arXiv:2302.04598v1 [math.AG] 9 Feb 2023

排列扇形簇上的等变欧拉示性数

Vincenzo Galgano*、Hanieh Keneshlou†、Mateusz Micha lek‡

2023年2月10日

摘要

根据 J. Huh 的研究，二项式系数可以解释为排列多面体簇上的一个交问题的解 X_E。应用赫茨布鲁赫–黎曼–罗赫定理，这个交问题等价于计算某个特定元素在K理论中的欧拉示性数，其中 X_E。该元素有一个自然的提升，可进入等变 K理论，因此欧拉示性数可以提升为一个劳朗多项式。我们提出并实现了三种不同的方法来计算这些多项式，其中包括一种递归方法。

目录

1 引言 2

2 预备知识 4

2.1 排列扇形簇与特殊除子.4 2.2 等变局部化公式.5 2.3 射影直线的例子.6

3 欧拉示性数的计算 9

3.1 第一种方法：计算上同调群.10 3.2 第二种方法：等变化定位.13

4 欧拉示性数的递归公式 16

致谢

VG 得到了意大利“代数与几何结构及其应用国家组”（GNSAGA-INdAM）的资助。MM 和 HK 获得了德国研究联合会的资助——项目编号 467575307。我们谨向 Andrzej Weber 致谢，

*特伦托大学数学系，Via Sommarive 14，38123 特伦托，意大利；ORCID：0000- 0001-8778-575X: vincenzo.galgano@unitn.it

†康斯坦茨大学数学与统计系，Universit¨atsstraße 10，78464 康斯坦茨，德国：hanieh.keneshlou@uni-konstanz.de

‡康斯坦茨大学数学与统计系，Universit¨atsstraße 10，78464 康斯坦茨，德国：mateusz.michalek@uni-konstanz.de

感谢他进行了许多有益的讨论。我们感谢 Julian Weigert 实现了递归公式，并发现了相关斯特林数之间的恒等式。

1 引言

一千多年来，二项式系数在数学中一直扮演着极其重要的角色。事实上，我们如今称为帕斯卡三角形的内容，已知最早的书面阐述出自 10 世纪的印度数学家 Halayudha。本文研究一类自然定义的多元劳朗多项式，它们是二项式系数的推广：在 (1，...，1) 处取值时，它们给出二项式系数。

我们的工作受到 June Huh[Huh12], 一项开创性现代工作的启发。他将图和拟阵的基本组合不变量与复射影代数簇的多重次数联系起来，更具体地说，是与排列多面体簇上的交叉理论联系起来。对于集合 E（其基数为 $n+1$）上的任意 $\mathbb{C}$-可表示拟阵 M，都可以在一个 n 维排列多面体簇 X_E 的周环中关联一个类 Y_M；后者是将射影空间 $\mathbb{P}^n$ 沿其环面不变线性子空间爆破所得的簇，等价地说，也是射影空间 $\mathbb{P}^n$ 在克雷莫纳奇点处的消解。特别地， X_E 带有两个到 $\mathbb{P}^n$ 的投影，我们考虑除子 Γ 和 Δ，它们分别是超平面在相应投影下的拉回。若固定 M 的一个表示，我们可将 Y_M 视为 X_E 的不可约子簇。根据 [Huh12, AHK18] ，约化色多项式 χ_M 的 a 次项系数的绝对值等于 $\int_{X_E} Y_M[\Gamma]^a[\Delta]^{r-a}$；其中乘积是在 X_E 的周环 $A(X_E)$ 中取的，而 r 是 M 的秩。

事实上，在 [AHK18] 中，作者为任意拟阵关联了一个环，称为周环，并证明了它的（类比）硬勒夫谢茨定理和霍奇-黎曼关系。这一重大突破促使人们证明了拟阵特征多项式系数的对数凹性猜想等结果。这是对拟阵可表示于 $\mathbb{C}$的情形的推广；在该情形下，周环确实是一个复紧簇的周环，而勒夫谢茨定理早已为人所知 [Huh12]。本文将关注这一环的其他性质，从等变视角考察与超平面除子拉回的交，并通过陈特征给出的周环与 K^0-理论环之间的同构来研究。

可以说，这套理论最简单的情形是 M 为秩为 r 的均匀拟阵。在这种情况下，约化色多项式从最高次项起第 i个系数的绝对值等于 $\binom{n}{i}$。此外，类 Y_M 可简单地表示为 $[\Gamma]$的幂。因此我们得到

$$\int_{X_E} [\Gamma]^a \cdot [\Delta]^{n-a} = \binom{n}{a} .$$

从上述等式出发，我们的目标是更进一步，将 X_E 上的自然环面作用纳入考虑。关键在于通过赫茨布鲁赫–黎曼–罗赫公式 $\chi(\mathcal{F}) = \int_{X_E} ch(\mathcal{F})\,\mathrm{Td}(X_E)$，将该交的乔理论表达式转化为格罗滕迪克环 $K^0(X_E)$ 中的 K 理论表达式。在我们的情形下，这便得到

$$\chi\left(([\mathcal{O}_{X_E}] - [\mathcal{O}_{X_E}(-\Gamma)])^{\otimes a} \otimes ([\mathcal{O}_{X_E}] - [\mathcal{O}_{X_E}(-\Delta)])^{\otimes n-a}\right) = \int_{X_E} [\Gamma]^a \cdot [\Delta]^{n-a} . \tag{1.1}$$

我们注意到，左边所有的线丛都带有自然的环面作用。因此，我们的计算可以提升为计算等变格罗滕迪克环 $K_T^0(X_E)$ 中某个类的等变欧拉示性数。它现在是一个对称的 Laurent 多项式，在 (1，……，1) 处取值为给定的二项式系数。我们得到的多项式非常复杂，因此提供了三种不同的计算方法。计算给定的欧拉示性数这一挑战促使我们证明了多种消失定理，得到了排列多面体簇上各种丛的等变上同调群的精确公式，并揭示了它与其他数学对象（如第二类斯特林数）之间的联系。我们认为这些结果本身就很有意义，并计划在未来进一步加以研究。

本文结构如下。在第2 节中，我们首先回顾排列多面体簇的构造，以及对其上重要除子类的描述。我们还简要回顾等变局部化公式，并详细讨论射影直线的情形。在第3节中，我们首先证明各种层的中间上同调群消失，从而简化欧拉示性数的表达式。这里我们主要使用托里克 Kawamata–Viehweg 消失定理和 Batyrev-Borisov消失定理。结合等变Serre对偶，我们将等变欧拉示性数计算为环面线丛整体截面的整数线性组合，参见公式（3.4）。由此得到一个直接但较长的公式，其中最终的劳朗多项式是通过将格点对应为劳朗单项式，并对各种多面体求和得到的。这可以视为公式 [MMMSV20，定理311], 的类比；该文研究的是完全二次曲面簇，而我们研究的是排列多面体簇。我们的第二种方法基于所谓的等变局部化公式，最终结果表示为有理函数之和，参见公式（3.10）。在第4 节中，我们给出一个递归公式，将欧拉示性数的计算归约为低维排列多面体上类的计算。这可以看作是 [BEST21引理I1]证明中公式的等变类比。不过，两者有一个关键区别：在非等变周环中，相交的除子数超过簇的维数时，结果总是为零，因此这类贡献会消失；而在等变周环中，我们会得到若干项贡献，它们与相交的除子数超过簇的维数有关。

这三种介绍的方法均已在计算机代数系统*Macaulay2*[GS] 中实现，并可作为本 `EquivariantEC.m2` 文章的补充材料获取。最后，我们想指出，将重要的数值不变量提升为多项式的方法显然并非只有一种。特别是在近期的工作 [BEST21]中，给出了 Y_M 在等变Chow环中的一个显式公式。我们将这些内容的实现与比较留待未来研究。

2 预备知识

2.1 排列扇形簇与特殊除子

排列扇形簇。 我们简要回顾排列多面体簇的构造及基本性质：有关更多细节，请参阅 [Huh16]。关于托里克簇一般理论的主要参考文献是 [CLS11]，但我们也推荐 [MS21的第 8] 章，其中对相关内容作了快速介绍。

置换多面体 $\Pi_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$是由点 $(\sigma(1)\ldots,\sigma(n+1)) \in \mathbb{R}^{n+1}$的凸包，其中 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ 取遍 $n+1$ 个元素的所有排列。令 $T = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ 为特征格为 $\mathbb{Z}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$的代数环面。 n维的排列多面体簇X_n 是与多面体 Π_{n+1}相关联的射影托里克簇。注意，有两个环面作用在 X_n上，其中一个是环面 T。对于任意 $\lambda \neq 0$，元素 $(\lambda,\ldots,\lambda) \in T$稳定每个点 $x \in X_n$。因此，第二个环面是 $T' := T/(\lambda,\ldots,\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}^\times}$，其特征格为 $M_{T'} := \{(m_1,\ldots,m_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum m_i = 0\}$。

扇 Σ_{X_n} of X_n 中的射线由 $[n+1]$ 的非空真子集参数化：$=\{1,\ldots,n+1\}$。给定 $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准基，它们是格 $M^* = \mathbb{Z}^{n+1}/\langle\mathbb{1}\rangle$ 中的以下 $2^{n+1}-2$ 个向量；该格是 T' 的单参数子群格，其中 $\mathbb{1} := (1,\ldots,1)$:

$$\forall S \subsetneq [n+1], S \neq \emptyset, \quad u_S := \sum_{i\in S} e_i \pmod{\mathbb{1}} . \tag{2.1}$$

注意，以下关系在模 $\mathbb{1}$意义下成立:

$$u_S = -u_{[n+1]\setminus S}, \qquad \sum_{i\in S, j\notin S} u_S = -\sum_{i\notin S, j\in S} u_S \quad \forall i,j \in [n+1] . \tag{2.2}$$

考虑 T 在射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上的自然作用，簇 X_n 也可以定义为对 $\mathbb{P}^n$ 进行连续爆破：先从点开始，接着是直线，最后是余维二坐标子空间，爆破所有 T-不变的线性子空间。这个爆破构造消解了经典的双有理 Cremona 映射:

$$\begin{array}{ccc} & X_n & \\ {\scriptstyle p}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle q} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad Crem \quad} & (\mathbb{P}^n)^\vee \end{array}$$
$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [x_0^{-1} : \ldots : x_n^{-1}]$$

排列多面体簇上的除子。 与任何托里克簇一样， T-不变除子群 $\mathrm{Div}^T(X_n)$ 由所谓的与 Σ_{X_n} 射线对应的素 T-不变除子生成。对于每个非空真子集 $S \subsetneq [n+1]$，令 $D_S \in \mathrm{Div}^T(X_n)$ 为与射线 u_S 对应的素数T-不变除子，因此任意 T-不变除子 $D \in \mathrm{Div}^T(X_n)$ 都可写成 $D = \sum_{\emptyset\neq S\subsetneq[n+1]} a_S D_S$，其中某些 $a_S \in \mathbb{Z}$ 满足此式。为简便起见，从现在起，我们始终用 $S \subset [n+1]$ 表示非空真子集。

令 $H_i \subset \mathbb{P}^n$ 和 ˆ $H_j \subset (\mathbb{P}^n)^\vee$ 分别为对应于第 i个和第 j个坐标的两个坐标超平面。那么，拉回的表达式为

超平面在相应投影映射下的像（见 [Huh16，第 3 小节。1]）：

$$\Gamma_i := p^*(H_i) = \sum_{i\in S} D_S, \quad \Delta_j := q^*(\hat{H}_j) = \sum_{j\notin S} D_S \tag{2.3}$$

且 X_n 上的典范除子为

$$K := K_{X_n} = -\sum_{S\subset[n+1]} D_S = -\Gamma_i - \Delta_i \ . \tag{2.4}$$

为了证明中间上同调群消失，我们给出以下结果。

引理 2.1. 对于任意一组不全为零的 k、$l \geq 0$，除子 $k\Gamma_i + \ell\Delta_j \in \mathrm{Div}^T(X_n)$ 是数值有效且大的。特别地，反典范除子 $-K$ 是大且数值有效的。

证明。一般有限映射下非常 ample 除子的拉回是大且数值有效的（见[Laz17，第 2.2.A 小节]），因此除子 Γ_i 和 Δ_j 都是大且数值有效的。特别地，对于任意一组 k，$l \geq 0$（不全为零），除子 $k\Gamma_i + \ell\Delta_j \in \mathrm{Div}^T(X_n)$ 是大且数值有效的。因此，反典范除子$-K = \Gamma_i + \Delta_i$ 是大且数值有效的。

□

2.2 等变局部化公式

扇Σ_{X_n} 中排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$、极大锥 $C_\sigma \in \Sigma_{X_n}(n)$ 和环面不动点 $P_\sigma \in X_n^T$ 之间存在一个双射，其对应关系为

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_{n+1} & \longleftrightarrow & \Sigma_X(n) & \longleftrightarrow & X_n^T \\ \sigma & \leftrightarrow & C_\sigma = Cone(u_{S_1},\ldots,u_{S_n}) & \leftrightarrow & P_\sigma \end{array} \tag{2.5}$$

其中 $S_i = \{\sigma(1)\ldots,\sigma(i)\}$，对任意 $1 \leq i \leq n$ 均成立。对任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$，环面 T 在仿射图 $U_\sigma \ni P_\sigma$ 上有一个作用，因此也在切空间 $T_{P_\sigma}(X_n)$ 上有一个作用。为简化记号，我们用 $T_\sigma(X_n)$ 代替 $T_{P_\sigma}(X_n)$。以下结果对专家而言是众所周知的。

命题 2.2. 对任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$，考虑环面作用后，$P_\sigma$ 处到 X_n 的切空间为

$$T_\sigma(X_n) = \left\langle t_{\sigma(1)}t_{\sigma(2)}^{-1}, \ldots, t_{\sigma(n)}t_{\sigma(n+1)}^{-1} \right\rangle_{\mathbb{C}} \ . \tag{2.6}$$

设 $K_T^0(X_n)$ 为 X_n上向量丛（等价类）的 T-等变格罗滕迪克环，设 $K_T^0(X_n^T)$ 为 X_n^T上相应的环。对任意 $[\mathcal{E}] \in K_T^0(X_n)$，记其对偶类为 $[\mathcal{E}^\vee]$。已知，对于一个带平凡 T-作用的点 P，存在如下同一

$$K_T^0(P) \sim \mathbb{Z}[t_1^{\pm1}, \ldots, t_{n+1}^{\pm1}],$$

将 P 上的任意向量丛类（即一个 T-表示）映射为一组特征之和，这些特征给出了它分解为不可约 T-表示的方式。特别地，容易得出我们可以将

$$K_T^0(X_n^T) \sim \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} \mathbb{Z}[t_1^{\pm1}, \ldots, t_{n+1}^{\pm1}] \ .$$

对于任意 $f \in \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} \mathbb{Z}[t_1^{\pm1}, \ldots, t_{n+1}^{\pm1}]$，我们用 f_σ 表示其在 σ 个因子上的投影。

定理 2.3 ([BEST21], 定理 2.1)。 限制映射 $K_T^0(X_n) \to K_T^0(X_n^T)$ 是单射的，且其像可识别为子环

$$\left\{ f \in \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_{n+1}^{\pm 1}] \;\middle|\; f_\sigma \equiv f_\tau \left(mod \left(1 - \frac{t_{\sigma(i+1)}}{t_{\sigma(i)}}\right)\right) , \forall \tau = \sigma \circ (i, i+1) \right\} .$$

上述结果使我们可以用 $[\mathcal{E}]_\sigma \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_{n+1}^{\pm 1}]$ 表示 $[\mathcal{E}] \in K_T^0(X_n)$ 在 T-不动点 $P_\sigma \in X_n^T$ 处的限制。给定 $m = (m_1, \ldots, m_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$，我们记作 $\mathbf{t}^m = t_1^{m_1} \cdots t_{n+1}^{m_{n+1}}$。于是，对于每个 $[\mathcal{E}] \in K_T^0(X_n)$ 以及每个 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$，都有

$$[\mathcal{E}]_\sigma = \sum_{l=0}^{k_\sigma} a_{\sigma,l} \mathbf{t}^{m_{\sigma,l}}, \qquad [\mathcal{E}^\vee]_\sigma = \sum_{l=0}^{k_\sigma} a_{\sigma,l} \mathbf{t}^{-m_{\sigma,l}} \tag{2.7}$$

对于某些 $k_\sigma \geq 0$, $a_{\sigma,l} \in \{\pm 1\}$ 以及 $m_{\sigma,l} \in \mathbb{Z}^{n+1}$，使得 $\mathbf{rk}(\mathcal{E}) = a_{\sigma,1} + \ldots + a_{\sigma,l}$（详见 [BEST21，第 2.5] 小节）。

$\mathbb{P}^n$ 上的克雷莫纳映射提升为 X_n 上的对合映射，我们也将其记作 $crem$，并使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{crem} & X_n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \overset{q}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow[crem]{} & \mathbb{P}^n \end{array} \tag{2.8}$$

映射 $crem\colon X_n \to X_n$ 不是 T-不变的，但它是一个环面态射，因此保持 X_n^T。更确切地说，对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$，都有 $crem(P_\sigma) = P_\sigma$，其中 $\sigma(i) := \sigma(n+1-i)$ 对所有$1 \leq i \leq n+1$ 成立。此外，克雷莫纳映射诱导了一个对合 $crem\colon K_T^0(X_n) \to K_T^0(X_n)$，在此对合下有：

$$[\mathcal{E}]_\sigma = \sum_{l=1}^{k_\sigma} a_{\sigma,l} \mathbf{t}^{m_{\sigma,l}} \quad \Longrightarrow \quad (crem[\mathcal{E}])_\sigma = \sum_{l=1}^{k_{\overline{\sigma}}} a_{\overline{\sigma},l} \mathbf{t}^{-m_{\overline{\sigma},l}} . \tag{2.9}$$

以下结果称为等变局部化公式。

定理 2.4 ([Nie74], 4.7). 对于任意 $[\mathcal{F}] \in K_T^0(X_n)$，都有

$$\chi_T([\mathcal{F}]) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \frac{[\mathcal{F}]_\sigma}{\prod_{s=1}^n \left(1 - t_{\sigma(s)}^{-1} t_{\sigma(s+1)}\right)} . \tag{2.10}$$

2.3 射影直线示例

本节中，我们将在最简单的情形下介绍我们的方法，即 $n = 1$ 和 $X_1 = \mathbb{P}^1$。一般而言，我们不会在射影空间上工作，因此计算会复杂得多。不过，我们希望下面的例子能展现我们结果的特点。具体来说，我们在此旨在突出以下方面的差异：

- 等变情形和非等变情形，

- 大 $T:=(\mathbb{C}^\times)^2$ 和小 $T':=(\mathbb{C}^\times)^2/(\lambda,\ \lambda)$环面作用，
- 不同的计算方法。

让我们从非等变情形开始。设 H 是 $\mathbb{P}^1$ 中的一个点，并令$\mathcal{O}(1)$为相应的线丛。由于克雷莫纳映射是线性同构， H 同时扮演两个除子的角色： Γ 和 Δ。滥用记号，令 H 也表示周环$A(\mathbb{P}^1)$中的相应类。显然，对于 $a>1$，我们有 $H=1pt$ 和 $H^a=0$ 。
Hirzebruch-Riemann-Roch公式立即推出：

$$\chi([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)])=1,\quad \chi(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)])^{\otimes a})=0,\quad \forall a>0. \tag{2.11}$$

这里的情形格外简单。通过陈特征同构， $[\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)]$ 恰好映射到 H。对于更大的 n，我们还会得到在如此小的例子中无法显现的高阶项。我们注意到，上述公式也可以直接计算，因为射影空间上的线丛的所有上同调群都是已知的，参见 [Har13，定理III.5。1]。

现在我们转向等变情形。 T 和 T' 都作用于 $X_1=\mathbb{P}^1$。从托里克几何的角度来看，选择 T' 的作用更为自然。然而，一旦考虑线丛$\mathcal{O}(-1)$，唯一自然的作用便是 T的作用。这里有两种选择：要么使用 T' ，并为线丛选择一种线性化；要么使用 T，但要记住我们的群有一个稳定子。在本文中，我们通常会涵盖这两种方法。

我们从 T'开始。我们有两个环面不变除子 $H_1:=[1:\ 0]$ 和 $H_2:=[0:\ 1]$。这两个除子对应于选择 T' 在$\mathcal{O}(1)$ 上的作用，或等价地，在$\mathcal{O}(-1$上的作用。事实上，还有更多选择，因为我们可以表示 $H=2H_2-H_1$，不过我们只关注这两种。因此，我们固定 H_i，其中 $i=1$ 或 $i=2$。现在我们可以计算作为 T'的表示的所有上同调群。也就是说，我们将每个上同调群（进而将欧拉示性数）与 T' 的表示对应起来，从而也与特征对应起来；该特征是一个劳朗多项式。第3.1节将一般性地采用这种方法。首先，我们得到：

$$\chi_{T'}([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_i)])=\chi_{T'}([\mathcal{O}])=1.$$

这看起来与公式（2.11）类似，不过现在右边的数值 1 是变量 t_1、t_2 的一个多项式，在点（1,1）处取值为公式（2.11）中的 1。一个更有趣的情形是 $a=2$:

$$\begin{aligned}\chi_{T'}(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_i)])^{\otimes 2}) &= \chi_{T'}([\mathcal{O}])-2\chi_{T'}([\mathcal{O}(-H_i])+\chi_{T'}([\mathcal{O}(-2H_i)]) \\ &= \chi_{T'}([\mathcal{O}])+\chi_{T'}([\mathcal{O}(-2H_i)])=1-\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(-2H_i))\ .\end{aligned}$$

这里，我们利用了许多上同调群消失这一事实；在本例中，这一点可由 [Har13 的定理 III.5 推得。1]然而，正如我们将在文章中看到的，一般而言还需要更强大的工具。为了计算最高阶上同调群，我们应用环面 Serre 对偶[CLS11 的定理 9.2。10], 由此得到：

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(-2H_i))=\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(-H_1-H_2+2H_i))^\vee=\frac{t_1t_2}{t_i^2}.$$

因此，我们得到

$$\chi_{T'}(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_i)])^{\otimes 2})=1-\frac{t_1t_2}{t_i^2},$$

它在 (1,1) 处的取值确实为 0，但显然它是一个非零劳朗多项式。或者，若将 $([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_i)])^{\otimes 2}$ 替换为 $([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_1)])\otimes([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_2)])$，则得到的等变欧拉示性数为

$$\chi_{T'}(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_1)])\otimes([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-H_2)]))=\chi_{T'}([\mathcal{O}])+\chi_{T'}([\mathcal{O}(-H_1-H_2)])=1-\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O})^\vee=0,$$

事实上，这是零多项式（不仅仅是在 (1,1) 处的取值为零）。

接下来，我们考虑 T 的作用。虽然仍可像上文那样进行环面计算，但我们来介绍另一种基于等变化定位的方法。通常，这一方法在第 3.2 节中进行。注意，$\mathcal{O}(1)$ 带有自然的 T-作用。两个整体截面 x_1 和 x_2 的作用如下：

$$(t_1,t_2)\cdot x_1=t_1^{-1}x_1,\quad (t_1,t_2)\cdot x_2=t_2^{-1}x_2.$$

逆元来自这样一个事实： T 作用于 $\mathbb{P}^1=\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$，而 $\mathcal{O}(1)$ 的整体截面自然地与 $(\mathbb{C}^2)^\vee$ 相对应。处理等变 K-理论的一种非常强大的方法是：对于任意向量丛，考察环面不变点上的向量空间。对于$\mathcal{O}(-1)$，我们得到以下两个向量空间：

- $(\star,\ 0)\subset\mathbb{C}^2$ 在 $[1$ 上： $0]$ 且
- $(0,\ \star)\subset\mathbb{C}^2$ 在 $[0$ 上： $1]$。

这里，读者可能会想起，$\mathcal{O}(-1)$ 是射影空间上的万有丛。特别地，我们得到：

- 在 $[1$ 上的特征 t_1： $0]$ 且
- 在 $[0$ 上的特征 t_2： $1]$。

为简化记号，我们用特征对 (t_1,t_2) 表示在两个环面不动点处的类 $[\mathrm{O}(1)]$。事实上，先前，相对于环面 T'， H_1 和 H_2的线性化分别对应于 $(t_1/t_2,1)$ 和 $(1,t_2/t_1)$；此时，劳朗单项式不仅是 T 的特征，也是 T'的特征。不过，目前我们固定 (t_1,t_2)，这样就无需作出任何特定选择。此外，类 $[\mathrm{O}(-2)]$ 由 (t_1^2,t_2^2) 表示，因为类的张量积对应于特征的乘法。我们还用 $(1-t_1,1-t_2)$ 表示 $[\mathrm{O}]-[\mathrm{O}(-1)]$。知道每个点处的余切方向后，我们便可使用定理 2.4 中的公式计算欧拉示性数。在此例中，对于 $[1\colon 0]$，我们有一个特征 t_1/t_2；对于 $[0\colon 1]$，我们有 t_2/t_1。因此，我们得到：

$$\chi_T([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)])=\frac{1-t_1}{1-t_1/t_2}+\frac{1-t_2}{1-t_2/t_1}=1$$

如前所计算的那样，因此这里看不出$\mathcal{O}(-1)$的线性化选择。然而，由于 $([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)])^{\otimes 2}$ 的 K-类由 $((1-t_1)^2,(1-t_2)^2)$ 表示，我们得到

$$\chi_T(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-1)])^{\otimes 2})=\frac{(1-t_1)^2}{1-t_1/t_2}+\frac{(1-t_2)^2}{1-t_2/t_1}=1-t_1t_2,$$

与之前的计算进行比较，可以解释$\mathcal{O}(-1)$的线性化选择为何不同。

3 欧拉示性数的计算

本节将通过两种方法计算所需 K-类的等变欧拉示性数。固定 $i,j\in[n+1]$，已知对于任意 $0\le a\le n$，以下结论成立

$$\int_{X_E}[\Gamma_i]^a\cdot[\Delta_j]^{n-a}=\binom{n}{a}.$$

然而，上述等式仅提供了次数信息；我们感兴趣的是通过考虑 T-作用来确定交类。正如第2.3小节所指出的，固定指标 i,j 意味着为 $\mathcal{O}(1)$ 选择线性化。下文主要考虑小环面 $T'=T/\langle\mathbb{1}\rangle$ 的作用，以及其格 $M_{T'}$中的特征表示。

为了实现我们的目标，我们通过 Hirzebruch-Riemann-Roch 公式 K，将这个交的乔理论表达式转化为格罗滕迪克环中的 $K^0(X_n$-理论表达式 $\chi(\mathcal{F})=\int_{X_n}ch(\mathcal{F})\,\mathrm{Td}(X_n)$。由 [MMMSV20，引理 3.10],，可得

$$\chi\left(\left([\mathcal{O}_{X_n}]-[\mathcal{O}_{X_n}(-\Gamma_i)]\right)^{\otimes a}\otimes\left([\mathcal{O}_{X_n}]-[\mathcal{O}_{X_n}(-\Delta_j)]\right)^{\otimes n-a}\right)=\int_{X_E}[\Gamma_i]^a\cdot[\Delta_j]^{n-a}\ .$$

我们的主要目标是计算左侧的等变欧拉示性数，其中对应的类是 T-等变类

$$\left([\mathcal{O}_{X_n}]-[\mathcal{O}_{X_n}(-\Gamma_i)]\right)^{\otimes a}\otimes\left([\mathcal{O}_{X_n}]-[\mathcal{O}_{X_n}(-\Delta_j)]\right)^{\otimes n-a}\in K^0_T(X_n).$$

为简化记号，在表示$K_T(X_n)$中向量丛的 K-类时，我们通常省略 X_n，并省略指数中的张量积。

设 $\mathsf{A}_{n,i}:=([\mathsf{O}]-[\mathsf{O}(-\Gamma_i)])$ 和 $\mathsf{B}_{n,j}:=([\mathsf{O}]-[\mathsf{O}(-\Delta_j)])$ 为n维排列多面体簇 X_n上的 T-等变类，并令 $\mathsf{A}^a_{n,i}=\mathsf{A}^{\otimes a}_{n,i}$ 和 $\mathsf{B}^b_{n,j}=\mathsf{B}^{\otimes b}_{n,j}$。用此记号，我们的目标可改写为计算

$$\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j}).$$

展开张量积并令

$$D^{k\ell}_{ij}:=k\Gamma_i+\ell\Delta_j\in\mathrm{Div}^T(X_n),$$

对于任意 $0\le k\le a$ 和 $0\le\ell\le n-a$，我们有

$$\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j})=\sum_{k=0}^{a}\sum_{\ell=0}^{n-a}(-1)^{k+l}\binom{a}{k}\binom{n-a}{\ell}\chi_T\left([\mathcal{O}(-D^{k\ell}_{ij})]\right).$$

在以下小节中，我们通过两种不同的方法计算等变欧拉示性数 $\chi_T([\mathcal{O}(-D^{k\ell}_{ij})])$：第一种方法是确定线丛 $\mathcal{O}(-D^{k\ell}_{ij})$ 的上同调群，第二种方法则是基于使用等变局部化公式直接计算$\chi_T([\mathcal{O}(-D^{k\ell}_{ij})])$。在第一种方法中，$K$-类的等变欧拉示性数是不可约 T-表示的形式和；这些表示总是一维的，并且对应于环面上的特征，因此对应于 $\mathbb{Z}^{n+1}$中的点，或者等价地，对应于 $\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\dots,t_{n+1}^{\pm1}]$ 中的劳朗多项式，其中一个特征（$m_1,\dots,m_{n+1}$）对应于劳朗单项式 $t_1^{m_1}\cdots t_{n+1}^{m_{n+1}}$。本文中，我们始终将 K-类的欧拉示性数表示为劳朗多项式。

3.1 第一种方法：计算上同调群

在本小节中，我们确定当 k 和 ℓ 变化时，等变欧拉示性数 $\chi_T\left([\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]\right)$ 中出现的等变上同调群。首先，我们证明许多中间上同调群消失，因此将等变欧拉示性数的计算归结为仅计算整体截面的向量空间，也就是 H^0-项。由于每个这样的上同调群都继承了 X_n 上的 T-作用，因而是环面 T 的一个表示，我们将确定它们的不可约分量。

我们回顾以下消失定理，它们在本节中经常用到。

定理 3.1 (托里克 Kawamata–Viehweg；定理 9.3.10, [CLS11])。 设 X 为托里克簇。对于任意大且丰除子 $D \in \mathrm{Div}^T(X)$，有

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{O}(K_X + D)) = 0, \quad \forall p > 0 \ .$$

定理 3.2 (Batyrev-Borisov消失定理；定理 9.2.7, [CLS11])。 设 X 为托里克簇。对于任意丰除子 $D \in \mathrm{Div}^T(X)$，有

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{O}(-D)) = 0, \quad \forall p \neq \dim P_D \ .$$

其中 P_D 是除子 D对应的多面体。

第一步是计算结构层 $\chi_T([\mathcal{O}])$ 的等变欧拉示性数。由于反典范除子 $-K_X$ 是大且 nef 的，根据定理 3.1 我们得到消失关系 $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{O}) = \mathrm{H}^p(X, K_X + (-K_X)) = 0$ 对于任意 $p > 0$，由此得出

$$\chi_T([\mathcal{O}]) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}) = 1. \tag{3.1}$$

接下来，我们考虑 $k = 0$ 或 $\ell = 0$ 的情形。

命题 3.3. 对于任意 $1 \leq k, \ell \leq n$，均有

$$\chi_T([\mathcal{O}(-k\Gamma_i)]) = \chi_T([\mathcal{O}(-\ell\Delta_j)]) = 0 \ .$$

证明. 由对称性以及拉回的选取自由性 Γ_i 和 Δ_j，层$\mathcal{O}(-k\Gamma_i)$ 和$\mathcal{O}(-\ell\Delta_j)$ 在上同调中有共同消失，尽管它们非零的上同调群可能分解为不同的表示。鉴于此，只需证明当 $\chi_T([\mathcal{O}(-k\Gamma_i)])$ 随 $1 \leq k \leq n$ 变化时，结论成立。由于除子 $k\Gamma_i$ 是大且 nef，根据定理 3.2 可得

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{O}(-k\Gamma_i)) = 0 \qquad , \forall p \neq \dim P_{k\Gamma_i} = n \ .$$

此外，根据 Serre 对偶（SD）

$$\mathrm{H}^n(X, \mathcal{O}(-k\Gamma_i)) \overset{SD}{=} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(K_X + k\Gamma_i))^\vee \overset{(2.4)}{=} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}((k-1)\Gamma_i - \Delta_i))^\vee \ .$$

将 $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}((k-1)\Gamma_i - \Delta_i))$ 分解为不可约一维环面表示的特征 $m \in M_{T'} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$，恰好是满足以下不等式的特征

$$\langle m, u_S \rangle \leq \begin{cases} k-1 & \text{if } i \in S \\ -1 & \text{if } i \notin S \end{cases} \tag{3.2}$$

对任意非空真子集 $S \subset [n+1]$。特别地，由（2.1）可得

$$\begin{cases} \langle m, u_{\{i,j_1,\dots,j_r\}} \rangle \leq (k-1) - r \\ \langle m, u_{\{j_1,\dots,j_r\}} \rangle \leq -r \end{cases}$$

而由（2.2）可知

$$u_{[n+1]\setminus\{t_1,\dots,t_s\}} = -u_{\{t_1,\dots,t_s\}} \implies \begin{cases} 1 \leq \langle m, u_{\{i,j_1,\dots,j_r\}} \rangle \\ -k+1 \leq \langle m, u_{\{j_1,\dots,j_r\}} \rangle \end{cases},$$

其中每个 $j_l \neq i$。由于我们只考虑真子集， r 至多为 $n-1$。考虑 $r = n-1$，并回忆 $k \in \{1, \dots, n\}$。因此，由于 $k < n+1$，我们有 $1 \leq \langle m, u_{\{i,j_1,\dots,j_{n-1}\}} \rangle \leq k-n < 1$，这导致矛盾。因此，

$$\mathrm{H}^n(X, \mathcal{O}(-k\Gamma_i)) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}((k-1)\Gamma_i - \Delta_i))^\vee = 0,$$

并且由层 $[\mathcal{O}(-k\Gamma_i)]$和 $[\mathcal{O}(-\ell\Delta_j)]$, 的共同消失可得

$$\chi_T([\mathcal{O}(-k\Gamma_i)]) = \chi_T([\mathcal{O}(-k\Delta_j)]) = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq n. \tag{3.3}$$

□

剩下需要处理除子 $D_{ij}^{k\ell} = k\Gamma_i + \ell\Delta_j$ 当 $k, \ell \geq 1$。由于它们大且 nef，由定理 3.1，我们知道 $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})) = 0$ 对任意 $p \neq n$，因此我们只需确定

$$\mathrm{H}^n(X_n, \mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})) = \mathrm{H}^0(X_n, \mathcal{O}(K_X + D_{ij}^{k\ell}))^\vee = \mathrm{H}^0(X_n, \mathcal{O}((k-1)\Gamma_i - \Delta_i + \ell\Delta_j))^\vee .$$

此时我们得出， $\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,\,i} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,\,j})$ 仅取决于整体截面：

$$\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,j}) = 1 + \sum_{k=1}^{a} \sum_{\ell=1}^{n-a} (-1)^{n+k+\ell} \binom{a}{k} \binom{n-a}{\ell} \mathrm{H}^0(X_n, \mathcal{O}((k-1)\Gamma_i - \Delta_i + \ell\Delta_j))^\vee . \tag{3.4}$$

我们用 $S_{ij}^{k\ell} := (k-1)\Gamma_i - \Delta_i + \ell\Delta_j$ 表示该除子，以简化记号；该除子可以用素除子重写如下：

$$S_{ij}^{k\ell} = (k-1) \sum_{\{i,j\} \subset S} D_S + (k+\ell-1) \sum_{i \in S,\ j \notin S} D_S - \sum_{i \notin S,\ j \in S} D_S + (\ell-1) \sum_{i,j \notin S} D_S .$$

上述描述使我们能够确定特征 $m \in M_{T'} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ 必须满足的不等式组，从而使 $\mathrm{H}^0(X_n, \mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))_m \neq 0$。令 $m_S = \sum_{h \in S} m_h = \langle m, u_S \rangle$，则有

$$\begin{aligned} 1 \leq m_{\{i,s_1,\dots,s_r\}} &\leq k+\ell-1 \\ -(\ell-1) \leq m_{\{i,j,s_1,\dots,s_r\}} &\leq k-1 \\ -(k+\ell-1) \leq m_{\{j,s_1,\dots,s_r\}} &\leq -1 \\ -(k-1) \leq m_{\{s_1,\dots,s_r\}} &\leq \ell-1 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

对任意子集合 $\{s_1, \dots, s_r\} \subset [n+1] \setminus \{i, j\}$（也允许空子集）。

注 3.4。 对于 $i=j$，可得 $S_{ii}^{k\ell}=(k-1)\Gamma_i+(\ell-1)\Delta_i=(k-1)\sum_{i\in S}D_S+(\ell-1)\sum_{i\notin S}D_S$，从而得到以下不等式组：

$$\begin{aligned}-(\ell-1)\le m_{\{i,s_1,\dots,s_r\}}\le k-1\\ -(k-1)\le m_{\{s_1,\dots,s_r\}}\le \ell-1,\end{aligned}$$

它始终以 $(\mathbf{0},\dots,0)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ 作为一个解。另一方面，对于 $i\neq j$，特征 $(\mathbf{0},\dots,0)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ 对于任意 3.5) 都不是方程 (k 的解， $\ell\ge 1$因此

$$\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))_{(0,\dots,0)}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}.$$

注 3.5。 对于 $i\neq j$ 和 $k=\ell=1$，唯一的解是 $m=e_i-e_j\in M_{T'}$，即

$$\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{11}))=\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}(-\Delta_i+\Delta_j))=t_it_j^{-1}.$$

注 3.6。 给定 $1\le k\le k'\le a$ 和 $1\le\ell\le\ell'\le n-a$，根据系统 (3.5) 中的下界和上界，我们可以推知，(k,ℓ) 的格点解也是 (k',ℓ') 的格点解。事实上，随着 k 和 ℓ 增大，解的坐标区间也随之增大。因此

$$\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))\subset\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k'\ell'})),\ \forall(k',\ell')\ge(k,\ell),$$

因此，对于任意满足 $H^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))_m\neq 0$ 的特征 $m\in M_{T'}$，可得

$$\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))_m=\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k'\ell'}))_m\ .$$

例如，若 $i\neq j$，注记3.5 意味着，对于任意 $k,\ell\ge 1$，都有 $\mathrm{H}^0(X_n,\mathcal{O}(S_{ij}^{k\ell}))^\vee_{e_i-e_j}=t_jt_i^{-1}$，因此我们可以计算它在等变欧拉示性数 $\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j})$ 中的系数：

$$\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j})_{e_j-e_i}=\sum_{k=1}^{a}(-1)^{n+k}\binom{a}{k}\left[\sum_{\ell=1}^{n-a}(-1)^\ell\binom{n-a}{\ell}\right]\left(t_jt_i^{-1}\right)=(-1)^n\left(t_jt_i^{-1}\right).$$

上述注记使我们能够将虚表示 $\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j})$ 的（可能的）不可约直和项的搜索范围，限制在 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}(S^a_{,ij}{}^{n-a}))$ 的不可约直和项之中。

在*Macaulay2* 文件 `EquivariantEC.m2` 中，计算等变欧拉示性数 $\chi_T(\mathcal{A}^a_{n,i}\otimes\mathcal{B}^{n-a}_{n,j})$ 的这一方法的实现位于函数 `LPCFormula` 中，该函数接受输入参数 i,j,a,n。

例 3.7 $(n=3)$。 考虑三维排列簇 X_3 并记 $\{i,\ j,\ p,\ q\}=[4]$。从 (3.4) 出发并求解 (3.5) 可得：

$$\begin{aligned}\chi_T(\mathcal{A}_{3,i}\otimes\mathcal{B}^2_{3,i})&=1+\sum_{\ell=1}^{2}(-1)^{3+1+\ell}\binom{2}{\ell}\,\mathrm{H}^0\left(X_3,\mathcal{O}((\ell-1)\Delta_i)\right)^\vee\\&=t_it_j^{-1}+t_it_p^{-1}+t_it_q^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_T(\mathcal{A}_{3,i}\otimes\mathcal{B}_{3,j}^2) &= 1+\sum_{\ell=1}^{2}(-1)^{3+1+\ell}\binom{2}{\ell}\,\mathrm{H}^0\left(X_3,\mathcal{O}(-\Delta_i+\ell\Delta_j)\right)^\vee\\
&= 1-t_i^{-1}t_j+t_i^{-2}t_j^2+t_i^{-1}t_j^2t_p^{-1}+t_i^{-1}t_j^2t_q^{-1}\\
\chi_T(\mathcal{A}_{3,i}^2\otimes\mathcal{B}_{3,i}) &= 1+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{3+1+k}\binom{2}{k}\,\mathrm{H}^0\left(X_3,\mathcal{O}((k-1)\Gamma_i)\right)^\vee\\
&= t_jt_i^{-1}+t_pt_i^{-1}+t_qt_i^{-1}\\
\chi_T(\mathcal{A}_{3,i}^2\otimes\mathcal{B}_{3,j}) &= 1+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{3+1+k}\binom{2}{k}\,\mathrm{H}^0\left(X_3,\mathcal{O}((k-1)\Gamma_i-\Delta_i+\Delta_j)\right)^\vee\\
&= 1-t_i^{-1}t_j+t_i^{-2}t_j^2+t_i^{-2}t_jt_p+t_i^{-2}t_jt_q.
\end{aligned}$$

这里，我们利用 `EquivariantEC.m2` 中的函数，在参数 $(i,j,a,n)=(1,2,2,3)$ 的取值下，计算 $\chi_T(\mathrm{A}_{n,i}^{a}\otimes\mathrm{B}_{n}^{n-a},_j)$。思路是：对于固定的 k,ℓ，用一个线性不等式 $N\le B_{k,\ell}$ 描述系统 (3.5)，并将其整数解作为由矩阵 N 和向量 $B_{k,\ell}$定义的多面体中的格点来求得：我们使用 `Polyhedra` 包来完成这项工作。系统不等式 (3.5) 中对变量 m_i进行参数化的二元系数矩阵 N 由函数 `MatFun(n)` 计算得到，随后我们使用函数 `BMat({i,j} k,l,n)` 构造 (3.5) 中上界的向量$B_{k,\ell}$。在此基础上，函数 `LPCFormula` 对运行 k 和 ℓ所得的解求和：

```
i1:  load"EquivariantEC.m2"
i2:  EC=LPCFormula({1,2},2,3)o2:  q_{-2,1,1,
0} - q_{-1,1,0,0} + q_{-2,2,0,0} + q_{-2,1,0,1} + q_{0,0,0,0}
```

输出 `o2` 与上文计算得到的欧拉示性数一致

$$\chi_T\left(\mathcal{A}_{3,1}^2\otimes\mathcal{B}_{3,2}\right)=1-t_2t_1^{-1}+t_2^2t_1^{-2}+t_2t_3t_1^{-2}+t_2t_4t_1^{-2}.$$

3.2 第二种方法：等变化定位

在本节中，我们将运用等变几何中的技巧，特别是等变K-理论。作为该理论的标志性方法，我们使用局部化公式 2.4。

事实上，利用该公式计算层$[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]$ 的等变欧拉示性数时，需要计算类 $[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]_\sigma$，其中任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ 都对应于由 $-D_{ij}^{k\ell}$ 相对于素 T-不变除子的系数所定义的锥 C_σ 上的分段线性函数。特别地，有

$$-D_{ij}^{k\ell}=(-k-\ell)\cdot\sum_{S\cap\{i,j\}=\{i\}}D_S+0\cdot\sum_{S\cap\{i,j\}=\{j\}}D_S-\ k\cdot\sum_{S\supset\{i,j\}}D_S-\ \ell\cdot\sum_{S\subset[n+1]\setminus\{i,j\}}D_S\ . \tag{3.6}$$

回顾一下，通过双射（2.5），任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ 都唯一对应于锥

$$C_\sigma=Cone\left(u_{S_1},\ldots,u_{S_n}\right)$$

其中 $S_h=\{\sigma(1)\ \sigma(2)\ldots,\sigma(h)\}$ 对任意 $1\le h\le n$ 均成立。为简单起见，我们将锥与其定义旗对应起来

$$C_\sigma=\left(S_1\subsetneq\ldots\subsetneq S_n\right).$$

引理 3.8。 给定 $-D_{ij}^{k\ell} \in \mathrm{Div}^T(X_n)$ 如 (3.6)所示，格罗滕迪克类 $[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})] \in K_T^0(X_n)$在任意 T-不变点 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \simeq X_n^T$ 处的纤维为

$$[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]_\sigma = t_{\sigma(1)}^{-\ell} t_i^{-k} t_j^{\ell} t_{\sigma(n+1)}^{k} \ . \tag{3.7}$$

证明。 锥上的分段线性函数 C_σ 的取值取决于交$S_h \cap \{i,j\}$，分以下几种情况：

(i) $\sigma(1) = i$ 与 $\sigma(n+1) = j$;

(ii) 对某个 $1 \lneq p \leq n$, $\sigma(p) = i$，且 $\sigma(n+1) = j$;

(iii) $\sigma(1) = j$ 和 $\sigma(n+1) = i$;

(iv) 对某个 $1 \lneq p \leq n$, $\sigma(p) = j$，且 $\sigma(n+1) = i$;

(v) $\sigma(1) = i$ 且 $\sigma(p) = j$，其中 $1 \lneq p \leq n$;

(vi) $\sigma(1) = j$ 和 $\sigma(p) = i$ 对于某个 $1 \lneq p \leq n$;

(vii) $\sigma(p) = i$ 和 $\sigma(q) = j$ 对于某个 $1 \lneq p < q \leq n$;

(viii) $\sigma(p) = j$ 和 $\sigma(q) = i$ 对于某个 $1 \lneq p < q \leq n$。

我们考虑情形 (i)。锥 C_σ 对应于旗

$$S_1 = \{i\} \subsetneq S_2 = \{i, \sigma(2)\} \subsetneq \ldots \subsetneq S_n = \{i, \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} \ .$$

于是，对于上述任意 S_h，都有 $S_h \cap \{i,j\} = \{i\}$；也就是说，由 (3.6) 可得线性函数ϕ_σ，它在给定锥中任意射线生成元（即对应于某个 S_h 的生成元）上的取值为 $-k-\ell$。特别地，$-k-\ell = \phi_\sigma(u_{\{i\}})$；而对于任意 $h \geq 2$，我们有 $-k-\ell = \phi_\sigma(u_{S_h}) = \phi_\sigma(u_{\{i\}} + u_{\sigma(2)} + \ldots + u_{\sigma(h)})$，这意味着对于任意 $2 \leq p \leq n$，都有 $\phi_\sigma(u_{\sigma(p)}) = 0$。因此，对于满足 (i) 的任意$\sigma$，可得

$$[\mathcal{O}(-D_{ij}^{kl})]_\sigma = t_i^{-k-\ell} t_j^{k+\ell} \ .$$

对情形 (i)-(viii) 中的每一种重复上述论证，即可得到所需结果。

□

将（3.7）代入局部化公式（2.10），得到

$$\chi_T([\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \frac{[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]_\sigma}{\prod_{s=1}^n \left(1 - t_{\sigma(s)}^{-1} t_{\sigma(s+1)}\right)} \tag{3.8}$$

$$= t_i^{-k} t_j^{\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \frac{t_{\sigma(1)}^{-\ell} t_{\sigma(n+1)}^{k}}{\prod_{s=1}^n \left(1 - t_{\sigma(s)}^{-1} t_{\sigma(s+1)}\right)} \ . \tag{3.9}$$

利用上一节中的消失性结果，我们得到

$$\chi_T(\mathcal{A}_{n,i}^a \otimes \mathcal{B}_{n,j}^{n-a}) = 1 + \sum_{k=1}^{a} \sum_{\ell=1}^{n-a} (-1)^{k+\ell} \binom{a}{k} \binom{n-a}{\ell} \chi_T\left([\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]\right) \tag{3.10}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{a} \sum_{\ell=1}^{n-a} (-1)^{k+\ell} \binom{a}{k} \binom{n-a}{\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \frac{t_{\sigma(1)}^{-\ell} t_i^{-k} t_j^{\ell} t_{\sigma(n+1)}^{k}}{\prod_{s=1}^n \left(1 - t_{\sigma(s)}^{-1} t_{\sigma(s+1)}\right)} \ . \tag{3.11}$$

注记 3.9. 在环面 T' 上进行计算时，考虑到每个特征的坐标之和为零，我们可以消去 t_{n+1}。

例 3.10. ($n=3$) 我们介绍文件 `EquivariantEC.m2`中第二种方法的代码实现。与例 3.7一样，我们用它来计算等变欧拉示性数 $\chi_T(\mathcal{A}_{23,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})$。通过函数 `sigma(n)`构造出 $n+1$个元素的排列列表 S后，函数 `sigmaterms(S,{i,j},{k,l},n)` 利用局部化公式计算式 (3.8) 中的等变欧拉示性数 $\chi_T([\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})])$，最后，函数 `ECIJ(IJ,a,n)` 对所有 k,ℓ 求和，以得到 $\chi_T(\mathcal{A}_{n,i}^a\otimes\mathcal{B}_n^{n-a},j)$。

```
i1:  load"EquivariantEC.m2"
i2 :  EC=ECIJ({1,2},2,3)
o2 =  (t1^2-t1t2+t2^2+t2t3+t2t4)/t1^2
```

上述输出与 `o2` 例 3.7中的输出一致。

注记 3.11 （Γ 和 Δ的一般线性化）。上述论证可以用 X_n 上的一般除子 Γ 和 Δ 来重新表述，而无需选择坐标 i,j。我们回顾一下记号 $T=(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$和 $T'=T/\langle\mathbb{1}\rangle$ 分别表示大环面和小环面，而 M_T和 $M_{T'}$ 表示它们相应的特征格。考虑线丛 $\mathcal{O}(\mathbf{1})$，它是在 $\mathbb{P}^n$ 上的线丛，在对应于第 r个坐标点的 T-不动点 $[e_r]\in\mathbb{P}^n$ 处，其纤维为 $[\mathcal{O}(\mathbf{1})]_{[e_r]}=t_r^{-1}\in M_T$。若用$\mathcal{O}(\mathbf{1})_i$ 表示对应于超平面 $H_i\subset\mathbb{P}^n$的线丛，则有 K-类的等价关系 $[\mathcal{O}(\mathbf{1})_i]=t_i[\mathcal{O}(\mathbf{1})]$，因此在 $[e_r]\in\mathbb{P}^n$ 处的纤维为 $[\mathcal{O}(\mathbf{1})_i]_{[e_r]}=t_r^{-1}t_i\in M_{T'}$。特别是，

$$[\mathcal{O}(-\Gamma_i)]=t_i^{-1}[\mathcal{O}(-\Gamma)],\qquad [\mathcal{O}(-\Delta_j)]\overset{\clubsuit}{=}t_j[\mathcal{O}(-\Delta)]$$

其中等式（♣）由克雷莫纳映射的作用得出。鉴于此，$K_{T'}$-类$[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]=[\mathcal{O}(-k\Gamma_i-\ell\Delta_j)]$ 可以改写为

$$[\mathcal{O}(-D_{ij}^{k\ell})]=[\mathcal{O}(-\Gamma_i)]^k[\mathcal{O}(-\Delta_j)]^\ell=\left(t_i^{-1}[\mathcal{O}(-\Gamma)]\right)^k\left(t_j[\mathcal{O}(-\Delta)]\right)^\ell=t_i^{-k}t_j^\ell[\mathcal{O}(-k\Gamma-\ell\Delta)]$$

由（3.10）可直接得到

$$\chi_{T'}\left(([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-\Gamma_i)])^a([\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-\Delta_j)])^b\right)=\chi_T\left(([\mathcal{O}]-t_i^{-1}[\mathcal{O}(-\Gamma)])^a([\mathcal{O}]-t_j[\mathcal{O}(-\Delta)])^b\right).$$

若记 $\mathcal{A}_n=[\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-\Gamma)]$ 和 $\mathcal{B}_n=[\mathcal{O}]-[\mathcal{O}(-\Delta)],$，则可推出下列公式。该公式类似于（3.10），但与 i 无关，j

$$\begin{aligned}\chi_T\left(\mathcal{A}_n^a\otimes\mathcal{B}_n^{n-a}\right)&=1+\sum_{k=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{n-a}(-1)^{k+\ell}\binom{a}{k}\binom{n-a}{\ell}\chi_T\left([\mathcal{O}(-k\Gamma-\ell\Delta)]\right)\\&=1+\sum_{k=1}^{a}\sum_{\ell=1}^{n-a}(-1)^{k+\ell}\binom{a}{k}\binom{n-a}{\ell}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}}\frac{t_{\sigma(1)}^{-\ell}t_{\sigma(n+1)}^{k}}{\prod_{s=1}^{n}\left(1-t_{\sigma(s)}^{-1}t_{\sigma(s+1)}\right)}.\end{aligned}$$

在文件 `equivariantEC.m2` 中，我们还实现了用于计算 `EquiChar(n,a)` $\chi_T(\mathcal{A}_n^a\otimes\mathcal{B}_n^{n-a})$ 的函数：请注意，该函数与函数 `ECIJ({i,j},a,n)`

的区别仅在于上式中各项分子的定义。例如，为计算 $\chi_T(\mathcal{A}_3^2 \otimes \mathcal{B}_3)$，可使用如下输入并得到如下输出：

```
i1:  load"EquivariantEC.m2"
i2 :  EquiChar(3,2)
o2 =  t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1
```

4 欧拉示性数的递归公式

本节给出一个递归公式，用于计算等变欧拉示性数 $\chi_T(\mathcal{A}_{n,\ i}^{a} \otimes \mathcal{B}_n^{n-a}{}_{,\ j})$。关键在于限制到除子 Γ 或 Δ上，该除子可表示为环面不变除子 D_S之和，因此 $D_S \cong X_{|S|-1} \times X_{|E\setminus S|-1}$。于是，对每个这样的除子的限制，以及对它们交的限制，都伴有两个指向低维排列扇形簇的自然投影。我们利用这一点，将相应的欧拉示性数写成低维排列扇形簇上较简单线丛的欧拉示性数的乘积。

更准确地说，设 $D \subset X_n$ 是一个不可约环面不变除子，其嵌入映射为 $i : D\ , \to X_n$，并设 $\pi : X_n \longrightarrow \{pt\}$ 为到一点的投影。由于 X_n 是光滑的， D也光滑。我们回顾一下欧拉示性数映射

$$\chi_{X_n} : K_T(X_n) \longrightarrow K_T(pt)$$

定义为沿投影 π的推前映射。因此，对于 X_n 上的层 $\mathcal{F}$，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_{X_n}(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D)]) \otimes [\mathcal{F}]) &= [\pi_*(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D)]) \otimes [\mathcal{F}])] \\ &= [\pi_*([i_*\mathcal{O}_D] \otimes [\mathcal{F}])] \\ &= [\pi_* i_*([\mathcal{O}_D] \otimes i^*[\mathcal{F}])] \\ &= \chi_D(i^*[\mathcal{F}])\end{aligned}$$

其中第二个等式由正合列得出

$$0 \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_D \to 0,$$

第三个等式则由投影公式得出。由此可得：

$$\chi_{X_n}(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D)]) \otimes [\mathcal{F}]) = \chi_D([\mathcal{F}_{|D}]). \tag{4.1}$$

这正是允许限制到除子 D的关键。

定理 4.1。 设 $D = \sum_{i=1}^{\ell} D_i$ 是一个除子，使得除子 D_i 均为素除子，彼此横截相交，且它们的每个非空交都是光滑的。则有如下递归公式：

$$\chi_{X_n}\Big(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D)]) \otimes [\mathcal{F}]\Big) = \sum_{\emptyset \neq \{j_1,\ldots,j_r\} \subset [\ell]} (-1)^{r+1} \chi_{D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r}}\left(\left[\mathcal{F}_{|D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r}}\right]\right) \tag{4.2}$$

其中的和是对 $[\ell]$ 的所有非空子集求和。

证明。W 我们对 ℓ应用归纳法， $\ell = 1$ 的情形为（4.1）。令 $D' = \sum_{i=1}^{\ell-1} D_i$。我们有

$$\begin{aligned}
&\chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')]) \otimes ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]\right) \\
&= \chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')] - [\mathcal{O}(-D_\ell)] + [\mathcal{O}(-D' - D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]\right) \\
&= \chi\left((([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')]) + ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) - ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D' - D_\ell)])) \otimes [\mathcal{F}]\right).
\end{aligned}$$

由于 $D = D' + D_\ell$ 且欧拉示性数具有可加性，我们得到

$$\begin{aligned}
\chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D)]) \otimes [\mathcal{F}]\right) = \chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')]) \otimes [\mathcal{F}]\right) + \chi(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]) \\
- \chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')]) \otimes ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]\right).
\end{aligned}$$

对第一项应用归纳法，我们得到（4.2）右侧中满足 $\{j_1, \ldots, j_r\} \subset [\ell - 1]$ 的部分。第二项贡献一个加项 $\{j_1\} = \{\ell\}$。对于最后一个加项

$$\chi\left(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D')]) \otimes ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]\right)$$

我们再次应用归纳法，将 $([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}]$ 视为一个元素。注意到以下事实即可完成证明:

$$\chi_{D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r}}\left(\left[(([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-D_\ell)]) \otimes [\mathcal{F}])_{|D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r}}\right]\right) = \chi_{D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r} \cap D_\ell}\left(\left[\mathcal{F}_{|D_{j_1} \cap \ldots \cap D_{j_r} \cap D_\ell}\right]\right),$$

根据情形 $\ell = 1$。因此，最后一项对应于 r-元组 $j_1, \ldots, j_r$，其中 $r > 1$ 且 $j_r = \ell$。这就完成了归纳步骤，从而完成证明。 □

对于由 E 的非空真子集构成的旗 $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \ldots \subsetneq S_k$，考虑相应的交:

$$D_{S_1,\ldots,S_k} := D_{S_1} \cap \cdots \cap D_{S_k}.$$

推论 4.2. 通过限制到 Γ_i，对于 $a > 0$，有

$$\begin{aligned}
\chi_{X_n}(\mathcal{A}^a_{n,i} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,j}) &= \chi_{X_n}(\mathcal{A}_{n,i} \otimes \mathcal{A}^{a-1}_{n,i} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in S_1 \subsetneq \ldots \subsetneq S_k} (-1)^{k+1} \chi_{D_{S_1,\ldots,S_k}}\left(\mathcal{A}^{a-1}_{n,i\,|D_{S_1,\ldots,S_k}} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,j\,|D_{S_1,\ldots,S_k}}\right)
\end{aligned}$$

其中，固定 k 后，第二个求和遍历所有长度为 k 且第一个子集包含 i 的可能旗。对于限制到 Δ_j，也有类似的公式，此时第二个求和遍历所有不包含 j 的可能旗。

定理 4.3. 通过限制到 Γ_i，对于 $a > 0$，有

$$\begin{aligned}
\chi_{X_n}(\mathcal{A}^a_{n,i} \otimes \mathcal{B}^{n-a}_{n,j}) &= \sum_{i \in S \subsetneq E} \chi\left(\mathcal{A}^{a-1}_{|E\setminus S|-1,i}\right) \chi\left(\mathcal{B}^{n-a}_{|S|-1,j}\right) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i \in S_1 \subsetneq S_k \subsetneq E} (-1)^{k+1}(k-1)! \left\{ {|S_k \setminus S_1| \atop k-1} \right\} \chi\left(\mathcal{A}^{a-1}_{|E\setminus S_k|-1,i}\right) \chi\left(\mathcal{B}^{n-a}_{|S_1|-1,j}\right) \\
&= \sum_{i \in S \subsetneq E} \chi\left(\mathcal{A}^{a-1}_{|E\setminus S|-1,i}\right) \chi\left(\mathcal{B}^{n-a}_{|S|-1,j}\right) + \sum_{i \in S \subsetneq S' \subsetneq E} (-1)^{|S'\setminus S|} \chi\left(\mathcal{A}^{a-1}_{|E\setminus S'|-1,i}\right) \chi\left(\mathcal{B}^{n-a}_{|S|-1,j}\right)
\end{aligned}$$

其中， $\left\{ {|S_k \setminus S_1| \atop k-1} \right\}$ 是斯特林函数，用于计算集合 $S_k \setminus S_1$ 划分为非空子集的方式数，并且我们设 $\left\{ {* \atop 0} \right\} = 1$。对于限制到 Δ_j 的情形，也有类似的公式，其中第二个求和遍历所有不包含 j 的可能的 2- 旗。

证明。 注意，每个交都可以表示为低维拟阵扇形簇的乘积

$$D_{S_1,\dots,S_k} \cong X_{|S_1|-1} \times X_{|S_2\setminus S_1|-1} \times \dots \times X_{|S_k\setminus S_{k-1}|-1} \times X_{|E\setminus S_k|-1}$$

其中，环面 $(\mathbb{C}^\times)^{|S_i\setminus S_{i-1}|}$ （坐标为 $(t_\ell)_{\ell\in S_i\setminus S_{i-1}}$ ）作用于第 i 个因子。因此，有两个投影到低维排列扇形簇的自然投影

$$\begin{array}{ccc} & D_{S_1\dots S_k} & \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi} & \\ X_{|S_1|-1} & \times & X_{|E\setminus S_k|-1} \\ {\scriptstyle \pi_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X_{|S_1|-1} & & X_{|E\setminus S_k|-1} \end{array}$$

因此

$$\mathcal{A}_{n,i}|_{D_{S_1\dots S_k}} \cong \phi^* \circ \pi_2^*(\mathcal{A}_{|E\setminus S_k|-1,i}), \qquad \mathcal{B}_{n,j}|_{D_{S_1\dots S_k}} \cong \phi^* \circ \pi_1^*(\mathcal{B}_{|S_1|-1,j})$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \chi_{D_{S_1\dots S_k}}\left(\mathcal{A}_{n,i}^{a-1}|_{D_{S_1\dots S_k}} \otimes \mathcal{B}_{n,j}^{n-a}|_{D_{S_1\dots S_k}}\right) &= \chi_{X_{|S_1|-1}\times X_{|E\setminus S_k|-1}}\left(\pi_2^*(\mathcal{A}_{|E\setminus S_k|-1,i}^{a-1}) \otimes \pi_1^*(\mathcal{B}_{|S_1|-1,j}^{n-a})\right) \\ &= \chi_{X_{|E\setminus S_k|-1}}\left(\mathcal{A}_{|E\setminus S_k|-1,j}^{a-1}\right)\chi_{X_{|S_1|-1}}\left(\mathcal{B}_{|S_1|-1,j}^{n-a}\right), \end{aligned}$$

其中，第二个等式由 K¨unneth 公式得出，而第一个等式则由欧拉示性数的定义得出，即沿投影到一点的推前映射。由推论4.2，我们得到

$$\chi_{X_n}(\mathcal{A}_{n,i}^a \otimes \mathcal{B}_{n,j}^{n-a}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in S_1\subsetneq\dots\subsetneq S_k} (-1)^{k+1}\chi\left(\mathcal{A}_{|E\setminus S_k|-1,i}^{a-1}\right)\chi\left(\mathcal{B}_{|S_1|-1,j}^{n-a}\right)$$

固定 k 后，第二个求和遍历所有长度为 k 且第一个子集包含 i 的旗。由于公式只涉及旗的尾部和头部，我们可以将其化简为长度为 2 的旗 $S_1 \subsetneq S_k$，并使用斯特林函数 $\left\{{|S_k\setminus S_1| \atop k-1}\right\}$ 乘以 $(k-1)!$，来计算具有给定头部和尾部的 k-旗的数量。

为了得到最终公式，我们需要证明对于任意 $s>0$:

$$\sum_{k=1}^{s}(-1)^k k!\left\{{s \atop k}\right\} = (-1)^s.$$

上述公式的第一个证明采用关于 s的归纳法， $s=1$ 的情形显然成立。对于 $s>1$，我们注意到， $k!\left\{{s \atop k}\right\}$ 统计了集合{1,.. .,s}的有序划分（$A_1,\dots,A_k$）的数量。所有满足 $A_1 \neq \{s\}$的划分都可以按如下方式配对：若 $A_l = \{s\}$，则将（$A_1,\dots,A_k$）与（$A_1,\dots,A_{l-2},A_{l-1}\cup\{s\}\ A_{l+1},\dots,A_k$）配对。类似地，若每个 $A_l \neq \{s\}$，则对于某个 l，必有 $s\in A_l$。我们通过将 A_l 拆分为 $A_l\setminus\{s\}$来配对该划分，接着

$\{s\}$。每一对恰好为总和贡献一个1和一个 -1 。因此，只需计算 $A_1 = \{s\}$时的贡献，这一点根据归纳法是已知的。

对于第二个证明，我们回顾一个众所周知的公式：

$$\sum_{k=0}^{s} \left\{ {s \atop k} \right\} x(x-1)\cdots(x-(k-1)) = (x)^s.$$

将 $x = -1$ 代入即可得到我们的公式。 □

我们指出，在计算以下项时 $\chi(\mathcal{A}_{n\,i}^{a-1}{}_{,})$ 和 $\chi(\mathcal{B}_{n}^{n-a}{}_{,j})$（定理 4.3）时，可以分别进一步将范围限制为 Γ_i 和 Δ_j，从而将计算归结为一点上的欧拉特征数的计算。

Julian Weigert 按照所述步骤实现了我们的递归公式：

1. 预先计算各种 n 和 a 对应的欧拉示性数 $\chi_{X_n}(\mathcal{A}_n^a)$。这可以通过使用上文所述的递归方法来计算 $\chi_{X_n}(\mathcal{A}_{n,i} \otimes \mathcal{A}_n^{a-1})$ 来实现。
2. 根据上一点，通过代入即可轻松得到 $\chi_{X_n}(\mathcal{A}_{n,i}^a)$ 和 $\chi_{X_n}(\mathcal{B}_{n,j}^b)$。
3. 最终公式即为定理4.3中的最后一个公式。

由等变欧拉示性数的公式，我们可以还原通常的欧拉示性数公式。回顾一下，秩为 r 的集合 E 上均匀拟阵的约化色多项式为：

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \binom{n}{r-i} t^i.$$

这等价于下面的推论。

推论 4.4. 在非等变情形下：

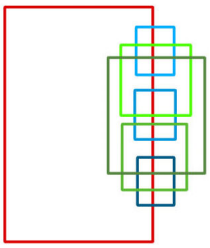
$$\chi_{X_n}(\mathcal{A}_{n,i}^a \otimes \mathcal{B}_{n,j}^{n-a}) = \binom{n}{a}.$$

证明。 我们注意到，在非等变情形下，多个除子的交若超过簇的维数，结果总是零。特别地，定理4.3 中只有同时满足 $a - 1 \le |E \setminus S_k| - 1$ 和 $n - a \le |S_1| - 1$ 的求和项才可能有非零贡献。这只有在 $S_1 = S_k$，即 $k = 1$ 且 $|S_1| = n - a + 1$ 时才可能。进一步应用归纳法可知，每个这样的贡献都等于一。因此，我们需要计算包含固定指标 i的 E 个元素子集的数量。显然，这样的子集有 $\binom{n}{n-a} = \binom{n}{a}$ 个。

□

我们回顾一下，为了确定一个层的欧拉示性数，需要确定它在每个对应于排列 σ的环面不动点处的多项式类。特别是，当限制到 $D_{S_1,\dots,S_k}$时，需要计算 $D_{S_1,\dots,S_k}$上环面不动点处线丛的类，这些不动点对应于 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 中形如 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \sigma_{e-k})$ 的排列，其中 σ_i 是集合 $S_i \setminus S_{i-1}$的一个排列，而 σ_{e-k} 是 $E \setminus S_k$中元素的一个排列。下面，我们通过明确展示交项的贡献，用递归方法重新计算这个例子。

例4.5. 我们计算三维排列簇上的 $\chi(\mathcal{A}_{23,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})$。在此情形下，考虑对$\mathcal{A}^{3,1}$，的限制，有7个除子，它们对应于包含1的集合$\{1,2,3,4\}$的非空真子集，即，$D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{123}, D_{124}, D_{134}$，它们如图所示相交，并分别以红色、蓝色（三个）和绿色（三个）标示。



我们首先考虑 $D_{12}\cong X_{12}\times X_{34}$，它有四个环面不动点，分别对应置换 1234，1243，2134，2143，其中环面 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 分别作用于每个因子上，其坐标为 $(t_1,\ t_2)$ 和 $(t_3,\ t_4)$。利用递归公式，并根据 $\chi(\mathcal{A}_{n,\ i})\ =\chi(\mathcal{B}_{n,\ j})\ =1$对 $n\geq 1$ 的事实，我们得到

$$\chi_{D_{12}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})=\chi(\mathcal{A}_{1,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=1$$

类似地，$\chi_{D_{13}}(\mathcal{A}_{3,\ 1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})=\ \chi_{D_{14}}(\mathcal{A}_{3,\ 1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})\ =\ 1$。现在，我们考虑对$D_1\cong X_1\times X_{234}$ 的限制，它包含 6 个环面不动点，因此有

$$\chi_{D_1}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})=\chi(\mathcal{A}_{2,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_2t_1^{-1})$$

现在，考虑其中一个交，$D_1\cap D_{12}\cong X_1\times X_2\times X_{34}$，我们得到

$$\chi_{D_1\cap D_{12}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})=\chi(\mathcal{A}_{1,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_2t_1^{-1}).$$

对其余（交）项使用相同的论证，可得

$$\begin{aligned}
\chi_{D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{2,2})=(1-t_4t_1^{-1})\\
\chi_{D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{2,2})=(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{2,2})=(1-t_3t_1^{-1})\\
\chi_{D_1\cap D_{13}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{1,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_1\cap D_{14}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{1,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_{12}\cap D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_4t_1^{-1})\\
\chi_{D_{12}\cap D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_3t_1^{-1})\\
\chi_{D_{13}\cap D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_4t_1^{-1})\\
\chi_{D_{13}\cap D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_{14}\cap D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_{14}\cap D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{1,2})=(1-t_3t_1^{-1})\\
\chi_{D_1\cap D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_4t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_1\cap D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_3t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})\\
\chi_{D_1\cap D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2})&=\chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2})=(1-t_2t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})
\end{aligned}$$

$$\chi_{D_1\cap D_{12}\cap D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_4t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$
$$\chi_{D_1\cap D_{12}\cap D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_3t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$
$$\chi_{D_1\cap D_{13}\cap D_{123}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_4t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$
$$\chi_{D_1\cap D_{13}\cap D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_2t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$
$$\chi_{D_1\cap D_{14}\cap D_{124}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_3t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$
$$\chi_{D_1\cap D_{14}\cap D_{134}}(\mathcal{A}_{3,1}\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = \chi(\mathcal{A}_{0,1})\chi(\mathcal{B}_{0,2}) = (1-t_2t_1^{-1})(1-t_2t_1^{-1})$$

现在，考虑交错和，可得

$$\chi(\mathcal{A}_{3,1}^2\otimes\mathcal{B}_{3,2}) = 1 - t_2t_1^{-1} + t_2^2t_1^{-2} + t_2t_3t_1^{-2} + t_2t_4t_1^{-2}\ ,$$

如例 3.7所示。在 `EquivariantEC.m2`中，函数 `eulerCharacteristic(3,2,1,2)` 计算这个欧拉特征。

参考文献

[AHK18] K. Adiprasito、J. Huh 和 E. Katz，组合几何的霍奇理论，《数学年刊》188.2（2018），第 381–452 页。[BEST21] A. Berget、C. Eur、H. Spink 和 D. Tseng，拟阵的典范类，arXiv:2103.08021（2021）。[CLS11] D. A Cox、J.B Little 和 H.K Schenck，托里克簇，数学研究生丛书，第 124 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011。[GS] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可在此处获取 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[Har13] R. Hartshorne，代数几何，数学研究生教材，第 52 卷。施普林格科学与商业媒体，2013。[Huh12] J. Huh，射影超曲面的米尔诺数与图的色多项式，《美国数学会杂志》25.3（2012），第 907–927 页。[Huh16] J. Huh，拟阵的热带几何，《数学当前发展》（2016），第 1–46 页。[Laz17] R.K. Lazarsfeld，代数几何中的正性 I：经典情形下的线丛与线性系，第 48 卷。施普林格出版社，柏林，2017。[MMMSV20]L. Manivel、M. Micha lek、L. Monin、T. Seynnaeve 和 M. Vodič̆ka，完全二次型：高斯模型的舒伯特演算与半正定规划，arXiv:2011.08791（2020）。[MS21] M. Micha lek 和 B. Sturmfels，非线性代数导论，数学研究生丛书，第 211 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021。[Nie74] A. Nielsen，可对角化线性化凝聚层，《法国数学会通报》102（1974），第 85–97 页。