arXiv:2302.04627v1 [stat.ME] 9 Feb 2023

评分数据的双重标度

Michel van de Velden，Patrick J.F. Groenen

摘要

应用于列联表时，双重标度与对应分析在数学上是等价的方法。然而，在分析评分数据时，这两种方法有所不同。这在很大程度上是由于数据预处理的差异。具体而言，在双重标度中，评分在采用定制的双重标度方法之前，要么转换为秩序，要么转换为连续类别数据。另一方面，在对应分析中，则先对原始评分进行所谓的加倍处理，再应用通常的对应分析公式。本文详细考察了这些差异，并提出一种可直接应用于评分的双重标度变体，同时比较不同方法在理论和实践方面的性质。

1 引言

Nishisato 的研究表明，双重标度是一种强大的方法，可用于解决各种各样的数据分析问题。双重标度与对应分析密切相关；在许多实际用途和应用中，两者是等效的。Nishisato（1994）和 Greenacre（1984）的著作详细阐述了这些方法之间的关系及其起源。从数学角度看，两者的关联尤为紧密（例如，参见 Greenacre（1984）；Van de Velden（2000b））。或许，这些方法最大的区别在于：对应分析侧重于几何，而双重标度则强调最优尺度性质。

Michel van de Velden 鹿特丹伊拉斯姆斯大学，电子邮件： vandevelden@ese.eur.nl，
Patrick J.F. Groenen 鹿特丹伊拉斯姆斯大学，电子邮件： groenen@ese.eur.nl

尽管对应分析和双重标度通常都用于分析列联表，但这两种方法也可应用于其他类型的数据。然而，在分析这些其他类型的数据时，两种方法的实际处理方式确实有所不同。本章将明确探讨评分数据的双重标度和对应分析。

在对应分析中，评分数据的分析在（Greenacre，1984，第6章）中得到了明确讨论。然而，Greenacre（2017）在题为“数据重新编码”的章节（第23章）中讨论了评分数据的分析。这一主题的新标记，直接源于对应分析文献中对评分数据分析的定义方式。也就是说，在分析评分数据时，首先要将评分数据重新编码为特定形式，随后再对重新编码后的数据应用常规对应分析计算。

在双重标度中，评分数据的分析是在配对比较和连续类别数据的背景下讨论的。这些情境中提出的方法，实质上也是对重新编码后的数据应用常规双重标度计算（这与对应分析计算等价）。然而，正如本文所示，双重标度和对应分析中的重新编码方式有所不同，因此所得解的性质也有所不同。请注意，双重标度文献中似乎尚无对评分数据进行直接分析的方法。不过，正如第4节所示，我们可以借鉴对应分析文献中对评分的类似解释来处理这一问题。

本文回顾了双重标度和对应分析中现有的评分数据分析方法。我们首先在第 3 节和第 4 节简要总结不同类型的重新编码。此外，我们提出一种方法，以便在双重标度中更直接地处理评分数据。接下来，我们运用 Nishisato 研究中的基础框架——最优尺度框架，阐述这些方法在理论上的差异，并讨论这些差异在实践中的影响。我们通过 Nishisato（1994）中的一个示例数据集来说明这些差异，并在第 7 节给出一些总结性意见。

2 双重标度

双重标度的目标是寻找行类别的最优标度值或得分（或坐标），使行间方差最大化，同时寻找列类别的得分，使列间方差最大化。这里仅给出计算双向数据表 F 的双重标度解所需的基本公式，该表由非负整数构成。关于其原理以及双重标度解的推导，详见 Nishisato（1994）。

设 F 表示一个由非负元素构成的 $n \times p$ 矩阵，并定义对角矩阵 D_r 和 D_c，使得 $\mathrm{D}_r\mathbf{1}_p = \mathrm{F}\mathbf{1}_p = \mathrm{r}$ 且 $\mathrm{D}_c\mathbf{1}_n = \mathrm{F}^T\mathbf{1}_n = \mathrm{c}$，其中，通常用 $\mathbf{1}_i$ 表示一个由 1 构成的 $i \times 1$ 向量。考虑奇异值分解

$$\mathbf{D}_r^{-1/2}\left(\mathbf{F} - \frac{1}{s}\mathbf{r}\mathbf{c}^T\right)\mathbf{D}_c^{-1/2} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T, \tag{1}$$

其中 $s = \mathbf{1}_n\mathrm{F}\mathbf{1}_p$，并且不失一般性，$\mathbf{\Lambda}$ 对角线上的奇异值按非递增顺序排列。行和列的 k 维最优标度值（即得分/坐标）分别为 $\mathrm{X} = \mathrm{D}_r^{-1/2}\mathrm{U}_k$ 和 $\mathrm{Y} = \mathrm{D}_c^{-1/2}\mathrm{V}_k$，其中 U_k 和 V_k 分别对应于 U 和 V 的前 k 列。

请注意，通过以这种方式定义 X 和 Y，它们经过标准化，使得 $\mathrm{X}^T\mathrm{D}_r\mathrm{X} = \mathrm{Y}^T\mathrm{D}_c\mathrm{Y} = \mathrm{I}_k$。在对应分析文献中，矩阵 X 和 Y 被称为标准坐标。或者，定义 $\mathrm{G} = \mathrm{D}_r^{-1/2}\mathrm{U}_k\mathbf{\Lambda}_k$ 和 $\mathrm{H} = \mathrm{D}_c^{-1/2}\mathrm{V}_k\mathbf{\Lambda}_k$，即可得到所谓的主坐标解。关于不同标度及其影响的更多细节，尤其是对结果图形表示的影响，请参见 Greenacre （ 2017 ）。

3 评分对应分析 (CAr)

令 R 表示一个评分矩阵，评分范围为 1 到 q。我们用一个人工示例来说明不同变体所需的不同数据预处理步骤：$n = 4$ 个体分别对 $p = 3$ 个对象进行评分，所用的评分量表为 $q = 5$ 点量表。也就是说，

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

对应分析关注的是计数数据。我们可以将评分值视为对象相对于最低评分被偏好的次数，从而把评分看作计数。为此，我们只需从原始评分中减去 1。令 $\mathrm{T} = \mathrm{R} - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_p^T$ 表示所得矩阵，其取值范围为 0 到 $q - 1$。也就是说，如果原始评分量表包含 q 个评分，我们首先减去 1，这样在我们的简单示例中就得到

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} - \mathbf{1}_4\mathbf{1}_3^T = \begin{bmatrix} 2\ 4\ 5 \\ 3\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 4 \\ 1\ 5\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 0 \\ 1\ 0\ 3 \\ 0\ 4\ 2 \end{bmatrix}.$$

因此，T 可以解释为给定评分以下的量表点数；等价地，它表示对象在原始评分量表上被认为超过某个阈值的次数。

从数学上讲，我们可以对 T 中的计数数据应用对应分析。然而，这种方法存在一个问题：原始评分量表的方向会影响结果；反转该量表将导致不同的结果。也就是说，如果数据是在这样一个量表上收集的：最低评级（**1**）对应“差”，最高评级（q）对应“好”，而我们决定将标记从 1=“好”切换为 q=“差”，那么分析结果就会发生变化。显然，这种对量表方向的敏感性是不理想的影响。

为克服这一问题，数据会被“加倍”，即同时考虑评分量表两个方向上的评分数据。在对应分析中，具体做法是：对每个对象添加一列，其中包含反向量表上的评分。因此，我们得到的不是 p 列，而是一个由 $2p$ 列组成的矩阵。令 S 表示反向量表上的评分矩阵，即 S $=(q-1)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_p^T$ −T。在我们的示例中，得到

$$\mathbf{S} = (q-1)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_p^T - \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4\ 4\ 4 \\ 4\ 4\ 4 \\ 4\ 4\ 4 \\ 4\ 4\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 0 \\ 1\ 0\ 3 \\ 0\ 4\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ 1\ 0 \\ 2\ 2\ 4 \\ 3\ 4\ 1 \\ 4\ 0\ 2 \end{bmatrix}.$$

我们构造一个按列加倍矩阵 $\mathrm{F}_c = [\mathrm{T} \mid \mathrm{S}]$:

$$\mathbf{F}_c = [\mathbf{T} \mid \mathbf{S}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

在第2节的公式中用这个加倍矩阵 F_c 替换 F，即可得到对应分析解。

加倍矩阵 F_c 的具体结构也使列具有结构化的坐标。特别是，对应于同一对象的点及其反向评分，可以通过一条经过原点的直线连接起来（不过，这两个点到原点的距离不同）。Greenacre (2017) 利用这一关系指出，所得直线可划分为 $q-1$ 个等长区间，端点对应评分量表的两个端点。也就是说，评分q 对应于原始评分所对应的点，而评分

1 对应于反向量表上的点。然后，可以通过考察这条直线上原点处的数值，从该图推断近似平均评分值（按原始量表计）。此外，与主成分分析中的情况类似，对应不同属性的直线之间的夹角（以原点为顶点）可近似表示这些属性评分之间的相关性。事实上，正如 Van de Velden (2004, pp. 103-104) 所示，对加倍矩阵 $\mathbf{F}_c$ 进行分析，等价于对经过特定缩放和双重中心化处理的原始评分数据进行主成分分析。

4 评分数据的双重标度

评分数据的双重标度在 Nishisato（1994）中并未作为独立主题进行讨论。相反，在配对比较和等级顺序数据的语境下，Nishisato（1994）提出了两种双重标度变体，要求对数据进行不同的重新编码。第一种方法要求将评分重新编码为排名，而第二种方法则涉及对对象以及未观测到的评分边界进行联合排名。除这两种方法外，我们还增加了第三种更为直接的重新编码方法，该方法依赖于对评分的解释，这种解释与对应分析中所采用的解释类似，详见第 3 节。在以下各小节中，我们将简要讨论这三种重新编码方式及其双重标度分析。为方便起见，我们将这些双重标度变体标记为 DS1 至 DS3。

4.1 将评分转换为等级顺序数据（DS1）

对于第一种变体，我们不直接考虑观测到的评分，而是对于观测 i，计数个体 i 对对象 j 的评分高于所有其他对象评分的次数。这等价于将评分转换为从 0 到 $p-1$ 的等级数据，并需要一种处理并列（即评分相同）的方法。对于贯穿全文的示例数据，即公式（2）中的矩阵 R，我们得到

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

而在反向量表上，

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ .5 & .5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于此时关注的是三个对象的等级，而不是它们在五点评分量表上的评分，因此这种方法显然会造成信息损失，因为它只考虑差异方向，而不考虑差异的大小。

为了分析由此得到的等级顺序数据，Nishisato（1994）提出构造一个优势矩阵 E，其中包含某个对象优于其他对象的次数（T*）与该对象不优于其他对象的次数（S*）之差。对于我们的示例，可得

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}^* - \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，每一行的和均为零。注意，优势矩阵 E 中包含正值和负值。此外，由于所有行和均为零，因此无法直接应用第2节所述的常规双重标度计算。Nishisato（1994）通过分别定义 $\mathbf{D}_r = p(p-1)\mathbf{I}_n$ 和 $\mathbf{D}_c = n(p-1)\mathbf{I}_p$ 解决了这一问题。或者，如 Van de Velden（2000a）所示，也可以对按行加倍矩阵 $\mathbf{F}_r = \left[\mathbf{T}^{*^T} \mid \mathbf{S}^{*^T}\right]^T$ 应用常规对偶标度法，从而得到我们的示例数据

$$\mathbf{F}_r = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1\ 2 \\ 1.5 & 1.5\ 0 \\ 1 & 0\ 2 \\ 0 & 2\ 1 \\ \hline 2 & 1\ 0 \\ .5 & .5\ 2 \\ 1 & 2\ 0 \\ 2 & 0\ 1 \end{array}\right].$$

分析按行加倍矩阵，可得出 $2n$ 行的得分。前 n 行的得分对应原始量表上的观测值（排名），而第二组的得分则对应反向量表上的观测值（排名）。不过，这两组得分之间的关系显而易见：第二组的得分只是第一组得分的 -1 倍。

4.2 将评分数据转换为连续类别数据（DS2）

第二种方法由 Nishisato（1980年）提出，并由 Nishisato 和 Sheu（1984年）进一步发展。该方法需要引入“边界”，以标示评分量表各尺度值之间的差异。我们为每个边界指定一个评分值，该值介于该边界所代表的两个评分量表值之间。随后，将 R 中观测到的评分与 $\mathrm{R}_{\mathrm{bound}}$ 中的边界一起进行排名，从而得到所谓的连续类别数据 $\mathrm{R}_{\mathrm{SCD}}$。请注意，这种做法除了 p 个对象外，还将 $q-1$ 个边界作为列加入数据矩阵。在我们的示例中，将 1.5 至 4.5 用作边界的“评分”值，可得

$$[\mathbf{R} \mid \mathbf{R}_{\mathrm{bound}}] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 5 & 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 \\ 3 & 3 & 1 & 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 \\ 2 & 1 & 4 & 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 \\ 1 & 5 & 3 & 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}_{\mathrm{SCD}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4.5 & 4.5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

由此得到的秩序数据 $\mathrm{R}_{\mathrm{SCD}}$ 的 $n \times (p+q-1)$ 矩阵可以用与上述相同的方式进行分析，也就是使用按行加倍矩阵。请注意，只要我们为边界插入的数值位于实际评分之间，具体数值是多少并不重要。

由于边界始终按照相同的方式排序，针对连续类别数据的一维双重标度解通常看来是合适的，并且就解释方差而言也足够。此外，由于个体的连续类别值基于同一个体给出的所有评分，因此会考虑个体特有的量表使用方式。出于这个原因，Schoonees 等人（2015年）和 Takagishi 等人（2019年）采用这种特定编码来构建研究问卷中反应风格偏差的方法。

4.3 将评分数据转换为计数数据（DS3）

前面小节介绍的两种重新编码方法都会产生个体特定的排名。因此，转换后的评分值也具有个体特定性。这意味着，如果个体 i 对某个对象给出评分 j，而个体 l 对该对象给出相同的评分值 j，那么这两次观测的重新编码值不一定相同。如果认为实际评分具有意义且不因个体而异，那么这可能不是一种理想的性质。为了解决这个问题，可以像第 3 节在对应分析背景下所述的那样，对评分进行重新编码并加以解释：将评分值重新编码为 T，即某次观测超过原始评分量表边界的次数。

与之前一样，我们不能直接对 T 应用双重标度，因为这样会导致结果取决于量表的方向。按照等级顺序数据的对偶标度法，我们可以通过按行构造一个双倍矩阵 $\mathrm{F}_r = \left[\mathrm{T}^T \mid \mathrm{S}^T\right]^T$，并对该矩阵应用双重标度来解决这个问题。从这里起，我们将这种 DS3 方法称为评分数据的双重标度。

5 最优尺度性质

如第3节和第4节所述，双重标度与评分数据的对应分析之间的差异，在于将观测到的评分转换为0至 $q-1$ 尺度后，对其进行加倍的方式不同。也就是说，评分的对应分析被定义为F_c的对应分析，而评分的双重标度被定义为F_r的双重标度。为更好地理解这些差异的影响，我们简要回顾它们的最优尺度性质。

正如Nishisato（1978）和Van de Velden（2004）所展示的，对优势矩阵E进行分析所获得的对象得分，以及对F_r进行分析时的对象得分，等价于Guttman（1946）定义并推导出的最优标度值。因此，这些值的确定方式是“为了最好地区分每个个体判断为较高的事物与判断为较低的事物”，Guttman（1946）。Guttman（1946）和Nishisato（1978）都明确考虑了配对比较数据。然而，最优尺度框架的构建中，矩阵T和S至关重要。因此，在评分数据的语境下使用这些矩阵时，其中的元素分别表示一个对象的评分超过或未超过可用评分边界的次数，最优尺度性质仍然有效。也就是说，在第4.3节定义的评分双重标度中，对象的尺度值以这样的方式赋予，使其能够最好地区分各个对象。

在 Guttman（1946）中，并未考虑针对个体的最优标度解。不过，我们可以将 Guttman（1946）关于观测值/个体最优标度的目标改述如下：为个体求取尺度值，以便针对每个对象，尽可能区分对该对象评判较高和较低的个体。这里的“较高”（“较低”）再次表示评分超过（未超过）边界的次数。Van de Velden（2004）在成对比较数据的背景下研究了这个“双重”问题，并指出，对按列加倍矩阵 F_c应用双重标度/对应分析，即可得到个体的最优标度值。与前文相同，若将 T 和 S 中的元素解释为对象评分超过或未超过可用评分边界的次数，那么这些最优标度性质在对 F_c进行分析时仍然成立。因此，虽然评分的双重标度

可以得出对象的最优标度值，但对评分进行对应分析可以得出个体的最优标度值。

请注意，对于评分数据的双重标度分析，加倍行的最优标度值（即个体按照原始尺度和反向尺度给出的评分）在通常的双重标度意义上是最优的。也就是说，它们使加倍表各行之间的变异最大化。同样，对于对应分析解，加倍列的值是最优标度值（即对象按照原始尺度和反向尺度进行评分）。然而，当按照 Guttman Guttman（1946）提出的框架和原理来定义最优标度值时，使用第2节公式得到的双重标度（以及对应分析）解所具有的典型对偶性，并不能直接推广到评分数据的情况。也就是说，无法同时根据评分数据获得 Guttman 的个体和对象最优标度值。

我们在表1中总结了不同变体的一些性质。

方法区间		最优标度	加倍
DS1	仅秩序	对象	隐含；按行
DS2	连续类别	对象和边界隐含：按行	
DS3	对象评分之间的差异		显式：按行
CAr	个体评分之间的差异		显式：按列

表1 评分数据分析不同变体的性质

总而言之，评分数据的双重标度与对应分析方法之间的区别，在于处理评分量表方向的方式不同。对于评分数据的双重标度（如第4.3节所述），采用按行加倍。对于评分数据的对应分析，则采用按列加倍来解决这一问题。这些不同的数据预处理步骤所产生的效果是：在评分数据的双重标度分析中，对象的取值是最优标度值；而在评分数据的对应分析中，个体的坐标是最优标度值。

为了在两种方法中作出选择，了解它们之间的差异非常重要。根据应用类型和具体研究目标，可以作出相应选择。当研究者主要关注根据对象评分中观察到的差异，对一组对象进行可视化（或量化）时，评分数据的双重标度可能更为合适。例如，要根据一群个体对产品的感知来确定产品的相对位置时，便可能适用这种方法。另一方面，如果更关注根据一组对象的评分模式差异，对个体进行可视化（或量化），那么评分数据的对应分析可能更适合捕捉个体差异。

6 应用

为了说明双重标度与对应分析这两种评分方法之间的差异，我们分析了一个关于感知犯罪严重程度的示例数据集（Nishisato，1994，第230页）。我们特别关注不同加倍方式的影响，即对评分矩阵进行按列（CAr）和按行（DS3）加倍后的分析。

17 名个体的样本使用从 1（“有些严重”）到 4（“极其严重”）的评分量表，对以下 8 种犯罪的感知严重程度进行了评分：纵火、入室盗窃、仿冒、伪造、杀人、绑架、抢劫和接收赃物。为便于复现，我们将数据列于表 2。请注意，所有个体都认为“杀人”极其严重。由于缺乏变异，这会导致 CAr 中的 D_c 矩阵奇异，因此我们在分析中剔除了这种犯罪。在 DS3 方法中不会出现这种奇异性，Nishisato（1994）分析数据时也未剔除该对象。

个体	纵火	入室盗窃	仿冒	伪造	杀人	绑架	抢劫	接收赃物
1	4	2	2	2	4	3	3	1
2	4	2	2	2	4	4	3	1
3	3	2	2	2	4	3	3	1
4	4	3	2	2	4	4	4	3
5	4	3	2	2	4	4	3	2
6	4	3	3	2	4	4	3	2
7	4	1	2	2	4	4	2	1
8	4	4	2	2	4	4	3	2
9	3	2	1	2	4	4	3	1
10	4	3	3	3	4	4	3	2
11	4	2	3	3	4	4	4	1
12	4	4	3	3	4	4	4	2
13	4	3	3	2	4	4	3	1
14	4	2	2	2	4	3	3	1
15	4	2	1	1	4	4	2	1
16	3	2	2	2	4	3	3	1
17	3	2	2	2	4	4	3	2

表 2　Nishisato 于 1994 年提供的犯罪严重程度评分数据

对象（犯罪）的二维双重标度解见图 1。根据 Guttman (1946) 和 Nishisato (1978) 的最优标度公式，标度值采用所谓的标准坐标。该二维解主要由第一维度主导，解释了 89 % 的方差。对评分进行对应分析，结果见图 2；根据 (Greenacre, 2017, Exhibit 23.2, p.180)，重复对象的坐标采用主坐标，并且针对每种犯罪，我们用轴线连接了各点

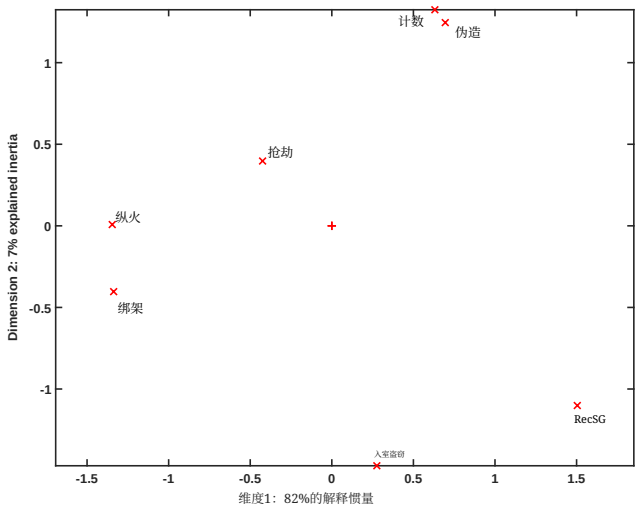


图 1 犯罪感知数据的评分双重标度（DS3）。标准坐标中对象（犯罪）的最优标度值

这些点对应量表的下限和上限。对应分析解解释了 64 % 的变异。

由于对应分析解中对象点加倍，因此难以对这两个对象解进行一一比较。此外，我们在对偶尺度分析中使用了标准坐标，而在对应分析结果中使用了主坐标。尽管如此，比较图 1 和图 2 可以立即看出，双重标度法对对象（犯罪）的区分效果更好。在图 1 中可以看到，受访者确实认为“仿冒”和“伪造”这两种性质有些相似的犯罪更加相似。另一方面，从评分可以看出，受访者对“抢劫”“入室盗窃”和“接收赃物”的感知存在显著差异。请注意，本次分析中的第一维度相当突出。此外，该维度似乎主要描述感知犯罪严重程度：从左侧较“严重”的犯罪（纵火和绑架），到右侧较不“严重”的犯罪（接收赃物）。

在图 2 中，我们可以看到，对应分析方法（CAr）直观地展示了“纵火”和“绑架”的评分彼此相关。此外，这两种犯罪的评分似乎与“伪造”“抢劫”“入室盗窃”和“接收赃物”的评分大多不相关。请注意，彩色线条的端点对应量表的两端。也就是说，“-”点对应最低评级，而“+”

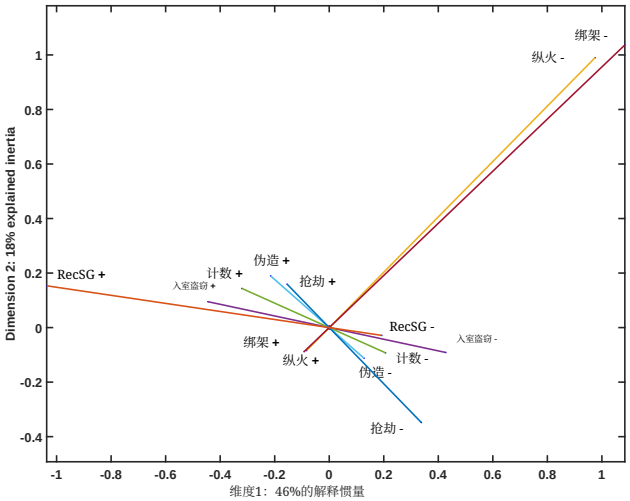


图2 犯罪感知数据的评分对应分析（CAr）。以主坐标表示的对象（犯罪）

点对应最高评分。由于对应分析图中的原点对应平均轮廓，我们可以直接从图中推断各对象的大致平均评分。例如，我们可以看到，“绑架”和“纵火”被评为“极其严重”的频率都远高于平均水平。同样，“接收赃物”往往更常被评为较低（不那么严重）的等级。对于“入室盗窃”，结果则更为多样，平均评分似乎接近评分量表的中间位置。

图3（DS3）和图4（CAr）分别给出了两种分析中个体对应的解。因此，对于双重标度解，个体的得分采用主坐标表示；而对于对应分析解，则采用标准坐标表示。此外，双重标度解中成对出现的“个体”得分可以忽略，因为它们只是关于原点镜像对称的相同坐标。

请回想，对应分析解为个体提供了最优标度值。因此，坐标的确定方式能够最优地呈现个体之间所示评分模式的差异。表面上比较图3和图4，可能无法立即看出这一点。不过请注意，对于图3所示的双重标度解，各点并未沿两个维度分散开来，而是全部集中在第一维度的负向一侧。

为了更好地理解两种解法之间的差异，图5和图6展示了两种方法的双标图。也就是说，行与列的联合图中，

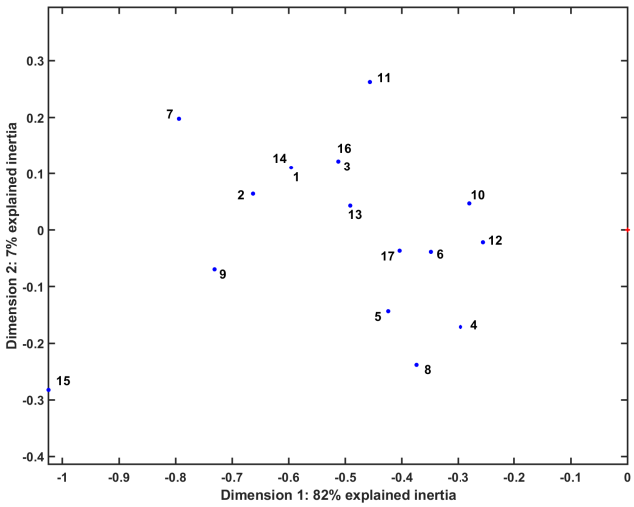


图3 犯罪评分数据的双重标度。个体在主坐标中的得分

将一组点投影到另一组点所指示的方向上（例如，可从原点经过这些点绘制坐标轴），即可重建原始数据表中的数值。更多详情请参见 Greenacre（1993）。请注意，在这两幅联合图中，对象（犯罪）采用标准坐标，个体采用主坐标。

要解释图5中个体的相对位置并不容易。对于这些数据而言，差异很小，而且大多数个体对所有犯罪都给出了较高评分。也就是说，他们倾向于认为所有犯罪都很严重。正如个体15在图3和图5中的位置所显示的那样，仅凭该图并不清楚个体15与其他个体有何不同。

图4中个体的最优标度位置看起来分离得更好。此外，个体位置差异的解释也更加直观。例如，个体15和7与其他点分开。在图6的双标图中，我们看到，这可能是因为这两个个体对“抢劫”的评分都相对较低（即低于平均评分）。事实上，只有这两个个体给这两种犯罪的评分为2。其他所有个体给出的评分都更高。类似地，通过观察其他“离群”点（如3、16、12、4）对应的评分剖面与平均评分剖面在哪些方面存在差异，也可以解释它们的位置差异。对于个体3和16给出的相同评分，我们看到，他们在“纵火”和“绑架”的评分方面与所有其他个体都不同。正如从数据表中可以核实的那样，他们对这两种犯罪的评分均为3，而其他所有个体至少对其中一种犯罪的评分为4。

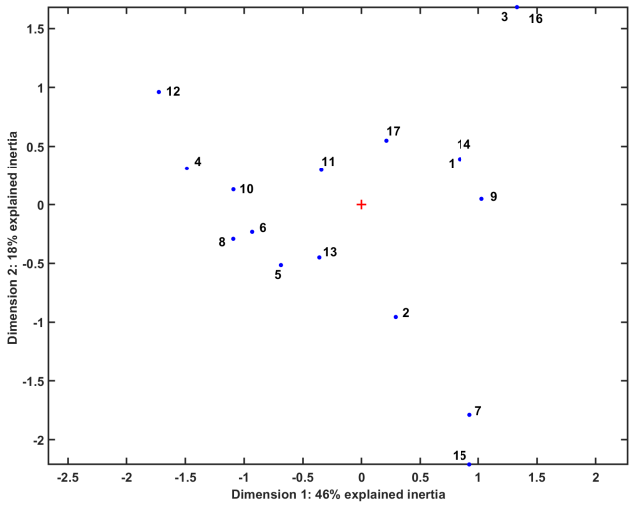


图 4 犯罪评分数据的对应分析。标准坐标中的个体最优标度值

这些犯罪的评分均为3，而其他所有个体至少对其中一种犯罪的评分为4。

7 结论

本文受到 Nishisato 相关工作的启发，提出了一种评分数据的双重标度方法。我们展示了该方法与评分数据的对应分析之间的关系，并指出这两种变体的根本区别可归因于数据预处理方式的不同。具体而言，评分数据的双重标度可描述为对按行加倍矩阵进行双重标度，而对应分析则相当于分析按列加倍矩阵。

Nishisato 在其整个学术生涯中提出的双重标度框架，为更好地理解由此产生的差异提供了工具。也就是说，评分数据的双重标度会产生（事实上，这正是其定义目的）对象的最优标度值，而评分数据的对应分析则会产生个体的最优标度值。鉴于两者存在这些根本差异，声称一种方法优于另一种并没有太大意义。选择这两种方法中的哪一种，取决于研究目标。如果目标是找出能根据观测到的评分最佳区分对象的尺度值（或表示形式），那么双重

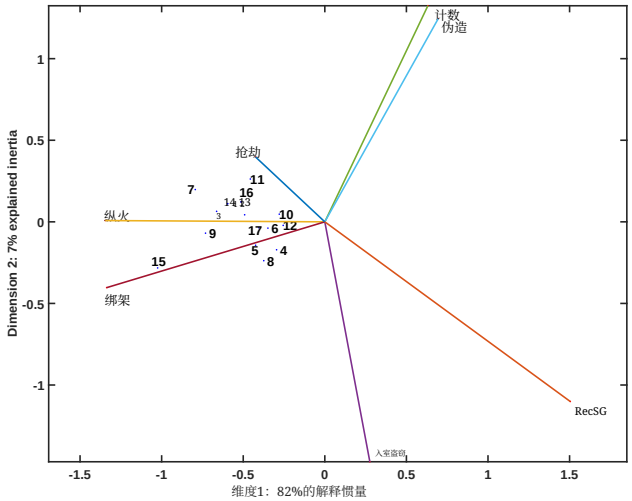


图 5 犯罪评分数据的双重标度双标图。标准坐标中对象（犯罪）的最优标度值

评分标度（即对行向双重矩阵 $\mathbf{F}_r$ 的分析）是合适的。另一方面，如果要根据个体的评分更好地区分个体，那么评分对应分析（即对按列加倍矩阵 $\mathbf{F}_c$ 的分析）是更好的选择。

参考文献

Greenacre, M. J. (1984). 对应分析理论与应用。伦敦：学术出版社。Greenacre, M. J. (1993). 对应分析双标图。《应用统计学杂志》，20(2):251–269。Greenacre, M. J. (2017). 对应分析实践，第三版。Chapman and Hall/CRC。Guttman, L. (1946). 一种量化配对比较和等级顺序的方法。《数学统计年刊》，17(2):144–163。Nishisato, S. (1978). 配对比较和等级顺序数据的最优标度：Guttman 的表述的一种替代方法。Psychometrika，43(2):263–271。Nishisato, S. (1980). 连续类别数据的双重标度。《日本心理学研究》，22(3):134–143。

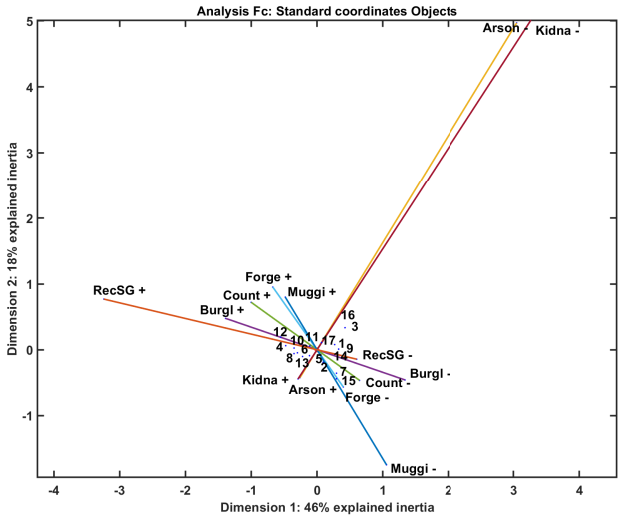


图 6 犯罪评分数据的对应分析双标图。个体在主坐标中的最优标度值

Nishisato, S. (1994). 双重标度要论：实用数据分析导论。Psychology Press。Nishisato, S. and Sheu, W.-J. (1984). 关于连续类别数据双重标度的一则注记。Psychometrika，49(4):493–500。Schoonees, P. C., Van de Velden, M., and Groenen, P. J. F. (2015). 用于检测分类数据中反应风格的受约束双重标度。Psychometrika，80(4):968–994。Takagishi, M., van de Velden, M., and Yadohisa, H. (2019). 存在反应风格偏差时的偏好数据聚类。《英国数学与统计心理学杂志》，72(3):401–425。Van de Velden, M. (2000a). 等级顺序数据的双重标度与对应分析。载于《Innovations in Multivariate Statistical Analysis》，第87–99页。Springer。Van de Velden, M. (2000b). Topics in Correspondence Analysis。Thela Thesis。Van de Velden, M. (2004). 成对比较数据的最优标度。《分类学杂志》，21(1):89–109。