Leng平坦环面上的正交谱与关联函数

Nguyen Viet Dang
Matthieu Léautaud
Gabriel Rivière

Abstract. 本短文介绍了 [DLR22] 中取得的一些成果，并且曾作为´第二作者在“数学方程 ”´会议´（奥贝奈，2022年6月）期间一次报告的主题。我们研究平坦环面中与两个凸子集正交的测地线的性质 $\mathbb{T}^d$。我们讨论与这类正交测地线长度集合相关的几何埃普斯坦ζ函数的亚纯性质。我们还定义相应的长度分布，并讨论其傅里叶变换的奇异性。我们的分析依赖于对环面上测地流的动力学关联函数进行细致研究，以及各向异性Sobolev空间的定义；这些空间非常适合这种可积动力学。

arXiv:2302.04512v1 [math.AP] 9 Feb 2023

Contents

1. 引言：环面上的三个问题 11.1. 问题 1：ζ函数 21.2. 问题 2：泊松公式 31.3. 问题3：动力学关联函数 52. 三个结果 62.1. 与环面上正交测地线相关的几何 ζ 函数 62.2. 与环面上正交测地线相关的几何泊松公式 72.3. 关联函数的衰减与量子动力学的出现 93. 关于证明的三点说明 103.1. 相关函数的衰减 103.2. 各向异性Sobolev空间、梅林变换、拉普拉斯变换与傅里叶变换 113.3. 回到正交谱：连接几何学与动力学 14致谢 16参考文献 16

1. 引言：关于环面的三个问题

在这篇短文中，我们从三个彼此不同但又相关的问题出发，回顾作者近期在 [DLR22], 中取得的一些成果。第一个主题涉及一族几何 ζ 函数，它们与环面上两凸体之间的正交测地线长度集合相关。第二个主题涉及与同一集合相关的泊松公式。最后一个主题则与环面上测地流的动力学关联函数的衰减有关。

1.1. 问题 1：ζ函数

最初且具有典范意义的 ζ 函数当然是黎曼ζ函数 :

$$\zeta_{\mathrm{Riem}}(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}.$$

它在半平面 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 上绝对收敛且全纯。众所周知，ζ_{Riem} 可亚纯地延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$，并且只有一个极点，位于 $s = 1$，其留数为 $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\mathrm{Riem}}) = 1$。其非平凡零点的位置与素数的增长有关，并构成了著名的黎曼猜想。

一个密切相关的 ζ 函数由 Epstein 引入 [Eps03]：给定 $q \in \mathbb{R}^d$，设 t

$$\zeta_{\mathrm{Eps}}(q, s) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{-q\}} \frac{1}{|\xi + q|^s},$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的欧几里得范数。与 ζ_{Riem} 一样，该表达式在 $\mathrm{Re}(s) > d$ 时绝对收敛（因而全纯）。Epstein 证明了 ζ_{Eps} 可亚纯地延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$，并且只有一个极点，位于 $s = d$，其留数为 $\mathrm{Res}_{s=d}(\zeta_{\mathrm{Eps}}) = 1$。

更一般地，给定一个实数离散集（其增长至多为多项式增长），可以由此构造一个 ζ 函数，并希望所得 ζ 函数的亚纯性质能为这个离散集提供有用的信息。几何学中非常有趣的离散集，例如可由黎曼流形上某些测地线的长度构成。后者可以用来构造几何 ζ 函数，例如取负曲率流形上闭测地线的长度集（Selberg [Sel56], Smale [Sma67],Ruelle [Rue76], Fried [Fri95], Rugh [Rug96], Giulietti Liverani Pollicott [GLP13], Faure Tsu- jii [FT13, FT17b], Dyatlov Zworski [DZ16].....），或取负曲率流形上正交测地线的长度集，也就是说，取与两个固定的（光滑）集合正交的测地线（Huber [Hub56, Satz A], [Hub59, Satz 2], Margulis [Mar69, Mar04],Parkkonen Paulin [PP16],Broise-Alamichel Parkkonen Paulin [BAPP19],Dang Rivi`ere [DR21].....）。

基于这一几何图像，环面 $\mathbb{T}^d_1 := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$（赋予平坦度量）上的第一个几何 ζ 函数是以下两点ζ函数：给定 x_1, $x_2 \in \mathbb{T}^d_1$，我们定义

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = \{\text{nontrivial geodesic curves between } x_1 \text{ and } x_2\}, \quad \ell(\gamma) = \mathrm{length}(\gamma) > 0,$$

并定义

$$\zeta_{\mathrm{Points}}(x_1, x_2, s) := \sum_{\gamma\in\mathcal{P}(x_1,x_2)} \frac{1}{\ell(\gamma)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) \text{ large enough.}$$

例如，用 $\xi \in \mathbb{Z}^d$ 对这类测地线的集合进行参数化，可取 $\gamma_\xi(t) = (1-t)x_1 + t(x_2+\xi)$，其中 $t \in [0, 1]$，于是我们得到

$$\zeta_{\mathrm{Points}}(x_1, x_2, s) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{x_2-x_1\}} \frac{1}{|x_2 - x_1 - \xi|^s} = \zeta_{\mathrm{Eps}}(x_2 - x_1, s),$$

这个“几何 ζ 函数”与上文所述的 Epstein ζ函数一致。

一个更丰富的几何情形如下。设 K_1 和 K_2 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中两个具有光滑边界 ∂K_1 和 ∂K_2的严格凸紧子集。所谓严格凸，是指凸集 K_i 的边界具有正截面曲率（如果

K 退化为一个点，则约定它是具有光滑边界的严格凸集）。通过典范投影

$$\mathfrak{p} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{2\pi} := \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d \tag{1.1}$$

（注意环面的归一化略有不同），K_1 和 K_2 的边界可以视为平坦环面中的浸入子流形（可能存在自交点）。我们为每个子流形 ∂K_i 选定一个定向 K_i，既可以取外法向量，也可以取内法向量；这会在 Σ_i 上诱导一个定向：$= \mathfrak{p}(\partial K_i)$。现在定义

$$\mathcal{P}_{K_1,K_2} = \{\text{geodesic curves } \textit{directly} \text{ orthogonal to } K_1 \text{ and } K_2\},$$

所谓正交测地线的集合，现设

$$\zeta_{\text{Conv}}(K_1, K_2, s) := \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{K_1,K_2}} \frac{1}{\ell(\gamma)^s}, \quad \text{Re}(s) \text{ large enough.}$$

当 K_1，K_2 都是点时，我们便得到函数 ζ_{Points}的定义。对于函数 $s \mapsto \zeta_{\text{Conv}}(K_1, K_2, s)$，同样需要考虑以下问题：

问题 1. $\zeta_{\text{Conv}}(K_1, K_2, s)$ 在哪里有定义？它能否亚纯延拓到$\mathbb{C}$？它的极点位于何处，又能否计算相应的留数？

问题1 将在下文第2.1 节讨论。

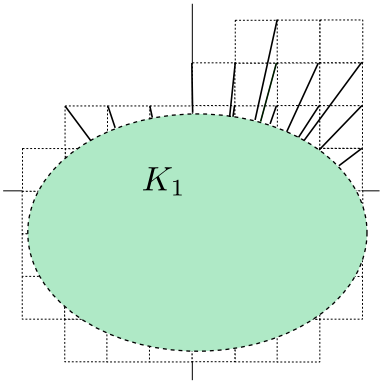

FIGURE 1. 当 $K_2 = \{0\}$时正交测地线弧的提升。

1.2. 问题 2：泊松公式

我们首先回顾著名的泊松公式：它将任意函数 f 在格 $\frac{2\pi}{\nu}\mathbb{Z}$，$\nu > 0$ 上的取值与其傅里叶变换 $\hat{} f$ 在对偶格 $\nu\mathbb{Z}$上的取值联系起来：对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu n) = \frac{2\pi}{\nu} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\big(\frac{2\pi}{\nu}k\big),$$

其中 $\hat{} f(\xi) := \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$。照例，这个公式可以改写为狄拉克梳的傅里叶变换：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\nu n\tau} = \mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\nu n}\right) = \frac{2\pi}{\nu} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi}{\nu}k}. \tag{1.2}$$

在缓增分布的意义下，也就是说，在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$中。现在，给定任意一个实数离散集（其增长至多为多项式级），我们可以构造一个“广义狄拉克梳”，并尝试计算它的傅里叶变换（或者至少描述它的一些性质）。原则上，这将为泊松公式提供一个很好的候选。

特别是，(1.2) 可以重新解释如下： $\nu\mathbb{Z}$ 可以理解为 $\nu\mathbb{Z} = \pm\mathrm{Sp}(\sqrt{-\partial_x^2})$，其中 $-\partial_x^2$ 作用于环面上的函数 $\mathbb{T}_{2\pi\nu} = \mathbb{R}/(2\pi\nu)\mathbb{Z}$；而 $\frac{2\pi}{\nu}\mathbb{Z}$ 可以理解为流形的闭测地线长度集合（关于 0 对称）$\mathbb{T}_{2\pi\nu} = \mathbb{R}/(2\pi\nu)\mathbb{Z}$。因此，谱理论中通过计算狄拉克梳的傅里叶变换，提出了泊松公式的一种影响深远的推广

$$\mathsf{T}(t) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta_g})} \delta_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

即，

$$\widehat{\mathsf{T}}(\tau) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta_g})} e^{-i\tau\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

其中 Δ_g 是紧致黎曼流形上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，$\mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta_g})$ 表示其平方根的谱。根据韦尔定律， $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 中的级数收敛；韦尔定律保证特征值的数量呈多项式增长。Chazarain [Cha74] 和 Duistermaat–Guillemin [DG75] 在 Selberg [Sel56]和 Colin de Verdi`ere [CdV73], 先前结果的基础上进行了推广，并证明了波迹公式：分布 T 的奇异支集恰好是度量 g 对应的周期测地线的长度集合。此外，当测地流非退化时，该公式用附属于周期轨道的几何数据以及形如 $(t \pm \ell + i0)^{-1}$ 的分布，描述 T 在每个周期处的奇异性。换言之，量子谱决定了经典长度谱，这些波迹公式通常被称为广义泊松公式。根据 [H¨or03, p.72], ，该公式中的奇异性可以改写为

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{t \pm \ell + iy} = (t \pm \ell + i0)^{-1} = \mathrm{FP}\left(\frac{1}{t \pm \ell}\right) - i\pi\delta_{\mp\ell}, \tag{1.3}$$

其中 FP(.) 表示（不可积）函数 $(t\pm\ell)^{-1}$的有限部分。与 (1.2) 的差异源于经典狄拉克梳关于 0 对称，因此其傅里叶变换只包含狄拉克型奇异性。

回到第 1.1 节的几何背景，我们可以定义一个几何狄拉克梳，它与 K_1 和 K_2 上两个严格凸集之间的正交测地线长度集合相关联：$\mathbb{T}^d$ 由

$$\mathsf{T}_{K_1,K_2} = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{K_1,K_2}} \delta_{\ell(\gamma)}, \tag{1.4}$$

根据命题 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$，该式在 2.1 中收敛。以下问题值得探讨。**问题 2.** 关于

$$\mathcal{F}\left(\mathsf{T}_{K_1,K_2}\right)(\tau) = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{K_1,K_2}} e^{-i\tau\ell(\gamma)}?$$

能否确定其奇异性的位置？ $\mathcal{F}(\mathsf{T}_{K_1,\ K_2})$ 是狄拉克梳吗？

问题2 将在下文第2.2节讨论。

1.3. **问题3：动力学关联函数**

我们在这些笔记中考虑的最后一个问题，乍看之下似乎与前面的问题略有关系。它既源自动力系统，也源自对动力学偏微分方程的研究。我们考虑下面这个基本的输运方程

$$\begin{cases} \partial_t u - Vu = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}, \\ u|_{t=0} = \varphi & x \in \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中， $\mathcal{M}$ 是赋有密度 $|dx|$的紧致流形， V 是 $\mathcal{M}$上的光滑向量场。物理学中一个普遍的问题，涉及相应解 $u(t) = e^{tV}\varphi$ 的大时间行为（稍微滥用一下记号，$(e^{tV})_{t\in\mathbb{R}}$ 表示由 V生成的演化群，例如作用于 $L^p(\mathcal{M})$上的演化群， $p < \infty$）。假设 $\mathrm{div}_{|dx|}(V) = 0$，那么可以注意到，(1.5)是守恒的，例如， $\|u(t)\|_{L^p(\mathcal{M})} = \|\varphi\|_{L^p(\mathcal{M})}$对任意$p \in [1,\infty]$均成立。因此，不可能在强拓扑下看到方程(1.5)的解收敛或弥散。相反，我们可以在弱意义下考察这些现象，例如研究 $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$在分布意义下的收敛：

$$u(t) \rightharpoonup P_0\varphi \quad \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{M}),$$

其中平衡态 $P_0\varphi$ 有待确定（如果存在）。这个问题在动力系统中尤其受到关注；在这种情况下，$\mathcal{M} = SM$ 是紧致黎曼流形 M上的单位球丛，而 V是作用于 $\mathcal{M} = SM$上的测地向量场。

对于 M 具有负截面曲率的情形，最后这个问题受到了关注。在这种情况下，该流相对于刘维尔测度 L_g是遍历的， $\mathcal{M}$上的唯一不变函数是常数，并且有

$$P_0\varphi = \frac{1}{L_g(\mathcal{M})}\int_{\mathcal{M}} \varphi dL_g.$$

目前已经充分了解（Ratner [Rat87],Dolgopyat [Dol98],Liverani [Liv04], Tsu-jii [Tsu10], Nonnenmacher-Zworski [NZ15].....），该动力系统是指数混合的，也就是说，

$$|\langle u(t) - P_0\varphi, \psi\rangle| \le Ce^{-\epsilon t}\|\varphi\|_{\mathcal{H}}\|\psi\|_{\mathcal{H}'},$$

对于测试函数 φ， ψ取自 $\mathcal{H}$， $\mathcal{H}'$上分布的适当空间 $\mathcal{M}$。

我们最后的问题是环面上上述问题的对应问题，也就是说，如果$M = \mathbb{T}^d$，$\mathcal{M} = S\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1} \ni (x, \theta)$，且测地向量场由$V = \theta \cdot \partial_x$简单给出。

问题3。 在环面上，关联函数的渐近行为如何：对于 $\varphi, \psi \in C^\infty(S\mathbb{T}^d)$：它是否

$$\mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t) := \left\langle e^{tV}\varphi, \psi\right\rangle$$

当 $t \to +\infty$ 时收敛？其极限是什么？ $P_0\varphi$ 是什么？收敛速率如何？是否存在渐近展开？有哪些（可能具有各向异性的）空间 $\mathcal{H}$ 适用于这种收敛？

请注意，当相空间为 $T\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ 而非 $S\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$时，这是动理学中研究的一个经典问题，例如参见 [MV11] 及其中的参考文献。在这种情形下，收敛到零的速率为 $t^{-\infty}$（如果 $e^{-\gamma t}$ 和 φ取自适当的解析函数空间，则甚至为 ψ ）。这里我们将看到，限制在能量壳层 $\mathbb{S}^{d-1}$（而非整个 $\mathbb{R}^d$）上，是导致不同渐近行为的原因。

正如我们将在下文看到的，问题3 实际上比上述两个几何问题简单得多。然而，要妥善回答问题3 是解决问题1和2的基石。

2. 三个结果

本节简要介绍我们针对上述问题所得的一些结果1、2和3。

2.1. 环面上与正交测地线相关的几何 ζ 函数 s

作为第一个结果，我们得到以下命题。

命题 2.1. 存在足够大的 $T_0 > 0$，使得对于任意 $T > T_0$，子集

$$\{\gamma \in \mathcal{P}_{K_1,K_2} : T_0 < \ell(\gamma) \leq T\}$$

$\mathcal{P}_{K_1,\ K_2}$ 是有限的，并且当 $T \to +\infty$ 时有

$$\sharp\{\gamma \in \mathcal{P}_{K_1,K_2} : T_0 < \ell(\gamma) \leq T\} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} T^d}{(2\pi)^d \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} + \mathcal{O}(T^{d-1}). \tag{2.1}$$

在 $K_1 = K_2 = \{0\}$ 的情形下，这恰好等价于计算 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 中长度小于 T 的格点数，并理解式（2.1）中余项的最优阶，这是数论中的一个深刻问题。作为式（（弱形式的）2.1）的一个特定推论，级数 $s \mapsto \zeta_{\mathrm{Conv}}$（$K_1$，$K_2$，$s$）在 $\{\mathrm{Re}(s) > d\}$ 中绝对收敛且全纯。下一步是描述它在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯延拓：

定理2.2。设 K_1 和 K_2 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中两个边界光滑的严格凸紧子集，则

$$s \in \{\mathrm{Re}(s) > d\} \mapsto \zeta_{\mathrm{Conv}}(K_1, K_2, s)$$

亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，其极点位于 $s = 1$、……、d，且均为单极点。

与数论中的经典ζ函数一样，自然会想到计算留数的显式值；鉴于该问题的几何性质，我们希望用与凸集 K_1 和 K_2 相关的自然几何量来表示这些留数。作为准备，我们回顾施泰纳公式 [Sch14，§4]。记 B_d 为 $\mathbb{R}^d$中的单位球。对于 K 中的紧凸子集 $\mathbb{R}^d$，$t \mapsto \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^d}(K + tB_d)$ 是一个次数为 d 且系数非负的多项式。公式

$$\text{for all } t > 0, \quad \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^d}(K + tB_d) = \sum_{\ell=0}^{d} V_{d-\ell}(K) \frac{\pi^{\frac{\ell}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)} t^\ell, \tag{2.2}$$

由此定义了系数族 $V_\ell(K) \geq 0$，称为凸集 K 的 ℓ 阶内在体积。注意，$V_0(K) = 1$，$V_d(K) = \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^d}(K)$。此外，若 ∂K 具有光滑边界，则根据闵可夫斯基–施泰纳公式 [Sch14，第 4 节。2] [Tei16，第 86] 页：

$$V_{d-1}(K) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\partial K),$$

其中，Vol 是由 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得结构在 ∂K 上诱导的 $(d-1)$-体积测度。当 K 退化为一个点时，注意到对于任意 $0 \leq \ell \leq d-1$，$V_{d-\ell}(K) = 0$。其他

这些内在体积的性质包括：在欧几里得等距变换（即旋转与平移的任意复合变换）下保持不变；关于豪斯多夫度量连续；以及[1] 在 $\mathbb{R}^d$的凸子集上具有可加性，即

$$\forall\ 0 \le \ell \le d, \quad V_\ell(K) + V_\ell(L) = V_\ell(K \cup L) + V_\ell(K \cap L),$$

每当 K， L， $K\cup L$， $K\cap L$ 是 $\mathbb{R}^d$的凸子集时。事实上，Hadwiger 的经典定理指出， $\mathbb{R}^d$ 上具有这三种性质的任意泛函，都是这些内蕴体积的线性组合 [Sch14，定理 6.4。14]。

我们的第二个主要定理用这些内蕴体积来表示 $\zeta_{\mathrm{Conv}}(K_1,\ K_2,\ s)$ 的留数：

定理 2.3。设 K_1 和 K_2 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 2)$ 中两个边界光滑的严格凸紧子集。此外，假设 $\Sigma_1 = \mathfrak{p}$（∂K_1）（分别地， $\Sigma_2 = \mathfrak{p}$（∂K_2））由指向 K_1 （分别地， K_2）外侧（内侧）的法向量定向。那么，函数

$$s \mapsto \zeta_{\mathrm{Conv}}(K_1, K_2, s) - \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\pi^{\frac{\ell}{2}}\ell}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)} \frac{V_{d-\ell}(K_1 - K_2)}{s-\ell}$$

从 $\{\mathrm{Re}(s) > d\}$ 全纯延拓至 $\mathbb{C}$.

注意， $-K_2$ 是一个凸集，因此 $K_1 - K_2$也是如此。如果 K_1 和 K_2 都退化为点，那么该定理便恢复了 Epstein ζ 函数的一个经典性质 [Eps03]，因为除 V_0外，所有混合体积都为零。

2.2. 环面上与正交测地线相关的几何泊松公式

关于正交测地线长度分布 $\mathsf{T}_{K_1,\ K_2}$ 我们的首个结果描述了 $\mathsf{T}_{K_1,\ K_2}$ 的分布奇异性。

定理2.4 （泊松型公式）。 设 K_1 和 K_2 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 2)$ 中两个边界光滑的严格凸紧子集。令 $\mathsf{T}_{K_1,\ K_2}$ 由 (1.4)定义，则有

$$\operatorname{Sing\,supp} \widehat{\mathsf{T}}_{K_1,K_2} \subset \mathrm{Sp}(-\sqrt{-\Delta}) \cup \mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta}),$$

其中 $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2$ 是 $\mathbb{T}^d$上的平坦拉普拉斯算子。

这里我们回顾一下，分布 T 的奇异支集是该分布 C^∞所在开集的补集。特别地，几何$\widehat{\ }$分布$\mathsf{T}_{\beta,\ K_1,\ K_2}$ 的奇异支集由拉普拉斯算子的特征值给出，且不依赖于凸集 K_1， K_2。定理的一个更精确形式实际上在 [DLR22],中得到证明，其中描述了奇异性的形式（仅取决于维数 d），并明确给出了首项系数（其取决于凸集 K_1， K_2）。特别是，定理 2.3中涉及的混合体积出现在零点处的奇异性中。

定理 2.4 与波迹公式有相似之处，不同的是，两者的对应关系在某种意义上恰好相反，而且涉及两个给定凸集之间的正交测地线。更确切地说，我们从两个凸集之间的长度正交谱出发，进而构造级数 $\widehat{\ }\mathsf{T}_{K_1,K_2}(t) = \sum_\gamma e^{-it\ell(\gamma)}$，其奇异支集与量子谱 $\mathrm{Sp}(\pm\sqrt{-\Delta})$ 重合，其中 Δ 是拉普拉斯算子。另一个显著差异是，奇异性更为复杂，因为其中涉及形如

[1]满足这种加性性质的泛函称为 *valuation* [Sch14, §6.1]。

$(t \pm \lambda - i0)^{-k}$的分布，其中 $k \geq 1$ 即使在 d 为偶数时也未必是整数。我们强调，与Chazarain–Duistermaat–Guillemin公式中的情形一样，T_{K_1,K_2} 的奇异性并非纯粹的狄拉克型分布（及其导数）。这是因为计数测度 T_{K_1,K_2} 支撑在半直线上，因此其傅里叶变换 T_{K_1,K_2} 的（C^∞及解析）波前集必包含于半余切锥 $\{(t;\tau);\ \tau < 0\} \subset T^*\mathbb{R}$。这排除了纯粹类似 $\delta^{(k)}(t)$ 的奇异性，因为这类奇异性对波前集的贡献会同时包含正、负频率 τ。

基于上述所有原因，就问题 2 而言，分布 $\widehat{\mathsf{T}_{K_1,\,K_2}}$ 完全不是狄拉克梳。我们可以通过以下方式部分解决这个问题。事实上，鉴于我们希望奇异性简单，并受到晶体测度近期进展的启发 [Mey22]，我们可以

- twist the definition of $\mathsf{T}_{K_1,K_2}(t)$ with a weight $e^{i\int_\gamma \beta}$, where
$$\beta = \sum_{j=1}^{d} \beta_j dx_j + df, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}) \tag{2.3}$$
是一个（特定的）闭1-形式，用以消除零点处的奇异性；
- 对分布 $\mathsf{T}_{K_1,\,K_2}(t)$ 进行对称化和重新归一化，以恢复狄拉克型奇异性。

这是我们最后一个主要结果的内容，它在我们的几何框架中推广了 Guinand–Meyer 求和公式 [Mey16，定理 5]。

定理2.5 (Guinand–Meyer 型公式)。设 K_1 和 K_2 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中两个严格凸紧子集，边界光滑，并令 β 如 (2.3) 所示，其中 $(\beta_1, \dots, \beta_d) \notin \mathbb{Z}^d$。令 μ 为如下定义的复测度

$$\mu(t) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{K_1,K_2} : \ell(\gamma) > T_0} \frac{e^{i\int_\gamma \beta}}{\ell(\gamma)^{\frac{d-1}{2}}} \delta_{\ell(\gamma)} + (-i)^{d-1} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{K_2,K_1} : \ell(\gamma) > T_0} \frac{e^{-i\int_\gamma \beta}}{\ell(\gamma)^{\frac{d-1}{2}}} \delta_{-\ell(\gamma)},$$

这里我们对[2] $\mathcal{P}_{K_2,K_1}$ 和 $\mathcal{P}_{K_1,K_2}$采用相同的定向约定。

那么，存在复数 $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pm\sqrt{-\Delta_{[\beta]}})}$ 以及属于 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 的 r，对每个$1 \leq p < \infty$ 均有

$$\widehat{\mu}(\tau) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pm\sqrt{-\Delta_{[\beta]}})} c_\lambda \delta_\lambda + r.$$

在 $(\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}^d$ 的情形下，结果类似，只是在 $\tau = 0$ 处多出一个奇异性，它可能比 Dirac分布更奇异。事实上，已证明，当 K_1和 K_2 是不同的点且 $d = 3$时，$r \equiv 0$ 在 [中成立（Mey16, Th. 5]）。通过我们的几何框架，我们还重新得到 [LR21, §2] 关于在高维构造晶体分布的结果（当 d 为奇数时）。最后，我们证明，只要 $d \geq 5$，r 就不恒等于 0，即使在 K_1、K_2 为点的情形下也是如此。关于更早的相关结果，另见 [Gui59, LO16, RV19]；关于这一方向的最新进展综述，见 [Mey22]。

[2]特别地，这两个集合先验地彼此不同。

2.3. 关联函数的衰减与量子动力学的涌现

定理3.1 和 3.4 （以及它们在微分形式情形下的类似结果）都是以下事实的推论：我们可以给出测地流的施瓦茨核的完整展开。为简单起见，我们可以将关联函数 $\mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t)$ 理解为刘维尔测度下空间 $L^2(S\mathbb{T}^d)$ 的意义，这恰好是 $dL_g = dx \otimes d\mathrm{Vol}(\theta)$ 在 $S\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ 上的值。例如，渐近展开的首项如下。

定理 2.6 （测地流的时间渐近，函数情形，首项）。 对于任意光滑函数 φ， $\psi \in \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d)$，有

$$\mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t) = (P_0\varphi, P_0\psi)_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{\pm} e^{\mp i\frac{\pi}{4}(d-1)} \left(\frac{e^{\pm it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}^{\frac{d-1}{2}}} \Pi_0^{\pm}\varphi, \Pi_0^{\pm}\psi \right)_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \mathcal{O}_{\varphi,\psi}\left(\frac{1}{t^{\frac{d-1}{2}+1}}\right)$$

其中 $(P_0 f)(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x,\theta)\, dx$ 是到 x-不变函数向量空间上的投影，并且

$$(\Pi_0^{\pm} f)(x) = \sum_{\xi \neq 0} \hat{f}_\xi\left(\pm\frac{\xi}{|\xi|}\right) e^{i\xi\cdot x}, \quad for \quad f(x,\theta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}_\xi(\theta)\, e^{i\xi\cdot x}.$$

等价地，对于任意光滑函数 $\psi \in \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d)$，有

$$t^{\frac{d-1}{2}} \left(\psi \circ e^{-tV}(x,\theta) - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \psi(y,\theta) dy \right) = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{\pm} \mathbf{P}_\pm^\dagger \frac{e^{\pm i\left(t\sqrt{-\Delta} - \frac{\pi}{4}(d-1)\right)}}{(-\Delta)^{\frac{d-1}{4}}} \mathbf{P}_\pm + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d)}(t^{-1})$$

其中 $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ 是作用于 $\mathbb{T}^d$ 上的欧几里得拉普拉斯算子，

$$\mathbf{P}_\pm : \psi \in \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d) \mapsto \sum_{\xi\neq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \psi\left(y, \pm\frac{\xi}{|\xi|}\right) e^{i(y-x)\cdot\xi} dy \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$$

and

$$\mathbf{P}_\pm^\dagger : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d) \mapsto \sum_{\xi\neq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{T}^d} f(y)\, e^{i(y-x)\cdot\xi} dy \right) \delta_0\left(\theta \mp \frac{\xi}{|\xi|}\right) \in \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d)$$

实际上，我们给出了完整的渐近展开，并对每一步的余项作出了精确描述。事实上（并且我们将会）用各向异性索伯列夫范数来表述这一结果。

为了持续与负曲率流形进行比较，这样的结果可视为量子动力学在测地流的长时间动力学中涌现的一个简单实例_(通过环面上的半波群 $(e^{\pm it\sqrt{-\Delta}})_{t\in\mathbb{R}}$ ， 即 $e^{tV})_{t\in\mathbb{R}}$ on $S\mathbb{T}^d$) 。这或许可以解释为：在趋近平衡态的过程中，经典动力学对主导阶的修正由量子涨落所支配（其振幅随时间按 $t^{-\frac{d-1}{2}}$ 衰减）。

这一现象最近由 Faure 和 Tsujii 在接触阿诺索夫流的一般背景下展示 [FT15、FT17b、FT17a、FT21]。另请参阅 [DFG15] ， 了解相关结果

Dyatlov、Faure 和 Guillarmou 在双曲流形上的测地流这一特例中进行了研究。与 *Faure* 和 *Tsujii* 的结果相比，我们强调，我们的分析高度依赖于所研究流的代数结构，正如 [Rat87、DFG15]所处理的双曲情形一样。此外，我们研究的是完全可积系统；从某种意义上说，与上述所有文献所考察的动力学情形相比，这类系统的行为恰好相反。特别是，由于系统具有可积性，量子传播子的渐近展开是多项式的，而不像 [FT21，定理 1 中那样呈指数形式。2]这让人联想到这种情形下测地流较弱的混合性质。

3. 关于证明的三点说明

本节简要讨论证明中的一些要点，重点关注其解析方面（完全不涉及其几何方面，相关内容请参阅 [DLR22]）。

3.1. 关联函数的衰减

本节简要概述定理 2.6 的证明。该证明仅涉及经典的驻相/非驻相估计，同时也是定理 2.2、2.3和2.5 证明的根基、核心和基石。

为了给出关联函数 $\mathcal{C}_{\varphi,\,\psi}(t)$ 的渐近展开，我们对 $x \in \mathbb{T}^d$ 中的函数作部分傅里叶级数展开

$$\psi(x,\theta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\psi}_\xi(\theta) e^{i\xi\cdot x}, \quad \varphi(x,\theta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}_\xi(\theta) e^{i\xi\cdot x}.$$

回顾一下，测地流就是平移

$$e^{tV} : (x,\theta) \mapsto (x + t\theta, \theta),$$

并利用 Plancherel 恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t) &= \left(e^{tV}\varphi, \psi\right)_{L^2(S\mathbb{T}^d)} = \int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} \varphi(x+t\theta,\theta)\overline{\psi}(x,\theta) dx\, d\,\mathrm{Vol}(\theta) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{it\xi\cdot\theta} \widehat{\varphi}_\xi(\theta)\overline{\widehat{\psi}_\xi}(\theta) d\,\mathrm{Vol}(\theta) \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \widehat{\varphi}_0(\theta)\overline{\widehat{\psi}_0}(\theta) d\,\mathrm{Vol}(\theta)}_{=(P_0\varphi, P_0\psi)_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}} + \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d,\xi\neq 0} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{it\xi\cdot\theta} \widehat{\varphi}_\xi(\theta)\overline{\widehat{\psi}_\xi}(\theta) d\,\mathrm{Vol}(\theta)}_{\text{oscillatory integral}}
\end{aligned}$$

时间不变项已经确定，接下来需要给出振荡积分的渐近展开，将其改写为以下形式

$$I_F(\xi,t) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{it\xi\cdot\theta} F(\theta) d\,\mathrm{Vol}(\theta), \quad \text{as } t\to+\infty.$$

将向量 ξ旋转后，不妨设 $\xi = |\xi| e_d$，其中 e_d 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基的最后一个向量，且 $\lambda = t|\xi|$ 很大（回想一下，$|\xi| \geq 1$ 在求和中），因此我们只需研究

$$I_F(\xi,t) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\lambda e_d\cdot\theta} F(\theta) d\,\mathrm{Vol}(\theta), \quad \text{as } \lambda\to+\infty.$$

估计这类积分是调和分析中的经典课题，参见例如 [Her62，Lit63] ，其中给出了粗略估计；以及 [H¨or03，定理 7.7。14], [Ste93，第 VIII-3 节，第347] 页；以及 [DZ19，定理 3.38，第140]页，其中给出了精细的渐近展开。在这个振荡积分中，相位是高度函数 $\mathbb{S}^{d-1} \ni \theta \mapsto e_d \cdot \theta$。后者只有两个（非退化的）临界点，分别为 $\theta = \pm e_d$。

N驻相展开给出（略微不严谨地说）“远离极点 $\pm e_d$” :

$$|I_F(\xi,t)| \leq \frac{C_N}{\lambda^N}\|F\|_{W^{N,1}} = \frac{C_N}{t^N}\frac{1}{|\xi|^N}\|\widehat{\varphi_\xi}\widehat{\overline{\psi_\xi}}\|_{W^{N,1}(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \frac{C_N}{t^N}\frac{1}{|\xi|^N}\|\widehat{\varphi}_\xi\|_{H^N(\mathbb{S}^{d-1})}\|\widehat{\psi}_\xi\|_{H^N(\mathbb{S}^{d-1})}. \tag{3.1}$$

靠近极点 $\pm e_d$时，驻相展开（此处省略细节，参见 [DLR22]）给出如下结果，其中微分算子 $L_j^{\pm}$阶数为 $2j$ ，作用于 $\mathbb{S}^{d-1}$ （带有 $L_0^{\pm} =$ 恒等算子）：

$$I_F(\xi,t) = e^{\pm i\lambda}e^{\mp i\frac{\pi}{4}(d-1)}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d-1}{2}}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda^j}L_j^{\pm}(F)(\pm e_d) + \mathcal{O}_N\left(\frac{1}{\lambda^{N+\frac{d-1}{2}}}\right)\|F\|_{W^{2N+d,1}}.$$

回到关联函数，并回想一下我们进行了旋转，使得 $e_d = \frac{\xi}{|\xi|}$，由此得到

$$\mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t) = (P_0\varphi, P_0\psi)_{L^2} + \sum_{\xi\neq 0} e^{\pm it|\xi|}e^{\mp i\frac{\pi}{4}(d-1)}\left(\frac{2\pi}{t|\xi|}\right)^{\frac{d-1}{2}}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(t|\xi|)^j}L^{\pm}_{j,\frac{\xi}{|\xi|}}\left(\widehat{\varphi_\xi}\widehat{\overline{\psi_\xi}}\right)\left(\pm\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$
$$+ \mathcal{O}_N\left(t^{-N-\frac{d-1}{2}}\right)\sum_{\xi\neq 0}\frac{\|\widehat{\varphi}_\xi\|_{H^{2N+d}(\mathbb{S}^{d-1})}\left\|\widehat{\psi}_\xi\right\|_{H^{2N+d}(\mathbb{S}^{d-1})}}{|\xi|^{N+\frac{d-1}{2}}}. \tag{3.2}$$

至此，我们完成了定理2.6结果的高阶版本证明概要。

3.2. 各向异性Sobolev空间、Mellin变换、拉普拉斯变换与傅里叶变换 s

考察上述渐近展开中的主要项与余项（3.1）和（3.2），并回想 $\xi \in \mathbb{Z}^d$ 是相对于 $x \in \mathbb{T}^d$的傅里叶变量，我们看到，在 $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和 $x \in \mathbb{T}^d$方向上，对正则性/奇异性的要求/允许程度各不相同。此外，对于 θ，靠近和远离极点 $\pm\frac{\xi}{|\xi|}$时所要求的正则性也不同，但这里不讨论这个问题。由此，我们将如下定义 $S\mathbb{T}^d$ 上的分布各向异性Sobolev空间

$$\mathcal{H}^{M,N}(S\mathbb{T}^d) := \left\{u \in \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d) : \|u\|^2_{\mathcal{H}^{M,N}(S\mathbb{T}^d)} := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\langle\xi\rangle^{2N}\|\widehat{u}_\xi\|^2_{H^M(\mathbb{S}^{d-1})} < +\infty\right\},$$

其中（M， N） $\in \mathbb{R}^2$， $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$,-以及

$$u(x,\theta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\widehat{u}_\xi(\theta)\frac{e^{i\xi\cdot x}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}},$$

其中 $\widehat{u}_\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{d-1})$， $\|.\|_{H^M}$ 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$上的标准索伯列夫范数。粗略地说，如果 u 在变量 $x \in \mathbb{T}^d$（该变量在几何上可理解为所谓的水平方向）上具有 H^N 正则性，并且在

变量 $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ （该变量在几何上可理解为所谓的垂直方向）。有了这一记号，(3.2) 中的余项例如可以改写为

$$\sum_{\xi\neq 0} \frac{\|\widehat{\varphi}_\xi\|_{H^{2N+d}} \left\|\overline{\widehat{\psi}_\xi}\right\|_{H^{2N+d}}}{|\xi|^{N+\frac{d-1}{2}}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{2N+d,-(N+\frac{d-1}{2})}} \|\psi\|_{\mathcal{H}^{2N+d,-(N+\frac{d-1}{2})}},$$

并且我们注意到，展开式 (3.2) 在阶数不超过 N 时，对分布 φ，ψ 仅为$H^{-\frac{d-1}{2}}$ 在 $x \in \mathbb{T}^d$ 中成立，但在 H^{2N+d} 中具有正则性 $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$。注意，对$H^{-\frac{d-1}{2}}$ 沿 x变量的限制源自渐近展开的首项。

受定理 2.2 和 2.4的启发并与之类似，给定两个函数 φ，ψ $\in C^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$，我们现在讨论相关联的关联函数 $\mathcal{C}_{\varphi,\,\psi}$的梅林变换、拉普拉斯变换和傅里叶变换的性质，即

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\psi}\big)(s) &:= \int_1^\infty t^{-s}\, \mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t)dt \quad \text{(Mellin transform)},\\
\mathcal{L}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\psi}\big)(s) &:= \int_0^\infty e^{-st}\, \mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t)dt \quad \text{(Laplace transform)},\\
\mathcal{F}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\psi}\big)(\tau) &:= \int_0^\infty e^{-i\tau t}\, \mathcal{C}_{\varphi,\psi}(t)dt \quad \text{(Fourier transform)}.
\end{aligned}$$

更确切地说，我们可以将它们视为映射 $\mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d)$，作用于 φ，并以 ψ 为检验函数，即例如 $\mathcal{M}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\,\psi}\big)(s) = \langle \mathcal{M}(s)\varphi,\ \psi\rangle$。关于梅林变换，我们的第一个结果如下。

定理 3.1 (梅林变换，函数情形)。 设 $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty([1,+\infty))$ 满足条件，使得 $\chi = 1$ 在 1 的一个邻域内，并设 $N \in \mathbb{Z}_+$。那么，算子

$$\mathcal{M}(s) := \int_1^\infty t^{-s} e^{-tV*} |dt| : \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d)$$

可分解为

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}_0(s) + \mathcal{M}_\infty(s),$$

其中

$$\mathcal{M}_0(s) := \int_1^\infty \chi(t) t^{-s} e^{-tV*} |dt| : \mathcal{H}^{N,-N/2}(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{H}^{N,-N/2}(S\mathbb{T}^d)$$

是作用于 $\mathbb{C}$ 上的有界算子全纯族，且

$$\mathcal{M}_\infty(s) := \int_1^\infty (1-\chi(t)) t^{-s} e^{-tV*} |dt| : \mathcal{H}^{N,-N/2}(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{H}^{-N,N/2}(S\mathbb{T}^d)$$

可延拓为从 $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ 到 $\{\mathrm{Re}(s) > 1-N\}$的有界算子亚纯族，且仅在 $s = 1$ 处有一个简单极点，其留数为

$$\forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d), \quad \mathrm{Res}_{s=1}\left(\mathcal{M}_\infty(s)\right)(\psi)(x,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \psi(y,\theta) dy.$$

特别是，这一结果告诉我们，算子 $\mathcal{M}(s) : \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d)$ 可从 $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ 亚纯延拓至整个复平面，且仅在$s = 1$处有一个简单极点。不过，这一陈述更为精确，因为它还允许我们描述这种亚纯延拓所允许的正则性。我们强调， $\mathcal{M}_0(s)$ 的映射性质可由各向异性范数的定义直接得出，而其中的主要难点在于

该陈述涉及 $\mathcal{M}_\infty(s)$ 沿 x 变量的“正则化”性质，这对我们在凸几何中的应用至关重要。这一结果的证明主要依赖渐近展开 (3.1)，以及对时间变量在 $\mathcal{M}(s)$上积分所产生的、沿流方向的微局部平滑效应。值得注意的是，这些亚纯延拓在如下分布空间上成立：沿 $S\mathbb{T}^d$ 的竖直丛（即 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的切空间）具有正则性，而沿水平丛（即 $\mathbb{T}^d$ 的切空间）则可能具有负Sobolev正则性。此外，$\mathcal{M}_\infty(s)$ 的输出沿 x 变量具有一定的正则性。特别是，各向异性Sobolev空间 $\mathcal{H}^{N,-N/2}$ 在 $N > d$ 的情况下包含 Dirac分布 $\delta_{[0]}(x)$；而这类分布通常正是我们将选作测试函数、以推导凸几何中的主要应用的对象（见下文 (3.4)）。为了证明定理 2.2 和 2.3，我们实际上还需要针对 $\mathcal{M}(s)$ 在微分形式上的作用证明更一般的结论，更准确地说，是针对其在某些流的各向异性Sobolev空间上的作用。除此之外，在微分形式上的作用还会导致在 $s = 2, \dots, d$ 处出现额外极点；不过，这个简化的陈述已经说明了我们所追求的性质。

相同的空间也将使我们能够证明关于拉普拉斯变换的以下对应命题。

定理3.2。算子

$$\mathcal{L}(s) := (V + s)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-tV*} |dt| : \mathcal{C}^\infty(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{D}'(S\mathbb{T}^d), \tag{3.3}$$

定义于 $\mathrm{Re}(s) > 0$，可解析延拓为一个 $\mathcal{C}^\infty$ 函数至

$$\{\mathrm{Re}(s) \geq 0\} \setminus \left(i \,\mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta}) \cup i \,\mathrm{Sp}(-\sqrt{-\Delta}) \right).$$

令虚轴上的极限为 $s \to i\tau \in i\mathbb{R}$，$\mathrm{Re}(s) > 0$，可以验证

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\psi}\big)(i\tau + \alpha) \to_{\alpha \to 0, \alpha > 0} \mathcal{F}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\psi}\big)(\tau) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

由此可直接得到以下推论。

推论 3.3。对所有 φ，$\psi \in C^\infty(S\mathbb{T}^d)$，$\mathrm{Sing\,supp}\, \mathcal{F}\big(\mathcal{C}_{\varphi,\,\psi}\big) \subset \mathrm{Sp}(\sqrt{-\Delta}) \cup \mathrm{Sp}(-\sqrt{-\Delta})$.

注意，在考虑关于 x 变量的三角多项式情形时，可以验证，奇异支集包含于与所考虑的 Fourier 模对应的 Laplace 谱的一个有限部分中。当然，这个推论（至少在形式上）与定理 2.4 有关。在定理 3.2 的粗略结果中，我们没有追踪各向异性Sobolev空间，因为延拓的 $\mathcal{C}^k$ 正则性取决于 N in$_{\mathcal{H}^{N,-N/2}}(S\mathbb{T}^d)$。如果我们只考虑延拓的 $\mathcal{C}^0$ 正则性，那么下面的结果给出了一个更精确的陈述示例，其中我们追踪了各向异性Sobolev空间以及奇异性的描述。

定理 3.4 (拉普拉斯变换，函数情形，连续延拓)。设 $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty))$满足 $\chi = 1$ 在 0 的某个邻域内成立，并设 $N \in 2\mathbb{Z}_+^* + d$。那么，算子 $\mathcal{L}(s)$ 在 (3.3)中可分解为

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_\infty(s),$$

其中

$$\mathcal{L}_0(s) := \int_0^\infty \chi(t) e^{-st} e^{-tV*} |dt| : \mathcal{H}^{N,-N}(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{H}^{N,-N}(S\mathbb{T}^d)$$

是 $\mathbb{C}$ 上的有界算子全纯族，并且

$$\mathcal{L}_\infty(s) := \int_0^\infty (1-\chi(t))e^{-st}e^{-tV*}|dt| : \mathcal{H}^{N,-N/2}(S\mathbb{T}^d) \to \mathcal{H}^{-N,N/2}(S\mathbb{T}^d)$$

从 $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ 连续延拓至

(1) $\{\mathrm{Re}(s) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 如果 $d \geq 4$,

(2) $\{\mathrm{Re}(s) \geq 0\} \setminus \{\pm i|\xi| : \xi \in \mathbb{Z}^d\}$ 若 $d = 2$, 3。

此外，在任意维数下，当 $s \to 0^+$ 时，有

$$(V+s)^{-1}(\psi)(x,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d s}\int_{\mathbb{T}^d} \psi(y,\theta)dy + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(1),$$

并且，当 $d = 23$ 时，当 $s \to \pm i|\xi_0|$ （其中 $|\xi_0| \neq 0$）时，有

$$\begin{aligned}&(V+s)^{-1}(\psi)(x,\theta)\\ &\quad= \frac{e^{\mp i\pi\frac{d-1}{4}}g_d(s \mp i|\xi_0|)}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}|\xi_0|^{\frac{d-1}{2}}}\sum_{\xi:|\xi|=|\xi_0|} e^{i\xi\cdot x}\delta_0\left(\theta \mp \frac{\xi}{|\xi|}\right)\int_{\mathbb{T}^d}\psi\left(y, \pm\frac{\xi}{|\xi|}\right)e^{-i\xi\cdot y}dy + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(1),\end{aligned}$$

其中

$$g_2(z) := \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}}, \quad and \quad g_3(z) := -\ln(z).$$

同样，定理 3.2 和定理 3.4 是由式 (3.2) 中关联函数的精确渐近展开（另见定理 2.6），以及一个显然却至关重要的事实推得的：形式上对式 (3.2) 取拉普拉斯变换时，最初定义在 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 上的 $\int_1^\infty \frac{e^{t(\pm i|\xi|-s)}}{t^{\frac{d-1}{2}}}dt$ 可平滑延拓至 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$，但在 $s = \pm i|\xi|$ 处存在一个奇异性（取决于维数 d）。我们再次强调，该定理在 x 变量上提供的平滑效应，对于推导凸几何中的泊松公式至关重要。请注意，在远离奇异性之处（且若不考虑这一平滑性质），我们也可以不采用非驻相论证，而是对由 $\xi \in \mathbb{Z}^d$ 索引的乘法算子族 $u \in L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \mapsto (\xi\cdot\theta)u(\theta) \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 应用 Mourre 对易子方法 [ABdMG96]（然后对 $\xi \in \mathbb{Z}^d$ 求和）。

3.3. 回到正交谱：链接数几何学与动力学

本段将非常粗略地介绍证明命题 2.1、定理2.2、2.3和 2.5的策略，尤其说明这些几何问题与第 2.3 节的动力学问题之间的联系。自 Margulis 的开创性工作以来 [Mar69, Mar04], 人们已充分认识到，在负曲率流形上，将流形上的几何问题提升到其单位余切丛上来处理十分方便。例如，庞加莱级数的性质与测地流的渐近性质有关，更具体地说，与其混合性质有关。在一篇近期论文中 [DR21], 本文的第一位和最后一位作者运用德拉姆流理论阐述了这种联系；我们将在平坦环面的情形下沿用这一方法（尽管曲率处处为零）。下面我们来说明这种联系，但不严格界定各种积分的含义。记 $N_\pm(K_i)$ 为 K_i 内的 $S\mathbb{T}^d$向外／向内单位法丛，即

$$N_\pm(K_i) := \{(\mathfrak{p}(x), d\mathfrak{p}(x)\theta), x \in \partial K_i, \pm\theta \text{ directly orthogonal to } \partial K_i \text{ at } x\},$$

其中 $\mathfrak{p}$ 定义见（1.1）。那么，对于任意足够好的函数 $\chi(t)$，例如属于 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$（若我们关注的是命题 2.1 中那样的计数函数），t^{-s}（若我们关注的是 ζ 函数或梅林变换）或 e^{-st}（若我们关注的是预解式、拉普拉斯变换或傅里叶变换），有

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{K_1,K_2}} \chi(\ell(\gamma)) = \langle \mathsf{T}_{K_1,K_2}, \chi\rangle,$$

其中 $\mathsf{T}_{K_1,\ K_2}$ 在（1.4）中定义。借鉴 [DR21], ，我们证明

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{K_1,K_2}} \chi(\ell(\gamma)) = (-1)^{d-1}\int_{S\mathbb{T}^d}[N_{\sigma_1}(K_1)]\wedge\int_{\mathbb{R}}\chi(t)e^{-t\mathbf{V}}\iota_V([N_{\sigma_2}(K_2)])dt, \tag{3.4}$$

其中 $[N_{\sigma_i}(K_i)]$ 是沿 $N_{\sigma_i}(K_i)$ 的德拉姆积分流，$\sigma_i\in\{\pm\}$ 取决于我们对每个凸集采用的定向约定，并且

$$e^{tV}:(x,\theta)\in S\mathbb{T}^d\to(x+t\theta,\theta)\in S\mathbb{T}^d$$

是测地流。为简便起见，在本次讨论的余下部分中，我们省略对 σ_i 的依赖。公式（3.4）源于以下观察：$\mathcal{P}_{K_1,\ K_2}$ 中的元素与连接两个勒让德子流形 $N(K_1)$ 和 $N(K_2)$ 的 $S\mathbb{T}^d$ 中的测地轨道一一对应。

这个（严谨的）公式将两个子流形交点的计数与作用于流上的测地流联系起来，并且可以形式化地（尽管略欠严谨地）改写为

$$\langle \mathsf{T}_{K_1,K_2},\chi\rangle = \left\langle \mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}(t),\chi(t)\right\rangle,$$

也就是说，在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 的意义下

$$\mathsf{T}_{K_1,K_2}(t) = \mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}(t),$$

其中，$\mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}(t)$表示两个德拉姆积分流 $[N(K_1)]$和 $\iota_V[N(K_2)]$的相关分布（它不再是t的函数）。将相关分布与 $\chi(t)=e^{-st}$ 配对（然后取 $s=i\tau+\alpha$ 在 $\alpha\to0^+$下的极限，从而如 [H¨or03, Th.3.1.11]中那样，得到拉普拉斯变换在 $i\mathbb{R}$ 上的边界值形式的傅里叶变换），再与 $\chi(t)=t^{-s}$ 配对，便可特别地通过以下关系将问题 1、2 和 3联系起来：

$$\underbrace{\mathcal{L}\left(\mathsf{T}_{K_1,K_2}\right)(s)}_{\text{Laplace transform, related to Question 2}} = \langle \mathsf{T}_{K_1,K_2}, e^{-st}\rangle = \left\langle \underbrace{\mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}(t)}_{\text{(almost) Question 3}}, e^{-st}\right\rangle$$
$$= \underbrace{\mathcal{L}\left(\mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}\right)(s)}_{\text{Laplace transform}},$$

and

$$\underbrace{\zeta_{\mathrm{Conv}}(K_1,K_2,s)}_{\text{Question 1}} = \langle \underbrace{\mathsf{T}_{K_1,K_2}}_{\text{Question 2}}, t^{-s}\rangle = \left\langle \underbrace{\mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}(t)}_{\text{(almost) Question 3}}, t^{-s}\right\rangle$$
$$= \underbrace{\mathcal{M}\left(\mathcal{C}_{[N(K_1)],\iota_V[N(K_2)]}\right)(s)}_{\text{Mellin transform}}.$$

遗憾的是，德拉姆流 $[N(K_1)]$ 和 $\iota_V[N(K_2)]$ 不属于第 3.2 节定义的各向异性空间（德拉姆流版本） $\mathcal{H}^{M,N}(S\mathbb{T}^d)$。不过，经过形如$(x,\theta) \mapsto (x + x_K(\theta)\ \theta)$的映射（其中 x_K表示 K的高斯映射的逆映射）作用后，它们便属于这些空间；而处理这一额外变换还需要一些技术性工作。此外，关键公式 (3.4) 要求满足几何上的“一致横截性”假设，而严格凸性集合 K_1, K_2可保证这一假设成立。我们不在此展开讨论，而是请有兴趣的读者参阅文章 [DLR22]。

致谢

我们衷心感谢 B. Chantraine、N.B. Dang、F. Faure、Y. Guedes-Bonthonneau、D. Han-Kwan 和 J. Viola 就与本工作相关的问题展开富有意义的讨论。ML 和 GR 获得法国国家研究署通过 ADYCT PRC资助项目（ANR-20-CE40-0017）提供的部分支持。GR 还感谢法国大学研究院以及法国国家研究署 ODA PRC资助项目（ANR-18-CE40-0020）提供的支持。

参考文献

[ABdMG96] W.O. Amrein、A. Boutet de Monvel 和 V. Georgescu。 *C_0-groups commutator methods and spectral theory of N-body Hamiltonians*。现代 Birkhauser 经典著作。Birkhauser/Springer，巴塞尔，1996年。 [2013] 1996年版重印本。[BAPP19] A. Broise-Alamichel、J. Parkkonen 和 F. Paulin。 *Equidistribution and counting under equilibrium states in negative curvature and trees* 329 *Progress in Mathematics*，第 卷。Birkhauser/Springer，查姆，2019年。[CdV73] Y. Colin de Verdi ere。《拉普拉斯 *Com-positio Math.* 27 83 106 27 1973 159 184, 1973 算子的谱与周期测地线的长度》。I、II。[Cha74] J. Chazarain。《黎曼流形的泊松公式》。 *Inventiones mathematicae*，24 1 65 82，1974年 ( ): – 。[DFG15] S. Dyatlov、F. Faure 和 C. Guillarmou。《双曲流形上测地流的功率谱》。 *Anal. PDE*，8(4):923–1000，2015年。[DG75] J. J. Duistermaat 和 V. W. Guillemin。《正椭圆算子的谱与周期双特征线》。 *Invent. Math.*，29(1):39–79，1975。[DLR22] N.V. Dang、M. L´eautaud 和 G. Rivi`ere。《平坦环面上凸体的长度正交谱》。2022年。预印本 https://arxiv.org/pdf/2207.05410。[Dol98] D. Dolgopyat。《阿诺索夫流中的关联衰减》。 *Ann. of Math. (2)*，147(2):357–390，1998年。[DR21] N.V. Dang 和 G. Rivi`ere。《勒让德结的庞加莱级数与链接数》。2021年。预印本 arxiv 2005.13235。[DZ16] S. Dyatlov 和 M. Zworski。《通过微局部分析研究阿诺索夫流的动力学ζ函数》。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，49(3):543–577，2016年。[DZ19] S. Dyatlov 和 M. Zworski。 *Mathematical theory of scattering resonances* 200 *Graduate*，第 卷。美国数学 *Studies in Mathematics* 2019 会，普罗维登斯，RI，。[Eps03] P. Epstein。《一般ζ函数理论》。 *Math. Ann.*，56(4):615–644，1903年。[Fri95] D. Fried。《解析流的亚纯ζ函数》。 *Comm. Math. Phys.*，174 190，1995 1 161( ): – 。[FT13] F. Faure 和 M. Tsujii。《接触阿诺索夫流的鲁埃勒谱带结构》。 *C. R.*，(-): – 。[FT15] *Math. Acad. Sci. Paris* 351 9 10 385 391, 2013 F. Faure 和 M. Tsujii。《辛阿诺索夫微分同胚的预量子转移算子》。*Astérisque*，(375):ix+222，2015年。[FT17a] F. Faure 和 M. Tsujii。《阿诺索夫流鲁埃勒谱的分形韦尔定律》。2017年。预印本 https://arxiv.org/abs/1706.09307。

[FT17b] F. Faure 和 M. Tsujii。《负曲率流形上测地流的半经典ζ函数》。 *Invent. Math.*，208(3):851–998，2017年。

[FT21] F. Faure 和 M. Tsujii。接触阿诺索夫流的微局部分析与鲁埃勒谱的带状结构。2021年。预印本 https://arxiv.org/abs/2102.11196。

[GLP13] P. Giulietti、C. Liverani 和 M. Pollicott。阿诺索夫流与动力学ζ函数。 *Ann. of* , (): –。

[Gui59] A. P. Guinand。一致性与序列的调和分析。 *Acta Math.*，101 271，1959年 235：–。

[Her62] C. S. Herz。与凸集相关的傅里叶变换。 *Ann. of Math. (2)*，75：81–92，1962年。

[Hör03] L. Hörmander。 *The analysis of linear partial differential operators. I*。数学经典丛书。Springer 出版社，柏林，2003年。分布理论与傅里叶分析，第二版（1990年）的重印本。

[Hub56] H. Huber. 关于双曲平面上一类新的自守函数及格点问题。I. *Comment. Math. Helv.*, 30:20–62 (1955), 1956年。

[Hub59] H. Huber. 关于双曲空间形式和运动群的解析理论。 *Math.* , : – 。

[Lit63] W. Littman。曲面承载测度的傅里叶变换及曲面平均的可微性。 *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:766–770, 1963。

[Liv04] C. Liverani. 关于接触阿诺索夫流。 *Ann. of Math. (2)*, 159(3):1275–1312, 2004。

[LO16] N. Lev 和 A. Olevskii. 具有离散支撑和谱的准晶体。 *Rev. Mat. Iberoam.*, 32 4 1341 1352,2016年 ( ): – 。

[LR21] N. Lev 和 G. Reti。涉及平方和函数的泊松求和公式。 *Israel J.* , ( ): – 。

[Mar69] G.A. Margulis。遍历理论在研究负曲率流形中的某些应用。 *Funkcional. Anal. i Prilož.*, 3(4):89–90, 1969。

[Mar04] G.A. Margulis。 *On some aspects of the theory of Anosov systems*。数学专著丛书。Springer 出版社，柏林，2004年。附 Richard Sharp 撰写的综述：双曲流的周期轨道，由 Valentina Vladimirovna Szulikowska 从俄文翻译。

[Mey16] Y. Meyer。具有局部有限支撑和谱的测度。 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 113 12 3152 3158,2016年 ( ): – 。

[Mey22] Y. Meyer。《晶体测度及其应用》，据 p. kurasov、a. olevskii、p. sarnak 和 m. vi- azovska。 *Astérisque*，第 Exp. No. 1194 页，2022年。S´eminaire Bourbaki，第 2021年/2022年卷。

[MV11] C. Mouhot 和 C. Villani。关于朗道阻尼。 *Acta Math.*，207(1)：29–201，2011。

[NZ15] S. Nonnenmacher 和 M. Zworski。正规双曲陷获的相关性衰减。 *Invent.* , （）：–。

[Pat76] P. Patterson。负曲率中的弧计数。在 *Geometry topology and dynamics in negative curvature* 425 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 289 , , 第 卷，– 344 页。剑桥大学出版社，剑桥，2016 年。

[Rat87] M. Ratner. 测地流和等高线流的混合速率。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，7 2 267 288，1987（）：–。

[Rue76] D. Ruelle。扩张映射和阿诺索夫流的ζ函数。 *Invent. Math.*，34 242，1976 3 231（）：–。

[Rug96] H.H. Rugh。Axiom A 动力系统的广义弗雷德霍姆行列式和塞尔伯格ζ函数。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4):805–819，1996年。

[RV19] D. Radchenko 和 M. Viazovska。实数轴上的傅里叶插值。 *Publ. Math. Inst. HautesÉtudes Sci.*，129:51–81，2019年。

[Sch14] R. Schneider。 *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory* 151 *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* ，的体积。剑桥大学出版社，剑桥，扩充版，。 2014

[Sel56] A. Selberg。《弱对称黎曼空间中的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用》。 *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:47–87, 1956.

[Sma67] S. Smale。《可微动力系统》。 *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, 《调和分析专著》第43卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993年。Timothy S. Murphy 协助编写，调和分析专著，第三卷。

[Tei16] B. Teissier. 代数几何中的 Bonnesen 型不等式，I：问题简介。载于 *Seminar on Differential Geometry.(AM-102), Volume 102*，第85–106页。普林斯顿大学出版社，2016年。[Tsu10] M. Tsujii. 接触阿诺索夫流转移算子的拟紧性。 *Nonlinearity*，23 7 1495 1545，2010（）：–。

Nguyen Viet Dang索邦大学´IMJ-PRG，75252 巴黎 Cedex 05，法国 dang@imj-prg.fr

Matthieu Léautaud奥赛数学实验室´，UMR 8628，巴黎-萨克雷大学´，法国国家科学研究中心，307号楼，91405 奥赛 Cedex，法国 matthieu.leautaud@universite-paris-saclay.fr

Gabriel Rivière让·勒雷数学实验室´，南特大学´，法国国家科学研究中心 UMR 6629，德拉乌西尼街2号`，44322南特 Cedex 03，法国；法国大学研究院，巴黎，法国 gabriel.riviere@univ-nantes.fr