arXiv:2302.04590v1 [math.CO] 9 Feb 2023

15-可着色简单4-多胞体上的小覆盖的存在性

DJORDJE BARALI ´C

Abstract. 对于作为拟环面流形轨道空间的组合简单 n-多胞体 P^n，其各面恰当着色所需的色数满足不等式 $n \leq P^n \leq 2^n - 1$。由四色定理可知，该不等式在 $n = 2$ 时是锐的，但在 $n = 3$ 时并非如此。本文构造了一个简单4-多胞体，它存在一个色数为15的特征映射，并由此推得，对于 $n = 4$，所预测的上界可以达到。对于4维和5维情形的定向小覆盖，也验证了类似结果。

1. Introduction

20世纪最后几十年，托里克拓扑作为一门新的数学学科，在代数拓扑、组合学、代数几何、交换代数和辛几何的交汇处兴起。它研究带有托里克作用、且轨道空间具有良好组合结构（如简单多面体和单纯复形）的空间。在他们的杰出专著中 [4]，Buchstaber 和 Panov 总结了截至2012年该领域取得的主要成果，并概述了这一领域的主要开放问题。

在他们具有开创性的论文 [7] 中，Davis 和 Januszkiewicz 提出了研究小覆盖和拟环面流形的动机。拟环面流形（小覆盖）上的局部标准（实）环面作用的轨道空间是一个组合单纯多面体，其拓扑学与相应组合单纯多面体的组合学以及特征矩阵密切相关。事实上，给定组合单纯多面体 P 上的拟环面流形和小覆盖在弱等变微分同胚意义下的经典分类问题，等价于对所有特征矩阵进行分类，其中矩阵模去 GL（n）的作用以及 P的所有自同构所构成的群 Aut(P)。事实上，即使拟环面流形上光滑结构的存在性也是一个非平凡问题。由 [7], 提出的原始构造，直到 2014 年前后才由 Davis 在 [8]中得到充分论证。Buchstaber、Panov 和 Ray 于 2007 年在 [6] 中定义了典范构造，它源自相应的矩角流形。过去几十年间，许多研究者致力于这一问题及相关问题，并取得了显著成果。感兴趣的读者可在 Masuda 和 Suh 的综述论文 [12] 中了解更多相关内容。然而，尽管付出了巨大努力，这个基本问题仍未得到解决。

允许存在特征映射的简单 n-多面体的组合刻画仍有待发现。除了 Davis 和 Januszkiewicz 对简单多面体的色数所确立的条件 $n \leq \chi(P^n) \leq 2^n - 1$ 外，一般情形尚无显著进展。二维和三维情形已完全弄清，因为每个多边形和每个简单3-多胞体都是某个小覆盖（拟环面流形）的轨道空间。著名的四色定理对 $n = 3$ 情形有影响，详情见 [5]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 57S12, 05C12. 次要分类 52B11。

不等式中的下界由 [7, 例 1.15], 证明是最佳的，但据作者所知，上界是否锐利仍有待研究。

本文旨在引起人们对这一问题的关注，因为它与托里克拓扑中的其他问题密切相关，例如简单多面体的 Buchstaber 不变量的刻画以及提升猜想。本文通过算法和组合构造，给出了一个简单 4-多胞体，该多胞体存在一个色数为 15 的特征映射；根据一般不等式的预测，这是可能达到的最高值。第 2 节简要回顾有关简单多胞体、小覆盖和拟环面流形的主要事实。主要结果在第 4 节陈述并证明；此外，我们还介绍了该方法的一些应用，用以求轨道空间为定向小覆盖的简单 4 维和 5 维多胞体色数的上界。这些结果说明了我们的方法在更高维数下的局限性。

2. 预备知识

2.1. 简单多胞体。 本节基于经典专著 [10] 和 [16]，简要介绍简单多胞体理论的基础知识。

凸多胞体是某个 $\mathbb{R}^n$ 中有限个点的凸包。多胞体的维数是其仿射包的维数。设点 $x \in \mathbb{R}^n$ 表示为列向量， $\in (\mathbb{R}^n)^*$ 为行向量。于是存在一个线性形式 $l_{\mathbf{a}}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ax}$。此外，任何线性形式 l: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都可写成这种形式，其中 $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n)^*$。如果对所有点 $\mathbf{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^n$，不等式 $\mathbf{mx} \leq r$ 都成立，则称该不等式对凸多胞体 P 有效。 P 的面是形如

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{mx} = r \text{ and } \mathbf{mx} \leq r \text{ a valid inequality}\}.$$

面的维数是其仿射包的维数。

由于显然的不等式 $\mathbf{0x} \leq 0$ 和 $\mathbf{0x} \leq 1$ 显然成立，我们看到，多胞体 P 本身和 $\emptyset$ 都是 P 的面。 P 的所有其他面称为真面。维数为 0 和 $\dim(P) - 1$ 的面分别称为顶点和面。多胞体 P 的面是维数较小的多胞体，有限个面的交集也是 P 的一个面， [16, 命题 2.3]。凸多胞体 P 的所有面构成一个偏序集 $L := L(P)$, 即按包含关系排序的面格。

对于具有同构面格 $L(P_1)$ 和 $L(P_2)$ 的两个多胞体 P_1 和 P_2 , 我们称它们组合等价。组合多胞体是组合等价多胞体的一个类。

n-单纯形 Δ^n 是一个 n 维多胞体，它是由其 $n + 1$ 个顶点的凸包构成的。若多胞体 P 的所有真面都是单纯形，我们就称它为单纯多胞体。

凸多胞体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 的极集 $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ 定义为

$$P^* := \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \mathbf{cx} \leq 1 \text{ for all } \mathbf{x} \in P\}.$$

我们将组合多胞体 P^* 称为组合多胞体P的对偶。 P 的面格 $L(P^*)$ 与面格 $L(P)$ 互为相反格。

如果一个多胞体 P 的对偶多胞体 P^* 是单纯的，则称其为简单多胞体。简单多胞体的每个面都是简单多胞体。简单多胞体 P^n 的特征是：每个顶点恰好属于 n 个面。任何与简单多胞体组合等价的极多胞体都是单纯的。

2.2. 邻近多面体。设 P 是一个 n多胞体。若 P 的任意一个由 k 个或更少顶点组成的子集，都是 P某个面的顶点集，则称 P 为 k-邻近多面体。可以验证，对于 $k > \left[\frac{n}{2}\right]$，单纯形 Δ^n 是唯一的 k-邻近多面体。因此，$\left[\frac{n}{2}\right]$-邻近的多面体尤其值得关注，称为邻近多面体。

邻近多面体常作为各种极值问题的解出现在组合学中。对于具有 m 个顶点的 n维多胞体，其 i面的最大数量达到 Motzkin 所预测的上界。这一结论称为上界定理，最初由 McMullen 于 [13]年证明。

最著名的邻近 n维多胞体实例是循环多面体 $C^n(m)$，它有 m 个顶点。循环多面体 $C^n(m)$是矩曲线 γ 在 $\mathbb{R}^n$中的 m 个点的凸包，该矩曲线定义为 $\gamma\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^n) \in \mathbb{R}^n$。由于 Gale偶性条件，$C^n(m)$的组合类型不取决于这些点的具体选取，参见 [16, 定理 0.7.]。Gale 的结果还表明，循环多面体是单纯多胞体。

顶点数少于 $n+4$ 的组合邻近 n 多胞体是循环多胞体。然而，对于固定的 n，组合上不同的邻近多胞体数量会随着顶点数 m 超指数增长。这一结果源自 Barnette 从 [2] 开始的构造以及 Shemer 从 [15] 开始的构造。尽管除循环多胞体外，还存在大量组合上不同的邻近多胞体，但目前尚不清楚是否存在某种“优美的描述”能够刻画另一类子类。

单纯邻近 n 多胞体的对偶是简单多面体，具有这样的性质：任意 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个面都有非空交。这类多胞体也称为邻近多胞体；本文后文中，我们用“邻近多胞体”指简单邻近多胞体。

2.3. 小覆盖与拟环面流形。拟环面流形和小覆盖最初是在开创性论文 [7] 中作为光滑射影（实）环面簇的拓扑推广而提出的。此后，它们在托里克拓扑领域得到了广泛研究。关于这一主题的详细论述可见 Buchstaber 和 Panov 的专著 [3] 和 [4]。这里我们简要回顾其主要定义和相关结果。

我们分别用 $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ 和 $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ 表示实数和复数中的乘法子群。我们用 $(S^1)^n$ 表示 T^n。群 $\mathbb{Z}_2^n$ 通过按坐标乘法作用于 $\mathbb{R}^n$。类似地，群 T^n 作用于 $\mathbb{C}^n$，这两种作用都称为标准作用。$\mathbb{Z}_2^n$ (T^n)-流形是带有 $\mathbb{Z}_2^n$ (T^n) 光滑作用的可微流形。

定义 2.1. 称映射 $f\colon X \to Y$ 为两个 $\mathbb{Z}_2^n$(T^n)-空间 X 和 Y 之间的弱等变映射，若对任意 $x \in X$ 和 $g \in \mathbb{Z}_2^n$(T^n)，有

$$f(g \cdot x) = \psi(g) \cdot f(x),$$

其中 $\psi\colon\ \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$($\psi\colon\ T^n \to T^n$) 是群 $\mathbb{Z}_2^n$(T^n) 的某个自同构。

设 M 是一个 n（$2n$）维的 $\mathbb{Z}_2^n$（T^n）流形。在 M 上的标准图是一个有序对（U，f），其中 U 是 M 的 $\mathbb{Z}_2^n$（T^n）不变开子集，而 f 是从 U 到 $\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）的某个 $\mathbb{Z}_2^n$（T^n）不变开子集上的弱等变微分同胚。标准图册是由标准图组成的图册。$\mathbb{Z}_2^n$（T^n）流形 M 上的 $\mathbb{Z}_2^n$（T^n）作用称为局部标准作用，如果流形 M 具有标准图册。局部标准作用的轨道空间自然地视为带角流形。

定义 2.2. 小覆盖（拟环面流形） $\pi\colon\ M \to P^n$ 是一个光滑闭的 $n\,(2n)$ 维流形，允许一个局部标准的 $\mathbb{Z}_2{}^n\,(T^n)$ 作用，使其轨道空间为一个被视为带角流形的简单凸 n 多胞体。

容易验证，两个弱等变小覆盖（拟托里流形）的轨道多面体组合等价，因此在上述定义中，无需区分组合等价的简单多面体。

设 P^n 是一个具有 m 个面的简单多面体 F_1、……、F_m。根据定义 2.2 可知， $\pi^{-1}(\mathrm{rel.int}(F_i))$ 中的每个点都有相同的各向同性群，它是 $\mathbb{Z}_2^n\,(T^n)$ 的一维子群。我们将其记为 $\mathbb{Z}_2(F_i)$（$S^1(F_i)$）。每个小覆盖（拟环面流形） $\pi\colon\ M \to P^n$ 都确定一个特征映射 l_d，定义在 P^n 上

$$l_d : \{F_1, \ldots, F_m\} \to \mathbb{Z}_2{}^n(\mathbb{Z}^n)$$

该映射将 P^n 的每个面映到 $\mathbb{Z}_2{}^n(\mathbb{Z}^n)$ 中的非零元素，并满足$l_d(F_i) = \boldsymbol{\lambda_i} = (\lambda_{1,\ i},$ ……，$\lambda_{n,\ i})^t \in \mathbb{Z}_2{}^n(\mathbb{Z}^n)$，其中 λ_i 是一个本原整数向量，满足

$$\mathbb{Z}_2(F_i) = \left\{(t^{\lambda_{1,i}}, \ldots, t^{\lambda_{n,i}}) | t \in \mathbb{R}, |t| = 1\right\} (S^1(F_i) = \left\{(t^{\lambda_{1,i}}, \ldots, t^{\lambda_{n,i}}) | t \in \mathbb{C}, |t| = 1\right\}).$$

由特征映射可得到一个整数 $n \times m$ 矩阵 $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}(M) := (\lambda_{i,j})$ $(\Lambda_{\mathbb{Z}}(M) := (\lambda_{i,j}))$，称为 M 的特征矩阵。对于拟环面流形，每个 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 都唯一确定到一个符号。由于 $\mathbb{Z}_2^n\,(T^n)$ 在 M 上的作用是局部标准的，特征矩阵 $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}(M)$ $(\Lambda_{\mathbb{Z}}(M)\,)$ 满足关于 P^n 的非奇异性条件，即若 P^n 的 n 个面 $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$ 在一个顶点相交，则 $\left|\det \Lambda^{(i_1,\ldots,i_n)}\right.$ $\left._{\mathbb{Z}_2}(M)\right| = 1 (\left|\det \Lambda^{(i_1,\ldots,i_n)}\right._{\mathbb{Z}_2}(M)\Big| = 1)$，其中 $\Lambda^{(i_1,\ldots,i_n)}{}_{\mathbb{Z}_2}(M) := (\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_{i_n})($ $\Lambda^{(i_1,\ldots,i_n)}{}_{\mathbb{Z}_2}(M) := (\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_{i_n}))$。任何满足关于 P^n 的非奇异性条件的整数 $n \times m$ 矩阵，也称为 P^n 上的特征矩阵。

由特征对 $(P^n, \Lambda_{\mathbb{Z}_2})$ $((P^n, \Lambda_{\mathbb{Z}}))$ 构造小覆盖和拟环面流形的方法见 [7, 构造 1. 5], [4] 和 [3, 构造 5.12]。对于每个点 $x \in P^n$，我们将包含 x 且以其相对内部为所在位置的最小面记为 $F(x)$。对应于 $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}$ $(\Lambda_{\mathbb{Z}})$ 的特征映射 l 是从 P^n 的面集到 $\mathbb{Z}_2^n\,(T^n)$ 的子环面集的映射，定义如下:

$$l(F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}) := \mathrm{im}\left(l^{(i_1,\ldots,i_k)} \colon \mathbb{Z}_2^k\,(T^k) \to \mathbb{Z}_2^n\,(T^n)\right),$$

其中 $l^{(i_1,\ldots,i_k)}$ 是由 $\Lambda^{(i_1,\ldots,i_k)}{}_{\mathbb{Z}_2}$ $(\Lambda^{(i_1,\ldots,i_k)}{}_{\mathbb{Z}}$ 所确定的线性映射诱导的映射。在简单多面体 P^n 上的 $\mathbb{Z}_2^n(T^n)$-流形 M 可通过如下方式得到:

$$M(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}) := (\mathbb{Z}_2^n \times P^n)/\sim_l \ (M(\Lambda_{\mathbb{Z}}) := (T^n \times P^n)/\sim_l),$$

其中 $\sim_l$ 是由以下条件定义的等价关系：$(t_1, p) \sim_l (t_2, q)$ 当且仅当 $p = q$ 且 $t_1 t_2^{-1} \in l_d$ $(F(q))$。$\mathbb{Z}_2^n(T^n)$ 在 $\mathbb{Z}_2^n \times P^n\,(T^n \times P^n)$ 上的自由作用显然下降为对 $(\mathbb{Z}_2^n \times P^n)/\sim_l ($($T^n \times P^n)/\sim_l)$ 的作用，其商空间为 P^n。简单多面体 P^n 被开集 U_v 覆盖，这些开集由删去 P^n 中所有不含顶点 v 的面得到。显然， U_v 与 $\mathbb{R}^n_+$ $(\mathbb{C}^n_+)$ 微分同胚，因此空间 $(\mathbb{Z}_2^n \times P^n)/\sim_{l_d} ((T^n \times P^n)/\sim_l)$ 被开集 $(\mathbb{Z}_2^n \times U_v)/\sim_{l_d} ((T^n \times U_v)/\sim_l)$ 覆盖，这些开集同胚于 $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$。容易看出，过渡映射都是微分同胚，因此 $\mathbb{Z}_2^n(T^n)$ 对 $($ $\mathbb{Z}_2^n \times P^n)/\sim_l ((T^n \times P^n)/\sim_l)$ 的作用是局部标准的，而 $M(\Lambda_{\mathbb{Z}_2})$ $(M(\Lambda_{\mathbb{Z}})\,)$ 是一个 $\pi\colon$ $M \to P^n$，定义在简单凸 n-多胞体 P^n 上的小覆盖（拟环面流形）。

给定组合简单多面体 P 上的小覆盖（拟环面流形）的分类问题，与确定其特征

矩阵密切相关。分类有多种类型：按同胚分类、按微分同胚分类、按弱等变微分同胚分类等。文献中，作者通常假设以下技术引理成立。

引理 2.3. 设 M 是一个以 P^n 为底空间、特征映射为 l 的小覆盖（拟环面流形）。存在一个弱等变微分同胚 $f\colon M \to M$，它由 $\mathbb{Z}_2^n$ （T^n）的自同构 ψ 诱导，使得由 f 诱导的特征矩阵具有如下形式：$(I_{n\times n}|*)$，其中 $*$ 表示某个 $n \times$ （$m-n$）矩阵。

2.4. 色数作为特征映射存在性的障碍。托里克拓扑的核心问题是对给定组合单纯多面体 P^n 上的小覆盖和拟环面流形进行分类。从以上讨论可知，这个问题与对 P^n 上的特征映射进行分类有关。事实上，根据 [7, 反例 1.23], ，我们知道，具有 $m \geq 2^n$ 的二邻接简单多面体不允许存在特征映射。托里克拓扑中的一个主要开放问题，是找出允许存在特征映射的多面体类的组合描述 P^n 。

目前已知的特征映射存在性障碍并不多。研究最多的是与 P^n的色数有关的障碍。回顾一下， P^n 的色数是指这样的最小整数 k ： 其各个面可以用 k 种颜色进行正常着色。这里，正常着色是指任意两个共享一个顶点的不同面颜色均不相同。

显然，对于任意简单多面体 P^n， $\chi(P^n) \geq n$ 。二维简单多面体的色数显然为 2 或 3，具体取决于其面的数量是奇数还是偶数。根据著名的四色定理，我们可以推出，三维多面体的色数为 3 或 4。满足 $\chi(P^n) = n$ 或 $\chi(P^n) = n+1$ 的简单多面体 P^n是小覆盖和拟环面流形的轨道空间，见 [7, 例 1.15]。存在特征映射的简单多面体类包含一些重要的组合单纯多面体，例如单纯形、立方体、置换多面体、多边形、三维多面体等。

然而，对于 $n \geq 4$，我们没有四色定理的类似结果，因此$\chi(P^n)$可以任意高。一个典型例子是循环多面体的对偶$C^n(m)$，其色数为 m。特征映射的存在直接给出了色数的一个限制。如果简单多面体 P^n是某个小覆盖或拟环面流形的轨道空间，那么模 2 意义下的 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 最多有 2^n-1种不同可能。因此，存在一种至多使用 2^n-1 种颜色的着色，它来自特征映射，故有

$$\chi(P^n) \leq 2^n - 1. \tag{1}$$

对于 $n=2$，不等式 1 是紧的；而对于 $n=3$，它与四色定理所给出的界并不一致。在下一节中，我们将通过给出一个具体例子来证明该不等式对于 $n=4$ 是紧的：这个简单 4-多胞体允许一个特征映射，且其色数为 15。

3. Proof of the main theorem

以下定理是我们的主要贡献。

定理 3.1. 存在一个组合简单4-多面体 P，使得 $\chi(P)$ =15，且它是一个小覆盖和拟环面流形的轨道空间。

证明。考虑一个具有 15 个面的邻接四维多面体。例如，我们可以取 C^4(15) 的对偶。将其各个面满射到 $\mathbb{Z}_2^4$ 的非零向量集合上。记面 F 在该满射下的像为 v_F 。我们

只要所有顶点都满足非奇异性条件，证明即告完成，因为该满射定义了我们所需的特征映射。

否则，非奇异性条件可能以两种方式被破坏。

第一种情况发生在多胞体的一条棱上，该棱是三个面 F_1、F_2 和 F_3 的交集，且满足 $v_{F_1} + v_{F_2} + v_{F_3} = 0$。我们称这样的棱为坏边。另一种可能是，非奇异性条件在多胞体的一个顶点处失效，该顶点是四个面 F_1、F_2、F_3 和 F_4 的交集，且满足 $v_{F_1} + v_{F_2} + v_{F_3} + v_{F_4} = 0$。我们称这样的顶点为坏顶点。

现在让我们来“解决”坏边上的问题。不失一般性，我们可以假设 $v_{F_1} = e_1$、$v_{F_2} = e_2$ 和 $v_{F_3} = e_1 + e_2$。坏边的端点是顶点 $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ 和 $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_5$，其中 F_4 和 F_5 是多胞体的某些面，满足 $v_{F_4} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ 和 $v_{F_5} = pe_1 + qe_2 + re_3 + se_4$，其中 e_i、$i = 1$、.....、4 是标准基，而 a、b、c、d、p、q、r、$s \in \{0, 1\}$ 是满足 $c + d > 0$ 和 $r + s > 0$ 的整数。我们沿坏边截去多胞体，此操作产生一个新面 F'。F' 是一个三棱柱，其顶点为 $F_1 \cap F_2 \cap F_4 \cap F'$、$F_1 \cap F_3 \cap F_4 \cap F'$、$F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F'$、$F_1 \cap F_2 \cap F_5 \cap F'$、$F_1 \cap F_3 \cap F_5 \cap F'$ 和 $F_2 \cap F_3 \cap F_5 \cap F'$。我们有 $\{ce_3 + de_4, re_3 + se_4\} \subset \{e_3, e_4, e_3 + e_4\}$，因此存在一个向量 $v_{F'} \in \{e_3, e_4, e_3 + e_4\}$，使得 $v_{F'} \neq ce_3 + de_4$ 和 $v_{F'} \neq re_3 + se_4$。现在，我们直接验证，当取 $v_{F'}$ 时，新的六个顶点满足非奇异性条件。新得到的多胞体的色数仍为 15；在新多胞体中，$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$，但 F_1、F_2 和 F_3 两两相交均非空。

此外，在坏边上成功应用该算法后，我们可以将其消除，从而得到色数为 15 且不含坏边的简单 4-多胞体 Q。现在我们来说明如何“消解”坏顶点处的奇点。对于坏顶点 $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$，不失一般性，我们可以假设 $v_{F_1} = e_1$、$v_{F_2} = e_2$、$v_{F_3} = e_3$ 和 $v_{F_4} = e_1 + e_2 + e_3$。我们对坏顶点处的 Q 进行截断，得到一个新的面 F'。四面体 F'的顶点为 $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F'$、$F_1 \cap F_2 \cap F_4 \cap F'$、$F_1 \cap F_3 \cap F_4 \cap F'$和 $F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F'$。通过设定 $v_{F'} = e_4$，即可满足非奇异性条件。显然，我们仍保持了相同的色数，因此可以继续截断，直到得到一个既没有坏顶点也没有坏边的多胞体P。赋给P 各面的向量定义了所需的特征函数。

□

由于可能存在一个坏的 2-面，而它可能是边数很多的多边形，因此上述构造难以推广到高于 4 的维数。不过，定理 3.1 中多胞体 P 与线段 I 的乘积给出一个组合意义下的简单 5-多胞体，它具有一个特征映射，且其色数为 16。尽管这仍远低于预期的上界 31，但它大于 7；而 7 是简单 3-多胞体 P_1 与多边形 P_2 的乘积的色数，其中 $\chi(P_1) = 4$ 且 $\chi(P_2) = 3$。回顾一下，根据第 1.10], 小节中的 [7, ，我们知道，如果 M 和 N 分别是简单多面体 P^m 和 Q^n 上的小覆盖（拟环面流形），那么 $M \times N$ 就是多胞体 $P^m \times Q^n$ 上的小覆盖（拟环面流形）。以下问题难以解决。

问题 3.2. 是否存在一个组合简单的 n-多胞体 P，它具有一个特征映射，其色数对于 $n \geq 5$ 是 $2^n - 1$？

拟复流形总是可定向的，但小覆盖可能不可定向。Nakayama 和 Nishimura 找到了小覆盖 [14]的可定向性条件。他们的判据指出，小覆盖 M 在 P^n 上可定向，当且仅当存在一个映射l，将 P^n 的面映射到 $\mathbb{Z}_{\not 2}{}^n$ 的非零向量，并且对于每个面

F的 P^n l（F）都具有奇数个非零坐标。因此，以下不等式 1 的类似结论成立。

命题3.3. 如果简单 n-多胞体 P 是定向小覆盖的轨道空间，那么

$$\chi(P^n) \leq 2^{n-1}. \tag{2}$$

已知，对于 $n = 2$ 和 $n = 3$，该不等式是尖锐的，见 [14]。我们可以采用定理 3.1证明中的相同论证来证明以下断言。

定理3.4. 存在一个组合简单4-多面体 P，使得 $\chi(P)$ =8，并且它是定向小覆盖的轨道空间。

事实上，该论证可以应用于定向5维小覆盖的情形。

定理3.5. 存在一个组合简单5-多胞体 P，使得 $\chi(P)$ =16，并且它是定向小覆盖的轨道空间。

证明。我们采用与定理 3.1 证明中相同的方法。首先取 C^4(15) 的对偶，并用 $\mathbb{Z}_{\not\neq}{}^5$ 中具有奇数个非零坐标的非零向量标记其面。非奇异性条件仍可能无法满足。幸运的是，向量在各面上的分布不会产生坏 2-面。如果存在坏 3-多面体 $F_1 \cap F_2 \cap F_3$，那么向量 $v_{F_1} + v_{F_2} + v_{F_3}$ 必定具有奇数个非零坐标，因此不可能是零向量。因此，非奇异性条件只可能在坏顶点或边处失效。不过，通过截断以及前面已经说明的步骤，并对与坏边产生的新面 F' 相关联的向量 $v_{F'}$ 作适当修改，我们可以高效地解决这类问题。□

最后，我们给出一个由定理 3.1 证明中所述算法得到的组合 4-多胞体示例。

例3.6. 我们按以下方式为循环多面体 C^4(15)的对偶的面着色

$F_0 \mapsto e_1, F_1 \mapsto e_1 + e_2, F_2 \mapsto e_3, F_3 \mapsto e_4, F_4 \mapsto e_1 + e_4, F_5 \mapsto e_1 + e_2 + e_4, F_6 \mapsto e_2 + e_4,$
$F_7 \mapsto e_2, F_8 \mapsto e_2 + e_3, F_9 \mapsto e_1 + e_2 + e_3, F_{10} \mapsto e_1 + e_3, F_{11} \mapsto e_1 + e_3 + e_4, F_{12} \mapsto e_3 + e_4,$
$F_{13} \mapsto e_2 + e_3 + e_4, F_{14} \mapsto e_1 + e_2 + e_3 + e_4$，其中 e_1, e_2, e_3, e_4是 $\mathbb{Z}_2^4$的标准基向量。根据Gale偶性条件（参见 [9,定理3.]），该多胞体的顶点为 $F_0 \cap F_x \cap F_{x+1} \cap F_{14}$（对所有 $1 \leq x \leq 12$），以及 $F_x \cap F_{x+1} \cap F_y \cap F_{y+1}$（对所有 $x, y \in \{0, \ldots, 13\}$ 满足 $y - x \geq 2$）。

在这种装饰中，有 13 条“坏”边：
$F_2 \cap F_7 \cap F_8$、$F_1 \cap F_2 \cap F_9$、$F_3 \cap F_{10} \cap F_{11}$、$F_2 \cap F_3 \cap F_{12}$、$F_4 \cap F_5 \cap F_7$、$F_7 \cap F_9 \cap F_{10}$、$F_7 \cap F_{12} \cap F_{13}$、
$F_0 \cap F_3 \cap F_4$、$F_0 \cap F_5 \cap F_6$、$F_0 \cap F_8 \cap F_9$、$F_0 \cap F_{11} \cap F_{12}$、$F_0 \cap F_{13} \cap F_{14}$、$F_0 \cap F_1 \cap F_7$，以及 17 个“坏”顶点：
$F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap F_6$、$F_3 \cap F_4 \cap F_8 \cap F_9$、$F_3 \cap F_4 \cap F_{11} \cap F_{12}$、$F_3 \cap F_4 \cap F_{13} \cap F_{14}$、$F_4 \cap F_5 \cap F_9 \cap F_{10}$、
$F_4 \cap F_5 \cap F_{12} \cap F_{13}$、$F_5 \cap F_6 \cap F_8 \cap F_9$、$F_5 \cap F_6 \cap F_{11} \cap F_{12}$、$F_5 \cap F_6 \cap F_{13} \cap F_{14}$、$F_6 \cap F_7 \cap F_{10} \cap F_{11}$、
$F_8 \cap F_9 \cap F_{11} \cap F_{12}$、$F_8 \cap F_9 \cap F_{13} \cap F_{14}$、$F_9 \cap F_{10} \cap F_{12} \cap F_{13}$、$F_{11} \cap F_{12} \cap F_{13} \cap F_{14}$、
$F_0 \cap F_1 \cap F_4 \cap F_5$、$F_0 \cap F_1 \cap F_9 \cap F_{10}$、$F_0 \cap F_1 \cap F_{12} \cap F_{13}$。

对坏边和顶点进行截断后，我们得到一个新的多胞体 P，它有 193 个顶点、386 条边、228 个脊和 45 个面。其面格可以轻易地明确得到。

当面数与维数之差大于 4 时，循环多胞体的对偶上不存在小覆盖，[11]。然而，Barali´c 和 Milenkovi´c 在 [1] 中发现了一个具有 12 个面的简单邻接 4-多胞体，它是某个小覆盖的轨道空间。我们想知道，是否存在一个具有 15 个面且允许特征映射的简单邻接 4-多胞体。

Acknowledgements

作者得到塞尔维亚科学、创新与技术发展部通过塞尔维亚科学与艺术院数学研究所提供的支持。作者感谢 Ivan Limonchenko 的讨论和宝贵意见。

References

[1] D. Barali´c, L. Milenkovi´c, *Small Covers and Quasitoric Manifolds over Neighborly Polytopes*, 《地中海数学杂志》19（2022），第2期，87。[2] D. Barnette, *A family of neighborly polytopes*, 《以色列数学杂志》39（1981），127–140。[3] V. Buchstaber 和 T. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics* **24** 2002 ，美国数学学会大学讲座丛书（）。[4] V. Buchstaber 和 T. Panov, *Toric Topology*, 美国数学学会数学调查专著204（2015）。[5] V. Buchstaber 和 T. Panov, *On manifolds defined by 4-colourings of simple 3-polytopes*, 《俄罗斯数学评论》71（2016），第6期，1137。[6] V. Buchstaber、T. Panov 和 N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds* **7** 2007 2, 219 242 ，《莫斯科数学杂志》（），第–期。[7] M. Davis 和 T. Januskiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, 《杜克数学杂志》62（1991），第2期，417–451。[8] M. Davis, *When are two Coxeter orbifolds diffeomorphic?*, 《密歇根数学杂志》63（2014），第2期，401–421。[9] D. Gale, *Neighborly and cyclic polytopes*, 载于 V. Klee, *Convexity, Seattle*, 1961, 美国数学学会纯数学专题讨论会论文集7（1963），225–233。[10] B. Grunbaum, *Convex polytopes*, 数学研究生教材221（1967）。[11] S. Hasui, *On the classification of quasitoric manifolds over dual cyclic polytopes*, 《代数与几何拓扑》15（2015），1387–1437。[12] M. Masuda 和 D. Youp Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, 《环面拓扑学会议论文集》，《当代数学》**460** 2008 273 286 （），– P. McMullen, ，《[13] *The maximum numbers of faces of a convex polytopes* Mathematika》17（1971），179–184。[14] H. Nakayama 和 Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes* 42 2005 243 256 ，《大阪数学杂志》，（），–。[15] I. Shemer, *Neighborly polytopes*, 《以色列数学杂志》43（1982），291–314。[16] G M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, 施普林格，数学研究生教材152（1998）。

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia
Email address: djbaralic@mi.sanu.ac.rs