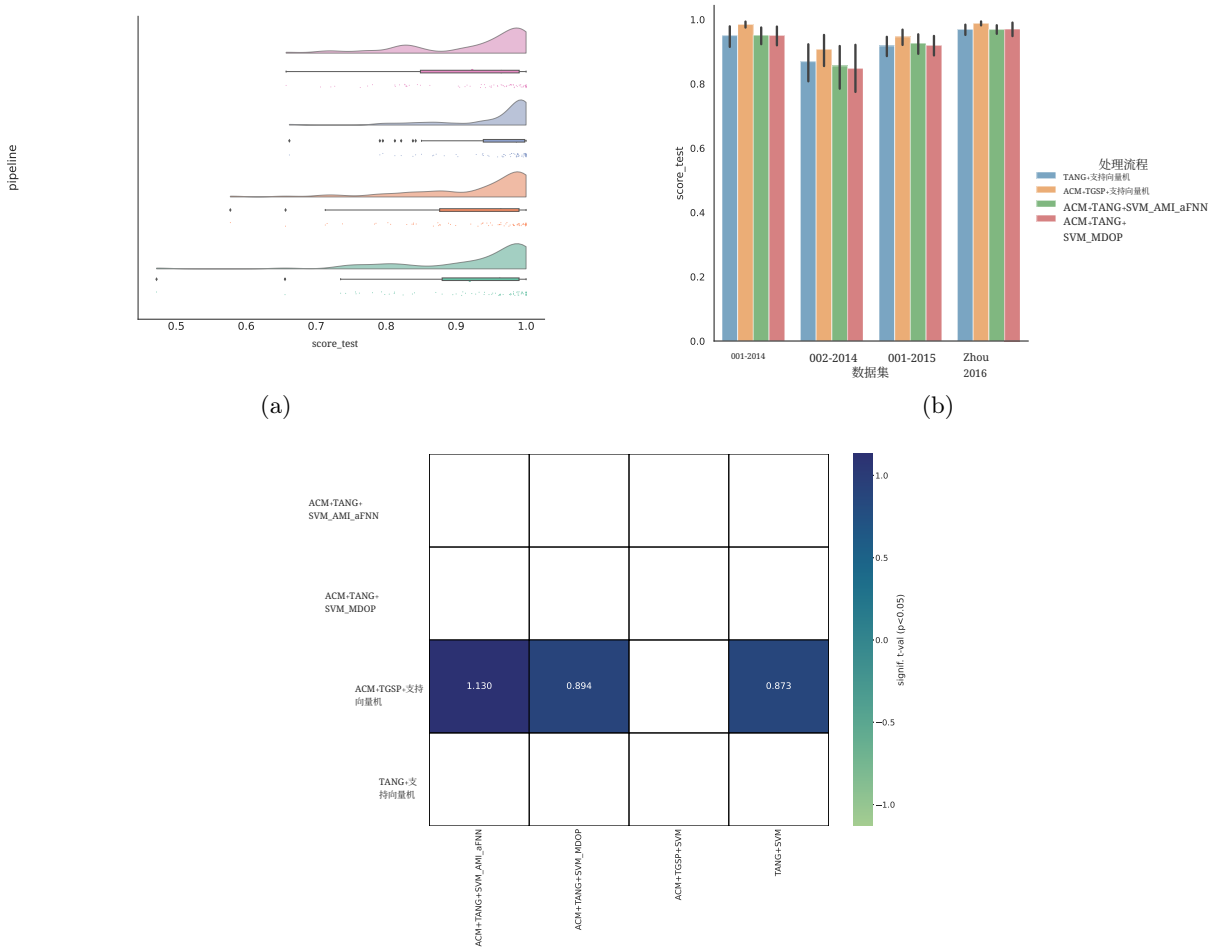


图15：使用TANG算法进行右手与双脚分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示所考虑的各数据集上不同处理流程得分及误差的条形图。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），且仅显示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准TANG算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验图标题所示的假设，灰色条表示95%区间。此处，* 表示 $p < 0.05$，** 表示 $p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。

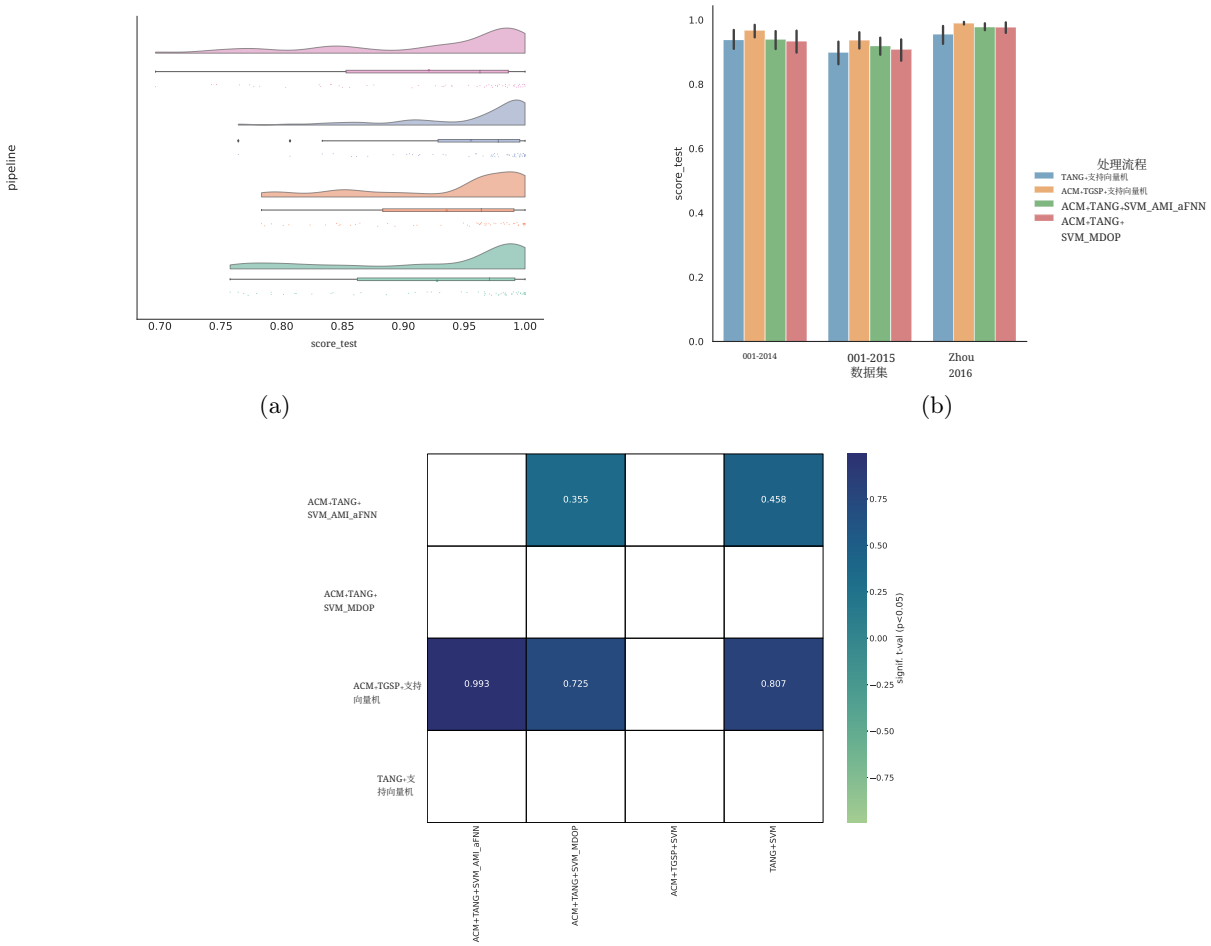
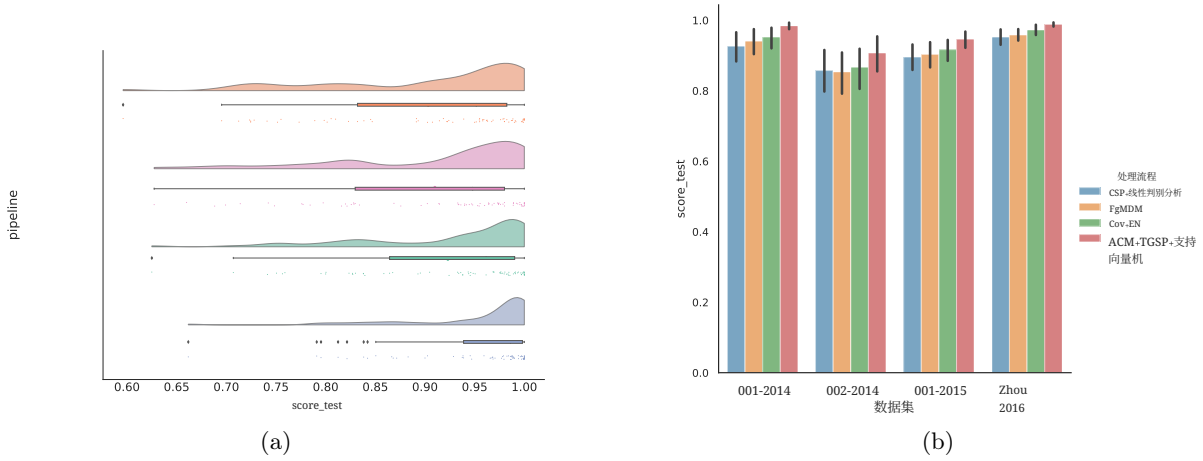
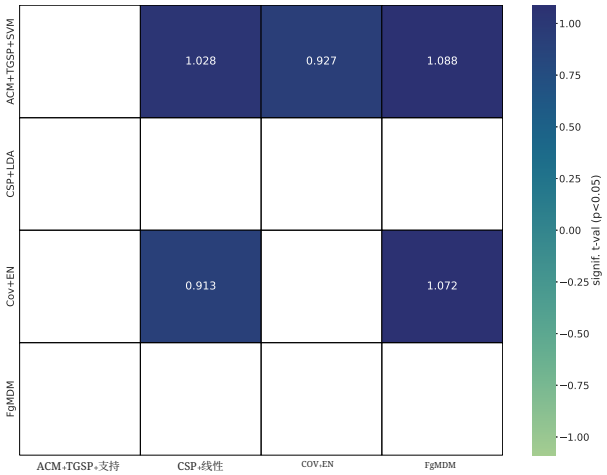


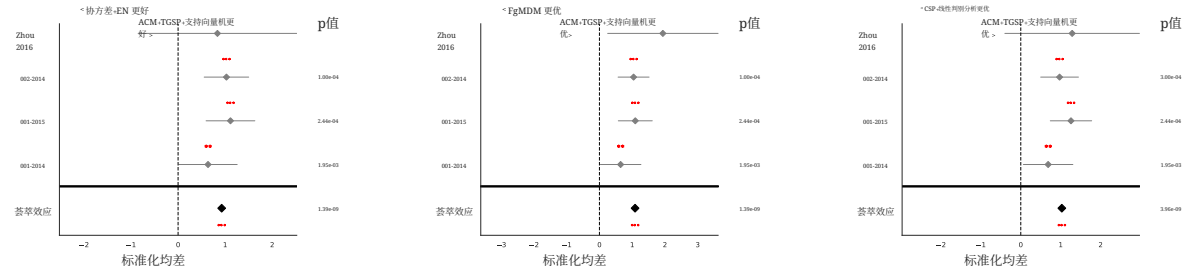
图16：使用TANG算法进行右手与双脚分类的结果，采用跨会话评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，呈现每位受试者的得分分布。(b) 展示各数据集所考虑的不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准TANG算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。



(a) (b)



(c)



(d) (e) (f)

图17：使用会话内评估进行右手与双脚分类的结果。（a）展示每个处理流程的雨云图，显示每位受试者得分的分布。（b）展示每个数据集所考虑的不同处理流程的得分条形图及误差。（c）展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。（d）、（e）、（f）展示使用支持向量机的增强方法与最先进水平进行比较的荟萃分析。我们展示标准化均值差，同时将p值计算为单尾Wilcoxon符号秩检验，用于检验图标题所给出的假设；灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示$p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

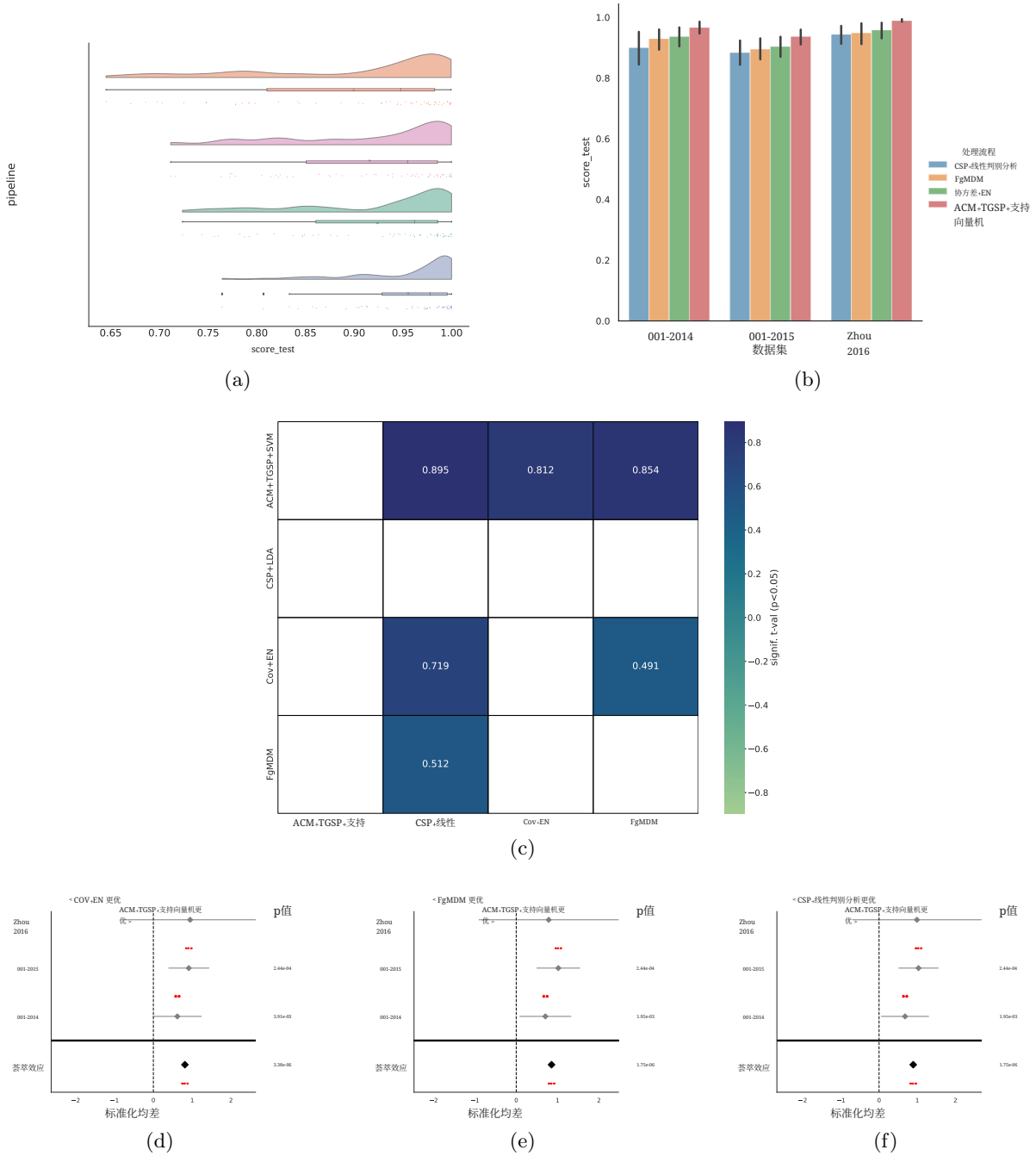


图18：使用跨会话评估进行右手与双脚分类的结果。**(a)** 展示各个处理流程的雨云图，呈现每位受试者的得分分布。**(b)** 展示各个数据集所采用的不同处理流程的得分条形图及误差。**(c)** 展示所考察的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅显示显著交互作用（$p < 0.05$）。**(d)**、**(e)**、**(f)** 展示增强方法与支持向量机相较于最先进水平的荟萃分析。我们展示标准化均值差；p值则根据图标题所示的假设，通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示$p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

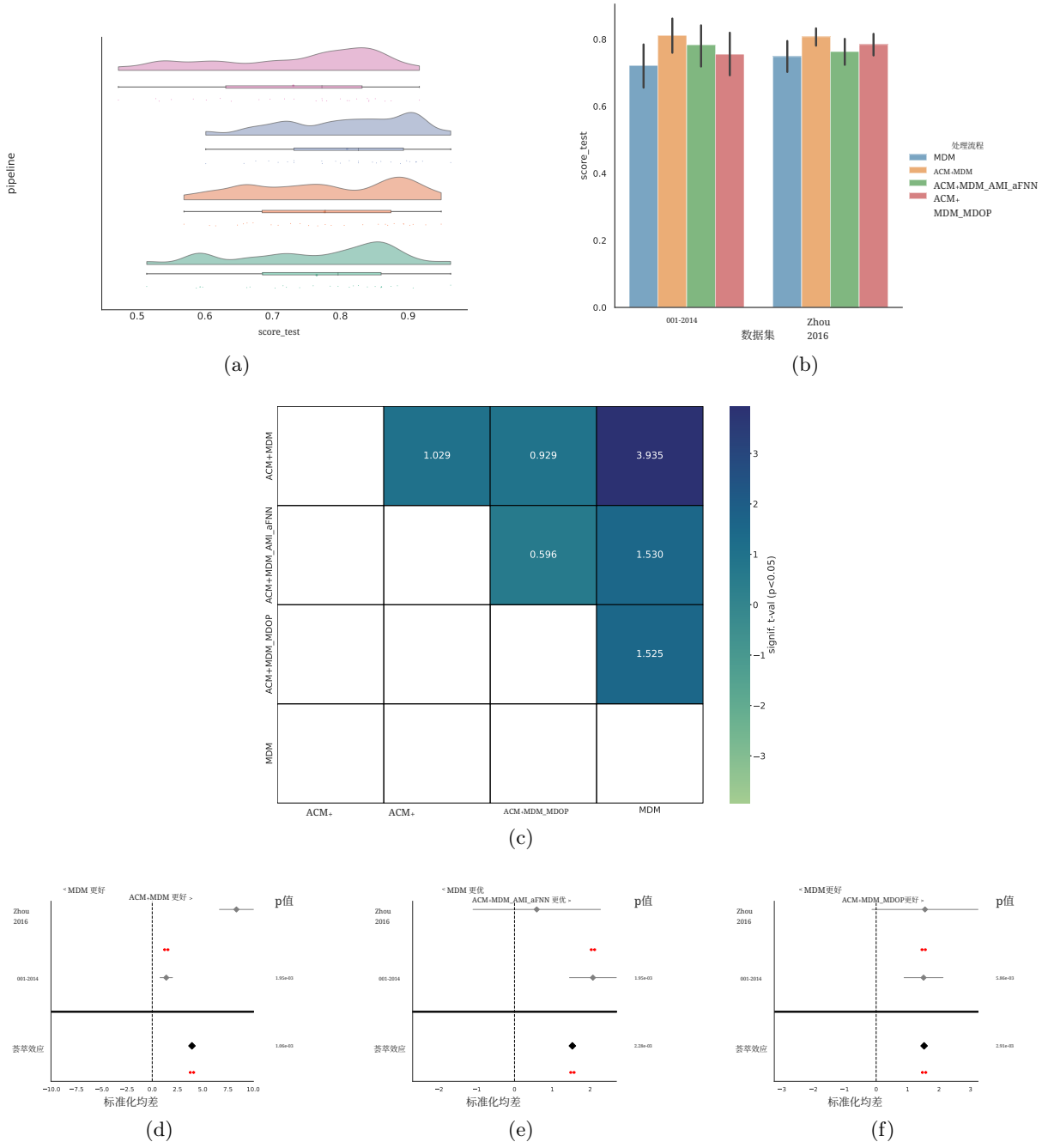


图19：使用MDM算法对右手、左手和双脚进行分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示了各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示了所考虑的每个数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示了所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d) (e) (f) 分别展示了标准MDM算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差，而p值是针对图标题所给出的假设，通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算得出，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

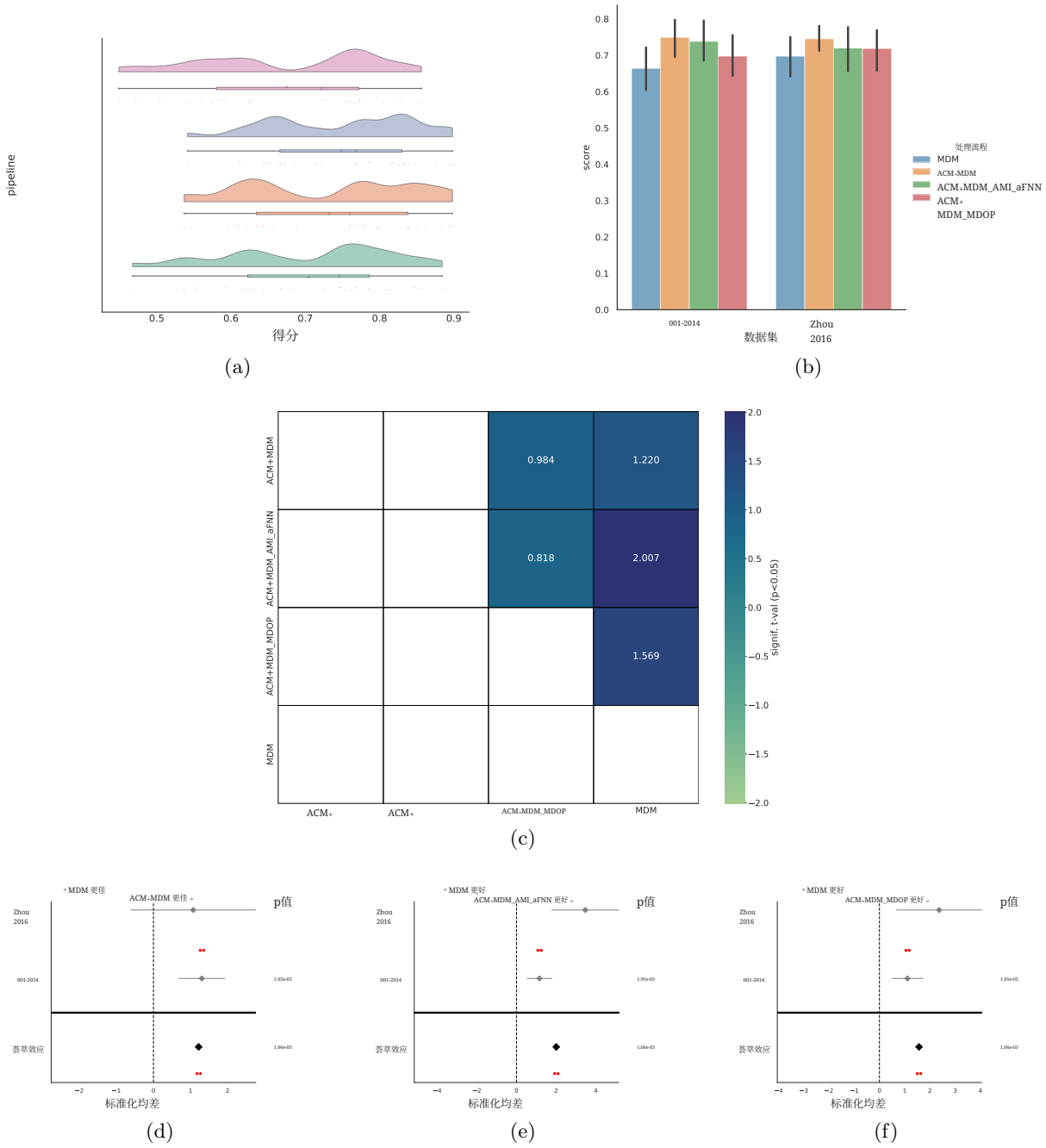


图20：使用MDM算法并进行跨会话评估时，右手、左手与双脚分类的结果。（a）展示每个处理流程的雨云图，显示每位受试者得分的分布。（b）展示不同处理流程及所考虑的每个数据集的得分条形图，并标出误差。（c）展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值计），并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。（d）（e）（f）分别展示标准MDM算法与采用基于网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法选择超参数的增广协方差方法之间的荟萃分析。我们展示标准化均值差，同时将p值计算为针对图标题所给假设的单尾Wilcoxon符号秩检验结果，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

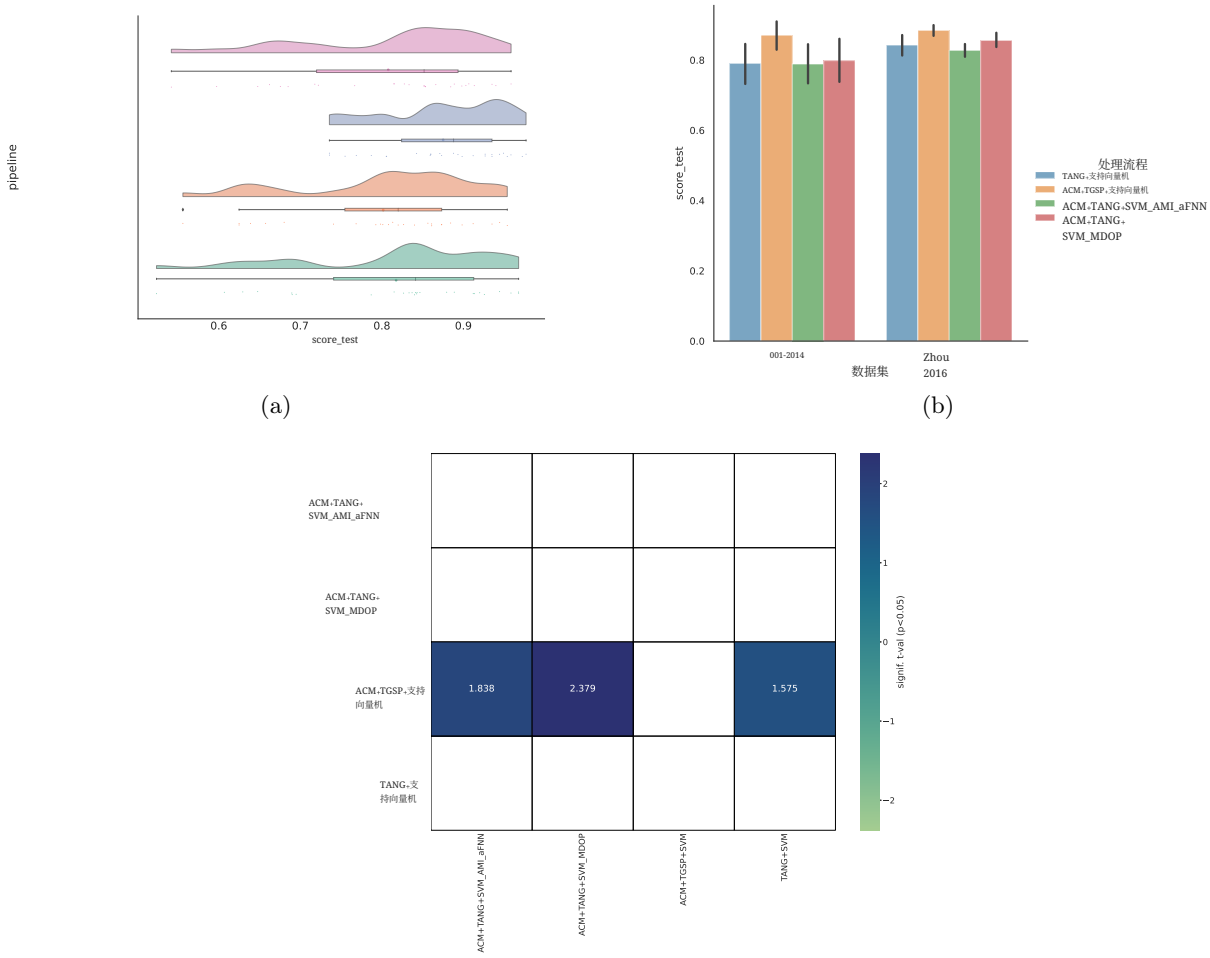
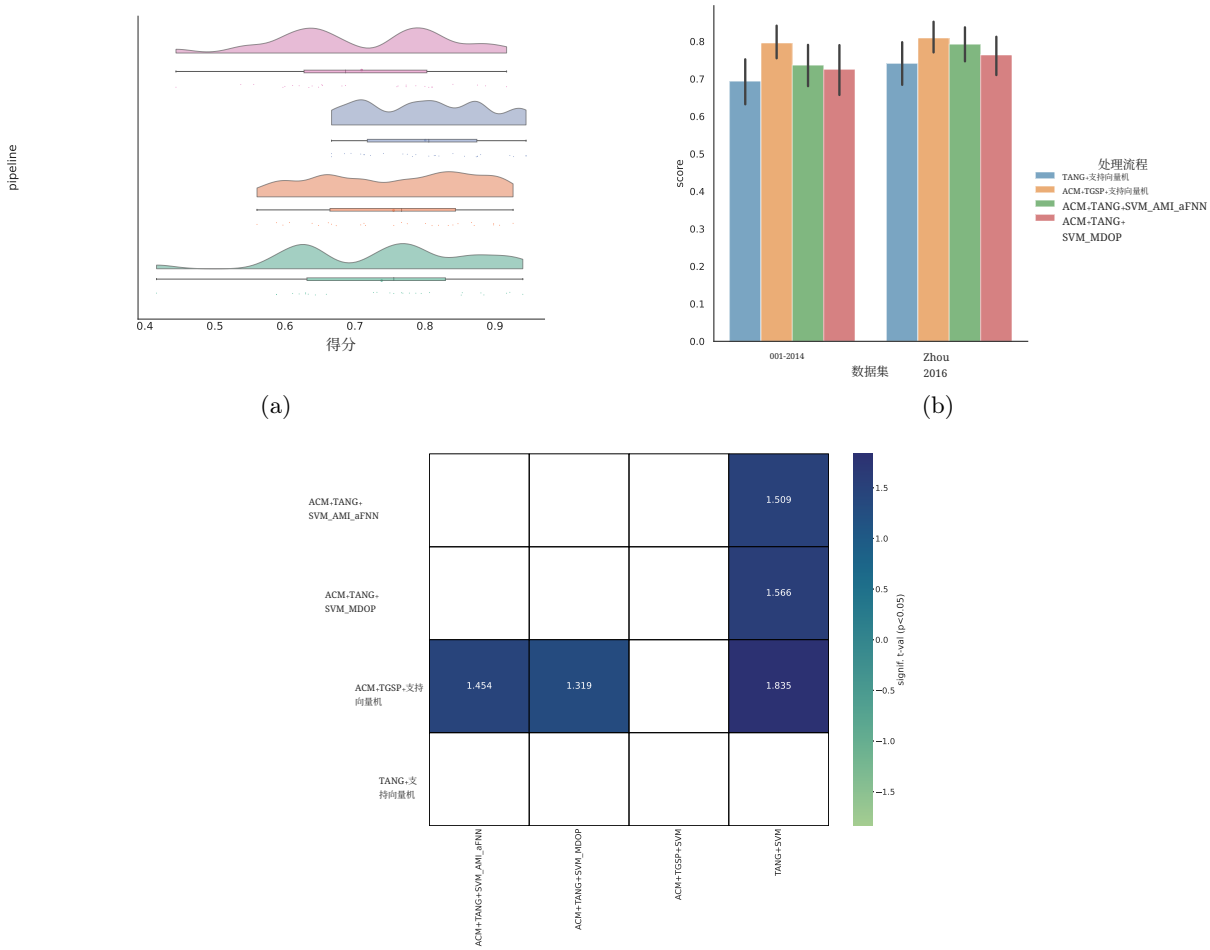


图21：使用TANG算法进行右手、左手和双脚分类的结果，采用会话内评估。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示各处理流程在所考虑的每个数据集上的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平（以t值表示），且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准TANG算法与增广协方差方法的荟萃分析，其中超参数分别通过网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法进行选择。我们展示标准化均值差；p值根据图标题所示假设，通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。



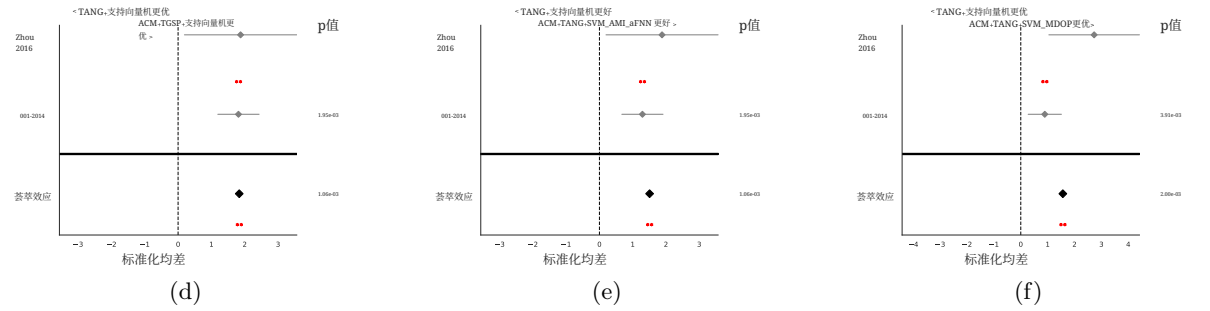
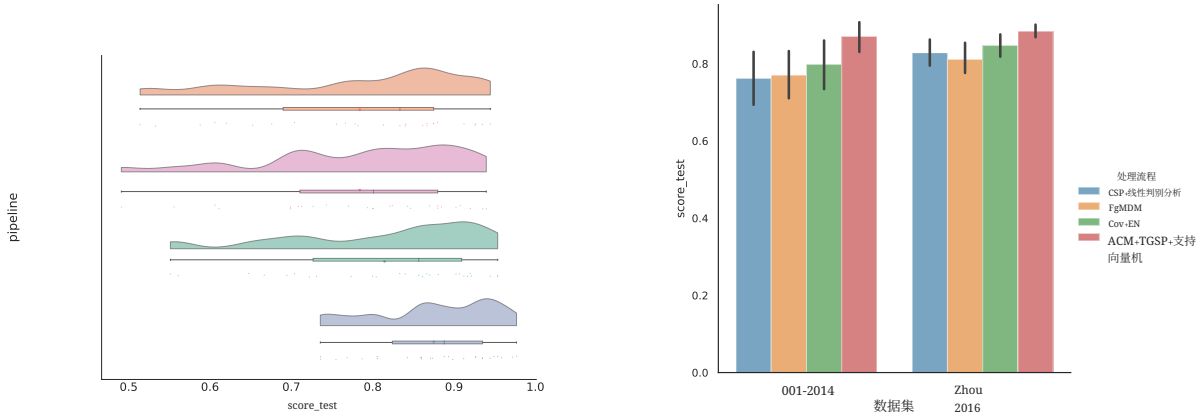
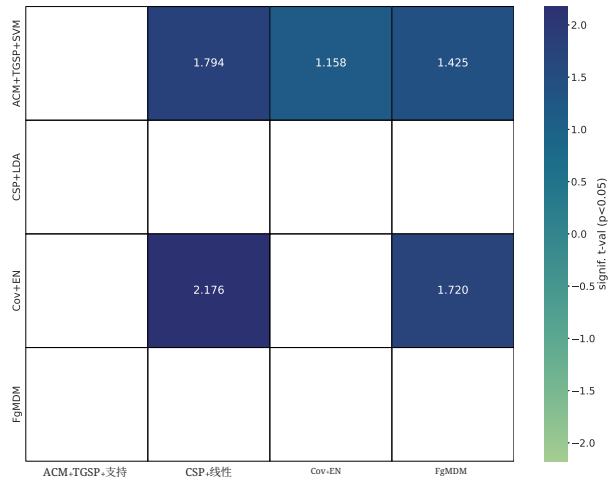


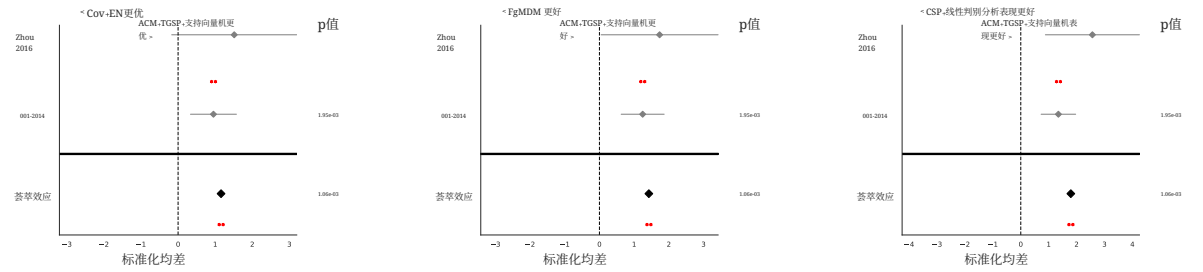
图22：使用TANG算法并进行跨会话评估时，右手、左手和双脚分类的结果。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示各数据集不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考察的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示；图中仅显示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 分别展示标准TANG算法与采用网格搜索、传统Takens方法和统一Takens方法选择超参数的增广协方差方法之间的荟萃分析。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验图标题所示的假设，灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。



(a) (b)



(c)



(d) (e) (f)

图23：使用会话内评估进行右手、左手和双脚分类的结果。(a) 展示了各处理流程的雨云图，显示每位受试者得分的分布。(b) 展示了各数据集上不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示了所考察的不同处理流程的荟萃分析。该图表示纵轴上的算法优于横轴上算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示，并且仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 展示了增强方法结合支持向量机与最先进水平的荟萃分析。我们展示标准化均值差异，而p值则根据图题所述假设，使用单尾Wilcoxon符号秩检验计算；灰色条表示95%区间。此处，*表示 $p < 0.05$，**表示 $p < 0.01$，***表示 $p < 0.001$。

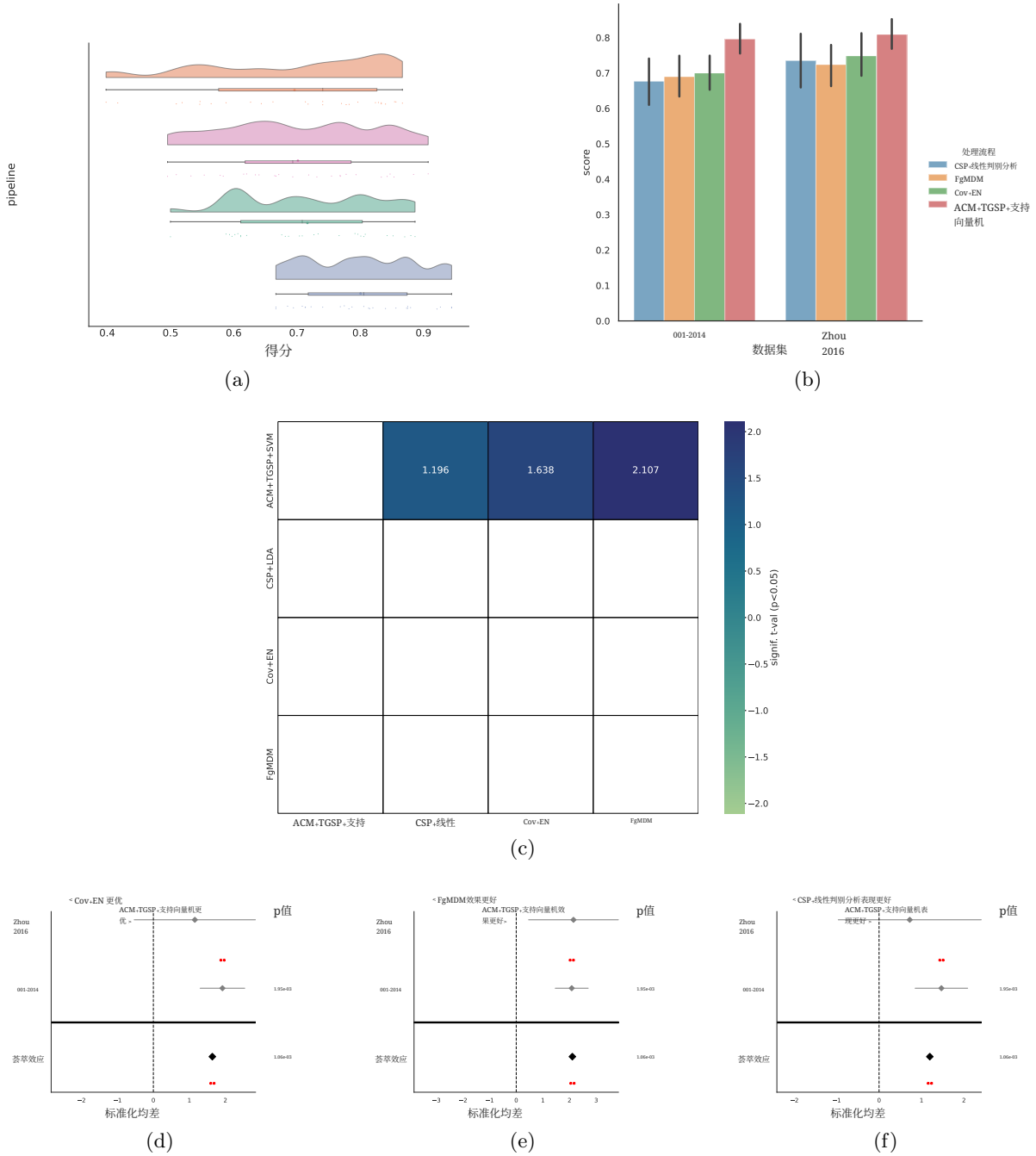


图24：采用跨会话评估进行右手、左手和双脚分类的结果。(a) 展示各处理流程的雨云图，显示每位受试者的得分分布。(b) 展示各数据集所考虑的不同处理流程的得分条形图及误差。(c) 展示所考虑的不同处理流程的荟萃分析。该图显示纵轴上的算法优于横轴上的算法的显著性。颜色表示准确率差异的显著性水平，以t值表示；图中仅展示显著交互作用（$p < 0.05$）。(d)、(e)、(f) 展示增强方法结合支持向量机与最先进水平的荟萃分析。我们展示标准化均值差；p值则通过单尾Wilcoxon符号秩检验计算，检验的假设如图标题所示，灰色条表示95%区间。这里，* 表示 $p < 0.05$，** 表示$p < 0.01$，*** 表示 $p < 0.001$。