arXiv:2302.04514v1 [math.FA] 9 Feb 2023

不交非奇异算子：延拓与局部变体

MANUEL GONZÁLEZ 和 ANTONIO MARTÍNEZ-ABEJÓN

ABSTRACT. 从巴拿赫格 E 到 Banach空间 Y 的、不交非奇异（DN-S）算子 $T \in \mathrm{L}(E, Y)$，是指在任何由非零向量的不交序列生成的闭子空间上都不严格奇异的算子。当 E 具有序连续性和弱单位时，E 可表示为某个 $L_1(\mu)$ 空间中的稠密理想。我们证明，每个 $T \in \text{DN-S}(E, Y)$ 都存在一个延拓 $\overline{T} \in \text{DN-S}(L_1(\mu), \text{PO})$；由此可推出，$T$ 和 T^{**} 都是陶伯算子，且由 T^{**} 诱导的算子 $T^{co}\colon E^{**}/E \to Y^{**}/Y$ 是一个（映入）同构。此外，利用 DN-S 算子概念的一种局部变体，我们证明 $T \in \text{DN-S}(E, Y)$ 的超幂也是 DN-S 算子。而且，当 E 不含 c_0 的拷贝且具有弱单位时，我们证明 $T \in \text{DN-S}(E, Y)$ 蕴含 $T^{**} \in \text{DN-S}(E^{**}, Y^{**})$。

1. INTRODUCTION

在巴拿赫格 E 中，我们可以考虑两类闭子空间：一类由非零向量的不交序列生成，另一类与任意归一化不交序列都保持正距离。后一类在 [12]中称为分散子空间。研究作用于 E 上的算子时，考察它们在这几类子空间上的作用很有用（见 [7]）。不交严格奇异算子（简称 DSS 算子）在 [18] 中被定义为满足以下条件的算子 $T\colon E \to Y$ 从巴拿赫格 E 到 Banach空间 Y，且 T 在 E 的任何一个由非零向量的不交序列生成的闭子空间上都不是同构。这些算子已应用于巴拿赫格结构的研究（见 [6] 及其中的参考文献）。近来，不交非奇异算子（简称 DN-S 算子）在 [12] 中被定义为满足以下条件的算子 $T\colon E \to Y$ 从巴拿赫格 E 到 Banach空间 Y，且在 E 的任何一个由非零向量的不交序列生成的闭子空间上都不严格奇异。DN-S 算子也已在 [1] 和 [13]中得到研究。注意，DN-S 算子的核是一个分散子空间。

根据 [10, 定理 2], ，算子 $T\colon L_1 \to Y$ 是 DN-S 算子，当且仅当它是 Kalton和 Wilansky 意义下的陶伯算子 [20]。在这种情况下，二次共轭 $T^{**}\colon L_1^{**} \to Y^{**}$ 和超幂 $T_{\mathcal{U}}\colon (L_1)_{\mathcal{U}} \to Y_{\mathcal{U}}$ 也都是 DN-S 算子，且由 T^{**} 诱导的算子 $T^{co}\colon L_1^{**}/L_1 \to Y^{**}/Y$ 是一个（嵌入）同构；见 [10, 11]。

部分受西班牙科学与创新部（西班牙）的 PID2019-103961GB-C22 项目资助。2010年数学主题分类。主要分类：47B60、47A55、46B42。关键词：不交非奇异算子；不交严格奇异算子；序连续巴拿赫格；无界范数收敛。

本文将 $E = L_1$ 的这些结果推广到 DN-S(E, Y) 中的算子，其中E 序连续且具有弱单位。我们的主要工具是这样一个事实：在这种情况下， E可表示为某个 $L_1(\mu)$空间的稠密子格，其中 μ 是一个概率测度。我们根据算子对 E 中满足 $\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$ 的归一化序列 (x_n) 的作用，刻画 DN-S(E, Y) 中的算子。因此，当 $\mu(A)$ 足够小时， T 在由可测集 A生成的 E 的闭带 E_A 上是同构。此外，利用推出构造，我们证明每个 DN-S(E, Y) 中的算子$T \in$都存在一个延拓$\overline{T} \in$ DN-S$(L_1(\mu), \mathrm{PO})$，其中 PO 是推出巴拿赫空间。由此可得，每个 DN-S(E, Y) 中的 $T \in$都是陶伯算子，且 T^{**}是陶伯算子，T^{co}是一个（嵌入）同构。此外，通过采用 DN-S 算子概念的局部变体，我们证明 DN-S 算子类在超幂下保持不变，并给出一个例子说明它在超积下不保持不变；同时，我们引入并研究 n, r-分散子空间，这是分散子空间概念的一种局部变体。此外，当 E 不含 c_0 的副本且具有弱单位时，我们证明 $T \in$ DN-S(E, Y)蕴含 $T^{**} \in$ DN-S。

记号。本文中， X 和 Y 是 Banach空间， E 是巴拿赫格，且$E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$。 X 的单位球面记为 $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$；对于 X中的序列（x_n）， $[x_n]$ 表示由（x_n）生成的闭子空间。我们还记 d(E) $= \{(x_n) \subset E \setminus \{0\} : (x_n)$ 不交$\}$，以及 dn(E) $= \{(x_n)$ $\subset S_E : (x_n)$ 不交$\}$。

算子总是线性且连续的，L(X, Y)表示从 X到 Y的所有算子组成的集合。给定 $T \in$L$(X,$ $Y)$， $N(T)$是 T的核， $R(T)$是 T的值域；我们用 T_M 表示将 $T \in$L(X, Y)限制到 X的闭子空间 M 上所得的算子。

若不存在 M 中的闭无限维子空间，使得 T_M 是同构，则算子 $T \in$L(X, Y) 是严格奇异的；若 $N(T)$ 是有限维的且 $R(T)$ 是闭的，则算子 T 是上半弗雷德霍姆的；若其二次共轭 T^{**}: $X^{**} \to Y^{**}$ 满足 $T^{**-1}(Y) = X$ [20]，则 T 是陶伯算子；等价地，若由 T^{**} 诱导的算子 T^{co}: $X^{**}/X \to Y^{**}/Y$ 是单射。关于 T^{co} 的性质，参见 [15]。

2. Preliminaries

若不存在 $(x_n) \in$ d(E) 使得 $T_{[x_n]}$ 是同构，则算子 $T \in$L(E, Y) 是不交严格奇异的，记作 $T \in$DSS(E, Y)。DSS 类由 Hernández 和 Rodríguez-Salinas 于 [18] 和 [17] 中引入。

算子 $T \in$L(E, Y) 是不交非奇异的，记作 $T \in$ DN-S(E, Y)，当且仅当不存在 (x_n) $\in$ d(E) 使得 $T_{[x_n]}$ 是严格奇异的。这类算子最初在 [12], 中提出，并在 [1] 和 [13]中得到研究。注意，DN-S(L_1, Y) 是从 L_1 到 Y 的陶伯算子集合（见 [10, 12]）。有关陶伯算子的更多信息，请参阅 [14] 和 [11] 。若闭子空间 M 属于 E ，且不存在 $(x_n) \in$ dn(E) 使得 $\lim_{n\to\infty}$ dist$(x_n, M) = 0$，则称其为分散的。

若 E 中的序列 (x_n) 按范数无界收敛（或称无界收敛）到 $x \in E$，则对每个 $u \in E_+$ [23]，$(|x_n - x| \wedge u)$ 都按范数收敛到 0。此时记作 $x_n \xrightarrow{un} x$。不交非奇异算子可由以下方式刻画。

定理 2.1. [12, 定理 2.8 和 2.10] 对于算子 $T \in \mathrm{L}(E, Y)$，以下断言等价：

(1) T 是不交非奇异的。(2) 对每个 $(x_n) \in \mathrm{d}(E)$，限制 $T_{[x_n]}$ 是上半 Fredholm 算子。(3) 对每个 $(x_n) \in \mathrm{dn}(E)$，$\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| > 0$。(4) 对每个紧算子 $S \in \mathrm{L}(E, Y)$，$N(T + S)$ 是分散的。

定理 2.2. [1, 定理 5.3] 假设 E 是序连续的。对于 $T \in \mathrm{L}(E, Y)$，以下断言等价：

(1) T 是不交非奇异的。(2) 不存在归一化的 un-零序列 (x_n) 使得 $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$。(3) 存在 $r > 0$，使得对每个 $(x_n) \in \mathrm{dn}(E)$，$\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| > r$。

若巴拿赫格 E 中每个按序递减至 0 的网都在范数意义下收敛至 0，则称其为序连续；E 中的弱单位是指满足 $\||x| \wedge e\| = 0$ 蕴含 $x = 0$ 的向量 $e \in E_+$。关于序连续巴拿赫格的信息，参见 [21, 24]。

序连续巴拿赫格的表示。在 [21, 定理 1.b.14] 中证明了，每个具有弱单位的序连续巴拿赫格 E 都可以表示为一个 K¨othe 函数空间；也就是说，存在一个概率空间 (Ω, Σ, μ)，使得

- $L_\infty(\mu) \subset E \subset L_1(\mu)$，其中 E 在 $L_1(\mu)$ 中稠密，且 $L_\infty(\mu)$ 在 E 中稠密，
- $\|f\|_1 \le \|f\|_E \le 2\|f\|_\infty$ 当 $f \in L_\infty(\mu)$ 时，
- E 中的序与由 L_1（μ）所诱导的序一致。

本文中我们将直接使用这种表示，不再另作说明。对于L_1（μ）中的向量，我们用 $x_n \xrightarrow{\mu} x$ 表示依测度收敛。

在具有弱单位的序连续巴拿赫格中，有一些定义在(0, 1)上的重排不变函数空间（简称r.i.函数空间）。除 L_p(0, 1)（$1 \le p < \infty$）外，最常用的定义在(0, 1)上的重排不变函数空间是Orlicz 空间和Lorentz 空间（见 [21, 第2a节]）。下面我们简要介绍后者。

例2.3。设 $1 \le p < \infty$，并设 W 是定义在 $(0, 1]$ 上的正的非增连续函数，使得$\lim_{t\to 0} W(t) = \infty$，$W(1) = 1$ 且$\int_0^1 W(t)\,dt = 1$。Lorentz函数空间$L_{W,p}$(0, 1)是由(0, 1)上的所有可测函数 f 构成的空间，满足

$$\|f\|_{W,p} = \left(\int_0^1 f^*(t)^p W(t)\,dt \right)^{1/p} < \infty,$$

其中，f^*是 $|f|$的递减重排。

空间 $L_{W,p}$(0, 1) 是定义在 (0, 1) 上、不同于 L_1(0, 1) 的重排不变函数空间。

以下结果将会很有用。

引理 2.4. [3, 推论 2.12，定理 4.6] 设 E 是一个具有弱单位 e的序连续巴拿赫格，且 $(x_n) \subset E$。那么以下陈述等价：

(1) $x_n \xrightarrow{un} 0$。(2) $(|x_n| \wedge e)$ 在范数下收敛到 0。(3) $x_n \xrightarrow{\mu} 0$。

对于具有弱单位 e的序连续巴拿赫格 E，我们将$x \in E$ 的支撑定义为 $\operatorname{supp} x = \{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}$。

推论 2.5. 假设 E 是序连续的且具有弱单位。那么 E 中的每个序列 (x_k)，若 $\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$，则无收敛于 0。

证明。注意，$\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$ 推出 $x_n \xrightarrow{\mu} 0$。 □

空间与算子的超积。设 I 是一个具有非平凡超滤子 $\mathcal{U}$ 的集合，并且 $(X_i)_{i\in I}$ 和 $(Y_i)_{i\in I}$ 是 Banach空间族。$(X_i)_{\mathcal{U}}$是 $(X_i)_{i\in I}$ 的超积，定义为 $\ell_\infty(I, X_i)$ 对闭子空间

$$N_{\mathcal{U}}(X_i) = \{(x_i) \in \ell_\infty(I, X_i) : \lim_{i\to\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}.$$

$(X_i)_{\mathcal{U}}$ 中以 $(x_i) \in \ell_\infty(I, X_i)$ 为代表元的元素记作 $[(x_i)]$。

若对每个 $i \in I$都有 $X_i = X$，则将该超积记作 $X_{\mathcal{U}}$，并称其为 X的超幂。

若每个 X_i 都是巴拿赫格，则 $(X_i)_{\mathcal{U}}$ 具有自然的巴拿赫格结构：$[(x_i)] \leq [(y_i)]$，当且仅当存在 $(z_i) \in N_{\mathcal{U}}(X_i)$，使得对每个 $i \in I$都有 $x_i + z_i \leq y_i$。

若 $(T_i)_{i\in I}$ 是一族有界算子，且对每个 $i \in I$ 都有 $T_i \in \mathrm{L}(X_i, Y_i)$，则超积 $(T_i)_{\mathcal{U}} \in \mathrm{L}((X_i)_{\mathcal{U}}, (Y_i)_{\mathcal{U}})$ 定义为 $(T_i)_{\mathcal{U}}[(x_i)] = [(T_i x_i)]$。当对每个 $i \in I$ 都有 $T_i = T$ 时，我们记作 $T_{\mathcal{U}}$，称其为 T 的超幂。关于空间与算子的超积，更多信息请参阅 [4, Chapter 8] or[16]。

3. Disjointly non-singular operators

我们先给出定理 2.2 的一个补充。

定理 3.1. 设 E 是一个具有弱单位的序连续巴拿赫格。对于 $T \in \mathrm{L}(E, Y)$，以下断言等价：

(1) T 是不交非奇异的。(2) 存在 $r > 0$，使得对于 S_E 中的每个 (x_n)，若 $\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$，则 $\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| > r$。(3) 对于 S_E 中的每个 (x_n)，若 $\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$，则 $\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| > 0$。(4) 存在 $r > 0$，使得对于每个满足 $\mu(\operatorname{supp} x) < r$ 的 $x \in S_E$，都有 $\|Tx\| > r$。

证明。(1)⇒(2) 假设 T 是不交非奇异的。不失一般性，我们可以假设 $\|T\| = 1$。由定理 2.2，存在 $r > 0$，使得对于 S_E 中的每个不交序列 (z_n)，$\liminf_{n\to\infty} \|Tz_n\| > r$。

若 (2) 不成立，则可在 S_E 中找到一个序列 (x_n)，使得 $\lim_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) = 0$ 且 $\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| < r/2$。必要时取一个子序列后，可假设 $\limsup_{n\to\infty} \|Tx_n\| < r/2$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\operatorname{supp} x_n) < \infty$。记 $A_n = \cup_{k=n}^{\infty} \operatorname{supp} x_n$ 和 $B_n = \Omega \setminus A_n$。于是 $\mu(A_n) \to 0$，(B_n) 递增至 Ω；又由于 E 是序连续的，$(x\chi_{B_n})$ 依范数收敛至 x，对每个 $x \in E$ [24, 均成立。定理 1.1]。

首先，选择 $n_1 > 1$ 使得 $\|x_1 - x_1\chi_{B_{n_1}}\| < 1/2$，并记 $y_1 = x_1\chi_{B_{n_1}}$。注意，对于 $j \geq n_1$，有 $\|Tx_1 - Ty_1\| < 1/2$ 且 $|y_1| \wedge |x_j| = 0$。

接下来，我们选取 $n_2 > n_1$ 使得 $\|x_{n_1} - x_{n_1}\chi_{B_{n_2}}\| < 1/3$，并记作 $y_2 = x_{n_1}\chi_{B_{n_2}}$。注意，对于 $i = 1$，2 和 $j \geq n_2$，有 $\|Tx_{n_1} - Ty_2\| < 1/3$ 和 $|y_i| \wedge |x_j| = 0$。

以此类推，我们得到一个不交序列 (y_n)，使得当 $n \to \infty$ 时，$\|y_n\| \to 1$ 且 $\limsup_{n\to\infty} \|Ty_n\| < r/2$。因此，取 $z_n = y_n/\|y_n\|$，我们得到一个归一化不交序列 (z_n)，满足 $\limsup_{n\to\infty} \|Tz_n\| < r/2$，从而得到矛盾。

(2)⇒(3) 是显然的。

(3)⇒(4) 若 (4) 不成立，则可在 S_E 中找到一个序列 (x_n)，使得 $\mu(\operatorname{supp} x_n) < 1/n$ 且 $\|Tx_n\| < 1/n$。因此 (3) 也不成立。

(4)⇒(1) 对于 S_E 中的每个不交序列 (x_n)，$\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\| \geq r$。因此，定理 2.2 表明 T 是不交非奇异的。□

如果 E 是具有弱单位的序连续空间，对于每个满足 $\mu(A) > 0$ 的可测集 A，集合 $E_A = \{x \in E : \operatorname{supp} x \subset A\}$ 是 E 中的一个闭带。

由定理 3.1 的第 (4) 部分可得：

推论 3.2. 如果 E 是具有弱单位的序连续空间，且 $T \in \text{DN-S}(E, Y)$，那么存在 $r > 0$，使得当 A 是满足 $0 < \mu(A) < r$ 的可测集时，T 在 E_A 上的限制是一个同构。

由此可得：

推论 3.3. 设 E 是定义在 $[0, 1]$ 上的序连续重排不变函数空间，并假设 DN-S$(E, Y) \neq \emptyset$。那么 Y 包含一个与 E 同构的子空间。

证明。注意，特征函数 $\chi_{[0,1]}$ 是 E中的弱单位。此外，与[21, 第 2.b 节], 中针对 $0 < s < \infty$ 的情形一样，我们考虑定义在 $[0, 1]$ 上的可测函数空间上的线性映射 D_s，其定义为

$$(D_s f)(t) = \begin{cases} f(t/s), & t \leq \min\{1, s\} \\ 0, & s < t \leq 1 \quad (\text{in case } s < 1). \end{cases}$$

显然，D_s 在 $L_\infty[0, 1]$ 上的范数为 1，在 $L_1[0, 1]$上的范数为 s。因此，Calder´on 的一个结果（见 [21, 定理 2.a.10]）表明，D_s 在 E 上有界，其范数为 $\leq \max\{1, s\}$。

若 $1 < s < \infty$ 且 $r = s^{-1}$，则 D_r 是单射，且 $D_r D_s f = \chi_{[0,r]} f$（见 [21, 第 2.b 节]）；因此，$D_r$ 是从 E 到 $E_{[0,r]}$的同构。此外，若 $T \in \mathsf{DN\text{-}S}(E, Y)$，则推论 3.2 表明，当 r 足够小时，T 是 $E_{[0,r]}$ 上的同构。□

4. Push-outs and DN-S operators

设 E 是带有弱单位的序连续 $\jmath$。我们记 $E \longrightarrow L_1$: $\mu(E)$ 为从 L_1 到 $\mu()$ 的嵌入，它是一个（连续）算子。

给定一个算子 T: $E \longrightarrow Y$，对于对 $\jmath$、T 的推出图为

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle \jmath}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\jmath}} \\ L_1(\mu) & \xrightarrow{\overline{T}} & \mathrm{PO} \end{array}$$

其中，$\Delta = \{(Tx, -\jmath x) : x \in E\}$ 是 $Y \oplus_1 L_1(\mu)$ 的一个子空间，其闭包为 $\overline{\Delta}$；PO 是商空间 $(Y \oplus_1 L_1(\mu))/\overline{\Delta}$；算子 $\bar{\jmath}$ 和 $\overline{T}$ 分别由 $\bar{\jmath}y = (y, 0) + \overline{\Delta}$ 和 $\overline{T}f = (0, f) + \overline{\Delta}$ 定义。参见 [2, 第 1 节3]。

注意，$\bar{\jmath}$ 和 $\overline{T}$ 是连续的，因为它们是到 PO 上的商映射的限制，并且推出图是交换的：$\bar{\jmath}T = \overline{T}\jmath$。

命题 4.1. 设 E 是一个巴拿赫格。

(1) 嵌入 $\jmath$: $E \to L_1(\mu)$ 不交严格奇异（$\jmath \in \mathsf{DSS}$），当且仅当对于每个 $(x_n) \in \mathsf{dn}(E)$, $\|\jmath x_n\|_1 \to 0$ as $n \to \infty$。(2) 若 E 是 (0, 1) 上不同于 $L_1(0, 1)$ 的重排不变函数空间，则 $\jmath$: $E \to L_1(0, 1)$ 总是不交奇异。

证明。(1) 对于正向蕴含，设 $(x_n) \in \mathsf{dn}(E)$ 且 $C = \inf_n \|\jmath x_n\|_1 > 0$。注意到 (x_n) 是一个无条件基序列，并且

$$\|\jmath\left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)\|_1 = \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \jmath x_i\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \|\jmath x_i\|_1$$

因为 $(\jmath x_i)$ 是 $L_1(\mu)$ 中的一个不交序列。因此，

$$\|\jmath\left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)\|_1 \geq C \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \geq C \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|,$$

并且 $\jmath$ 在 $[x_n]$ 上是一个同构。

逆命题显然成立。

(2) 见 [8,推论 4.4]。 □

以下结果可见于 [5], 命题 1.1 及其后评注。

引理 4.2。设 E 为一个带有弱单位的序连续。

(1) 对于 E 的每个闭子空间 M，$\jmath$ 到 M 的限制是一个同构，或者 M 不是分散的。(2) 对于 S_E 中的每个序列 (x_n)，$\inf \|x_n\|_{L_1} > 0$，或者存在一个子序列 (x_{n_k}) 和 E 中的一个不交序列 (z_k)，使得当 $n \to \infty$ 时 $\|x_{n_k} - z_k\| \to 0$。

根据命题 4.1，引理 4.2 中的两个选项当且仅当 ȷ 时都成为二分法： $E \to L_1(\mu)$ 是不相交奇异的。

我们考虑单射算子 D： $E \to Y \oplus_1 L_1(\mu)$，其定义为 $Dx = (Tx, -\jmath x)$。

命题 4.3. 假设 E 是具有弱单位的序连续巴拿赫格，并令 $T \in \mathrm{L}(E, Y)$。

(1) 若 $T \in$ 是 DN-S，则 Δ 是 $Y \oplus_1 L_1(\mu)$ 的闭子空间，且 $\bar{\jmath}$ 是单射的 .
(2) 若 $\jmath$： $E \to L_1(\mu)$ 是不相交奇异的，且 Δ 在 $Y \oplus_1 L_1(\mu)$ 中闭，则 $T \in$ 是 DN-S。

证明. (1) 假设 $\Delta = R(D)$ 不是闭的。则存在 S_E 中的一个序列 (x_n)，使得 $\|Dx_n\| = \|Tx_n\| + \|x_n\|_1 \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时成立。由引理 4.2 的第 (2) 部分，存在一个子序列 (x_{n_k}) 和 E 中的一个不交序列 (z_k)，使得 $\|x_{n_k} - z_k\| \to 0$。因此 $\|Tz_k\| \to 0$，而定理 2.1 推出 $T \notin$ 是 DN-S。

此外，$\bar{\jmath}y = 0$ 推出（y，0）$\in \overline{\Delta} = \Delta$；因此，对于某个 $x \in E$，有（y，0）=（Tx，$-\jmath x$）。由于 ȷ 是单射，$x = 0$ 和 $y = Tx = 0$。因此 $\bar{\jmath}$ 是单射。

（2）假设 $T \notin$ 是 DN-S。那么存在（x_n）$\in$ dn（E），使得 $\|Tx_n\| \to 0$。由于 $\|\jmath x_n\|_1 \to 0$，R（D）$= \Delta$ 不是闭的。□

当 ȷ 和 $\bar{\jmath}$ 都是单射时，我们可以将 $\overline{T}$ 视为 T的延拓。

定理 4.4. 假设 E 是具有弱单位的序连续巴拿赫格，并令 $T \in$ DN-S（E，Y）。

（1） $\overline{T} \in$ DN-S（L_1（μ），PO）；等价地， $\overline{T}$是陶伯算子。（2） T 是陶伯算子。（3） T^{**} 是陶伯算子，且 T^{co} 是（到上的）同构。

证明。(1) 设 (f_n) 是 $S_{L_1(\mu)}$ 中的一个不交序列。那么 $\overline{T} f_n = (0, f_n) + \Delta$ 且

$$\|\overline{T} f_n\| = \inf_{x \in E} \|Tx\| + \|f_n - \jmath x\|_{L_1}.$$

由于对每个 $x \in E$ 都有 $\liminf_{n\to\infty} \|f_n - \jmath x\|_{L_1} \geq 1$，我们得到 $\liminf_{n\to\infty} \|\overline{T} f_n\|_{L_1} \geq 1$，因此由定理 2.1 可知 $\overline{T} \in$ 是 DN-S。

(2) 注意到 $\overline{T} f = 0$ 当且仅当 $(0, f) \in \Delta$，而这当且仅当存在某个 $x \in E$ 和 $Tx = 0$ 使得 $f = \jmath x$。因此 $N(\overline{T}) = \jmath(N(T))$，且 ȷ 是 $N(T)$ 上的一个同构。由于 $\overline{T}$ 是陶伯算子， $N(\overline{T})$ 是自反的，因此 $N(T)$ 也是如此。

现在，若 $T \in$ 是 DN-S 且 $S \in \mathrm{L}(E, F)$ 是紧的，则由推论 $T + S \in$ 是 DN-S。因此，对每个紧的 S， $N(T + S)$ 都是自反的，故由 [14] 的主要结果可知 T 是陶伯算子。

(3) 我们在 (2) 的证明中给出的论证表明，每个 $T \in$ DN-S(E, Y) 都是 [9], 意义下的超陶伯算子，因为 $L_1(\mu)$ 的每个自反子空间都是超自反的，而且超陶伯算子具有扰动刻画： $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ 是超陶伯算子，当且仅当对于每个紧算子 $K \in \mathrm{L}(X, Y)$， $N(T+K)$ 都是超自反的。

[9, 定理 15]。此外，如果 T 是超陶伯算子，那么 T^{co} 是一个（到其像的）同构 [11, 命题 6.5。3], 而最后这一事实蕴含 T^{**} 是陶伯算子，因为在这种情况下 $(T^{co})^{**} \equiv (T^{**})^{co}$ 是单射。□

问题 1. 假设 E 是一个具有弱单位的序连续巴拿赫格。若 $\overline{T} \in$ DN-S($L_1(\mu)$, PO)，是否可以推出 $T \in$ DN-S(E, Y)?

由定理 4.4 可推出以下结果。我们注意到，对于 E，不含 c_0 的任何拷贝，略强于序连续 [24, Chapter 7]。

命题 4.5. 假设 E 是一个具有弱单位且不含 c_0 的任何拷贝的巴拿赫格，并设 $T \in$ DN-S(E, Y)。则 $T^{**} \in$ DN-S(E^{**}, Y^{**})。

证明。由于 E 不含 c_0 的任何拷贝， E^{**} 中 E 的典范拷贝是一个投影带 [21, Theorem 1.c.4]。因此，记 $E^{\perp} = \{z \in E^{**} : |x| \wedge |z| = 0$，对每个 $x \in E\}$，我们有 $E^{**} = E \oplus E^{\perp}$。令 P 表示从 E^{**} 到 E 的投影，其核为 $E^{\perp}$；并令 $q : Y^{**} \to Y^{**}/Y$ 表示商映射。

根据定理 4.4 的第 (3) 部分， T^{co}是一个同构（映入）；因此， qT^{**}在 $E^{\perp}$上也是如此。因此，给定 E^{**} 中的一个归一化不交序列（z_n），并记 $x_n = Pz_n$和 $y_n = （I - P）z_n$，序列（x_n）在 E 中不交，且存在 $C > 0$ 使得对每个 n都有 $\|T^{**}z_n\| \geq C\max\{\|Tx_n\|, \|qT^{**}y_n\}$。因此 lim inf $\|T^{**}x_n\| > 0$，由此得出 $T^{**} \in$ 是 DN-S。□

5. Ultraproducts of operators

这里我们证明，当 E序连续且具有弱单位时，DN-S 算子类在超幂下保持稳定。以下 DN-S 算子概念的局部变体将会有所帮助。

定义 5.1. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$。算子 $T \in$ L(E, Y)属于 DN-S$_{n,r}$类，当且仅当对于 E 中的每个归一化不交（x_i）$_{i=1}^{n}$，都有 max$_{1\leq i\leq n} \|Tx_i\| \geq r$。

下一个结果是在 [19] 上作用于 L_1 空间的算子的情形下，利用角谷表示定理证明的。这里的证明则利用了 un收敛的性质。

命题 5.2. 设 E 具有序连续性且有一个弱单位。算子 $T \in$ L(E, Y) 属于 DN-S，当且仅当对于某些 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$， $T \in$ DN-S$_{n,\ r}$。

证明. 若 $T \in$ DN-S$_{n,\ r}$，则对每个 $(x_n) \in$ dn(E)，lim inf$_{n\to\infty} \|Tx_n\| \geq r$。因此，由定理 2.1 可知， $T \in$DN-S。

反之，设对于任意一对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$， $T \in$ DN-S$_{n,\ r}$ 均不成立。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能找到一个归一化不相交的 $(x_i^n)_{i=1}^n$，使得 max$_{1\leq i\leq n} \|Tx_i^n\| \leq 1/n$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们选取 $i(n) \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $\mu\left(\text{supp } x_{i(n)}^n\right) \leq 1/n$，并记作$y_n = x_{i(n)}^n$。由推论 2.5， $y_n \xrightarrow{un} 0$。由于 $\|Ty_n\| \to 0$，定理 2.2 蕴含$T \notin$DN-S。□

接下来，我们给出 DN-S$_{n,\ r}$ 类的一个刻画，该刻画在[19, 引理 2.2]针对 $E = Y$ 空间的证明中给出。注意，对于 $0 \neq x \in E \subset L_1(\mu)$，有$x/|x| \in L_\infty(\mu)$。

命题 5.3. 假设 E 是序连续的且具有弱单位。那么 $T \in$L(E, Y) 属于 DN-S$_{n,\ r}$ 当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $x_1, \ldots, x_n \in S_E$ 且 $\| |x_i| \wedge |x_j| \| < \delta$ 对 $1 \leq i < j \leq n$ 成立，则 $\max_{1\leq i\leq n} \|Tx_i\| > r - \varepsilon$。

证明. 对于正向蕴含，若 $x_1, \ldots, x_n \in S_E$ 满足 $\| |x_i| \wedge |x_j| \| < \delta$ 对 $i \neq j$ 成立，并且我们定义

$$z_i = \big(|x_i| - (|x_i| \wedge (\vee_{j\neq i}|x_j|)\big)\frac{x_i}{|x_i|},$$

那么向量 z_i 两两不交，且 $1 - n\delta \leq \|z_i\| \leq 1$。将 DN-S$_{n,\ r}$ 条件应用于 $(z_i/\|z_i\|)_{i=1}^n$，可得 $\max_{1\leq i\leq n} \|Tx_i\| > r - \varepsilon$，只要 $\delta = \delta(\varepsilon, n, \|T\|)$ 足够小。

逆命题显然成立。 □

因此，DN-S$_{n,\ r}$ 在超积下保持稳定：

命题 5.4. 假设对于每个 $i \in I$，E_i 具有弱单位且序连续。令$\mathcal{U}$ 为 I上的非平凡超滤子。若 $(T_i)_{i\in I}$ 是一个有界族，并且对于每个 $i \in I$，(E_i, Y_i) 满足 $T_i \in$ DN-S$_{n,\ r}$，则 $(T_i)_{\mathcal{U}} \in$ 满足 DN-S$_{n,\ r}$。

证明。向量 $[(x_i)], [(z_i)]$ 在 $(E_i)_{\mathcal{U}}$ 中不相交，当且仅当 $\lim_{i\to\mathcal{U}} \| |x_i| \wedge |y_i| \| = 0$。在这种情况下，对于每个 $\delta > 0$，我们可以选择代表元 (x_i)、(y_i)，使得对于每个 $i \in I$都有 $\| |x_i| \wedge |y_i| \| < \delta$。由于 $(T_i)_{i\in I}$ 是有界的，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们可以在命题 5.3 中选择对所有 T_i均有效的 $\delta = \delta(\varepsilon, n)$，从而得到 $(T_i)_{\mathcal{U}} \in$DN-S$_{n,\ r}$。 □

推论 5.5. 假设 E 是带有弱单位的序连续空间，并令 $\mathcal{U}$ 为非平凡超滤子。若 $T \in$ DN-S(E, Y)，则超幂 $T_{\mathcal{U}} \in$ 是 DN-S。

作为以下观察的推论，我们将证明 DN-S 算子类在超积下并不保持稳定。

备注 5.6. 由 [12, 命题 2.12] 可知，E 的闭子空间 M 是分散的，当且仅当商映射 q: $E \to E/M$ 是 DN-S 算子。

例 5.7. 令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的非平凡超滤子。根据 [21, 推论], , 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在 $L_1 \equiv L_1(0, 1)$ 的子空间 M_k，其等距同构于 $L_{1+1/k}$。由于 $L_1(0, 1)$ 的自反子空间是分散的，若 q_k: $L_1 \to L_1/M_k$ 是商映射，则根据备注 5.6，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$q_k \in$ 是 DN-S。我们来证明 $(q_k)_{\mathcal{U}} \notin$ 是 DN-S。

由于 $(q_k)_{\mathcal{U}}$ 作用于 $(L_1)_{\mathcal{U}}$，而后者是一个 $L_1(\mu)$ 空间 [16, 定理 3.3], , 因此只需证明 $\ker(q_k)_{\mathcal{U}}$ 不是自反的；这是因为根据 [22]的主要结果，对于某个 $q > 1$，它不同构于 $L_q(\mu)$ 的一个子空间。

前一个例子还表明，离散子空间类在超积下并不稳定：每个 $\ker q_k$ 都是分散的，但 $\ker(q_k)_{\mathcal{U}}$ 不是。不过，我们可以证明，分散子空间这一概念的某个局部变体具有稳定性。

定义 5.8. 设 E 是序连续的且具有弱单位，并令 $n \in \mathbb{N}$ 和$r > 0$。若闭子空间 $M \subset E$ 满足：对于 S_E 中的每个不相交集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$，都存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$，使得 dist$(X_i, M) \geq r$，则称 M 为 n, r-分散的。

在定义 5.8 的条件下， M 的闭子空间 E 是 n, r-分散的，当且仅当映到 E/M 上的商映射是 DN-S$_{n,\ r}$ 算子。因此，根据命题 5.2，M 是分散的，当且仅当对某些 n 和 r，它是 n, r-分散的。

命题 5.9. 假设对每个 $i \in I$， E_i 都是序连续的且具有弱单位。令 $\mathcal{U}$ 为 I上的非平凡超滤子。若对每个 $i \in I$， M_i 都是 n, r-分散子空间，则 $(M_i)_{\mathcal{U}}$是 $(E_i)_{\mathcal{U}}$的 n, r-分散子空间。

证明。由命题 5.4 和备注 5.6 可直接得出。 □

注意， $T \in$DN-S$_{n,\ r}$和 $c > 0$蕴含 $cT \in$DN-S$_{n,\ cr}$；因此 $N(T)$不一定是 n, r-分散的，并且对于 $T \in$ DN-S$_{n,\ r}$，不存在扰动刻画。

References

[1] E. Bilokopytov. 序连续巴拿赫格上的不交非奇异算子补足无界范数拓扑。《数学分析及其应用杂志》506 (2022) 125556.[2] J.M.F. Castillo, M. Gonzalez, 巴拿赫空间理论中的三空间问题。《数学讲义》1667，施普林格，1997.[3] Y. Deng, M. O'Brien, V.G. Troitsky. 巴拿赫格中的无界范数收敛。《Positivity》21 (2017) 963–974.[4] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. 绝对可和算子。剑桥高等数学研究，43。剑桥大学出版社，1995.[5] J. Flores, F.L. Hern´andez, N.J. Kalton, P. Tradacete. 巴拿赫格上严格奇异算子的刻画。《伦敦数学会杂志》(2) 79 (2009) 612–630[6] J. Flores, J. L´opez-Abad, P. Tradacete. 严格奇异性的巴拿赫格版本。《泛函分析杂志》270 (2016) 2715–2731.[7] D. Freeman, T. Oikhberg, B. Pineau, M. A. Taylor. 函数空间中的稳定相位恢复。arXiv:2210.05114[8] A. Garc´ıa Del Amo, F.L. Hern´andez, V.M. S´anchez, E.M. Semenov. 重排不变空间之间的不交严格奇异嵌入。《伦敦数学会杂志》62 (2000) 239–252.[9] M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on. 超陶伯算子与扰动。《数学档案》64 (1995) 423–433.[10] M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on. $L_1(\mu)$ 空间上的陶伯算子。《数学研究》125 (1997) 289–303.[11] M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on. 陶伯算子。算子理论：进展与应用 194。Birkh¨auser，2010.[12] M. Gonz´alez, A. Mart´ınez-Abej´on, A. Martin´on. 巴拿赫格上的不交非奇异算子。《泛函分析杂志》280 (2021) 108944，14页.[13] M. Gonz´alez, A. Martin´on. 不交非奇异算子的定量方法。《西班牙皇家科学院杂志》(2021) 115:185，12页.[14] M. Gonz´alez, V.M. Onieva. 陶伯算子及其他算子半群的刻画。《美国数学会会刊》108 (1990) 399–405。

[15] M. Gonz´alez, E. Saksman, H.-O. Tylli. 表示非弱紧算子。《数学研究》113 (1995) 289–303.[16] S. Heinrich. 巴拿赫空间理论中的超积。《纯粹与应用数学杂志》313 (1980) 72–104.[17] F.L. Hern´andez. 巴拿赫格中的不交严格奇异算子。《查理大学学报：数学与物理》31 (1990) 35–40.[18] F. L. Hern´andez, B. Rodr´ıguez-Salinas. 关于 Orlicz 空间中的补子空间副本 II。《以色列数学杂志》68 (1989) 27–55.[19] W. Johnson, A.B. Nasseri, G. Schechtman, T. Tkocz. L_1 上的单射陶伯算子以及在 ℓ_∞中具有稠密值域的算子。《加拿大数学通报》58 (2015) 276–280.[20] N. Kalton, A. Wilansky. 巴拿赫空间上的陶伯算子。《美国数学会会刊》57 (1976) 251–255.[21] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. 经典巴拿赫空间 II。函数空间。施普林格，1979.[22] H.P. Rosenthal. 关于 L^p的子空间。《数学年刊》97 (1973) 344-373.[23] V.G. Troitsky, 巴拿赫格上的非紧性度量。《Positivity》8 (2004) 165–178.[24] W. Wnuk. 具有序连续范数的巴拿赫格。波兰科学出版社 PWN，1999。

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, E-39071 Santander, Spain电子邮箱：manuel.gonzalez@unican.es

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de La Laguna, E-38271 La Laguna (Tenerife), Spain电子邮箱：anmarce@ull.es