arXiv:2302.04615v1 [math.CO] 9 Feb 2023

Dedekind 数的整除性

Bart lomiej Pawelski 信息
学研究所 格但斯克大学，波兰
bartlomiej.pawelski@ug.edu.pl

Andrzej Szepietowski 信息
学研究所 格但斯克大学，波兰
andrzej.szepietowski@ug.edu.pl

摘要

我们研究了 Dedekind 数的一些整除性性质。我们证明，第九个戴德金数模 210 同余于 6。

1 引言

我们定义 D_n 为由 n 个变量构成的所有单调布尔函数的集合。该集合的基数——d_n 称为第 n 个 Dedekind 数。 d_n 的取值见 OEIS（在线整数数列百科全书）数列A000372（见表1）。

1990 年，Wiedemann 计算出了 d_8 [12]。2001 年，Fidytek、Mostowski、Somla 和 Szepietowski [3]证实了他的结果。促使我们撰写本文的是 Wiedemann 致 Sloane 的信[13] ，信中告知了第八个 Dedekind 数的计算结果，尤其是其中这句话：“遗憾的是，我不知道该如何检验.....”Wiedemann 只知道 d_8 是偶数。尽管 Dedekind 数的整除性显然十分重要，但关于这一问题的研究却很少。据我们所知，唯一探讨这一问题的论文是 Yamamoto 的论文[14], ，他证明了若 n 是偶数，则 d_n 也为偶数。

我们的研究旨在通过提出确定 Dedekind 数整除性的新方法来弥补这一不足。作为这些方法的应用，我们计算了 d_9 除以一位数素数后的余数，希望这有助于验证其首次计算后得到的值 d_9 。

我们的主要结果如下同余方程组：

$$d_9 \equiv 0 \pmod 2,$$
$$d_9 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$d_9 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$d_9 \equiv 6 \pmod 7.$$

根据中国剩余定理，我们有

$$d_9 \equiv 6 \pmod{210}.$$

2 预备知识

令 B 表示集合 $\{0,1\}$，令 B^n 表示由 B 构成的 n 元序列的集合。具有 n 个变量的布尔函数是从 B^n 到 B 的任意函数。B^n 中有 2^n 个元素，具有 n 个变量的布尔函数有 2^{2^n} 个。在 B 中有序关系（即：$0 \le 0$、$0 \le 1$、$1 \le 1$），在 B^n 中有偏序：对于其中任意两个元素 $x =$（x_1，...，x_n）、$y =$（y_1，...，y_n），

$$x \le y \quad \text{if and only if} \quad x_i \le y_i \quad \text{for all } 1 \le i \le n.$$

函数 $h : B^n \to B$ 是单调函数，当且仅当

$$x \le y \Rightarrow h(x) \le h(y).$$

令 D_n 表示具有 n 个变量的单调函数集合，并令 d_n 表示 $|D_n|$。我们在 D_n 中定义偏序如下：

$$g \le h \quad \text{if and only if} \quad g(x) \le h(x) \quad \text{for all } x \in B^n.$$

我们将 D_n 中的元素表示为长度为 2^n 的比特串。D_0 中的两个元素将表示为 0 和 1。任意元素 $g \in D_1$ 都可以表示为连接 $g(0) * g(1)$，其中 $g(0)$ $g(1) \in D_0$ 且 $g(0) \le g(1)$。因此，$D_1 = \{00, 01, 11\}$。$g \in D_2$ 中的每个元素都是由四个比特构成的连接（串）：$g(00) * g(10) * g(01) * g(11)$，可表示为连接 $g_0 * g_1$，其中 g_0、$g_1 \in D_1$ 和 $g_0 \le g_1$。因此，$D_2 = \{0000, 0001, 0011, 0101, 0111, 1111\}$。类似地，$g \in D_n$ 中的任意元素都可以表示为连接 $g_0 * g_1$，其中 g_0、$g_1 \in D_{n-1}$ 和 $g_0 \le g_1$。因此，我们可以将 D_n 中的函数视为比特序列，也视为整数。用 $\preceq$ 表示由整数上的全序所诱导的 D_n 上的全序。此外，若 $x \preceq y$ 且 $x \ne y$，我们将写作 $x \prec y$。

对于集合 $Y \subseteq D_n$，我们用 Y^2 表示笛卡尔幂 $Y^2 = Y \times Y$，也就是所有满足 x、$y \in Y$ 的有序对 (x, y) 构成的集合。类似地，对于两个以上的因子，我们用 Y^k 表示由 Y 中元素组成的有序 k 元组的集合。我们用 $\top$ 表示 D_n 中的极大元，即 $\top = (1 \ldots 1)$；用 $\bot$ 表示 D_n 中的极小元，即 $\bot = (0 \ldots 0)$。对于两个元素 x、$y \in D_n$，我们用 $x|y$ 表示按位或；用 $x \& y$ 表示按位与。此外，$\mathrm{re}(x, y)$ 表示 $|\{z \in D_n : x \le z \le y\}|$。注意，$\mathrm{re}(x, \top) = |\{z \in D_n : x \le z\}|$，而 $\mathrm{re}(\bot, y) = |\{z \in D_n : z \le y\}|$。

2.1 偏序集

偏序集（偏序集）$(S, \preceq)$ 由集合 S 及二元关系（偏序） $\leq$ 组成，其中该关系满足自反性、传递性和反对称性。给定两个偏序集 $(S, \preceq)$ 和 $(T, \preceq)$，函数 $f\colon S \to T$ 若满足 $x \leq y$ 蕴含 $f(x) \leq f(y)$，则称为单调函数。我们用 T^S 表示从 S 到 T 的所有单调函数构成的偏序集，其偏序定义如下：

$$f \leq g \quad \text{if and only if} \quad f(x) \leq g(x) \text{ for all } x \in S.$$

本文使用以下著名引理；参见 [11]:

引理 1. 偏序集 D_{n+k} 与偏序集 $D_n^{B^k}$ 同构——后者是从 B^k 到 D_n的单调函数所构成的偏序集。

2.2 排列与等价关系

令 S_n 表示 $\{1, \ldots, n\}$ 上所有排列的集合。每个排列 $\pi \in S_n$ 都定义了 B^n 上的排列，定义为 $\pi(x) = x \circ \pi$ （我们将每个元素 $x \in B^n$ 视为一个函数 $x\colon \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$）。注意，当且仅当 $x \leq y$ 时，$\pi(x) \leq \pi(y)$。排列 π 也生成了 D_n 上的排列。也就是说，令 $\pi(g) = g \circ \pi$。注意，若 g 单调，则 $\pi(g)$ 也单调。我们用 $\sim$ 表示 D_n 上的一个等价关系。也就是说，若存在一个排列 $\pi \in S_n$ 使得 $f = \pi(g)$，则两个函数 f、$g \in D_n$ 等价，记作 $f \sim g$。对于函数 $f \in D_n$，其等价类是集合 $[f] = \{g \in D_n\colon \ g \sim f\}$。我们用 $\gamma(f)$ 表示 $|[f]|$。对于 $m > 1$，令 $E_{n,\,m} = \{f \in D_n\colon \ \gamma(f) \equiv 0 \text{ (模 } m)\}$，且 $E^c_{n,\,m} = D_n - E_{n,\,m}$。对于等价类 $[f]$，我们将其典范代表元定义为从 $[f]$ 中选出的、用于代表该类的元素。一个可行的方法是选取其中最小的元素（按照全序 $\preceq$），即 [12]。有时我们会将等价类 $[f]$ 与其典范代表元视为同一对象，并将 $[f]$ 视为 D_n 中的一个元素。我们用 R_n 表示等价类的集合，用 r_n 表示等价类的数量；即 $r_n = |R_n|$。r_n 的取值由 OEIS 数列 A003182 描述；见表1。

n	d_n	r_n
0	2	2
1	3	3
2	6	5
3	20	10
4	168	30
5	7,581	210
6	7,828,354	16,353
7	2,414,682,040,998	490,013,148
8	56,130,437,228,687,557,907,788	1,392,195,548,889,993,358

表1：的已知值(A000372) 和 r_n (A003182)

3 Dedekind 数被 2 整除的性质

1952 年，Yamamoto [14] 证明，若 n 为偶数，则 d_n 也为偶数。显然，无法根据这一性质判断 d_9 的奇偶性。不过，还有其他方法可以判断。一个可行的方法是利用布尔函数的对偶性。对于每个 $x \in D_n$，都有其对偶 x^d，通过反转并取反所有比特得到。例如，$1111^d = 0000$ 和 $0001^d = 0111$。若 $x = x^d$，则元素 $x \in D_n$ 为自对偶元素。例如，在 D_2 中，0101 和 0011 是自对偶元素。若 x 不是自对偶元素，且 $y = x^d \neq x$，则 $y^d = x$。因此，非自对偶元素构成形如 $(x,\ x^d)$ 的配对，其中 $x \neq x^d$。令 k_n 表示这些配对的数量，令 λ_n 表示 D_n 中自对偶函数的数量。于是有 $d_n = 2k_n + \lambda_n$。因此，$\lambda_n \equiv d_n$ （模 2）。λ_n 的取值由 OEIS 数列 A001206 描述；见表 2。该数列最后一个已知项——λ_9 ——由 Brouwer 等人于 2013 年计算得出 [1]。

n	λ_n
0	0
1	1
2	2
3	4
4	12
5	81
6	2,646
7	1,422,564
8	229,809,982,112
9	423,295,099,074,735,261,880

表 2：已知值 λ_n (A001206)

推论2. $d_9 \equiv \lambda_9 \equiv 0$ (模 2)

可以直接验证，对于 $n \leq 8$，$d_n \equiv \lambda_n$ (模 2)。

4 Dedekind 数被 3 整除的性质

根据引理 1，偏序集 D_{n+3} 与偏序集 $D_n^{B^3}$ 同构，后者是从 $B^3 = \{000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111\}$ 到 D_n的单调函数集合。考虑函数 H，它对每个三元组 $(x, y, z) \in D_n^3$ 返回值

$$H(x, y, z) = \mathrm{re}(\bot, x\&y\&z) \cdot \sum_{s \geq x|y|z} \mathrm{re}(x|y, s) \cdot \mathrm{re}(x|z, s) \cdot \mathrm{re}(y|z, s).$$

注意，$H(x, y, z)$ 等于满足 $f(001) = x$、$f(010) = y$ 且 $f(100) = z$ 的单调函数 $f \in D_n^{B^3}$ 的数量。事实上，对于 $f(000)$，我们可以选择任意满足以下条件的取值 t

$t \leq x\&y\&z$，共有 re(⊥, $x\&y\&z$) 种选法。对于 $f(111)$，我们可以从 $\{s \in D_n$ 中任取一个元素： $s \geq x|y|z\}$。此外，选定 $f(111) = s$ 的取值后， $f(011)$、 $f(101)$ 和 $f(110)$ 的取值可以彼此独立地选择。 $f(011)$ 的取值有 re($x|y, s$) 种选法； $f(101)$ 的取值有 re($x|z, s$) 种选法； $f(110)$ 的取值有 re($y|z, s$) 种选法。

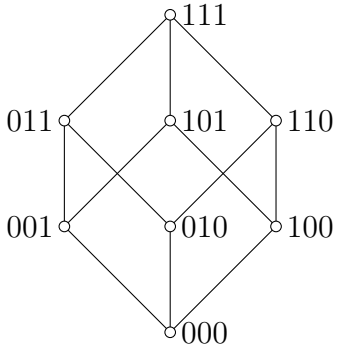

图 1：偏序集 B^3。

对于 $A \subseteq D_n^3 = D_n \times D_n \times D_n$，令 $H(A)$ 表示 $\sum_{(x,\ y,\ z)\in A} H(x,\ y,\ z)$。由引理 1，可得

$$d_{n+3} = H(D_n^3) = \sum_{x\in D_n} \sum_{y\in D_n} \sum_{z\in D_n} H(x, y, z).$$

H 的值在其参数的任意置换下保持不变。令 x、 y、 $z \in D_n$，并假设 $x \preceq y \preceq z$。我们有以下几种等价类：

1. $x = y = z$，类中有一个元素 2.
   $x \prec y = z$，类中有三个元素 3.
   $x = y \prec z$，类中有三个元素

4. $x \prec y \prec z$，类中有六个元素。

Fidytek 等人利用了类似的性质。[3, 算法 3] 加快了他们计算 d_8的速度。然而，他们使用了更复杂的四级算法。将其应用于我们的情况后， d_{n+3} 可表示为以下求和式：

$$d_{n+3} = \sum_{x\in D_n} H(x, x, x) + 3 \cdot \sum_{\substack{x,y\in D_n \\ x\prec y}} (H(x, x, y) + H(x, y, y)) + 6 \cdot \sum_{\substack{x,y,z\in D_n \\ x\prec y\prec z}} H(x, y, z) \qquad (1)$$

因此，

$$d_{n+3} \equiv \sum_{x\in D_n} H(x, x, x) \pmod 3.$$

现在我们可以再利用一次对称性。

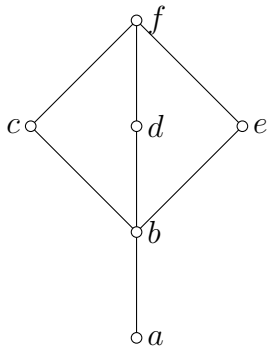

图 2：偏序集 C。

考虑图 C所示的偏序集2。注意，$\sum_{x\in D_n} H(x,x,x) = |D_n^C|$——从偏序集 C 到 D_n的函数数量。令 H' 表示这样一个函数：对每个u， v， $w \in D_n$返回

$$H'(u,v,w) = \Big(\sum_{s\le(u\&v\&w)} re[s, u\&v\&w] \Big) \cdot re[u|v|w, \top]. \tag{2}$$

注意到， $H'(u,v,w)$ 等于满足 $h(c) = u$、$h(d) = v$ 且 $h(e) = w$ 的单调函数 $h \in D_n^C$ 的数量。实际上，对于 $h(f)$，我们可以选择满足 $t \ge u|v|w$ 的任意值 t ，共有 $\mathrm{re}(u|v|w, \top)$ 种选法。对于 $h(a)$，我们可以选择 $\{s \in D_n$ 中的任意元素：$s \le u\&v\&w\}$。此外，选定值 $h(a) = s$ 后，值 $h(b)$ 有 $\mathrm{re}(s, u\&v\&w)$ 种选法。因此，

$$\sum_{x\in D_n} H(x,x,x) = \sum_{u,v,w\in D_n} H'(u,v,w). \tag{3}$$

的值 H' 在其任意参数置换下保持不变，因此我们可以采用与方程 1 中相同的基于对称性的简化：

$$\begin{aligned}\sum_{u,v,w\in D_n} H'(u,v,w) = &\sum_{u\in D_n} H'(u,u,u) \\ &+ 3\cdot \sum_{\substack{u,v\in D_n \\ u\prec v}} (H'(u,u,v) + H'(u,v,v)) + 6\cdot \sum_{\substack{u,v,w\in D_n \\ u\prec v\prec w}} H'(u,v,w)\end{aligned} \tag{4}$$

因此，我们有

$$d_{n+3} \equiv \sum_{u\in D_n} H'(u,u,u) \pmod 3$$

注意，$\sum_{u\in D_n} H'(u,u,u)$等于从路径$P_4$到 D_n的单调函数数量。Szepietowski [11] 证明，从路径 $P_4 = (a < b < c <$

d) 到偏序集 S 的单调函数与数组 $M(S)^3 = M(S) \times M(S) \times M(S)$ 中的元素相关，其中 $M(S)$ 是偏序集 S 的数组。具体而言，对于 $i, j \in S$，若 $i \leq j$，则有 $M(S)[i,j] = 1$；否则， $M(S)[i,j] = 0$。此外， $M(S)^3$ 中各元素之和等于 $|S^{P_4}|$。例如，对于偏序集 $D_1 = \{00 < 01 < 11\}$，有

$$M(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$M(D_1)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($M(D_1)^3$)中各元素之和等于15，这也等于 $|D_1^{P_4}|$——从 P_4 到 D_1的单调函数数量。

此外，考虑偏序集 $D_2 = \{0000, 0001, 0011, 0101, 0111, 1111\}$ 及其数组

$$M(D_2) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

现在考虑数组

$$M(D_2)^3 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 3 & 6 & 6 & 14 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 & 14 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

($M(D_2)^3$)中各元素之和等于105，这也等于 $|D_2^{P_4}|$——从 P_4 到 D_2的单调函数数量。类似地，我们可以计算$|D_n^{P_4}|$ （其中 $n = 3$为4、5）。遗憾的是，这种方法不易应用于 $n = 6$，因为数组 $M(D_6)$太大。不过，Pawelski [9] 提出了另一种方法：$|D^{P_4}(_{n+m})| = |D_n^{P_4 \times B^m}| = |(D_n^{P_4})^{B^m}|$（另见[11]）。使用计算 $|D_5^{P_4}|$ [9] 时所用的同一程序，我们可以计算 $|D_6^{P_4}|$，结果（见表3）可被3整除。

推论3：由于 $|D_6^{P_4}| = 868329572680304346696$ 能被 3 整除，因此 d_9 也能被 3 整除。

可以直接验证，对于 $n \leq 5$， $d_{n+3} \equiv |D_n^{P_4}| \pmod 3$。

n	$\lvert D_n^{P_4}\rvert$	$\lvert D_n^{P_4}\rvert$模 3
0	5	2
1	15	0
2	105	0
3	3,490	1
4	2,068,224	0
5	262,808,891,710	1
6	868,329,572,680,304,346,696	0

表3: $|D_n^{P_4}|$的已知值。注意, $d_{n+3} \equiv |D_n^{P_4}|$ （模 3）。

5 从 B^2 到 D_n 的计数函数

根据引理 1，偏序集 D_{n+2} 与偏序集 $D_n^{B^2}$ 同构——后者是从 $B^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ 到 D_n 的单调函数所构成的偏序集。考虑函数 G ，对于每一对 $(x, y) \in D_n^2$，它返回值 $G(x, y) =$ re$(x|y, \top) \cdot$re$(\bot, x\&y)$。注意， $G(x, y)$ 等于满足 $f(01) = x$ 且 $f(10) = y$ 的函数 $f \in D_n^{B^2}$ 的数量。事实上，我们可以用 re$(x|y, \top)$ 种方式选择$f(11)$，并用 re$(\bot, x\&y)$ 种方式选择 $f(00)$。注意，re$(\bot, x\&y)$ =re$(x^d|y^d, \top)$，其中 x^d 是 x的对偶。

For $A \subseteq D_n \times D_n$ 令 $G(A)$ 表示 $\sum_{(x,y)\in A} G(x, y)$。由引理 1，我们有 t

$$d_{n+2} = G(D_n \times D_n) = \sum_{x\in D_n} \sum_{y\in D_n} G(x, y).$$

注意，对于每个置换 $\pi \in S_n$ 以及任意 x、$y \in D_n$，都有 $G(x, y)$ =$G(\pi(x)\ \pi(y))$。事实上，$z \geq x|y$ 当且仅当 $\pi(z) \geq \pi(x)|\pi(y)$。因此，re$(x|y, \top)$ =re$(\pi(x)|\pi(y)\ \top)$。

引理 4。设 Y 是 $Y \subseteq D_n$ 的子集，并假设对于每个置换 $\pi \in S_n$， $\pi(Y) = Y$；再设 x 和 y 是 D_n 中两个等价的 $x \sim y$ 元素。那么：

1. $G(\{x\} \times Y) = G(\{y\} \times Y)$。
2. $G([x] \times Y) = \gamma(x) \cdot G(\{x\} \times Y)$。
3. 若 m 整除 $\gamma(x)$，则 m 整除 $G([x] \times Y)$
4. m 整除 $G(E_{n,m} \times Y)$，且 $G(Y \times E_{n,m})$

证明。注意，条件 $\pi(Y) = Y$意味着 π 是 Y上的一个双射，换句话说，π 置换了 Y的元素。

(1) $G(\{x\} \times Y) = \sum_{s\in Y} G(x, s) = \sum_{s\in Y} G(\pi(x)\ \pi(s)) = \sum_{t\in\pi(Y)} G(\pi(x)\ t) =$
$= \sum_{t\in Y} G(\pi(x)\ t) = G(\{\pi(x)\} \times Y)$。我们使用以下事实： $\pi(Y) = Y$。

(4) 注意到，$E_{n,m} \times Y$是由形如 $[x] \times Y$ 的不相交集合组成的和，其中 $\gamma(x)$ 能被 m整除。

□

引理 5. 对于每个 $Y = D_n$, $[y]$, $E_{n,m}$, 或 $E^c_{n,m}$, 以及每个置换 $\pi \in S_n$, 都有$\pi(Y) = Y$。

由此立即得到如下推论:

$$d_{n+2} = \sum_{x \in R_n} \gamma(x) \cdot G(\{x\} \times D_n).$$

例 6. 考虑偏序集 $D_2 = \{0000, 0001, 0011, 0101, 0111, 1111\}$。共有五个等价类: 即 $R_2 = \{\{0000\}, \{0001\}, \{0011, 0101\}, \{0111\}, \{1111\}\}$。两个元素: 0101 和 0011 等价。对于 $m = 2$, 有 $E_{2,2} = \{0011, 0101\}$ 和 $E^c_{2,2} = \{0000, 0001, 0111, 1111\}$.。表 4 给出了 $G(x, y)$ 在 $x, y \in D_2$ 下的取值。令$Y = [0011] = \{0011, 0101\}$。对于每个置换 $\pi \in S_2$, 都有 $\pi(Y) = Y$。此外, $G(\{0011\} \times Y) = G(\{0101\} \times Y) = 9 + 4 = 13$; 并且 $G([0011] \times Y) = 2 \cdot 13 = 26$, 它可以被 2 整除。

类似地, 对于 $Z = [0001] = \{0001\}$, 我们有 $\pi(Z) = Z$ 对每个置换 $\pi \in S_2$均成立。此外, $G(\{0011\} \times Z) = G(\{0101\} \times Z) = 6$; 并且 $G([0011] \times Z) = 2 \cdot 6 = 12$, 它能被 2 整除。将表 4 中的所有取值相加, 得到 $G(D_2 \times D_2) = 168 = d_4$。

x \ y	0000	0001	0011	0101	0111	1111
0000	6	5	3	3	2	1
0001	5	10	6	6	4	2
0011	3	6	9	4	6	3
0101	3	6	4	9	6	3
0111	2	4	6	6	10	5
1111	1	2	3	3	5	6

表 4: $G(x, y)$ 在 $x, y \in D_2$ 时的取值。

定理 7。

$$d_{n+2} \equiv G(D_n \times D_n) \equiv G(E^c_{n,m} \times E^c_{n,m}) \pmod{m}$$

and

$$d_{n+2} \equiv \sum_{x \in R_n \cap E^c_{n,m}} \sum_{y \in E^c_{n,m}} \gamma(x) \cdot G(x, y) \pmod{m}.$$

这里, 我们将每个类 $[x] \in R_n$ 与其典范代表元等同。

证明。令 A_1 表示 $E_{n,\ m} \times D_n$ 且 A_2 表示 $D_n \times E_{n,\ m}$。注意到 t

$$A_1 \cap A_2 = E_{n,m} \times E_{n,m}$$

$$E^c_{n,m} \times E^c_{n,m} = D_n \times D_n - (A_1 \cup A_2)$$

and

$$G(E^c_{n,m} \times E^c_{n,m}) = G(D_n \times D_n) - G(A_1) - G(A_2) + G(A_1 \cap A_2).$$

由引理 4(2)，可知 m 整除 $G(A_1)$、$G(A_2)$以及 $G(A_1 \cap A_2)$。因此，

$$d_{n+2} \equiv G(D_n \times D_n) \equiv G(E^c_{n,m} \times E^c_{n,m}) \pmod{m}.$$

注意到 $\pi(E^c_{n,m}) = E^c_{n,m}$，对每个置换 $\pi \in S_n$。因此，根据引理 4(4)：

$$d_{n+2} \equiv \sum_{x \in R_n \cap E^c_{n,m}} \sum_{y \in E^c_{n,m}} \gamma(x) \cdot G(x, y) \pmod{m}.$$

□

例 8 (例 6的续篇)。将表4中列出的相关取值相加，得到 $G(E^c_{2,2} \times E^c_{2,2})$ $= 6+5+2+1+5+10+4+2+2+4+10+5+1+2+5+6 = 70$。根据定理 7，有 $d_4 \equiv 70$ (模 2)。事实上，$d_4 = 168$，它是偶数。

6 从 B^3 到 D_n 的计数函数

在接下来的两节中，我们将证明，类似的技巧也可应用于 $D_n^{B^3}$ 和 $D_n^{B^4}$ 中的函数。在第 4 节中，我们定义函数 H。我们已经证明，

$$d_{n+3} = H(D_n^3) = \sum_{x \in D_n} \sum_{y \in D_n} \sum_{z \in D_n} H(x, y, z)$$

注意，对每个置换 $\pi \in S_n$ 以及任意的 x、y、$z \in D_n$，都有 $H(x, y, z) = H(\pi(x)\ \pi(y)\ \pi(z))$.

引理 9. 设 Y 和 Z 是子集 Y、$Z \subseteq D_n$，并假设对于每个置换 $\pi \in S_n$，$\pi(Y) = Y$ 且 $\pi(Z) = Z$；再设 x 和 y 是 D_n 中两个等价的 $x \sim y$ 元素。则：

1. $H(\{x\} \times Y \times Z) = H(\{y\} \times Y \times Z)$. 2. H $([x] \times Y \times Z) = \gamma(x) \cdot H(\{x\} \times Y \times Z)$】【。

3. 如果 m 整除 $\gamma(x)$，那么 m 整除 $H([x] \times Y \times Z)$

4. m 整除 $H(E_{n,\ m} \times Y \times Z)$。

证明。(1) $H(\{x\} \times Y \times Z) = \sum_{s \in Y} \sum_{t \in Z} H(x, s, t) = \sum_{s \in Y} \sum_{t \in Z} H(\pi(x)\ \pi(s)\ \pi(t)) = \sum_{u \in \pi(Y)} \sum_{v \in \pi(Z)} H(\pi(x)\ u, v) = \sum_{u \in Y} \sum_{\in Z} H(\pi(x)\ u, v) = H(\{\pi(x)\} \times Y \times Z)$。我们利用以下事实：$\pi$ 是 $Y \times Z$ 上的一个双射，并且置换了 $Y \times Z$的元素。 □

作为直接推论，我们有

$$d_{n+3} = H(D_n \times D_n \times D_n) = \sum_{x \in R_n} \gamma(x) \cdot H(\{x\} \times D_n \times D_n).$$

定理 10。

$$d_{n+3} \equiv H(D_n \times D_n \times D_n) \equiv H(E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c) \pmod{m}$$

and

$$d_{n+3} \equiv \sum_{x \in R_n \cap E_{n,m}^c} \sum_{y \in E_{n,m}^c} \sum_{z \in E_{n,m}^c} \gamma(x) \cdot H(x, y, z) \pmod{m}.$$

这里，我们同样将每个类 $[x] \in R_n$ 与其典范代表元对应起来。

证明。令 A_1、A_2、A_3 分别表示 $E_{n、m} \times D_n \times D_n$、$D_n \times E_{n、m} \times D_n$ 和 $D_n \times D_n \times E_{n、m}$。注意到

$$A_1 \cap A_2 = E_{n,m} \times E_{n,m} \times D_n$$
$$A_1 \cap A_3 = E_{n,m} \times D_n \times E_{n,m}$$
$$A_2 \cap A_3 = D_n \times E_{n,m} \times E_{n,m}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = E_{n,m} \times E_{n,m} \times E_{n,m}$$
$$E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c = D_n \times D_n \times D_n - \bigcup_{i=1}^{3} A_i$$

与[8, 第 2 章], 中类似，可以证明容斥原理的以下形式：

$$H(E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c \times E_{n,m}^c) = H(D_n \times D_n \times D_n - \bigcup_{i=1}^{3} A_i)$$
$$= H(D_n \times D_n \times D_n) - H(A_1) - H(A_2) - H(A_3)$$
$$+H(A_1 \cap A_2) + H(A_1 \cap A_3) + H(A_2 \cap A_3) - H(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

此外，我们有 m 整除以下各数：

- $H(A_i)$，其中 $i = 1$、2、3
- $H(A_i \cap A_j)$，对于 $1 \le i < j \le 3$
- $H(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$。

因此，

$$d_{n+3} \equiv H(D_n \times D_n \times D_n) \equiv H(E^c_{n,m} \times E^c_{n,m} \times E^c_{n,m}) \pmod{m}.$$

注意到 $\pi(E^c_{n,\ m}) = E^c_{n,\ m}$，对于每个 $\pi \in S_n$，因此由引理 9(2)，可得

$$d_{n+3} \equiv \sum_{x \in R_n \cap E^c_{n,m}} \sum_{y \in E^c_{n,m}} \sum_{z \in E^c_{n,m}} \gamma(x) \cdot H(x, y, z) \pmod{m}.$$

□

例 11。考虑 D_4。D_4 中有 168 个元素，而 R_4 中有 30 个等价类。这些等价类按其 γ 值的分布见表 5。例如，有六个等价类 $[x]$ 满足 $\gamma(x) = 1$，有两个等价类满足$\gamma(x) = 3$，依此类推。对于 $m = 2$，集合 $E^c_{4,\ 2}$ 仅含有十二个元素，而 $R_4 \cap E^c_{4,\ 2}$含有八个元素。同样，对于 $m = 3$，集合 $E^c_{4,\ 3}$ 含有 42 个元素，而 $R_4 \cap E^c_{4,\ 3}$由 15 个元素组成。

例 12。我们使用了定理 10 的 Java 实现。对于 $n = 4$ 和$m = 2$，3、4、6、12，我们有：

$d_7 \equiv 2320978352$（模 2），因此 $d_7 \bmod 2 = 0$，$d_7 \equiv 74128573428$（模 3），因此 $d_7 \bmod 3 = 0$，$d_7 \equiv 128268820802$（模 4），因此 $d_7 \bmod 4 = 2$，$d_7 \equiv 89637133284$（模 6），因此 $d_7 \bmod 6 = 0$，$d_7 \equiv 566167187562$（模 12），因此 $d_7 \bmod 12 = 6$。将 d_7 分别除以 2、3、4、6 和 12，即可直接验证这些取值。

k	$\lvert\{f \in R_4 :\ \gamma(f) = k\}\rvert$
1	6
3	2
4	9
6	6
12	7

表 5：具有 $\gamma(f) = k$ 的 $f \in R_4$ 数量。

7 从 B^4 到 D_n 的计数函数

根据引理 1，偏序集 D_{n+4} 与偏序集 $D_n^{B^4}$ 同构——后者是从 B^4 到 D_n的单调函数集合。考虑函数 F：对于任意六个元素 a、b、c、d、e、$f \in D_n$，它会求出满足以下条件的函数 $g \in D_n^{B^4}$ 有多少个：$g(0011) = a$、$g(0101) = b$、$g(1001) = c$、$g(0110) = d$、$g(1010) = e$、$g(1100) = f$。换句话说，F 统计了为 B^4中的其他元素选择 g 的取值有多少种方法。注意，上层元素的取值：

(1111)、(0111)、(1011)、(1101)、(1110) 可以独立于下层元素的取值来选择：(0000)、(0001)、(0010)、(0100)、(1000)。

现在来考虑上层元素 (1111)、(0111)、(1011)、(1101)、(1110) 的取值有多少种选法。首先，选择 g(1111)，它必须大于或等于 a、b、c、d、e、f 各自的取值，因此 g(1111) 可以从大于或等于 $a|b|c|d|e|f$ 的取值中选取。接下来，若选定了 g(1111) 的取值，则 g(0111)、g(1011)、g(1101)、g(1110) 的取值可以彼此独立地选取。而 g(0111) 必须大于或等于 g(0011) $= a$、g(0101) $= b$、g(0110) $= d$ 各自的取值。因此，$a|b|d \le g$(0111) $\le g$(1111)。于是，g(0111) 有 re($a|b|d, g$(1111)) 种选法（请记住，re(u, v) 是 u 与 v 之间的元素数量）。同理，g(1011) 的取值有 re($a|c|e, g$(1111)) 种选法；g(1101) 有 re($b|c|f, g$(1111)) 种选法；g(1110) 有 re($d|e|f, g$(1111)] 种选法。

将 g 扩展到上层元素的方法数等于

$$H = \sum_{u \ge a|b|c|d|e|f} \mathrm{re}(a|b|d, u) \cdot \mathrm{re}(a|c|e, u) \cdot \mathrm{re}(b|c|f, u) \cdot \mathrm{re}(d|e|f, u).$$

类似地，可以证明将 g 扩展到下层元素的方法数等于

$$h = \sum_{u \le a\&b\&c\&d\&e\&f} \mathrm{re}(u, a\&b\&c) \cdot \mathrm{re}(u, a\&d\&e) \cdot \mathrm{re}(u, b\&d\&f) \cdot \mathrm{re}(u, c\&e\&f).$$

总共有 $F(a, b, c, d, e, f) = H \cdot h$ 个函数满足：g(0011) $= a$, g(0101) $= b$,g(1001) $= c$, g(0110) $= d$, g(1010) $= e$, g(1100) $= f$。

For $A \subseteq (D_n)^6$ 令 $F(A)$ 表示 $\sum_{(a,b,c,d,e,f)\in A} F(a, b, c, d, e, f)$。根据引理 1 ，

$$d_{n+4} = F(D_n^6) = \sum_{a\in D_n} \sum_{b\in D_n} \sum_{c\in D_n} \sum_{d\in D_n} \sum_{e\in D_n} \sum_{f\in D_n} F(a, b, c, d, e, f)$$

注意，对于每个置换 $\pi \in S_n$ 以及每个 $a, b, c, d, e, f \in D_n$，都有$F(a, b, c, d, e, f) = F(\pi(a)\ \pi(b)\ \pi(c)\ \pi(d)\ \pi(e)\ \pi(f))$。考虑笛卡尔积 $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times Y_4 \times Y_5$，并令 $\pi(y_1, \ldots, y_5) = (\pi(y_1) \ldots, \pi(y_5))$。注意，若对于每个 i 都有 $\pi(Y_i) = Y_i$，则 $\pi(Y) = Y$，且 π 置换 Y 的元素。

引理 13。设 Y 是 $Y \subseteq D_n^5$ 的子集，并假设对于每个置换$\pi \in S_n$，$\pi(Y) = Y$；再设 x 和 y 是 D_n中两个等价的 $x \sim y$元素。那么：

1. $F(\{x\} \times Y) = F(\{y\} \times Y)$。
2. $F([x] \times Y) = \gamma(x) \cdot F(\{x\} \times Y)$.
3. 如果 m 整除 $\gamma(x)$，那么 m 整除 $F([x] \times Y)$。
4. m 整除 $F(E_{n,m} \times Y)$。

证明。 (1) $F(\{x\} \times Y) = \sum_{s \in Y} F(x, s) = \sum_{s \in Y} F(\pi(x)\ \pi(s)) = \sum_{u \in \pi(Y)} F(\pi(x)\ u) = \sum_{u \in Y} F(\pi(x)\ u) = F(\{\pi(x)\} \times Y)$。我们利用这样一个事实： π 是 Y 上的一个双射，并置换 Y 的元素。 □

作为推论，我们得到

$$d_{n+4} = F(D_n^6) = F(D_n \times D_n \times D_n \times D_n \times D_n \times D_n)$$

and

$$d_{n+4} = \sum_{x \in R_n} \gamma(x) \cdot F(\{x\} \times D_n \times D_n \times D_n \times D_n \times D_n).$$

定理 14。

$$d_{n+4} \equiv F(D_n^6) \equiv F((E_{n,m}^c)^6) \pmod{m}$$

and

$$d_{n+4} \equiv \sum_{a \in R_n \cap E_{n,m}^c} \sum_{b \in E_{n,m}^c} \sum_{c \in E_{n,m}^c} \sum_{d \in E_{n,m}^c} \sum_{e \in E_{n,m}^c} \sum_{f \in E_{n,m}^c} \gamma(a) \cdot F(a, b, c, d, e, f) \pmod{m}.$$

证明。设 A_1 表示 $E_{n,\ m} \times D_n^5$；设 A_2 表示 $D_n \times E_{n,\ m} \times D_n^4$；依此类推。更确切地说，对于 i、$1 \le i \le 6$，设 A_i 表示 $D_n^{i-1} \times E_{n,\ m} \times D_n^{6-i}$。对于任意非空子集 $I \subseteq \{1, \ldots, 6\}$，设 $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$。此外，设 $A_\emptyset = D_n^6$。注意到

$$(E_{n,m}^c)^6 = D_n^6 - \bigcup_{i=1}^{6} A_i.$$

与 [8, 第 2 章], 中的情形类似，可以证明容斥原理的以下形式：

$$F((E_{n,m}^c)^6) = F(D_n^6 - \bigcup_{i=1}^{6} A_i) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,6\}} (-1)^{|I|} F(A_I).$$

此外，若 $I \neq \emptyset$，则 m 整除 $F(A_I)$。因此，

$$d_{n+4} \equiv F(D_n^6) \equiv F((E_{n,m}^c)^6) \pmod{m}.$$

注意到 $\pi(E_{n,\ m}^c) = E_{n,\ m}^c$，对每个 $\pi \in S_n$，因此根据引理 13(2)，我们得到

$$d_{n+4} \equiv \sum_{a \in R_n \cap E_{n,m}^c} \sum_{b \in E_{n,m}^c} \sum_{c \in E_{n,m}^c} \sum_{d \in E_{n,m}^c} \sum_{e \in E_{n,m}^c} \sum_{f \in E_{n,m}^c} \gamma(a) \cdot F(a, b, c, d, e, f) \pmod{m}.$$

□

例15。 我们使用了定理的 Java 实现 14。对于 $n = 4$ 和$m = 2$，3、4、6、12，我们有：

$d_8 \equiv 53336702474849828$，因此 $d_8 \bmod 2 = 0$,$d_8 \equiv 3019662424037271148 \pmod 3$，因此 $d_8 \bmod 3 = 1$,$d_8 \equiv 25754060568741983624 \pmod 4$，因此 $d_8 \bmod 4 = 0$,$d_8 \equiv 14729824485525634108 \pmod 6$，因此 $d_8 \bmod 6 = 4$,$d_8 \equiv 15054599294580333880 \pmod{12}$，因此 $d_8 \bmod 12 = 4$。可以将 d_8 分别除以 2、3、4、6 和 12，直接验证这些取值。

8 应用

为了计算 d_9 除以 5 和 7 的余数，我们选择了第5节中介绍的算法。我们的实现列出了 R_7 的全部 490,013,148 个元素，并对每个元素 $\gamma(x)$ 和 re(⊥， x) 进行计算 $x \in R_7$。此前只有 Van Hirtum 在 2021[4]年完成过这一工作。值得注意的是， x 中 R_n 满足 $\gamma(x) = n!$ 的 $n > 1$ 元素数量可在 OEIS 序列A220879(见表6)中查到。利用现有的预计算集合，我们可以高效地确定该序列的第 7 项，而这一项尚未收录在 OEIS 中。

n	A220879(n)
1	0
2	1
3	0
4	0
5	7
6	7281
7	468822749

表 6: I　无对称性的 n 元单调布尔函数的非等价类 s.

我们的程序中最关键的部分——布尔函数规范化过程——基于 Van Hirtum 的快速方法 [4, 第 5.2 节。9] 并使用 Rust 实现。我们的程序运行在一台配备至强核心的 32 线程机器上。

预处理后的数据加载到主存后，进行了测试，并在短短 16 秒内成功复现了已知的 d_8 值。然而，使用这种方法检查任意 m 值对应的 d_9 的整除性，挑战要大得多。

为了确定哪些余数可以用我们的方法计算，我们可以使用表 7 中的信息。请注意

$$E^c_{7,m} = \sum_{\substack{x \in R_7 \\ \gamma(x) \bmod m \neq 0}} \gamma(x).$$

四个最小的 $E^c_{7,m}$ 分别是 $E^c_{7,7}$，有 9999 个元素；$E^c_{7,3}$，有 108873 个元素；$E^c_{7,21}$，有 118863 个元素；以及 $E^c_{7,5}$，有 154863 个元素。由于已知 d_9 可被 3 整除，下一步是计算 d_9 除以 5 和 7 的余数。

8.1 d_9 除以5的余数

$$\sum_{x \in R_7 \cap E^c_{7,5}} \sum_{y \in E^c_{7,5}} \gamma(x) \cdot G(x,y) = 1404812111893131438640857806,$$

k	$\lvert\{f \in R_7 : \ \gamma(f) \ = k\}\rvert$
1	9
7	27
21	75
30	5
35	117
42	99
70	90
84	9
105	1206
120	4
140	702
210	3255
252	114
315	2742
360	18
420	26739
504	237
630	47242
720	4
840	75024
1260	1024050
1680	3128
2520	20005503
5040	468822749

表 7：给定 $\gamma(f)$ 时 $f \in R_7$ 的数量。

因此，根据定理 7，我们有 d_9 模 $5 = 1$。我们用了约 7 小时计算这个数。此外，根据定理 14我们有 $d_9 \equiv 157853570524864492086$ (模 5)，这证实了 d_9 模 $5 = 1$。

8.2 d_9 除以 7 的余数

$$\sum_{x \in R_7 \cap E_{7,7}^c} \sum_{y \in E_{7,7}^c} \gamma(x) \cdot G(x, y) = 2998951776450668253756 26,$$

因此，根据定理 7，我们得到 d_9 模 $7 = 6$。我们计算这个数大约用了半小时。

参考文献

[1] A. E. Brouwer、C. F. Mills、W. H. Mills 和 A. Verbeek。《计算机科学电子组合学杂志》20（2013 年）：计数两两相交的集合族。[2] F. a Campo，《Dedekind 数的幂与相关指数和之间的关系》，《整数数列杂志》21（2018），文章 18.4.4。[3] R. Fidytek、A. W. Mostowski、R. Somla 和 A. Szepietowski，《计数单调布尔函数的算法》，《信息处理快报》79（2001），203–209。[4] L. Van Hirtum。《使用 FPGA 超级计算计算第九个 Dedekind 数的路径》（2021），硕士论文。见 https://hirtum.com/thesis.pdf。[5] A. D. Korshunov，《关于单调布尔函数数量的戴德金问题的解》，《苏联科学院学报》233:4（1977），543–546。[6] A. D. Korshunov，《单调布尔函数》，《俄罗斯数学综述》58:5（2003），929–1001。[7] G. Markowsky，《枚举自由分配格》，缅因大学计算机科学系报告 89-10（1989）。[8] G. E. Martin，《计数：枚举组合学的艺术》，施普林格，2001。[9] B. Pawelski，《8 个变量的不等价单调布尔函数的数量》，《整数数列杂志》25（2022），文章 25.7.7。[10] N. J. A. Sloane。《在线整数数列百科全书》 https://oeis.org[11] A. Szepietowski，《作用于单调布尔函数的置换的不动点》，《整数数列杂志》25（2022），文章 25.9.6。[12] D. Wiedemann，《第八个 Dedekind 数的计算》，《序》8（1991），5–6。[13]D. Wiedemann。致 N. J. A. Sloane 的信（1990）。见 https://oeis.org/A000372/a000372.pdf[14] K. Yamamoto。《关于自由分配格阶数的注记》，《金泽大学科学报告》II（1953），5–6

2010 年数学主题分类：主要分类 06E30。关键词：Dedekind 数、单调布尔函数、第九个戴德金数、模同余、中国剩余定理

（涉及数列 A000372、A001206、A003182和A220879。）