arXiv:2302.04540v1 [math.CA] 9 Feb 2023

超越笛卡尔符号法则

YOUSRA GATI、VLADIMIR PETROV KOSTOV 和 MOHAMED CHAOUKI TARCHI

ABSTRACT. 由实多项式 $Q := \Sigma_{j=0}^{d} a_j x^j, a_j \neq 0$ 定义的 *sign pattern* 是字符串 $\sigma(Q) := (\mathrm{sgn}(a_d) \ldots, \mathrm{sgn}(a_0))$。多项式 Q 的正根数量 pos 和负根数量 neg 满足笛卡尔符号法则。若存在一个多项式 Q，其有 pos 个正单根和 neg 个负单根，有 $(d - pos - neg)/2$ 对共轭复根，且 $\sigma(Q) = \sigma_0$，则配对 $(\sigma_0, (pos, neg))$（其中 σ_0 是长度为 $d+1$ 的符号模式）称为可实现。我们给出一系列依赖于两个整数参数的配对（符号模式，配对 (pos, neg)），其中 $pos \geq 1$, $neg \geq 1$, 且该配对不可实现。对于$d = 9$，我们给出符号模式中有两次符号变化的可实现配对的完整列表。

关键词：一元实多项式；双曲多项式；符号模式；笛卡尔符号法则

美国数学会分类：26C10；30C15

1. 引言

本文探讨一个问题，它是笛卡尔符号法则的自然推广。我们考虑不含零系数的一元实多项式。对于次数为 d 的多项式 Q，笛卡尔符号法则指出，其正根的个数 pos 不超过其系数序列中的符号变化数 c，且二者之差 $c - pos$ 为偶数，见 [3], [6], [7], [8], [11], [12], [14], [19] 或 [21]。将该法则应用于多项式 $Q(-x)$，可得其负根的个数 neg 不超过符号保持数 p，且二者之差 $p - neg$ 同样为偶数。对于双曲多项式，即所有根均为实数的实多项式，有 $pos = c$ 和 $neg = p$。笛卡尔符号法则仅给出了必要条件。我们的目标是探究这些条件距离充分条件还有多远。

在下文中，我们使用量 $\tilde{\mu} := \min(pos, neg)$，并用 λ 表示 Q的共轭复根对的数量。因此，我们引入的这些量满足以下关系，其中 $[.]$ 表示整数部分：

$$
\begin{gathered}
pos \leq c\ , \qquad neg \leq p\ , \qquad \tilde{\lambda} = (d - pos - neg)/2\ , \\
c - pos \in 2\mathbb{Z}\ , \qquad p - neg \in 2\mathbb{Z}\ , \qquad \tilde{\lambda} \leq [d/2]\ , \\
\mathrm{sgn}(Q(0)) = (-1)^{pos} \qquad \text{and} \qquad c + p = d\ .
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

定义 1. (1) 长度为 $d+1$ 的符号模式是由 $d+1$ 个符号 $+$和/或 $-$组成的字符串。我们称多项式 $Q := \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ 定义了符号模式 $\sigma(Q) := (\mathrm{sgn}(a_d), \ldots, \mathrm{sgn}(a_0))$。我们最常处理首一多项式，此时符号模式的第一个符号为 $+$。

(2) 假设给定一个符号模式 σ_0 ，其中有 c 次符号变化和 p 次符号保持。可容许对（即对 σ_0 可容许的一对）是满足条件 (1.1) 的一对 (pos, neg)。此时我们称 $(\sigma_0, (pos, neg))$ 为相容对（简称对）。

(3) 如果存在一个次数为 d 、满足 Q 且具有 $\sigma(Q) = \sigma_0$ 的实多项式，其正根恰有 pos 个、负根恰有 neg 个，且这些根两两不同，则称该相容对是可实现的。

(4) 对于符号模式 σ_0，其可容许的对 $(pos, neg) = (c, p)$ 称为它的笛卡尔对。

我们研究以下问题:

问题1. 对于给定的次数 d，哪些相容对是可实现的?

尽管问题的表述简单，但它绝非平凡。笛卡尔符号法则只能给出必要条件，而问题1是一个实现问题。对于 $d = 1$、2 和 3，所有相容对都可实现；但对于 $d = 4$，相容对 ((+, −, −, −, +),(0,2)) 不可实现（见 [13]）。事实上，对于 $d = 4$，在以下等价关系下，这是唯一不可实现的相容对。

定义2. 对于给定的次数 d，通过两个可交换对合定义相容对集合上的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用。对合

$$i_m : (\sigma(Q), (pos, neg)) \mapsto ((-1)^d \sigma(Q(-x)), (neg, pos)) \tag{1.2}$$

表示变量替换 $x \mapsto -x$ 会改变每隔一个系数的符号以及实根的符号。对合

$$i_r : (\sigma(Q), (pos, neg)) \mapsto (\sigma(Q^R(x)/Q(0))(pos, neg)) , \ Q^R(x) := x^d Q(1/x) \tag{1.3}$$

与以下性质有关：反转多项式 Q^R （即 Q 从右向左读取）具有与 Q 相同数目的正根和负根（反转会将根变为其倒数）。引入归一化因子 $(-1)^d$ 和 $1/Q(0)$，以保持首一多项式的集合不变。在此作用下，每个相容对的轨道由 2 个或 4 个相容对组成；这些相容对具有相同的 $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{\mu}$ 值，并且同时可实现或不可实现。因此，我们对相容对及其轨道使用相同的记号。有时，我们只考虑符号模式在 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用下的轨道，而不考虑相容对的轨道。

记号 1. 我们用 $\Sigma_{m_1,m_2,\ldots,m_s}$, $m_k \in \mathbb{N}$, $m_1 + \cdots + m_s = d + 1$ 表示符号模式，该模式先由一串 m_1 符号 $+$ 组成，接着是一串 m_2符号 $-$ ，然后是一串 m_3 符号 $+$ ，以此类推。例:

$$(+, +, -, -, -, +, -, +, +, +) = \Sigma_{2,3,1,1,3} \ .$$

例1. 对于 $d = 3$，符号模式 $\sigma^\diamond := (+, +, -, +)$ 的轨道由四种符号模式组成： $\sigma^\diamond$, $i_r(\sigma^\diamond) = (+, -, +, +)$、 $i_m(\sigma^\diamond) = (+, -, -, -)$ 和$i_r(i_m(\sigma^\diamond)) = (+, +, +, -)$。符号模式 $\Sigma_{1,\ d-1,\ 1}$ $(d \geq 3)$ 的轨道由两种符号模式组成:

$$\Sigma_{1,d-1,1} = i_r(\Sigma_{1,d-1,1}) \text{ and } i_m(\Sigma_{1,d-1,1}) = i_m(i_r(\Sigma_{1,d-1,1})) = \Sigma_{2,1,\ldots,1,2}$$

（$d-3$个单位）。当 d 为偶数时，$\Sigma_{1,\ d-1,\ 1}$和 $i_m(\Sigma_{1,\ d-1,\ 1})$ 都是中心对称的。当d为奇数时，$\Sigma_{1,\ d-1,\ 1}$ 是中心对称的，而 $i_m(\Sigma_{1,\ d-1,\ 1})$ 是中心反对称的。

注 1. 对于长度为 2 的轨道，要么有 $i_r(\sigma(Q)) = \sigma(Q)$，要么有 $i_r(i_m(\sigma(Q))) = \sigma(Q)$。总是有 $i_m(\sigma(Q)) \neq \sigma(Q)$，因为这两种符号模式的第二个分量不同。

问题1 首次在 [2] 中提出。对 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用取模，当 $d = 5$ 和 $d = 6$时，不可实现轨道分别恰有 1 个和 4 个，见 [1]。对于 $d = 7$ （见 [9]）和 $d = 8$ （见 [9] 和 [15]），这些数值分别为 6 和 19。在所有这些情形下，均有 $\tilde{\mu} = 0$ ，且问题1 的完整答案已知。详情见第 2 节。

对于双曲多项式，问题1 的答案总是肯定的，见 [17,命题 1]。换言之，任何可容许对为笛卡尔对的相容对，其轨道都是可实现的。文献 [10] 研究了笛卡尔符号法则的热带类比。

最早发现的具有 $\tilde{\mu} = 1$ 的不可实现轨道包括： [16]中的 $d = 11$ 以及 [4]中的 $d = 9$ 。对于 $d = 9$， [4] 中研究的轨道是唯一一个具有 $\tilde{\mu} = 1$的不可实现轨道。本文给出一系列具有 $\tilde{\mu} = 1$的不可实现轨道（依赖于两个整数参数）。该系列包含已发现的 $d = 11$和 $d = 9$ 的例子。此外，对于 $d = 10$ 和 $d = 11$，我们列出具有 $\tilde{\mu} = 1$ 且不可实现，或其问题1答案尚不明确的轨道。我们还证明，对于 $d \leq 14$，除了一个可能具有 $d = 14$的轨道外，不存在具有 $\tilde{\mu} \geq 2$的不可实现轨道。最后，我们给出 $d = 9$、 $c = 2$的问题1的完整答案。

定义3. 对于 $d \geq 9$，我们将 $\mathcal{K}_{n,q}$ 轨道 $(\Sigma_{1,n,q,1}, (1, d-3))$ 记为 $n \geq 4, q \geq 4$, $n + q = d - 1$，因此其笛卡尔对为 $(3, d-3)$。由于轨道 $\mathcal{K}_{n,q}$ 和$\mathcal{K}_{q,n}$ 相同，可以假设 $n \leq q$。

定理1. 对于 $d \geq 9$，轨道 $\mathcal{K}_{n,q}$ 不可实现。

该定理在第3节中证明。

定理2. (1) 对于 $d \leq 14$，除轨道 $(\Sigma_{1,4,5,4,1}, (2, 10))$ 外（关于该轨道，问题1的答案尚不明确），不存在满足 $\tilde{\mu} \geq 2$ 的不可实现轨道。

(2) 对于 $d = 10$，对于轨道 $\mathcal{K}_{4,5} = (\Sigma_{1,4,5,1}, (1,7))$ 和 $(\Sigma_{1,4,4,2}, (1,7))$，其中一个$\tilde{}$具有 $(\tilde{\mu}, \lambda) = (1, 1)$。前者不可实现（见定理1），后者的问题1答案尚不明确。所有其他满足 $d = 10$ 和$\tilde{\mu} = 1$ 的轨道均可实现。

$\tilde{}$(3) 对于 $d = 11$，以下两个轨道（均具有 $\tilde{\mu} = \lambda = 1$）不可实现：

$$\mathcal{K}_{5,5} = (\Sigma_{1,5,5,1}, (1,8)) \text{ and } \mathcal{K}_{4,6} = (\Sigma_{1,4,6,1}, (1,8)) .$$

对于 $d = 11$，除这两个轨道和以下六个轨道外

$$(\Sigma_{1,4,5,2}, (1,8)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,1) , \quad (\Sigma_{1,5,4,2}, (1,8)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,1) ,$$

$$(\Sigma_{2,4,4,2}, (1,8)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,1) , \quad (\Sigma_{1,4,4,1,1,1}, (1,6)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,2) ,$$

$$(\Sigma_{1,4,1,1,4,1}, (1,6)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,2) , \quad (\Sigma_{1,3,1,1,1,1,3,1}, (1,4)) , (\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}) = (1,3) ,$$

（关于这些轨道，问题1的答案尚不明确），所有其他不可实现轨道都属于 $\tilde{\mu}=0$。

定理在第4节中证明。我们的下一个结果涉及具有两次符号变化的符号模式的轨道。没有符号变化或只有一次符号变化的符号模式是可实现的，见 [5, 例1 和定理 1]，；不可实现性的首批示例出现在 $c=2$，见第 2 节开头。

定理3. 对于 $d=9$，以下轨道不可实现：

(Σ_1,8,1, (0, k)) $k=3$，5 和 7；(Σ_1,7,2, (0, ℓ))，(Σ_1,6,3, (0, ℓ)) 和 (Σ_2,6,2, (0, ℓ)) $\ell=5$ 和 7；(Σ_1,5,4, (0, 7))，(Σ_1,4,5, (0, 7))，(Σ_2,4,4, (0, 7))，(Σ_2,5,3, (0, 7)) 和 (Σ_3,4,3, (0, 7)。

所有其他轨道（$\Sigma_{m,\,n,\,q}$，（pos，neg））在 $m>0$、$n>0$、$q>0$、$m+n+q=10$ 的情形下均可实现。

该定理在第5节中证明。

2. Preliminaries

这里列出 $4\le d\le 8$ 的不可实现轨道。在所有情形下，均有 $\tilde{\mu}=0$。对于 $d=4$ 和 $d=5$，不可实现轨道如下：

$$(\Sigma_{1,3,1},(0,2)) \text{ and } (\Sigma_{1,4,1},(0,3))\,. \tag{2.4}$$

对于 $d=6$，共有四个这样的轨道：

$$(\Sigma_{1,5,1},(0,2))\,,\ (\Sigma_{1,5,1},(0,4))\,,\ (\Sigma_{1,1,1,3,1},(0,2)) \text{ and } (\Sigma_{2,4,1},(0,4))\,. \tag{2.5}$$

对于 $d=7$，共有六个不可实现轨道：

$$\begin{aligned}&(\Sigma_{2,5,1},(0,5))\,, \quad (\Sigma_{2,4,2},(0,5))\,, \quad (\Sigma_{3,4,1},(0,5))\,,\\ &(\Sigma_{1,4,1,1,1},(0,3))\,, \quad (\Sigma_{1,6,1},(0,3))\,, \quad (\Sigma_{1,6,1},(0,5))\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 $d=8$，不可实现轨道如下：

$\Sigma_{2,5,2}$，$\Sigma_{1,6,2}$，$\Sigma_{1,4,4}$，$\Sigma_{1,5,3}$ and $\Sigma_{2,4,3}$ with $(0,6)$，

$\Sigma_{1,1,1,3,1,1,1}$ and $\Sigma_{1,3,1,1,1,1,1}$ with $(0,2)$，

(2.7) $\Sigma_{1,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1}$ 以及 $\Sigma_{1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1}$，其中 (0, 2) 和 (0, 4),

$\Sigma_{1,7,1}$ 其中 (0,2)，(0, 4) 和 (0, 6),

$\Sigma_{1,4,1,2,1}$，$\Sigma_{1,6,2}$，$\Sigma_{1,4,2,1,1}$，$\Sigma_{1,1,1,4,2}$ 以及 $\Sigma_{1,4,1,1,2}$ 其中 (0,4)。

以下拼接引理（证明见 [9]）是证明某些轨道可实现的基本工具。

引理1. 设次数分别为 d_1 和 d_2 的首一多项式 P_1 和 P_2，其符号模式分别表示为 $(+,\sigma_1)$ 和 $(+,\sigma_2)$，实现了数对 (pos_1, neg_1) 和 (pos_2, neg_2)。这里，σ_j 表示删去初始符号 $+$ 后剩下的符号模式。那么

(1) 如果 σ_1 的最后一个位置是 $+$，那么对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$，多项式 $\varepsilon^{d_2} P_1(x)P_2(x/\varepsilon)$ 可实现符号模式 $(+,\sigma_1,\sigma_2)$ 和可容许对 $(pos_1+pos_2, neg_1+neg_2)$；

(2) 如果 σ_1 的最后一个位置是 $-$，那么对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$，多项式 $\varepsilon^{d_2} P_1(x)P_2(x/\varepsilon)$ 可实现符号模式 $(+,\sigma_1,-\sigma_2)$ 和配对 $(pos_1+pos_2, neg_1+neg_2)$。这里，$-\sigma_2$ 是通过将 σ_2 中的每个 $+$ 替换为 $-$，反之亦然得到的。

备注2。我们用符号 $*$ 表示配对或符号模式的拼接。引理1表明，将相容的可实现配对 $(\Sigma_{m_1,\dots,m_s}, (a,b))$ 和 $(\Sigma_{n_1,\dots,n_\ell}, (c,d))$ 拼接起来，可得到可实现的配对

$$(\Sigma_{m_1,\dots,m_{s-1},m_s+n_1-1,n_2,\dots,n_\ell}, (a+c, b+d)) = ((\Sigma_{m_1,\dots,m_s}, (a,b)) * (\Sigma_{n_1,\dots,n_\ell}, (c,d)) \ .$$

若只考虑符号模式而非配对，则可以写成

$$\Sigma_{m_1,\dots,m_{s-1},m_s+n_1-1,n_2,\dots,n_\ell} = \Sigma_{m_1,\dots,m_s} * \Sigma_{n_1,\dots,n_\ell} \ .$$

必要时，我们会进行多于两次的连续拼接。

考虑一个没有零系数的双曲首一 d 次多项式。假设其根的模互不相同。考虑这些模在实数正半轴上的排列顺序。我们只标出负根的模所处的位置；下面的例子会对此作出说明。

例 2. 多项式

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)(x+5)(x-6)(x+7)(x+8)(x-9)$$

有五个正根和四个负根。我们用字母 P 和 N 标记其正根和负根的模的相对位置。该多项式的根的模的排列顺序为

$$|1| < |-2| < |3| < |4| < |-5| < |6| < |-7| < |-8| < |9|$$

我们将其记为

$$P < N < P < P < N < P < N < N < P \ .$$

给定一个符号模式（$\alpha_d, \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_0$），$\alpha_j = \pm 1$，可以利用引理1构造一个定义该符号模式的双曲的 d 次多项式。第一步构造一次多项式 $P_+ := x+1$（若 $\alpha_d = \alpha_{d-1}$），或 $P_- := x-1$（若 $\alpha_d = -\alpha_{d-1}$）。之后的每一步中，根据 $\alpha_j = \alpha_{j-1}$ 还是 $\alpha_j = -\alpha_{j-1}$，分别将先前所得的多项式（其作用相当于 P_1，并定义符号模式（$\alpha_d, \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_j$））与多项式 P_+ 或 P_- 按 P_2 拼接。

因此，在此构造过程中加入的每个下一个根的模都远小于此前得到的根的模。最终，构造的多项式的根定义了与给定符号模式相对应的典范序：从右向左读取符号模式，将每一对连续相同（分别为不同）的系数符号对应到字母 N（分别为 P）

然后在任意两个相邻字母之间插入符号 $<$。例如，符号模式 $(+,-,-,+,-,+,+,+,-)$ 定义了典范序

$$P < N < N < P < P < P < N < P\ .$$

因此，对于每一种符号模式，都存在一个双曲多项式，其根的模定义了相应的典范序，见 [17, 命题 1]。

3. Proof of Theorem 1

证明。A）假设一对$\mathcal{K}_{n,\ q}$ 可由某个多项式 Q实现。必要时使用线性变换 $x \mapsto hx$，$h > 0$，可以假设 Q 的一个根为 1。（提醒一下，Q 的系数序列中有三次符号变化，因此根据笛卡尔符号法则，Q 有 3 个或 1 个正根。）我们用 $-x_i$ 表示 Q的负根，$0 < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{d-3}$，并令

$$\sum_{j=1}^{d} a_j x^j =: Q := (x^{d-3} + e_1 x^{d-4} + \cdots + e_{d-4}x + e_{d-3})(x^2 - ux + v)(x-1)\ ,$$

其中 e_k 是量 x_i的初等对称多项式。因此$e_k > 0$ 且 $a_d = 1$。我们列出若干个首项系数和若干个末项系数 a_j:

$$\begin{aligned}
a_{d-1} &= (e_1 - 1) - u\ , \\
a_{d-2} &= (e_2 - e_1) - (e_1 - 1)u + v\ , \\
a_{d-3} &= (e_3 - e_2) - (e_2 - e_1)u + (e_1 - 1)v\ , \\
a_{d-4} &= (e_4 - e_3) - (e_3 - e_2)u + (e_2 - e_1)v\ , \\
a_3 &= (e_{d-3} - e_{d-4}) - (e_{d-4} - e_{d-5})u + (e_{d-5} - e_{d-6})v\ , \\
a_2 &= -e_{d-3} - (e_{d-3} - e_{d-4})u + (e_{d-4} - e_{d-5})v\ , \\
a_1 &= e_{d-3}u + (e_{d-3} - e_{d-4})v\ , \\
a_0 &= -e_{d-3}v\ .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

B）我们引入一些记号:

记号2. 在变量 (u, v) 所在的平面上，我们考虑抛物线 $\mathcal{P}$: $v = u^2/4$ 以及直线 (a_j)，它们分别由列表 (3.8) 中形如$a_j = \cdots$的方程定义。我们令

$$c_- := 23 - 4\sqrt{30} = 1.09\ldots\ ,\quad c_+ := 23 + 4\sqrt{30} = 44.90\ldots\ ,\quad I := (c_-, c_+)\ , \text{ (see (3.11)}$$

$$E_1 := \textstyle\sum_{\nu=1}^{d-3} 1/x_\nu\ , \qquad E_2 := \sum_{1 \le i < j \le d-3} 1/(x_i x_j)\ .$$

因此 $e_{d-4} = e_{d-3} \cdot E_1$ 和 $e_{d-5} = e_{d-3} \cdot E_2$。

注3. 抛物线 $\mathcal{P}$ 上方（分别为下方）的点对应于具有两个共轭复根（分别为两个不同实根）的多项式$x^2 - ux + v$。任何

来自抛物线的多项式都有一个二重实根。抛物线与 u-轴之间的多项式在 $u>0$ 时有两个正根，在$u<0$时有两个负根。 u-轴下方的多项式有两个异号根。我们的目标是证明，由符号模式 $\Sigma_{1,\ n,\ q,\ 1}$ 所产生的 $a_j>0$ 或 $a_j<0$形式的不等式定义的区域与区域 $\{v>u^2/4\}$不相交。因此，在下文中我们假设 $v>0$。

我们首先考虑情形 $e_1>c_-$。由于 $e_1>1$ 和 $a_{d-1}<0$，可得 $u>0$ （见（3.8））。

对于 $e_1\in I$，根据 $e_1=x_1+\cdots+x_{d-3}$和 E_1的定义可知

$$\text{(3.9)}\qquad \begin{cases} e_1\cdot E_1\geq (d-3)^2\geq 49 \text{ hence } E_1\geq 49/c_+>1 \text{ and} \\ \\ e_{d-4}=e_{d-3}\cdot E_1>e_{d-3}\ . \end{cases}$$

引理 2。（1）对于 $e_1\in I$，直线（a_1）和（a_{d-1}）的交点 S 位于抛物线 $\mathcal{P}$下方。

（2）假设 $e_1\geq c_+$ 且 $x_1\leq 1$。那么点 S 位于抛物线 $\mathcal{P}$下方。

引理2的证明。第（1）部分。可得（见（3.8））

$$(a_1)\cap(a_{d-1})\ =\ S\ :=\ (\ e_1-1\ ,\ e_{d-3}(e_1-1)/(e_{d-4}-e_{d-3})\ )$$

并且 $e_{d-4}>e_{d-3}$，见（3.9）。点 S 位于抛物线 $\mathcal{P}$下方。这由

$$e_{d-3}(e_1-1)/(e_{d-4}-e_{d-3})<(e_1-1)^2/4$$

这等价于

$$\text{(3.10)}\qquad e_{d-3}(e_1+3)<e_{d-4}(e_1-1)$$

或者等价于 $e_1+3<(e_1-1)E_1$。然而（见（3.9））

$$(e_1-1)E_1\geq(e_1-1)(49/e_1)=49-49/e_1>e_1+3\ ;$$

这两个不等式中的第二个等价于

$$\text{(3.11)}\qquad e_1^2-46e_1+49=(e_1-c_-)(e_1-c_+)<0\ ,\ \text{i. e. to } e_1\in I\ .$$

第（2）部分。对于固定和 $x_2+\cdots+x_{d-3}$，当$x_2=\cdots=x_{d-3}$时，和 $\sum_{\nu=2}^{d-3}1/x_\nu$取最小值。因此，对于 $x_1\leq 1$，有

$$E_1\geq 1+(d-4)/(e_1/(d-4))=1+(d-4)^2/e_1\geq 1+36/e_1\ ,$$

所以再次有 $e_{d-4}>e_{d-3}$。不等式（3.10）可改写为等价形式

$$1+4/(e_1-1)<e_{d-4}/e_{d-3}=E_1\ .$$

然而，不等式 $E_1\geq 1+36/e_1>1+4/(e_1-1)$ 对 $e_1\geq c_+$成立，由此可得引理的第（2）部分。□

不存在满足引理 2 假设的数对 $\mathcal{K}_{n,\ q}$ ，因为该引理意味着由不等式定义的区域

$$v > u^2/4\ , \qquad a_1 = e_{d-3}u + (e_{d-3} - e_{d-4})v > 0 \ \text{ and}$$

$$a_{d-1} = e_1 - 1 - u < 0\ , \quad \text{i. e.} \quad u > e_1 - 1\ ,$$

为空。事实上，直线 (a_1) 的斜率为正，见 (3.9)；它与抛物线 $\mathcal{P}$ 在原点以及满足 $u > 0$ 的一点处相交。因此，整个扇形区域$\{a_1 > 0,\ u > e_1 - 1\}$ 都位于抛物线 $\mathcal{P}$ 下方。

C) 假设 $x_\nu \geq 1, 1 \leq \nu \leq d-3$，因此 $e_1 > c_-$。我们考虑交点

$$T\ :=\ (a_{d-4}) \cap (a_{d-1})\ = (\ e_1 - 1\ ,\ ((e_3 - e_2)(e_1 - 1) - (e_4 - e_3))/(e_2 - e_1)\ )\ .$$

首先注意，对于 $d \geq 10$ 和 $x_\nu \geq 1$，有 $e_2 - e_1 > 0$ 和 $e_3 - e_2 > 0$。我们证明点 T 位于抛物线 $\mathcal{P}$下方。直线 (a_{d-4}) 的斜率为正。因此，由以下三个不等式定义的区域

$$v > u^2/4\ , \qquad a_{d-1} = e_1 - 1 - u < 0 \ \text{ and}$$

$$a_{d-4} < 0\ , \quad \text{i. e.} \quad v < ((e_3 - e_2)u - (e_4 - e_3))/(e_2 - e_1)\ ,$$

为空，因此不存在满足 $e_1 \geq c_+$ 和 $x_\nu \geq 1$ 的数对 $\mathcal{K}_{n,\ q}$。

点 T 恰好在抛物线 $\mathcal{P}$ 的下方，当且仅当

$$((e_3 - e_2)(e_1 - 1) - (e_4 - e_3))/(e_2 - e_1) < (e_1 - 1)^2/4\ , \ \text{i. e.}$$

$$\Psi := 4(e_3 - e_2)(e_1 - 1) - 4(e_4 - e_3) - (e_1 - 1)^2(e_2 - e_1) < 0\ .$$

当其他变量 x_ν 固定时，我们将量 Ψ 视为变量 x_ν （例如 x_1）的函数。这里我们用 e_j' 表示 de_j/dx_1。显然， $e_j' = f_{j-1}$，其中 f_{j-1} 是量 x_2、.....、 x_{d-3} 的第（$j-1$）个初等对称多项式；我们令 $e_0 = f_0 = 1$。因此， $e_j = f_j + x_1 f_{j-1}$,

$$\Psi = e_1^3 - e_1^2 e_2 - 2e_1^2 - 2e_1 e_2 + 4e_1 e_3 + e_1 + 3e_2 - 4e_4 \ \text{ and}$$

$$\Psi' = 3e_1^2 - 2e_1 e_2 - e_1^2 f_1 - 4e_1 - 2f_1 e_1 - 2e_2 + 4f_2 e_1 + 4e_3 + 1 + 3f_1 - 4f_3\ .$$

将 e_j 代入 Ψ'，以 $f_j + x_1 f_{j-1}$ 替换它，得到

$$\begin{aligned}\Psi' \ &= \ -(f_1 + 3x_1 - 1)(f_1^2 + x_1 f_1 - 2f_2 - x_1 + 1)\\ &= \ -(f_1 + 3x_1 - 1)(x_1(f_1 - 1) + f_1^2 - 2f_2 + 1) \ < \ 0\ ,\end{aligned}$$

因为 $f_1 > 1$ 和 $f_2 < f_1^2/2$。因此 $\Psi' < 0$。所以，若将 Ψ 视为所有变量 x_j 的函数，则可得 $\partial\Psi/\partial x_j < 0$。因此， Ψ 在 $x_1 = \cdots = x_{d-3} = 1$ 时取最大值。在这种情况下，$e_j = \binom{d-3}{j}$ 并且

$$\Psi = -(d-2)(d-3)(d-4)/2 < 0\ .$$

因此，对于 $x_\nu \geq 1$，有 $\Psi < 0, e_1 > c_-$，且点 T位于抛物线 $\mathcal{P}$下方。

D) 到目前为止，我们已经证明，对于 $e_1 > c_-$，不存在满足条件的配对 $\mathcal{K}_{n,q}$。对于 $e_1 \in I$，这是由引理 2 的第（1）部分推得的；对于 $e_1 \geq c_+$，这是由引理 2 的第（2）部分（若 $x_1 \leq 1$）以及 C)（若 $x_1 > 1$）推得的。现在假设 $0 < e_1 \leq c_-$。对合 i_r （见 (1.3)）将多项式 Q 变换为一个符号模式为 $\Sigma_{1,q,n,1}$ 且满足 $e_1 > c_-$的多项式；因子 $x-1$ 保持不变，而 Q 的另外两个因子则分别被替换为同形式的因子。对于 $e_1 \leq c_-$，至少$d-4$ 个量 x_ν 的符号为 < 1，因此应用对合 i_r 后，它们变为$1/x_\nu > 1$，而 e_1 变得大于 $d-4 \geq 6$。因此，定理1在$0 < e_1 \leq c_-$ 下的证明可直接由其在 $e_1 > c_-$下的证明得出。

□

4. Proof of Theorem 2

A）定理2的证明安排如下。B）至F）分别给出了次数从10到14时第（1）部分的证明。证明的B）和C）部分又细分为B1）、C1）（其中我们证明定理在 $d = 10$和 $d = 11$时的第（1）部分）以及B2）、C2）（其中包含定理第（2）和第（3）部分的证明）。利用 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用（见定义2），可以假设 $pos \leq neg$。提醒读者：

（i）对于 $d \leq 8$，不存在满足 $\tilde{\mu} \geq 1$ 的不可实现轨道（见 [1], [9] 和 [15]）。

（ii）对于 $d = 9$，满足 $\tilde{\mu} \geq 1$ 的唯一不可实现轨道是（见 [4]）

$$(\Sigma_{1,4,4,1}, (1,6)) \text{ , with } \tilde{\mu} = 1 \text{ and } \tilde{\lambda} = 1 \text{ .} \tag{4.12}$$

(iii) 若给定轨道的可容许对为 (0, 0)、(0, 1)、(1, 0) 或 (1, 1)，则该轨道可实现。事实上，若可容许对等于 (0, 0) 或 (0, 1)（分别对应 (1, 0)），则选取一个具有给定符号模式 σ 的多项式，并为其加上足够大的正（分别对应负）常数。若可容许对为 (1, 1)，则将符号模式表示为 $\sigma = (\sigma_\dagger, \alpha, \beta)$，其中 α 和 β 是 σ的最后两个符号。若 $\alpha = \beta$（分别对应 $\alpha = -\beta$），则使用拼接 $(\sigma_\dagger, \alpha), (1, 0)) * (\Sigma_2, (0, 1))$（分别对应 $(\sigma_\dagger, \alpha), (0, 1)) * (\Sigma_{1,\ 1},\ (1, 0))$）。

B) 假设 $d = 10$。

B1) 考虑任意一个满足 $2 \leq pos \leq neg$ 的相容对 $\mathcal{K}_\flat := (\sigma_\flat, (pos, neg))$。如上所述，将符号模式 $\sigma_\flat$ 表示为 $(\sigma_\dagger, \alpha, \beta)$。

如果 $\alpha \neq \beta$，且相容对 $\mathcal{K}_\triangle := ((\sigma_\dagger, \alpha), (pos - 1, neg))$ 可实现，那么相容对 $\mathcal{K}_\flat$ 也可实现为 $\mathcal{K}_\triangle * (\Sigma_{1,\ 1},\ (1, 0))$。

如果 $\alpha = \beta$，且相容对 $\mathcal{K}_\diamond := ((\sigma_\dagger, \alpha), (pos, neg - 1))$ 可实现，那么可以将 $\mathcal{K}_\flat$ 实现为 $\mathcal{K}_\diamond * (\Sigma_2, (0, 1))$。然而，相容对 $\mathcal{K}_\diamond$ 可实现。事实上，当 $d = 9$ 时，它可与 $\tilde{\mu} = 1$ 一起实现（若 $pos = neg = 2$，且不存在这样的不可实现的配对），或者在 $neg \geq 3$时与 $\tilde{\mu} \geq 2$ 一起实现，因此同样可实现。因此，唯一无法确定相容对 $\mathcal{K}_\flat$ 是否可实现的情形是

$$\alpha \neq \beta \text{ and } \mathcal{K}_\triangle = \mathcal{K}_{4,4} = (\Sigma_{1,4,4,1}, (1,6)) \text{ .}$$

这意味着 $\mathcal{K}_\flat = (\Sigma_{1,\ 4,\ 4,\ 1,\ 1},\ (2, 6))$，它可实现为 $(\Sigma_{1,\ 4,\ 4},\ (2, 6)) * (\Sigma_{1,\ 1,\ 1},\ (0, 0))$。因此，所有满足 $d = 10$ 和 $\tilde{\mu} \geq 2$ 的数对都是可实现的。

B2) 我们还需要一些记号：

记号 3. 我们用 $\mathcal{K}_\bullet$ 表示一个满足 $\tilde{\mu} = 1$ 的二元组，并用 $\sigma_\bullet := (\alpha_d, \dots, \alpha_0)$ 表示其符号模式，其中 $\alpha_j = +$ 或 $-$, $\alpha_d = +$。我们定义 $\sigma^s := \alpha_s(\alpha_s, \dots, \alpha_0)$ 和 $\sigma_s := (\alpha_d, \dots, \alpha_s)$。我们讨论将 $\mathcal{K}_\bullet$ 实现为 $\mathcal{K}_s * \mathcal{K}^s$ 的可能性，其中二元组 $\mathcal{K}_s$, $\mathcal{K}^s$ 对应于次数为 $d-s$ 和 s 的多项式，其符号模式分别为 σ_s 和 σ^s。

备注 4. 若 $\alpha_s = +$，则 $\mathcal{K}_s$ （分别是 $\mathcal{K}^s$）的可容许对形式为 (0, .)（分别为 (1, .)）。若 $\alpha_s = -$，则这些可容许对的形式分别为 (1, .) 和 (0, .)。我们提醒，对于 $d \leq 8$, 形式为 (1, .) 的可容许对是可实现的，见第 2 节开头及本证明的 A) 部分。

首先假设 $s = 5$ 和 $\alpha_5 = +$。那么 $\mathcal{K}^5$ 这一对是可实现的。若 $\mathcal{K}_5$ 可实现，那么 $\mathcal{K}_\bullet$ 也同样可实现。$\mathcal{K}_5$ 不可实现的唯一可能情况是 $\mathcal{K}_5 =$ (Σ_1,4,1, (0, 3))，见 (2.4)。因此我们假设 $\sigma_\bullet =$ （+, −, −, −, −, +, ?, ?, ?, ? −）。若 $\alpha_4 = -$，则 $\mathcal{K}_4$ 这一对是可实现的，而 $\mathcal{K}^4$ 仅在 $\mathcal{K}^4 =$ (Σ_1,3,1, (0, 2)) 时不可实现。这意味着 $\sigma_\bullet = \Sigma_1$,4,1,1,3,1, 其笛卡尔对为 (5, 5)。该符号模式是可实现的，其可容许对为 $(1, a)$, $a = 3$ 或 5：

$$(\Sigma_{1,4,1,1,3,1}, (1, a)) = ((\Sigma_{1,3}, (1, a-3)) * (\Sigma_{2,1,1,3,1}, (0, 3)) . \tag{4.13}$$

若 $\alpha_5 = \alpha_4 = +$，则 $\mathcal{K}^4$ 是可实现的，而只有当 $\mathcal{K}_4$ 对应于 (2.5) 中列出的四种情形之一时，$\mathcal{K}_4$ 才不可实现。在每种情形中，都必须考虑对合 i_r （见 (1.3)），但不考虑对合 i_m，因为后者会使可容许对的第一分量大于 1。因此 $\sigma_4 = \Sigma_{1,\ 4,\ 2}$。然后我们考虑 $\mathcal{K}_3$ 和 $\mathcal{K}^3$。后者始终是可实现的，因此我们假设 $\mathcal{K}_3$不属于这种情形。于是，σ_3 由 σ_4 在右侧添加符号 + 得到，即 $\sigma_3 = \Sigma_{1,\ 4,\ 3}$。

若 $\sigma_2 = \Sigma_{1,\ 4,\ 3,\ 1}$，则 $\mathcal{K}_2$ 和 $\mathcal{K}^2$ 均可实现，因此只需考虑 $\sigma_2 = \Sigma_{1,\ 4,\ 4}$这一可能性。这样最终得到 $\sigma_\bullet = \Sigma_{1,\ 4,\ 5,\ 1}$ 或 $\Sigma_{1,\ 4,\ 4,\ 2}$。这两种符号模式分别与可容许对 $(1, a)$、$a = 3$ 和 5 一起是可实现的：

$$(\Sigma_{1,4,5,1}, (1, a)) = (\Sigma_{1,4,1}, (0, 1)) * (\Sigma_{5,1}, (1, a-1)) ,$$

$$(\Sigma_{1,4,4,2}, (1, a)) = (\Sigma_{1,4,1}, (0, 1)) * (\Sigma_{4,2}, (1, a-1)) .$$

其中第一个与可容许对 (1,7) 不相容（见定理1），第二个的答案则尚不明确。

现在假设 $\alpha_5 = -$。那么 $\mathcal{K}_5$ 可实现，而只有当 $\sigma^5 = \Sigma_{1,\ 4,\ 1}$时，$\mathcal{K}^5$ 才可能不可实现。在这种情形下，我们考虑 $\mathcal{K}_6$ 和 $\mathcal{K}^6$。对于 $\alpha_6 = +$，$\mathcal{K}^6$ 这一对可实现，而 $\mathcal{K}_6$ 可能不可实现，若 $\sigma_6 = \Sigma_{1,\ 3,\ 1}$ 因此 $\sigma_\bullet = \Sigma_{1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1}$。这就是情形 (4.13)，人们对其应用了对合 i_r，所以它可实现。对于 $\alpha_5 = \alpha_6 = -$，在对合 i_r意义下，所处情形为 $\alpha_{10} = \alpha_5 = \alpha_4 = +$,$\alpha_0 = -$，这已讨论过。

C) 假设 $d = 11$。

C1) 我们使用本证明 B1) 部分中相同的记号；具体而言，我们用 $\mathcal{K}_\flat := (\sigma_\flat, (pos, neg))$ 表示一个满足 $\tilde{\mu} \geq 2$ 的相容对，其中 $\sigma_\flat = (\sigma_\dagger, \alpha, \beta)$。与本证明 B1) 部分一样，我们证明，该相容对 $\mathcal{K}_\flat$ 可能不可实现的情形只有 $\alpha \neq \beta$ 和

$$\mathcal{K}_\triangle = ((\sigma_\dagger, \alpha), (pos-1, neg)) = (\Sigma_{1,4,5,1}, (1, 7)) = \mathcal{K}_{4,5} \text{ or } (\Sigma_{1,4,4,2}, (1, 7)) ,$$

也就是说， $\mathcal{K}_{\triangle}$ 对应于本定理第（2）部分提到的两种情形之一。在这些情形下， $\mathcal{K}_{\flat}$ 可实现，因为它分别等于

$$(\Sigma_{1,4,5,1,1},(2,7)) \quad = \quad (\Sigma_{1,4,1},(2,3)) * (\Sigma_{5,1,1},(0,4)) \qquad \text{and}$$

$$(\Sigma_{1,4,4,2,1},(2,7)) \quad = \quad (\Sigma_{1,4,1},(2,3)) * (\Sigma_{4,2,1},(0,4)) \ .$$

C2) 我们使用本证明 B2) 部分中采用的记号和证明方法。我们要寻找不可实现的配对 $\mathcal{K}_{\bullet}$。首先假设

1. $\alpha_5 = +$。那么配对 $\mathcal{K}^5$ 可实现，而配对 $\mathcal{K}_5$ 可能不可实现，当且仅当 σ_5 对应于情形 (2.5) 之一（差一个对合 i_r）。这意味着 σ_5 属于以下符号模式

$$\Sigma_{1,5,1} \ , \ \Sigma_{1,1,1,3,1} \ , \ \Sigma_{1,3,1,1,1} \ , \ \Sigma_{2,4,1} \ \text{and} \ \Sigma_{1,4,2} \ .$$

1.1. 如果 $\alpha_4 = +$，那么 $\mathcal{K}^4$ 可实现，且 σ_4 是以下符号模式之一

$$\Sigma_{1,5,2} \ , \ \Sigma_{1,1,1,3,2} \ , \ \Sigma_{1,3,1,1,2} \ , \ \Sigma_{2,4,2} \ \text{and} \ \Sigma_{1,4,3} \ .$$

1.1.1. 此列表中的第二个和第三个符号模式并不对应不可实现的情形，见 (2.6)。

1.1.2. 在情形 $\sigma_4 = \Sigma_{1,\ 5,\ 2}$ 和 $\sigma_4 = \Sigma_{2,\ 4,\ 2}$ 中，符号模式 σ^8 的第一个分量必须为 3，第二个分量必须为 ≥ 2；符号模式 σ_8 对应可实现的配对。于是，由 (2.7) 可得， $\sigma_{\bullet}$ 是以下符号模式之一

$$\Sigma_{1,5,5,1} \ , \ \Sigma_{1,5,4,2} \ , \ \Sigma_{2,4,5,1} \ \text{and} \ \Sigma_{2,4,4,2} \ .$$

其中第一个无法通过可容许对 (1, 8) 实现，见定理1；对于第二个、第三个和第四个，这个问题的答案尚不清楚。（第二个和第三个属于同一个轨道。）我们证明，这四种符号模式可通过其他可容许对 $(1,a)$、 $a = 6$、4 或 2 实现：

$$(\Sigma_{1,5,5,1},(1,a)) = (\Sigma_{1,5,3},(0,a-2)) \ * \ (\Sigma_{3,1},(1,2))$$

$$(\Sigma_{1,5,4,2},(1,a)) = (\Sigma_{1,5,3},(0,a-2)) \ * \ (\Sigma_{2,2},(1,2))$$

$$(\Sigma_{2,4,4,2},(1,a)) = (\Sigma_{2,4,3},(0,a-2)) \ * \ (\Sigma_{2,2},(1,2)) \ .$$

1.1.3. 当 $\sigma_4 = \Sigma_{1,\ 4,\ 3}$ 时， σ^8 的第一个分量等于 2，第二个分量为≥ 3。利用列表 (2.7)，可得 $\sigma_{\bullet}$ 的以下可能取值：

$$\Sigma_{1,4,5,2} \ , \ \Sigma_{1,4,6,1} \ , \ \Sigma_{1,4,4,3} \ \text{and} \ \Sigma_{1,4,4,1,1,1} \ .$$

其中第二个无法通过可容许对 (1,8) 实现（见定理1）。第三种符号模式可通过可容许对 (1,8) 实现。事实上，根据 [5,定理3第 (iii) 部分], ，二元组 ($\Sigma_{4,\ 4,\ 3}$,(0,8)) 可实现，因此可以令

$$(\Sigma_{1,4,4,3},(1,8)) = ((+,-),(1,0)) * (\Sigma_{4,4,3},(0,8)) \ .$$

其他可能情形的可实现性如下所示；对于此列表未涵盖的情形，答案尚不明确。

$$(\Sigma_{1,4,5,2},(1,a))=(\Sigma_{1,4,4},(0,a-2))\ *\ (\Sigma_{2,2},(1,2))\ ,\qquad a=6,\ 4\ \text{ or }\ 2\ ;$$

$$(\Sigma_{1,4,6,1},(1,a))=(\Sigma_{1,4,4},(0,a-2))\ *\ (\Sigma_{3,1},(1,2))\ ,\qquad a=6,\ 4\ \text{ or }\ 2\ ;$$

$$(\Sigma_{1,4,4,3},(1,a))=(\Sigma_{1,4,4},(0,a-2))\ *\ (\Sigma_{1,3},(1,2))\ ,\qquad a=6,\ 4\ \text{ or }\ 2\ ;$$

$$(\Sigma_{1,4,4,1,1,1},(1,a))=(\Sigma_{1,4,4},(0,a-2))\ *\ (\Sigma_{1,1,1,1},(1,0))\ ,\quad a=4\ \text{ or }\ 2\ .$$

1.2. 如果现在 $\alpha_4=-$，则二元组 $\mathcal{K}_4$ 可实现，因此只需考虑情形 $\sigma^4=\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$，在这种情形下，$\mathcal{K}^4$ 无法与可容许对 (0,2) 一同实现。结合列表 (2.5)，可得以下符号模式 $\sigma_\bullet$:

$$\Sigma_{1,5,1,1,3,1}\ ,\ \Sigma_{1,1,1,3,1,1,3,1}\ ,\ \Sigma_{1,3,1,1,1,1,3,1}\ ,\ \Sigma_{2,4,1,1,3,1}\ \text{ and }\ \Sigma_{1,4,2,1,3,1}\ .$$

1.2.1. 第一、第四和第五种符号模式可由可容许对 (1,6)、(1,4) 和 (1,2) 实现:

$$(\Sigma_{1,5,1,1,3,1},(1,a+b))=(\Sigma_{1,4},(1,a))*(\Sigma_{2,1,1,3,1},(0,b))\ ,\ a,b=1\text{ or }3\ ,$$

$$(\Sigma_{2,4,1,1,3,1},(1,a+b))=(\Sigma_{2,3},(1,a))*\Sigma_{2,1,1,3,1},(0,b))\ ,\ a,b=1\text{ or }3\ ,$$

$$(\Sigma_{1,4,2,1,3,1},(1,a+b))=(\Sigma_{1,4},(1,a))*(\Sigma_{1,2,1,3,1},(0,b))\ ,\ a,b=1\text{ or }3\ .$$

1.2.2. 第二种（分别地，第三种）符号模式可由可容许对 (1, 4) 和 (1, 2)（分别地，(1, 2)）实现；对于第三种符号模式和可容许对 (1, 4)，目前尚无结论:

$$(\Sigma_{1,1,1,3,1,1,3,1},(1,4))=(\Sigma_{1,1,1},(0,0))\ *\ (\Sigma_{1,3,1,1,3,1},(1,4))\ ,$$

$$(\Sigma_{1,1,1,3,1,1,3,1},(1,2))=(\Sigma_{1,1,1,3,1,1,1},(0,0))\ *\ (\Sigma_{3,1},(1,2))\ ,$$

$$(\Sigma_{1,3,1,1,1,1,3,1},(1,2))=(\Sigma_{1,3,1,1,1,1,1},(0,0))\ *\ (\Sigma_{3,1},(1,2))\ .$$

2. $\alpha_5=-$。当且仅当 $\sigma^5=\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$ 时，$\mathcal{K}_5$ 可实现，而 $\mathcal{K}^5$ 不可实现。2.1. 如果 $\sigma^5=\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$ 且 $\alpha_6=+$，那么 $\mathcal{K}^6$ 可实现，而 $\mathcal{K}_6$ 不可实现当且仅当 $\sigma_6=\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$，因此 $\sigma_\bullet=\Sigma_{1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1}$。这种符号模式可由可容许对 (1, 4) 和 (1, 2) 实现（对于 (1, 6)，结论仍未知）:

$$(\Sigma_{1,4,1,1,4,1},(1,4)\ \text{ or }\ (1,2))=(\Sigma_{1,3},(1,2))\ *\ (\Sigma_{2,1,1,4,1},(0,2)\ \text{ or }\ (0,0))\ .$$

2.2. 如果 $\alpha_5=-$、$\sigma^5=\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$ 且 $\alpha_6=-$，即 $\sigma^6=\Sigma_{2,\ 4,\ 1}$，那么应用对合 i_r（见（1.3））可将此情形转换为 $\sigma_5=\Sigma_{1,\ 4,\ 2}$，$\alpha_0=-$。这一情形已在 1 中处理。

D) 假设 $d=12$。可以尝试将给定的相容对 $\mathcal{K}_\bullet$ with $\tilde{\mu}\geq 2$表示为两个相容对 $\mathcal{K}'$ and $\mathcal{K}''$ 的拼接，它们的次数分别为 10 和 2。如果 $\mathcal{K}'$ 可实现，那么 $\mathcal{K}_\bullet$ 也可实现，因为所有次数为 2 的相容对都可实现。因此我们假设 $\mathcal{K}'$ 不可实现。于是可以假设 $\mathcal{K}'$ 是定理第（2）部分中的两个相容对之一。因此，$\mathcal{K}'$ 的符号模式属于以下几种:

$$\Sigma_{1,4,5,3}\ ,\quad \Sigma_{1,4,5,2,1}\ ,\quad \Sigma_{1,4,5,1,2}\ ,\quad \Sigma_{1,4,5,1,1,1}\ ,$$

$$\Sigma_{1,4,4,4}\ ,\quad \Sigma_{1,4,4,3,1}\ ,\quad \Sigma_{1,4,4,2,2}\ ,\quad \Sigma_{1,4,4,2,1,1}\ .$$

将这些由 4、5 或 6 个数构成的序列分别表示为 $(1, A)$ 和 $(1, 4, B)$，其中 A 是其中最后 3、4 或 5 个数构成的序列，而 B 分别是最后 2、3 或 4 个数构成的序列。如果 $3 \le pos \le neg$，那么

$$\mathcal{K}_\bullet = (\Sigma_{1,1}, (1,0)) \ * \ \mathcal{K}^\sharp\ ,\ \text{where}\ \mathcal{K}^\sharp = (\Sigma_{1,A}, (pos-1, neg))\ . \tag{4.14}$$

对 $\mathcal{K}^\sharp$ 与 $d = 11$ 和 $\tilde{\mu} \ge 2$ 组成的配对是可实现的。因此 $\mathcal{K}_\bullet$ 也是可实现的。

假设 $2 = pos \le neg$。那么可以写成

$$\mathcal{K}_\bullet = (\Sigma_{1,4}, (1,3)\ \text{or}\ (1,1)) \ * \ (\Sigma_{1,B}, (a,b))\ , \tag{4.15}$$

其中，若 $neg \ge 4$，则 $\mathcal{K}_\bullet$的可容许对为 $(a+1, b+3)$；若 $neg = 2$，则为 $(a+1, b+1)$；或者为 3。每个配对 $(\Sigma_{1,\ 4},\ (1, 3))$、$(\Sigma_{1,\ 4},\ (1, 1))$ 和 $(\Sigma_{1,\ B},\ (a, b))$ 都是可实现的（对于最后一个，有 $d = 8$ 和 $\tilde{\mu} \ge 1$），所以 $\mathcal{K}_\bullet$ 是可实现的。

E) 假设 $d = 13$ 或 $d = 14$。（对于 $d = 14$，我们假设定理已对 $d = 13$ 得证。）与第 D) 部分类似，可以尝试将给定的配对 $\mathcal{K}_\bullet$ 与 $\tilde{\mu} \ge 2$ 表示为次数分别为 10 和 3 的配对 $\mathcal{K}'$ 和 $\mathcal{K}''$ 的拼接（若 $d = 14$，则次数分别为 10 和 4）。与第 D) 部分一样，我们假设 $\mathcal{K}'$ 是定理第（2）部分中的配对之一。我们将 $\mathcal{K}_\bullet$ 的符号模式记作 $(1, A)$ 和 $(1, 4, B)$，并以类似方式定义 A 和 B。

对于 $3 \le pos \le neg$，我们使用公式 (4.14)。这对 $\mathcal{K}^\sharp$ 与 $d = 12$（分别为 $d = 13$）相配，因此可实现。对于 $2 = pos \le neg$，我们可以使用公式 (4.15)及其后的推理，但当 $(\Sigma_{1,B}, (a, b))$ 属于这对 (4.12) 的轨道（分别属于定理第（2）部分中某一对的轨道）时除外。$\mathcal{K}_\bullet$ 的符号模式的前 8 个符号为 $(+, -, -, -, -, +, +, +)$。接下来我们分别处理情形 $d = 13$ 和 $d = 14$。

假设 $d = 13$。这前 8 个符号意味着，必须从符号模式 $\Sigma_{1,4,4,1} = i_r(\Sigma_{1,4,4,1})$ 的轨道中选取 $\Sigma_{1,4,4,1}$（而非 $\Sigma_{2,1,1,2,1,1,2} = i_m(\Sigma_{1,4,4,1}) = i_r(\Sigma_{2,1,1,2,1,1,2})$），使其等于 $\Sigma_{1,B}$。因此，$\mathcal{K}_\bullet$ 的符号模式为 $\Sigma_{1,4,4,4,1}$。可容许对等于 $(2, \nu)$，其中 $\nu = 9$ 为 7、5 或 3。我们设

$$(\Sigma_{1,4,4,4,1}, (2,\nu)) = (\Sigma_{1,2}, (1,1)) \ * \ \mathcal{K}^* \ * \ (\Sigma_{1,1}, (1,0))\ ,\ \mathcal{K}^* := (\Sigma_{3,4,4}, (0, \nu-1))$$

此拼接中的第一对和第三对均可实现。对于 $\nu = 9$，$\mathcal{K}^*$ 可实现，见定理 4] 的 [5, 。因此，存在一个实多项式$Q_\natural$，其符号模式为 $\Sigma_{3,4,4}$，并且有 8 个互异负根和一对共轭复根。对 $Q_\natural$ 的系数进行扰动而不改变其符号模式，可使其所有临界值互不相同。因此，取适当的正值 t，便可得到多项式 $Q_\natural + t$，其符号模式为 $\Sigma_{3,4,4}$，且恰有 6、4 或 2 个互异负根，相应地有 2、3 或 4 对共轭对。因此，对于 $\nu = 9$，$\mathcal{K}^*$（以及 $(\Sigma_{1,4,4,4,1}, (2, \nu))$）在 7、5 或 3 时均可实现。

F) 假设 $d = 14$。$\mathcal{K}_\bullet$ 的符号模式（见 E））的前 8 个符号表明，符号模式 $\Sigma_{1,\ B}$ 属于以下符号模式之一的轨道：$\Sigma_{1,\ 4,\ 5,\ 1}$ 或

$\Sigma_{1,\ 4,\ 4,\ 2}$，见定理第（2）部分； B 的第一个分量必须是 ≥ 3。因此$\Sigma_{1,\ B}$ 属于以下符号模式之一：

$$\Sigma_{1,4,5,1}\ ,\ \ \Sigma_{1,5,4,1}\ \text{ or }\ \Sigma_{1,4,4,2}\ .$$

对于 $\Sigma_{1,\ B}=\Sigma_{1,\ 4,\ 4,\ 2}$，有

$$\mathcal{K}_\bullet=(\Sigma_{1,4,4,4,2},(2,\nu+1))=(\Sigma_{1,4,4,4,1},(2,\nu))\ *\ (\Sigma_2,(0,1))\ ,$$

其中 $\nu=9$、7、5 或 3，且第一个连接因子可实现（见 E)）。因此$\mathcal{K}_\bullet$ 也可实现。对于 $\Sigma_{1,\ B}=\Sigma_{1,\ 4,\ 5,\ 1}$，有

$$\mathcal{K}_\bullet=(\Sigma_{1,4,4,5,1},(2,\nu+1))=(\Sigma_{1,2},(1,1))\ *\ \mathcal{K}^*\ *\ (\Sigma_{2,1},(1,1))$$

其中 $\mathcal{K}^*$ 如 E) 中所述，因此这种情形也可实现。对于 $\Sigma_{1,\ B}=\Sigma_{1,\ 4,\ 5,\ 1}$， $\mathcal{K}_\bullet$ 的符号模式等于 $\Sigma_{1,\ 4,\ 5,\ 4,\ 1}$。它可由以下可容许对实现：$(2,\rho)$、 $\rho=2$、4、6 或 8：

$$(\Sigma_{1,4,5,4,1},(2,\rho))=(\Sigma_{1,4,1},(0,1))\ *\ (\Sigma_{5,4,1},(2,\rho-1))\ .$$

对于 $\rho=10$，问题1的答案仍然未知。

5. Proof of Theorem 3

A) 我们首先考虑可容许对为 (0, 1) 和 (0, 3) 的（不可）实现情形。每个形如 $(\Sigma_{m,\ n,\ q}$, (0, 1)) 且满足 $m+n+q=2\ell$, $\ell\geq 2$, $m>0$, $n>0$,$q>0$ 的二元组均可实现——只需选取一个符号模式为 $\Sigma_{m,\ n,\ q}$ 的多项式，并给它加上一个较大的正常数即可。接下来我们假设 $q\geq m$，否则可利用对合 i_r，考虑来自同一轨道的二元组 $(\Sigma_{q,\ n,\ m}$, (0, 3))。

另一方面，任何形如 $(\Sigma_{d+1}$, $(0,k))$ 的二元组都可实现（[5, 例- 如 1]）。这意味着，对于 $d=9$，任何满足 $q\geq 3$ 且可容许对为 (0, 3) 的二元组都可实现，因为

$$(\Sigma_{m,n,q},(0,3))=(\Sigma_{m,n,q-2},(0,1))*(\Sigma_3,(0,2))\ .$$

这一对 $(\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$, (0, 3)) 可实现为

$$(\Sigma_{2,6,2},(0,3))=(\Sigma_{2,6,1},(0,2))*(\Sigma_2,(0,1))\ ,$$

其中第一个因子来自与以下对象相同的轨道

$$(\Sigma_{1,6,2},(0,2))=(\Sigma_{1,6,1},(0,1))*(\Sigma_2,(0,1))$$

因此，该轨道可实现。我们通过直接构造证明轨道 $(\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$, (0,3)) 可实现。我们令

$$G_0:=x(x^2-1)^2(x^4+2x^2+1)=x^9-2x^5+x\ ,$$

然后 $G_1:=G_0-0.0001(x+1)^8+0.2$ 有三个负根 $-1.09\ldots$、$-0.84\ldots$ 和 $-0.20\ldots$，以及三对共轭复根对。由 G_1 定义的符号模式为$\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$，因为

$$\begin{aligned}G_1\ \ =\ \ & x^9-0.0001x^8-0.0008x^7-0.0028x^6-2.0056x^5-0.0070x^4\\ & -0.0056x^3-0.0028x^2+0.9992x+0.1999\ .\end{aligned}$$

最后，轨道（$\Sigma_{1,\ 8,\ 1}$，（0,3））不可实现，见定理 4] 的 [18, 部分（需要对其中所述的不可实现例子序列应用对合 i_m ）。

B) 假设可容许对为 (0,5)。若 $q \geq 5$，则可通过以下拼接实现该二元组

$$(\Sigma_{m,n,q-4}, (0,1)) * (\Sigma_5, (0,4)) .$$

假设 $q = 4$ 或 $q = 3$ 且 $m = 2$ 或 3。于是根据 [9, 定理 9] ，相应的二元组 ($\Sigma_{m,\ n,\ q-2}$,(0,3)) 可实现，并且令

$$(\Sigma_{m,n,q}, (0,5)) = (\Sigma_{m,n,q-2}, (0,3)) * (\Sigma_3, (0,2)) .$$

二元组 ($\Sigma_{1,\ 8,\ 1}$,(0,5)) 不可实现（参见 [18, 定理 4]的第 (i) 部分）。以下命题解决了剩余情形:

命题 1。二元组 ($\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$, (0, 5))、($\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$, (0, 5)) 和 ($\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$, (0, 5)) 均不可实现。

该命题在第 6 节中得到证明。

C) 假设 $d = 9$ 且可容许对为 (0, 7)。偶对 (Σ_1,8,1, (0, 7)) 不可实现，参见 [18, 定理 4]的第 (i) 部分。由 [5, 定理 3] 可知，若 $n = 1$ 为 2 或 3，则该符号模式可通过可容许对 (0, 7) 实现。同一定理还意味着，对于 $m = 1, n \geq 4$，偶对 ($\Sigma_{m,n,q}$, (0, 7)) 不可实现。 [5] 中的命题 1 表明，偶对 (Σ_3,4,3, (0, 7)) 和 (Σ_2,4,4, (0, 7)) 不可实现。其余偶对 (Σ_2,5,3, (0, 7)) 和 (Σ_2,6,2, (0, 7)) 根据 [9, 命题 6]也不可实现。

6. Proof of Proposition 1

定义 4. (1) 广义符号模式是一个由符号 $+$、$-$ 和/或 0 组成、以 $+$ 开头的符号串。具有正首项系数的实多项式 P 称为定义了给定的广义符号模式 σ ，如果 σ 的各分量等于 P 对应系数的符号。给定一个符号模式 σ_1 和一个长度相同的广义符号模式 σ_2 ，如果 σ_2 是将 σ_1 的某些分量（不包括初始的 $+$）替换为零得到的，则称 σ_2 与 σ_1 相邻。给定符号模式的闭包是包含该符号模式及所有与之相邻的广义符号模式的集合。

(2) 我们将映射 $\tau_\pm\colon\ x \mapsto x \pm \varepsilon$ 称为同步平移，其中 $\varepsilon > 0$。我们通常认为 ε 足够小。

引理 3. 给定一个至少有一个系数为零的实首一多项式 $W := \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ ，存在一个同步平移 $\tau_\pm$ ，使得平移后 W 的所有系数均非零，且原先非零的系数保持其符号。此外，如果 $a_k = 0 \neq a_{k+1}$，则可以在 $\tau_\pm$ 的定义中选择符号 $+$ 或 $-$ ，使得平移后新系数 a_k 的符号为所需的符号（$+$ 或 $-$）。

证明。平移后， W 的所有系数都变成关于 ε的非常数多项式，因此除有限多个 ε 的取值外，它们都非零。平移后，系数 a_k 变为 $a_k \pm (k+1)a_{k+1}\varepsilon + o(\varepsilon)$，由此可得引理的最后一个结论。□

引理4. 对于 $d=7$，不存在首一多项式 $P:=\sum_{j=0}^{7} a_j x^j$ 同时满足以下条件：

(i) 有 $P(0) > 0$，且 P 定义以下符号模式之一：$\Sigma_{1,\ 6,\ 1}$，或$\Sigma_{1,\ 5,\ 2}$，或与其中之一相邻的广义符号模式；

(ii) P 有 5 个负根（按重数计）；

(iii) P 有一对共轭复根或一个二重正根。

证明。首先，假设 P 有一对共轭复根。用 $-\eta_j$表示 P的负根。令 $P_1:=x(x+\eta_1)\cdots(x+\eta_5)$。因此，$P_1$ 的所有系数均为正。当 $\varepsilon>0$ 足够小时，多项式 $P_2:=P-\varepsilon P_1$ 确定符号模式 $\Sigma_{1,\ 6,\ 1}$ 或 $\Sigma_{1,\ 5,\ 2}$ 之一，并且有一对共轭复根。可以扰动 P_2 的负根，使它们互不相同，同时保持其系数的符号以及共轭复根对的存在。然而，这样的多项式 P_2 并不存在，见 [9, 定理 9]。

假设 P 有一个二重正根。因此， P 是双曲的。如果 P 没有零系数，那么可以扰动 P 的负根，使它们互不相同，同时不改变系数的符号。之后，考虑多项式 $P_3:=P+\delta x^4$，它有 5 个互异负根，并且当 $\delta>0$ 足够小时，确定与 P 相同的符号模式。多项式 P_3 没有二重正根，但有一对共轭复根，且这对根靠近 P的二重根。同样，根据 [9, 定理 9]，这样的多项式 P_3 不存在。

假设 P 具有一个二重正根，并且至少有一个零系数。我们提醒一下， P 不可能有两个连续的零系数（[16, 引理7]）。当 $\varepsilon>0$ 足够小时，通过进行平移 $\tau_{\pm}$，可以使 P 的所有系数都非零。我们考虑以下情形：

1）有 $a_6<0$ 且 $a_1<0$（分别为 $a_2<0$）。平移 τ_+ 或 τ_- 可使 a_6 与 a_1 之间（分别为 a_6 与 a_2之间）的所有系数均非零。因此它们全为负数，否则根据笛卡尔符号法则， P 不可能有 5 个负根。对 P 的负根作微扰，使它们互异，同时保持符号模式不变。于是，当 $\delta>0$ 足够小时，多项式 $P+\delta x^4$ 仍有 5 个互异负根，且具有相同的符号模式，但二重根会在其附近产生一个共轭复根对。这样的多项式不存在，参见 [9,定理 9]。

2）有 $a_6=0$ 和 $a_1<0$（分别为 $a_2<0$）。通过选择适当符号 $+$ 或 $-$ 的平移 $\tau_{\pm}$，可使 a_7 与 a_1 之间（分别为 a_7 与 a_2之间）的所有系数均非零，尤其是 a_6 变为负数。再次根据笛卡尔符号法则， a_7 与 a_1 之间（分别为 a_7 与 a_2 之间）的其余系数均为负数；如情形 1）所示，可得出结论：这样的多项式不存在。

3）有 $a_6<0$ 和 $a_1=0$（分别为 $a_2=0$）。通过选择适当符号 $+$ 或 $-$ 的平移 $\tau_{\pm}$，可使 a_6 与 a_0 之间（分别为 a_6 与 a_1之间）的所有系数均非零，尤其是 a_1（分别为 a_2）变为负数。其余推理与情形 2）相同。

4) 有 $a_6=a_1=0$（分别为 $a_6=a_2=0$）。于是有 $a_2\neq 0$（分别为 $a_3\neq 0$），见 [16, 引理 7],，因此有 $a_2<0$（分别为 $a_3<0$）。通过采用适当符号 $+$ 或 $-$ 的平移 $\tau_{\pm}$，可使 a_7 与 a_0 之间（分别为 a_7 与 a_1之间）的所有系数均非零，尤其是 a_6 变为负数。因此， P 的符号模式现在为 $\Sigma_{1,\ 6,\ 1}$、 $\Sigma_{1,\ 5,\ 2}$ 或 $\Sigma_{1,\ 4,\ 3}$。对 P 的负根作微扰，使它们彼此不同，同时保持符号模式不变，然后向 P 中加上单项式 δx^4

其中 $\delta > 0$ 足够小。二重根产生一个共轭复根对，而 P 实现了其中一组（$\Sigma_{1,\ k,\ 7-k}$，（0，5））、 $k = 4$、5 或 6；根据 [9,定理 9]，这是不可能的。□

引理 5. 不存在满足以下条件的实首一九次多项式 U：

(i) 其符号模式为 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$， $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或$\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$，或者是与这些符号模式之一相邻的广义符号模式；(ii) 它有 7 个负根（按重数计数）；(iii) 它或者有一个二重正根，或者有一对共轭复根。

证明. 首先我们注意到，（广义）符号模式的最后三个分量不可能是$(+, 0, +)$，因为在这种情形下，多项式 $U(-x)$ 的符号变化少于 7 次，根据笛卡尔符号法则，该多项式不可能有 7 个负根。因此， $x^8, \ldots, x^3$（或者在$\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的情形下， $x^7, \ldots, x^3$）的系数均为非正。 x 的系数非负，且只有在 x^2 的系数非正时才可能为 0。

若多项式 U 有一个二重正根，则它是双曲的。回忆一下，根据 [16, 引理 7]，多项式 U 没有两个连续的零系数。可以进行同步平移，使所有系数都非零，并使 x^8 的系数为负（若$\Sigma_{2、6、2}$，则使 x^7 的系数为负）。根据笛卡尔符号法则，此时多项式的符号模式为 $\Sigma_{1、5、4}$, $\Sigma_{1、6、3}$, $\Sigma_{1、7、2}$, $\Sigma_{2、6、2}$ 或$\Sigma_{2、7、1}$。可以扰动其负根，使它们彼此不同，然后在多项式中加上一个单项式 δx^4，其中 $\delta > 0$ 足够小。这样符号模式保持不变，而二重正根会分裂成一对靠近它的共轭复根对。然而，这样的多项式并不存在，见 [9, 命题 6]。

若 U有一对共轭复根对，则将其改写为 $U_1 := U - \varepsilon \prod_{j=1}^{7}(x+\eta_j)$，其中 $-\eta_j$ 是 U 的负根。当 $\varepsilon > 0$ 足够小时， U_1 的所有系数都非零，至多只有 x^8 的系数例外。经过同步平移后， x^8 的系数变为负数，符号模式则为 Σ_1,6,3, Σ_1,7,2,Σ_1,8,1 或 Σ_2,6,2。接着扰动负根使其彼此不同，于是该多项式实现以下某一组数值：(Σ_1,6,3, (0, 7))、(Σ_1, 7,2, (0, 7))、(Σ_1,8,1, (0, 7)) 或 (Σ_2,6,2, (0, 7))，但这是不可能的，见 [9, 命题 6]。

□

定义5。我们将重数向量称为这样一个向量：其分量等于按递增顺序排列的实多项式负根的重数。若通过一次或多次将两个相邻分量替换为它们的和，可由重数向量 $\vec{v}_1$ 得到重数向量 $\vec{v}_2$，则称 $\vec{v}_1$ 与 $\vec{v}_2$ 相邻。例：(5)与(3,2)相邻，而(3,2)又与(3,1,1)相邻。

引理6。假设存在一个9次实首一多项式 V，实现了这对($\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$，(0, 5))（分别为($\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$，(0, 5)或($\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$，(0, 5)）。那么存在一个实首一九次多项式满足以下条件：

(i) 它定义了符号模式$\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$ （分别为 $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$）；(ii) 它有一个二重正根；(iii) 它的负根的重数向量属于以下向量之一：

$$(1, 2, 2)\ ,\ (2, 1, 2)\ ,\ (3, 1, 1)\ ,\ (1, 1, 3)\ ,\ (3, 2)\ ,\ (2, 3)\ .$$

证明。多项式 V 对于 $x<0$ 有 4 个或 6 个临界点（按重数计）。我们将它们记为 $-\xi_4<-\xi_3<-\xi_2<-\xi_1$；如果有 6 个，那么 V的两个相邻负根之间有三个临界点，我们选取其中最右边的一个。我们将相应的临界值记为 η_i，其中 $\eta_4>0$、$\eta_3<0$、 $\eta_2>0$ 和 $\eta_1<0$。

假设 $\eta_3=\eta_1$。然后我们向 V 加上一个正常数（这不会改变符号模式），从而得到一个重数向量为 (1,2,2) 的多项式。

假设 $\eta_3<\eta_1$。我们考虑多项式族 $V_t:=V+tx,t\geq 0$，其中 x 的系数符号为 $+$。随着 t 增大，临界值 η_4 的减小速度快于 η_3，而 η_2 的减小速度快于 η_1。将 $t_0>0$ 记为使下列情况之一发生的 t 的最小值：

1) 有 $\eta_4=\eta_1$。在这种情形下，我们向 V_{t_0} 加上一个正常数，从而得到一个重数向量为 (2,1,2) 的多项式。

2）有 $\eta_2=\eta_1$。那么， $-\xi_1$ 是 V_{t_0}的退化临界点。我们向 V_{t_0} 中加上一个正常数，得到一个重数向量为 (1,1,3) 的多项式。

假设 $\eta_3>\eta_1$。那么对于 $t=t_0$，在族 V_t中可能发生以下情况之一：

3）有 $\eta_3=\eta_1$。我们向 V_{t_0} 中加上一个正常数，得到一个重数向量为 (1, 2, 2) 的多项式。

4）有 $\eta_4=\eta_3$。那么， $-\xi_3$ 是 V_{t_0}的退化临界点。我们向 V_{t_0} 中加上一个正常数，得到一个重数向量为 (3, 1, 1) 的多项式。

如果 1）和 2）（分别地，3）和 4））同时发生，那么 V_{t_0} 的重数向量为 (2, 3)（分别为 (3, 2)）。对于 $t=t_0$ 而言，不可能使 η_1、 η_2、 η_3 或 η_4 与 V_{t_0} 的另外两个可能临界值之一相等（如果 V_{t_0} 有 6 个而不是 4 个负临界点），因为这样就可以向 V_{t_0} 中加上一个正常数，从而得到一个具有 7 个负根、一个共轭对且符号模式为 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$， $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$ 的多项式，而根据引理 5，这是不可能的。□

命题 2. 不存在具有 5 个负根、重数向量有 1、2 或 3 个分量，且其符号模式属于 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$、 $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的闭包，并且有一个二重正根的实首一九次多项式。

证明。A）我们以重数向量 (5)（一个五重负根）为例说明证明方法。我们要证明不存在这样的多项式

$$H_5:=(x+1)^5((x+u)^2+v)(x-c)^2\ ,\ \ v>0\ ,\ \ c>0\ ,\ \ u\in\mathbb{R}\ .$$

将 x-轴缩放，使负根等于 -1。下标 5 对应重数向量 (5)。因此，不存在这样的多项式$H_5:=\sum_{j=0}^{9}a_jx^j$ 等价于区域 $E_5\cap D_5$ 为空，其中$D_5\subset\mathbb{R}^3$ 由以下不等式定义

$$D_5\ :\ \{\ (u,v,c)\mid v>0\ ,\ c>0\ \}$$

且 E_5 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭区域，其定义条件是 H_5 的系数符号对应于以下某一种符号模式的闭包：$\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$、 $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$或$\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$。提醒一下， H_5 的每个系数都是变量（u、 v、 c）的多项式，其中有 $a_0=c^2(v+u^2)$、.....、 $a_8=5+2u-2c$。如果区域 E_5的内部

非空，那么 E_5 先验上具有分层流形的结构。其维数最大的层对应于定义符号模式 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$、$\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或$\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的多项式。集合 D_5 的闭包 D_5 由不等式 $v \geq 0$、$c \geq 0$ 定义，其边界 ∂D_5 则由 $v \geq 0$、 $c \geq 0$、 $cv = 0$定义。

没有多项式 $H_5 \in \partial D_5$ 属于符号模式 Σ_1,7,2, Σ_1,6,3 或 Σ_2,6,2 的闭包。事实上，对于 $c = 0 < v$ 或 $c > 0 = u = v$，有 $H_5 = x^2 H_5^1$，其中$H_5^1(0) > 0$。因此， H_5 的（广义）符号模式不能与 Σ_1,7,2 或 Σ_2,6,2 相邻，只能与 Σ_1,6,3 相邻；而 H_5^1 的符号模式与 Σ_1,6,1 相邻。由引理4可知，这样的多项式 H_5^1 不存在。对于 $v = 0 < c, u > 0$，由引理 5 可知 H_5不存在。对于 $v = 0 < c, u < 0$，多项式 H_5 有四个正根（按重数计），根据笛卡尔符号法则，（广义）符号模式中至少需要有四次符号变化——这就产生了矛盾。因此， $c = 0$或 $v = 0$ 不可能成立。

B) 接下来我们考虑两个子域 $D_5^+ := \bar{D}_5 \cap \{u \geq 0\}$ 和 $D_5^- := \bar{D}_5 \cap \{u \leq 0\}$。它们是凸的。为了证明不存在多项式 $H_5 \in D_5^+$（分别为$H_5 \in D_5^-$）具有所需的（广义）符号模式，我们考虑平面T_r^+: $u + v + c = r$（分别为 T_r^-: $-u + v + c = r$）， $r \in \mathbb{R}$。显然，对于 $r < 0$，有 $T_r^\pm \cap D_5^\pm = \emptyset$和 $T_0^\pm \cap D_5^\pm = \{(0, 0, 0)\}$，其中 $(0, 0, 0) \in \partial D_5$。

我们假设存在一个多项式 $H_5 \in D_5^\pm$具有所需的（广义）符号模式。那么它不属于 $\partial D_5^\pm$，而是属于某个平面 $T_r^\pm$，其中某个 $r = r_0 > 0$。在点 $(0, 0, 0)$ 处，H_5 的至少一个系数 a_j 符号错误。 r_0 的最小可能值是使得 $H_5 \in E_5$成立的最小值，即所有系数的符号都与符号模式 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$，$\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的闭包相对应的情形。因此，对于 $r = r_0$， H_5 的至少一个系数 a_j 为零，因为相应的多项式 H_5 属于集合 E_5的边界，但不属于其内部。

我们如下使用拉格朗日乘子法。我们要寻找函数 $T_0^\pm$在超曲面 $\{a_j = 0\}$上的最小值。我们构造函数

$$\tilde{T}_j^\pm := \pm u + v + c + \lambda a_j \ ,$$

其中 λ是拉格朗日乘子。对于 $j = 0, \ldots, 8$，我们考虑方程组

$$\partial \tilde{T}_j^\pm / \partial \lambda = a_j = \partial \tilde{T}_j^\pm / \partial u = \partial \tilde{T}_j^\pm / \partial v = \partial \tilde{T}_j^\pm / \partial c = 0 \ .$$

在每种情形下，我们都在寻找满足 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $(u, v, c) \in D_5^\pm$的解。结果表明，在每种情形下，要么无解，要么解的 u, v 或 c 的符号不正确，要么所得多项式 H_5的系数符号与符号模式 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$， $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的闭包相矛盾。利用计算机代数即可证明这一点。

C) 重数向量 (5) 与四个含两个分量的重数向量相邻：(4, 1)、(3, 2)、(2, 3) 和 (1, 4)。我们证明多项式不存在

$$H_{k,5-k} := (x + \mu)^k (x + 1)^{5-k} ((x + u)^2 + v)(x - c)^2 \ , \ \ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ ,$$

带有 $\mu > 1$，并且以上述 (u, v, c) 为准。因此

$$\mathbb{R}^4 \supset D_{k,5-k} = \{(u,v,c,\mu) \mid v>0\ ,\ c>0\ ,\ \mu>1\ \}\ .$$

与 A) 中一样，可以证明，没有任何多项式 $H_{k,\ 5-k} \in \partial D_{k,\ 5-k}$ 带有 $c=0$ 或 $v=0$，其系数的符号属于 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$, $\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或 $\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$的闭包。对于 $\mu=1$，实际上要寻找的是一个多项式 H_5，而 A) – B) 已证明它并不存在。因此 $E_{k,\ 5-k} \cap \partial D_{k,\ 5-k} = \emptyset$。

D) 为了证明 $E_{j,5-j} \cap D_{j,5-j} = \emptyset$，我们再次使用拉格朗日乘子法。令 $D^+_{k\ ,5-k} := D_{k,5-k} \cap \{u>0\}$, $D^-_{k\ ,5-k} := D_{k,5-k} \cap \{u<0\}$,$S^{\pm}_r$: $\pm u+v+c+(\mu-1) = r\ (r \in \mathbb{R})$，且 $\tilde{S}^{\pm}_j := \pm u+v+c+(\mu-1)\ +\lambda a_j$。在这种情形下

$$a_8 = j\mu + (5-j) + 2u - 2c\ ,\ \dots\ ,\ a_0 = \mu^j c^2 (v+u^2)\ .$$

对于 $j=0,\dots,8$，以及如上所述的 k，我们考虑方程组

$$\partial\tilde{S}^{\pm}_j/\partial\lambda = a_j = \partial\tilde{S}^{\pm}_j/\partial u = \partial\tilde{S}^{\pm}_j/\partial v = \partial\tilde{S}^{\pm}_j/\partial c = \partial\tilde{S}^{\pm}_j/\partial\mu = 0\ .$$

我们要寻找一个满足 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $(u,v,c,\mu) \in D^{\pm}_{k\ ,5-k}$ 的解。在每种情形下，要么不存在实数解，要么解的 u, v, c 或 $\mu-1$ 的符号不正确。

E) 三个分量的可能重数向量为 (2, 2, 1)、(2, 1, 2)、(1, 2, 2)、(3, 1, 1)、(1, 3, 1) 和 (1, 1, 3)。由重数向量 $(j,k,5-j-k)$ 定义的多项式 $H_{j,k,5-j-k}$ 为

$$H_{j,k,5-j-k} := (x+\mu_2)^j (x+\mu_1)^k (x+1)^{5-j-k} ((x+u)^2+v)(x-c)^2\ ,$$

其中 (u,v,c) 如上所述，且 $1<\mu_1<\mu_2$。我们令

$$\mathbb{R}^5 \supset D_{j,k,5-j-k} := \{(u,v,c,\mu_1,\mu_2) \mid v>0\ ,\ c>0\ ,\ 1<\mu_1\ ,1<\mu_2\ \}\ ,$$

也就是说，我们考虑一个比区域 D_5 和 $D_{j,5-j}$ 的严格对应物更大的区域。（严格对应物将由 $1<\mu_1<\mu_2$ 而非 $1<\mu_1$,$1<\mu_2$ 定义。）这样做是为了简化计算。我们还令 $D^-_{j\ ,k,5-j-k} := D_{j,k,5-j-k} \cap \{u<0\}$, $K^{\pm}_r$: $\pm u+v+c+(\mu_1-1)\ = r\ (r \in \mathbb{R})$，以及 $\tilde{K}^{\pm}_i := \pm u+v+c+(\mu-1)\ +(\mu_2-1)\ +\lambda a_i$。对于 $i=0,\dots,8$，以及如上所述的 (j,k)，我们考虑方程组

$$\partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial\lambda = a_i = \partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial u = \partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial v = \partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial c = \partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial\mu_1 = \partial\tilde{K}^{\pm}_i/\partial\mu_2 = 0\ .$$

我们寻找满足 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $(u,v,c,\mu_1,\mu_2) \in D^{\pm}_{j\ ,\ k,\ 5-j-k}$的解。每种情形下，要么不存在实数解，要么解的 u, v, c, μ_1-1 或 μ_2-1 符号不正确；或者在存在解时，所得多项式$H_{j,\ k,\ 5-j-k}$ 不具有来自 $\Sigma_{1,\ 7,\ 2}$,$\Sigma_{1,\ 6,\ 3}$ 或$\Sigma_{2,\ 6,\ 2}$闭包的（广义）符号模式。

□

References

[1] A. Albouy、Y. Fu：关于笛卡尔符号法则的几点评论。《初等数学》69 (2014), 186–194。Zbl 1342.12002, MR3272179[2] B. Anderson、J. Jackson 和 M. Sitharam：重新探讨笛卡尔符号法则。《美国数学月刊》 105 1998 447 451 0913 12001, 1622513 ( ), – 。[3] Zbl 。MR Cajori, F.：《一个未知量数值方程根的算术近似方法史》[4] H. Cheriha、Y. Gati 和 V.P. Kostov：笛卡尔符号法则语境中的不可实现定理，《索非亚大学“圣克利мент·奥赫里德斯基”年刊》，数学与信息学学院，第106卷 (2019) 25-51。[5] H. Cheriha、Y. Gati 和 V.P. Kostov：关于具有两次符号变换的多项式的笛卡尔法则，《立陶宛数学杂志》60 (2020) 456-469。[6] Curtiss, D.R.：笛卡尔符号法则的最新拓展，《数学年刊》19 (4), 251-278 (1918)。[7] de Gua de Malves, J.-P.：《笛卡尔法则的证明：用于确定没有虚根的方程中正根与负根的数目》，《数学与物理回忆录》，摘自皇家科学院记录，72-96 (1741)。[8] 《勒内·笛卡尔几何学》，附初版影印本，D. E. Smith 和 M.L. Latham 译，纽约，多佛出版社，1954。[9] J. Forsg˚ard、V. P. Kostov 和 B. Shapiro：勒内·笛卡尔可能知道这一点吗？《实验数学》 24 4 2015 438 448 1326 26027, 3383475 ( ) ( ), - 。Zbl 。MR J. [10] Forsgard、D. Novikov 和 B. Shapiro：笛卡尔符号法则的热带类比，《国际数学研究通报》2017年第12期，3726–3750。arXiv:1510.03257 [math.CA]。[11] J. Fourier：论在求根界限时笛卡尔定理的用法。《巴黎爱好科学协会科学通报》(1820) 156–165, 181–187；《全集》第2卷，291–309，Gauthier-Villars，1890。[12] Gauss, C.F.：代数定理的证明。《纯粹与应用数学杂志》3, 1-4 (1828)；《全集》第3卷，67–70，G¨ottingen，1866。[13] D. J. Grabiner：笛卡尔符号法则：另一种构造。《美国数学月刊》106 (1999 854 856 0980 12001, 1732666), – 。Zbl 。MR Jensen, J.L.W.：方程理论研究，[14]《数学学报》 36, 181-195 (1913)。[15] V. P. Kostov：实系数多项式对符号模式的可实现性，《捷克斯洛伐克数学杂志》68 (143) (2018), 第3期，853–874。[16] V. P. Kostov：多项式、符号模式与笛卡尔符号法则，《波希米亚数学》144 (2019), 第1期，39-67。[17] V. P. Kostov：双曲多项式与规范符号模式，《塞迪卡数学杂志》46 (2020) 135-150，arXiv:2006.14458。[18] V. P. Kostov 和 B. Z. Shapiro：多项式、符号模式与笛卡尔法则，《马泰伊·贝尔大学学报》数学系列27 (2019) 1–11。[19] Laguerre, E.：论数值方程理论，《纯粹与应用数学杂志》，第3辑，第9卷，99-146 (1883)；《全集》第1卷，巴黎，1898；Chelsea，纽约，1972，第3–47页。[20] I. M´eguerditchian：《实判别式与双曲多项式的几何》，博士论文，雷恩第一大学，论文答辩日期：1991年1月24日。[21] Meserve, B.E.：《代数基本概念》，纽约，多佛出版社，1982。

Université de Carthage、 EPT-LIM、
Tunisie*Email address*： yousra.gati@gmail.com

Université Côte d'Azur、 CNRS、 LJAD、 France
Email address： vladimir.kostov@unice.fr

Université de Carthage、 EPT-LIM、 Tunisie
Email address： mohamedchaouki.tarchi@gmail.com