此处将在排版后的文章中显示适用于文章类型的横幅

arXiv:2302.04630v1 [physics.flu-dyn] 9 Feb 2023

识别三维各向同性湍流中的因果显著性

Miguel P. Encinar[1]† 和 Javier Jiménez[1]

[1]马德里理工大学航空学院，西班牙马德里 28040

（收稿日期：xx；修订日期：xx；录用日期：xx）

通过 Jiménez (2018年) 最近提出的算法，识别出对三维各向同性湍流具有因果显著性的流场模式。在$Re_\lambda \approx 190$的三重周期衰减流中，任意区域均引入局域化扰动，并以扰动的演化作为衡量这些区域对流场显著性的标记。研究发现，区域的尺寸是一个重要参数：积分尺度量级的区域受动能含量控制，而处于耗散区间的区域则受涡量平方和耗散控制。在中间（惯性）尺度上，这三种量都很重要。显著性高与低的区域之间存在明显差异。前者通常包含较强的梯度和／或动能，而后者则较弱。对显著与不显著流场模式结构的分析表明，在将扰动内容传播到流场其他区域方面，应变比涡量更有效。此外，显著区域的流场模式更为复杂，通常包含涡旋团簇；而不显著区域中则可见较简单的涡片。当前结果表明，旨在操控流场的策略应聚焦于应变主导的涡旋团簇，并避开涡量平方主导的涡片。同化实验验证了这一点：相比于共享不显著区域的模拟，共享显著区域的两个模拟实现了更高程度的同步。这些结论对湍流控制以及基于有限或含噪测量进行预测均具有启示意义。

关键词：

1. 引言

本文源自近期关于Jiménez（2018、2020*b*）的蒙特卡洛模拟研究。在前一篇论文中，作者探讨了能否通过机器以半自动的方式发现对湍流流场具有显著意义的结构。第二篇论文研究了二维湍流中偶极子的性质，而偶极子正是前一篇论文所获得的显著模式建议之一。总体而言，这项研究成功揭示了一种迄今为止尚未受到充分关注的流场模式。这些工作的前提

† 通讯邮箱：mencinar@torroja.dmt.upm.es

摘要不得延伸至第 2 页

是，可以采用一种新颖的方法，利用最先进的硬件开展湍流研究。从最早的直接数值模拟（DNS，即 Orszag & Patterson 1972；Siggia 1981；Rogallo 1981；Kim 等，1987）到最新的研究（Lee & Moser 2015年；Iyer 等，2020年；Vela-Martín 等，2021），当时可用的最强大超级计算机一直被用于计算迄今规模最大的模拟（以自由度计）。另一部分研究则利用更快的硬件，迭代地最小化高昂的代价函数，以寻找不动点（Nagata 1990）、周期轨道（Kawahara & Kida 2001）、最优瞬态（Pringle & Kerswell 2010）、最优同化（Wang 等，2019）或最优状态（Motoki 等，2018年）。对这些代价函数的优化需要反复运行昂贵的类牛顿优化器，因此无法应用于具有最先进复杂度的模拟。相反，这些研究只能接受较低的雷诺数、较小的计算区域以及适中的模拟时间组合，我们可以将其概括为“较小规模”的模拟。大约30年前，这些模拟代表了当时的最先进水平（Jiménez 2020a），如今仍然具有重要意义。Jiménez（2018）探索了小规模模拟的一种不同应用场景，即利用现代硬件以可负担的成本运行大规模模拟集合。这些随机化集合及其产生的分析，被作者称为蒙特卡罗科学（MCS，Jiménez 2020c）。

MCS 是本文的核心内容。尽管我们建议读者查阅原始文献以了解更多细节，但此处仍回顾其基本前提。该方法旨在通过干预研究动力系统中的因果关系。因果关系的定义并不唯一，但一种合理的定义是：如果且仅当事件 A 发生时，事件 A 才是事件 B 的原因，因为 B （Pearl 2009）。上述陈述引入了两个关键方面：时间和先后关系。因果关系需要时间，因此动力系统的实例或“快照”无法判定因果关系。因果关系还要求 A 先于 B，因为过去必须是未来的原因。最后，因果关系存在一个时间范围，而 A 与 B 之间的延迟是一个重要参数。例如，早上下雨很可能是中午地面潮湿的原因，但三月下雨不太可能是八月地面潮湿的原因。通常将A 和 B 之间使前者对后者具有因果作用的概率最大化的时间间隔称为“因果视界”。因此，要阐明动力系统中的因果关系，就需要在时间历程中同时出现 A 和 B，且 A 先于 B，两事件之间的时间延迟还应具有一定的一致性。然而，即使时间历程满足所有上述要求， A 与 B之间也可能并无因果作用，因为众所周知，相关性并不意味着因果关系（Beebee 等，2009）。一个典型例子是白天总是先于夜晚，但夜晚并非白天的结果。因此，已有多种算法通过检测虚假相关，从时间序列中阐明因果关系（Granger 1969；Sugihara 等，2012年；Duan 等，2013）。这些算法在流体力学领域已显示出良好的应用前景（Lozano-Durán 等，2020年；Wang 等，2021），尽管仍存在一些问题（James 等，2016）。

对于能够通过实验操纵的动力系统，例如对纳维–斯托克斯方程进行直接数值模拟（DNS），另一种方法是修改系统并研究其后果。例如，通过对 A 施加某种扰动，并观察其对 B产生的影响。如果 A 是 B 唯一的成因，那么可以预期，至少某些针对 A 的操作会对 B产生重大影响，而与 A“正交”的操纵则不会影响 B 。原则上，在直接数值模拟中评估某项操作的因果影响很简单，尽管存在一些局限。首先需要定义感兴趣的因果范数，例如使工业流动的阻力大幅降低；它在此处充当“B”，然后操纵某个成因“A”，以检验“ A 是 B的成因”这一假设是否成立。一个成功案例是 Choi 等人（1994）的反向控制：通过从壁面吹吸来抑制近壁涡旋，从而有效降低阻力。从这个意义上说，可以认为近壁涡旋是阻力的成因，因为破坏它们会影响

后者。然而，它们可能并非唯一成因，因为尽管摩擦阻力有所降低，流场却没有重新层流化。因此，还有其他结构作为阻力的另一种成因，而先前的实验并未发现它们；那些实验是基于对哪些变量对系统重要的先入之见进行的。MCS 引入了一种方法，可以“自动”推断出对于给定的 B而言，哪些因素是其成因。人们不再根据对先验 假设进行 A干预，而是尝试大量操作，并检验哪些操作有效。人们预期，可以从有效操作的集合中推断出哪些“A”可能是所选“B”的成因。MCS 试图从干预所提供的信息中提取有关流场的信息。从这个意义上说，干预（或扰动）可以被视为探测流动动力学的探针。如前所述，该方法已展现出良好的前景（Jiménez 2020b）：作者研究了二维湍流中紧偶极子的性质；此前有人曾提出，对于某种特定的结果，紧偶极子可能是其成因。另一个与上述反向控制案例相关的成功实例是 Pastor 等人（2020）的研究，他们发现，抑制流向速度条带也是降低阻力的有效方法。

本文探讨了 MCS 方法在三维衰减均匀各向同性湍流（均匀各向同性湍流）中的潜力。衰减湍流是 MCS 的一个有趣问题，因为只有通过系综才能计算统计量。流场并非遍历的，因此自然需要开展相互独立的实验。图形处理器（GPU）等现代硬件能够让规模相对较小的问题快速运行，从而对合理规模的均匀各向同性湍流进行大规模系综模拟（Vela-Martín& Jiménez 2021）。例如，在本研究中，在 256^3 网格上运行一个均匀各向同性湍流周转所需时间约为 75 GPU-秒。这意味着由 8 个 GPU 组成的中型集群，大约一周半即可完成一个包含 10000 次实验的系综。这些实验生成的数据量带来了更大的挑战。假设在一个周转过程中记录流动状态的 30 个快照，则上述实验每周会生成 40 TB/周的数据，这对大多数研究实验室而言都难以管理。因此必须有所取舍，而将 MCS 拓展到三维意味着只能尝试进行有限的观测。三维湍流不仅在实际操作层面比二维情形更具挑战性，在理论层面也是如此。在二维流场中，涡量平方是一个无黏不变量（Onsager 1949），这使得逆级联局限于能量注入尺度与边界所允许的最大尺度之间（Kraichnan 1967）。这意味着，在二维湍流中实现合理的尺度分离十分困难，且计算成本高昂。因此，文献（Jiménez 2018、2020*c*）中的实验尺度分离度很低，涡旋尺度实际上也很少。相比之下，本研究的实验（即便在中等雷诺数下）具有显著的尺度分离，因此结果对扰动大小非常敏感。

我们工作的一个重要局限在于，可尝试的干预类型数量有限。蒙特卡洛科学问题就像大海捞针：可能的干预方式无穷无尽，而我们能够尝试的数量非常有限。例如，可以尝试将某个区域内的速度矢量置零，但也可以改为将涡量矢量置零。合理的扰动类别示例见（Jiménez 2020*c*），但未尝试的干预空间仍然是无限的。因此，我们的搜索可能遗漏了流场的许多潜在特征，其中一些或许比本文展示的特征更有趣。尽管如此，应当承认，“传统科学”的研究方法也面临同样的问题。在后一种方法中，测试能力有限的问题被个人偏见所取代。例如，选择研究强烈的涡旋区域，可能会使研究者看不到含能结构。尽管如此，无论通过哪种方法识别出的结构仍然具有重要意义，尽管

流场还可能存在许多其他结构描述。本研究旨在通过实验将流场的结构描述与其动力学联系起来，而不是依据先入为主的观念，并将二者与流场此前已知的特征联系起来。

试验次数的限制或许意味着需要寻找一种能够使某个范数最大化的“最优”扰动。如果只能尝试少数几种扰动，那么可以认为应当设法优化它们的增长。然而，我们出于两个原因并未进行这种搜索。首先，最优扰动是否是探测流动动力学的最佳手段尚不明确。在本研究中，引入扰动主要是为了考察流场的动力学，而非扰动自身的动力学。在此背景下，扰动是否最优无关紧要。最优扰动所揭示的是流场的一种特定结构，而这种结构未必比其他类型的扰动所揭示的结构更有趣。第二个原因涉及寻找最优扰动的成本。对于有限幅值扰动，寻找最优扰动的计算成本很高，因为这需要依赖迭代方法。此外，非线性意味着最优扰动取决于施加到流场上的幅值。因此，针对某一特定幅值寻找单个最优扰动的成本，相当于尝试多种次优扰动。由于扰动是用作探针的，与其如此，不如将计算资源用于考察不同的扰动（例如，不同幅值的扰动）。

各向同性湍流的动力学已得到充分研究，但对流场结构的描述仍然有限。大多数经典级联理论（Kolmogorov 1941，1962；Frisch 等，1978；Meneveau 与 Sreenivasan，1991）关注的是对速度结构函数的预测，而非流场模式的瞬时结构。这与自由剪切流（Brown 与 Roshko，1974）和边界层（Lumley 1967；Kline 等，1967；Wallace 等，1972）形成鲜明对比；在这些流动中，流场模式的瞬时结构从一开始就是研究课题。近年来，研究者开始探讨均匀各向同性湍流（HIT）的一些结构特征。已知涡量会集中形成细长管状结构，但也可能组织成涡片（Siggia 1981；She 等，1991；Vincent 与 Meneguzzi，1991；Jiménez 等，1993；Horiuti 与 Takagi，2005）。与管状涡量结构不同，应变率集中在类似“薄片”的结构中（Moisy 与 Jiménez，2004；Leung 等，2012），其形状和分形维数更接近表面而非管状结构。还可以根据速度梯度张量的不变量 Q 和 R提取结构，这些不变量同样指示涡旋结构（Chong 等，1990；Hunt 等，1988）。所有这些结构都是根据强梯度推断得出的，并被归为耗散区间。为识别惯性区间中的结构，其他研究则对动能场（Cardesa 等，2017）或涡量平方场与耗散场（Hosokawa 等，1997；Leung 等，2012；Bermejo-Moreno 等，2009）进行滤波。这些研究表明，较大尺度上也存在基于梯度的结构；其几何形态的某些方面不同于耗散区间中的结构，而另一些特征则相似。我们将探讨这些描述与通过 MCS 获得的描述之间的关联。

最后，尽管本文的主要目标是研究流场，我们也将研究用于研究流场的扰动的演化。无穷小扰动的性质已通过对李雅普诺夫指数的研究得到充分探索（Eckmann&Ruelle 1985；Yamada & Ohkitani 1988）。原则上，虽然这些性质描述的是扰动演化，但实际上它们却是遍历吸引子的性质（Oseledets 1968），因为它们是根据无限长时间的演化定义的。该理论也有针对较短时间范围的改进，称为有限时间李雅普诺夫指数（Aurell 等 1997），这种方法关注时间上的局部性，但仍假设扰动是无穷小的。有限扰动的演化也受到关注，主要涉及可预报性这一相关问题（Aurell 等 1996），这与

MCS 和数据同化（Di Leoni 等 2020年；Wang & Zaki 2022）。后者关注有限扰动需要满足哪些条件才能被数据同化程序消除，这与本文研究的方向恰好相反。许多关于可预报性的研究所关注的对象是有限尺度李雅普诺夫指数，即有限振幅扰动的演化。在 MSC 中，我们使用的扰动既是有限时间的，也是有限尺度的，此外还具有在流场中局域化这一特性，而这对于检测结构是必要的。刻画这些扰动的增长及其时间尺度，对于确定它们作为动力学探针的相关性十分重要。

本文其余部分分为七节。数值实验将在§2中介绍，§3 将详细说明如何在流场中引入扰动。第4节将探讨极端扰动本身的性质，而§5节则关注受扰区域的粗粒化性质。第§6节将介绍这些区域的结构性质，包括平均结构和瞬时结构。最后，§7 节将通过数值同化实验，证明所识别流场模式的相关性；第§8节作结。

2. 数值实验

我们研究不可压缩湍流流体随时间的演化，该流体由三维纳维–斯托克斯方程（NSE）描述：

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i p + \nu \partial_{jj} u_i + f_i, \tag{2.1}$$

$$\partial_i u_i = 0, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{f} \equiv f_i$ 为强迫项，ν 为运动黏度，p 为运动压力。全文中，重复出现的指标表示求和，$i = 1$、2、3 表示三个空间方向。方程（2.1、2.2）辅以空间周期为 $L = 2\pi$的三重周期边界条件，由此得到统计均匀且近似各向同性的湍流（均匀各向同性湍流，HIT）。强迫项在最大的波数球 $k < 2$中注入恒定功率，其中 $k = |\boldsymbol{k}|$ 为波矢 $\boldsymbol{k}$的幅值；关闭强迫项后，流场便会自然衰减。在强迫模拟中，统计稳态确保平均耗散等于恒定功率输入。

方程（2.1–2.2）采用完全相移去混叠伪谱方法进行时间积分（Rogallo 1981年），并使用三步龙格–库塔方法作为时间推进器（Spalart 1987）。该算法和GPU实现均已通过先前研究验证（Cardesa 等 2017；Vela-Martín & Jiménez 2021）。我们使用 256^3 个配置点，间距为 $k_{\max}\eta_0 = 1$，对应$Re_\lambda \approx 190$和 $L_{\mathcal{E}0}/\eta_0 \approx 177$，其中 η_0是初始流场的科尔莫哥洛夫尺度，Re_λ是基于泰勒微尺度的雷诺数，而 $L_{\mathcal{E}0}$是初始积分尺度。这三个参数按照Batchelor (1953)中的方法计算，

$$L_{\mathcal{E}} = \frac{\pi}{2(q')^2} \int_0^\infty E_{qq}(k,t)/k \, \mathrm{d}k, \tag{2.3}$$

and

$$(q')^2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty E_{qq}(k,t) \, \mathrm{d}k, \tag{2.4}$$

其中 E_{qq} 是能谱，q' 是均方根速度。泰勒微尺度 λ 为

$$\lambda^2 = 15\nu q'^2/\epsilon, \tag{2.5}$$

其中 ϵ 是耗散，且$Re_\lambda = q'\lambda/\nu$。

起始　衰减模拟的初始条件取自统计稳态

	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
Δ_i/L_{E0}	0.067	0.134	0.27	0.54	1.08
Δ_i/η_0	15	30	60	120	240
$k_i\eta_0$	0.419	0.209	0.105	0.052	0.026
标记		★	■	●	▲

表1：图中使用的扰动尺度和标记

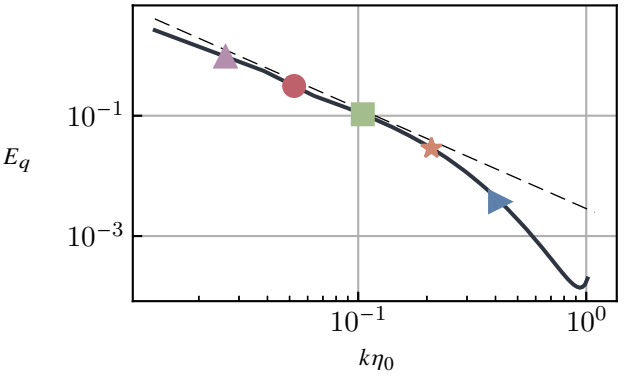


图 1：初始条件的平均能谱。符号见表 1。标记表示扰动的大致尺度。

状态下的模拟，这些模拟与衰减模拟具有相同的参数，但采用上述方式施加强迫项。它们之间相隔 30 个稳态模拟的周转时间，从而保证彼此统计独立。衰减模拟作为相互独立的实验，用于在不受强迫项影响的环境中检测结构。用于归一化流场的长度和时间尺度针对每个初始条件分别计算，因此彼此略有差异。本文结果最多采用 50 个初始条件，并对每个初始条件施加 $O(100–10000)$ 个扰动（视其大小而定），总计约 10^6 次模拟，每次持续两个周转时间。

3. 扰动特征

湍流稳态的初始条件 $\boldsymbol{u}_0 \equiv [u_{01}, u_{02}, u_{03}]$ 通过不施加强迫项运行（2.1、2.2），可衰减至初始能量的 60–70%。从现在起，下标 0 表示初始条件下的值。这些衰减模拟，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x},\ t)$，用作参考案例。通过在 $\boldsymbol{u}_0$ 上添加局部扰动，生成受扰动的初始条件，

$$u_{0i}^{\psi}(x_i;\xi_i,\Delta) = u_{0i}(x_i) + \psi_i(x_i;\xi_i,\Delta), \tag{3.1}$$

其中，扰动 $\boldsymbol{\psi}$ 由高斯核的乘积生成，

$$g(x_i;\Delta) = \exp\left(-\|x_i\|^2/\Delta^2\right), \tag{3.2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数，而速度场为

$$\psi_i^{\dagger}(x_i;\xi_i,\Delta) = -u_{0i}(x_i)g(x_i-\xi_i,\Delta). \tag{3.3}$$

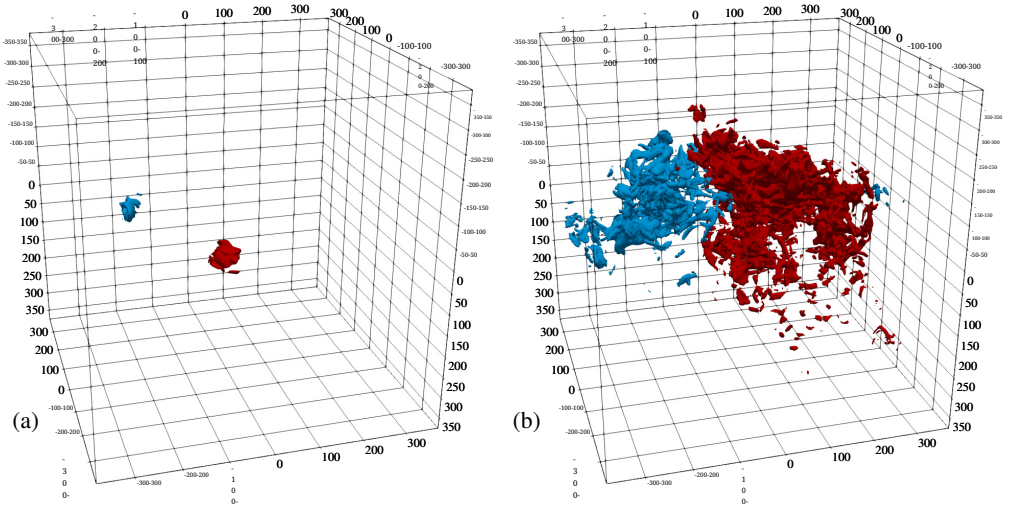


图 2：两个不同扰动的示例，一个处于增长的第95百分位数（红色），另一个处于增长的第5百分位数（蓝色）。（a） $tq_0'/L\varepsilon 0 = 0$。（b） $tq_0'/L\varepsilon 0 \approx 1$。2。

扰动 $\psi^\dagger$ 模拟了一个特征尺寸为 Δ、位于 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 的障碍物所产生的影响，该障碍物会阻止其周围及内部的速度。然而，不可压缩性要求 $\boldsymbol{u}_0^\psi$ 为无散场，因此 $\psi^\dagger$ 被投影为满足这一要求的最接近的扰动（按 L_2-范数衡量），

$$\psi_i = \psi_i^\dagger - \partial_i \Psi, \tag{3.4}$$

其中，标量场 Ψ 是泊松方程的解，

$$\partial_{jj}\Psi = \partial_i \psi_i^\dagger. \tag{3.5}$$

最终扰动 $\boldsymbol{\psi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}^\dagger$非常接近，尽管它并未完全阻止流场，而是起到轻微透流障碍物的作用。

图 1展示了初始条件的谱，以及标示实验中所用 $k_\Delta = 2\pi/\Delta$ 取值的标记，如表 1所示。图中所示的尺寸是以高斯函数$1/e$ 界限表示的半径。五个样本分布在整个谱范围内，旨在通过 Δ_0对耗散区间进行采样，通过 Δ_1-Δ_3对惯性区间进行采样，并通过 Δ_4对积分尺度进行采样。

在笛卡尔网格中一组 $\boldsymbol{\xi}$ 个位置上生成扰动初始条件，并采用 $\delta\boldsymbol{\xi} \approx 3\Delta$；我们发现这足以探测整个流场。扰动初始条件随时间演化，生成一组随时间变化的扰动解 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{per}}(\boldsymbol{x},\ t;\ \boldsymbol{\xi})$，由此我们可以定义扰动范数场，

$$\psi \equiv \|\boldsymbol{\psi}\|(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = \left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{per}}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi})\right\|. \tag{3.6}$$

扰动范数场记录了扰动对流动演化的影响，该影响取决于位置 $\boldsymbol{x}$、引入大小为 Δ 的扰动的位置 $\boldsymbol{\xi}$，以及观测时间 t。标量场 ψ 的谱定义为，

$$E_\psi(k, t; \boldsymbol{\xi}) = \int_{\Sigma_k} \hat{\psi}\hat{\psi}^*(\boldsymbol{k}, t; \boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\sigma \tag{3.7}$$

其中 Σ_k 为 波矢模长恒定的球面的表面，而帽号表示 es

三重傅里叶变换。扰动谱还可以对 k 进一步积分，得到扰动动能的平方 L_2-范数，

$$\psi_q'^2(t;\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{k_{\max}} E_\psi(k,t;\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}k \equiv \int_\Omega \|\boldsymbol{\psi}\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3.8}$$

其中 Ω 表示全域，而扰动涡量平方积分的平方 L_2 幅值，

$$\psi_\omega'^2(t;\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{k_{\max}} k^2 E_\psi(k,t;\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}k, \tag{3.9}$$

由于不可压缩性，它与扰动应变的幅值成正比。这两种幅值都衡量扰动在给定时间的整体影响：前者衡量对速度的影响，后者衡量对流场梯度的影响。

图 2 展示了一个 ψ 的示例，分别对应 $\boldsymbol{\xi}$ 的两个不同取值和两个不同时间。图2(a) 展示了初始扰动，2(b) 展示了经过1。2 $tq_0'/L_{\mathcal{E}0}$。需要注意两点。首先，尽管存在影响扰动的全局效应（例如压力），扰动仍然局限于局部。其次，根据它们在流场中的位置，扰动的增长可能大不相同。这两种扰动的半径均为 $\approx 30\eta$，中心相距 $\approx 200\eta$，且初始能量非常相近。经过约一个局部涡旋周转时间后，就“红色”扰动在 $\psi_q'^2$方面的增长幅度是“蓝色”扰动的九倍多。

图 3 展示了 ψ_q' 和 ψ_ω' 在表中所列 Δ 1取值下，平均扰动增长随时间的变化。它们以未受扰动场的动能和涡量平方的当前幅值进行归一化，从而确保即使基流衰减，也能恰当地表示扰动增长。对于均匀流，正如预期的那样，初始值与 Δ^3成正比，即扰动的体积。由于衰减流中的时间尺度会发生变化，我们将局部涡旋周转定义为 $L_\mathcal{E}/q'$，据此可定义无量纲时间：

$$\tau \equiv \int_0^\tau \frac{q'\,\mathrm{d}t}{L_\mathcal{E}}, \tag{3.10}$$

这体现了流场时间尺度的减慢。平均而言，无论扰动的大小如何，所有扰动都会随时间增长。对于混沌系统而言，这或许看似理所当然，但已知在高波数处，傅里叶空间中的扰动可能会发生同步等现象。例如，在 Yoshida 等人 (2005) 的研究中，两次模拟被强制采用相同的低波数，直至某一截止波数，而其余波数则不受约束。如果截止波数位于耗散区间内，那么两次模拟中的其余波数都会同步。相比之下，这里的扰动在空间上是局部的，在傅里叶空间中则具有非局部谱，这解释了它们为何即使在耗散区间内也不会消失。

与无穷小扰动不同，我们的有限振幅扰动呈次指数增长，因为增长率 $(\partial_t q/q)$ 随时间略有下降。较小的扰动增长更快，但其增长率从未高到足以超过较大的扰动。无论幅值大小，扰动的动能和涡量平方似乎都趋近于一个渐近值。需要记住的是，基流和受扰流场都在衰减；到图中所示时间窗口的末尾，它们的湍动能已降至初始值的 60–70%。这意味着趋近的渐近值也必然在衰减，因此难以估算。然而，按照图3所示的标度进行处理后，由于该标度补偿了模拟中动能的衰减和时间尺度的变化，扰动会近似呈指数增长，直到其幅值与流场的幅值处于同一量级，此时开始饱和。图3(c)进一步证实了这一点。该图显示，运行时间长得多的情形表现得如同符合指数模型，且具有

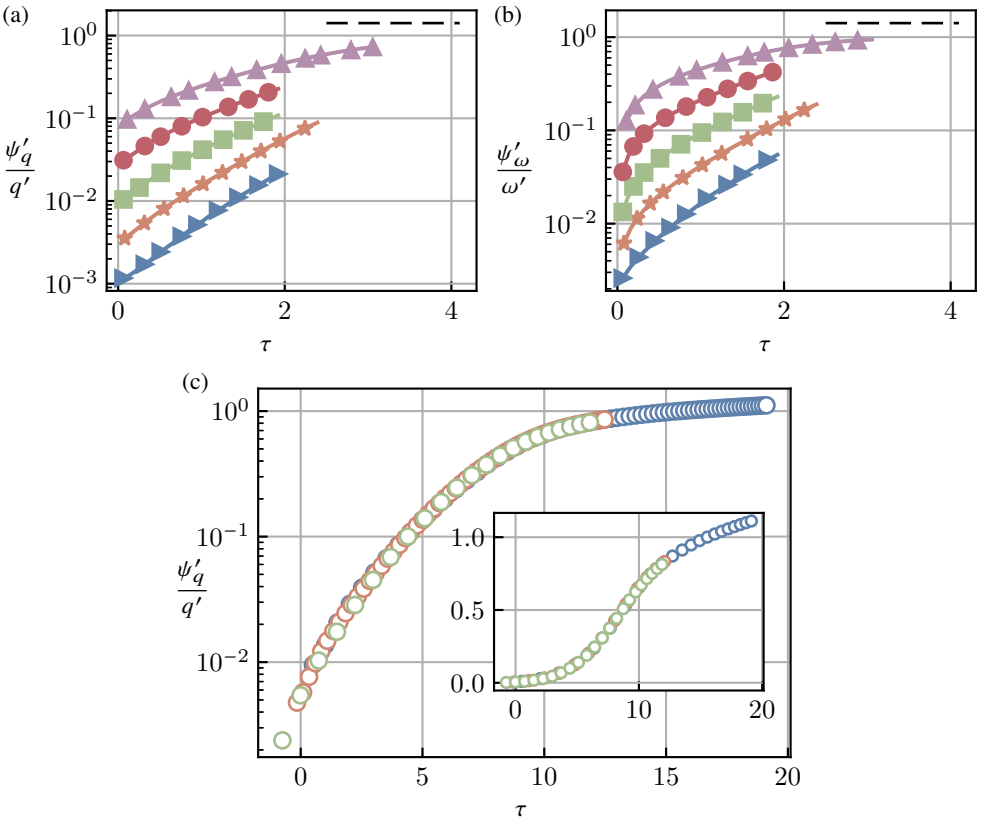


图3：平均扰动 L_2平方增长 ψ'_q/q'_0 （a）和 ψ'_ω/ω'_0 随时间变化的关系，涵盖所有扰动尺度。符号如表 1所示。虚线为在 $\psi'_q/q'_0 = \sqrt{2}$处达到饱和的指数饱和模型。（c）3种不同初始能量情况下的扰动增长（符号），其运行时间长得多。

饱和。在此背景下，一个合适的参照值是 $\psi'_q/q' = \sqrt{2}$;¯ 对于能量相近的非相关流，这一数值将是恒定的渐近值。引入一个任意的时间延迟以补偿初始能量的差异后，图3(c)中的时间序列便重合了。这表明，平均扰动幅度与其平均初始能量之间的关系可以通过引入一个虚拟原点来建模。考虑到这些延长模拟的演化结束时，扰动所含能量约为流场初始能量的五分之一，这种重合相当显著。

ψ'_q 与 ψ'_ω之间存在细微差异。后者呈现出两个不同的时间尺度：一个较快的时间尺度 $\tau < 0$。3，在此期间，受扰区域会生成新的梯度；另一个时间尺度则与 ψ'_q相当，缓慢趋近渐近线。初始增长属于不同时间尺度的最佳证据是，除 Δ_0 外，增长率基本不受扰动尺度影响，而 Δ_0 本身就是一个小尺度。一种合理的解释是，较快的初始增长与突发初始扰动引发的吸引子外动力学有关，也是流场重新生成异常缺失的小尺度的结果。我们今后将把演化的这一第一阶段（$\tau < 0$。3）称为“瞬态”。

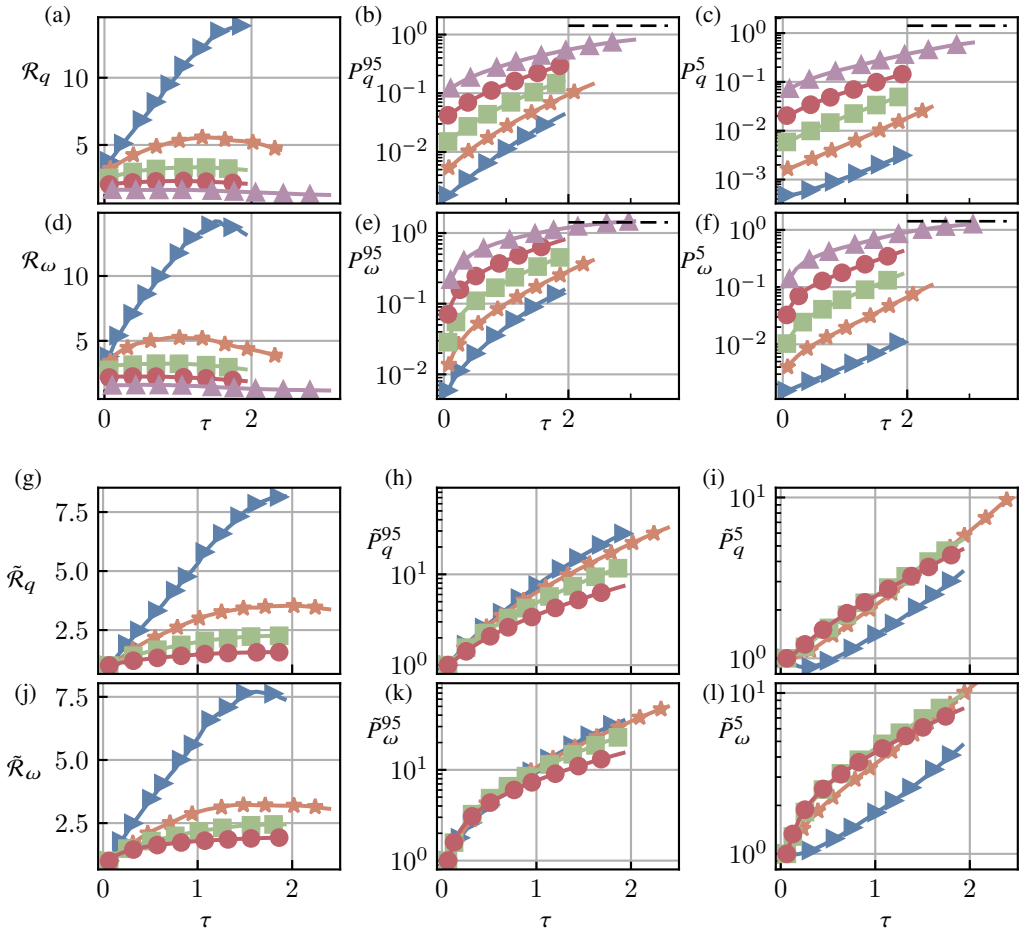


图4：对于降低动能的扰动，ψ'_q 在(a,b,c)、ψ'_ω 在(d,e,f)、$\tilde{\psi}'_q$ 在(g,h,i)以及 $\tilde{\psi}'_\omega$ 在(j,k,l)中第95个(P^{95})和第5个(P^5)百分位数的增长统计。(a,d,g,j) 显著性比率，定义为两个百分位数的商。(b,e,h,k) P^{95}。(c, f, i, l) P^5。

4. 从扰动到显著性

图3展示了扰动“典型”的增长情况，而图4则展示了极端扰动的演化。我们将每个时间步的实验按百分位数划分，采用记法 $P_a^\alpha(t)$表示变量 $\psi_a(t;\ \xi)$的第 α百分位数，并将每个 ξ 和 $\boldsymbol{u}_{\text{ref}}$ 视为一次单独实验。百分位数定义为$\psi_a(t)$的取值，低于该值的样本占比为 α 。对于 α较小的情况，我们将低于 $P_a^\alpha(t)$的扰动视为“不显著”扰动，将高于 $P_a^{100-\alpha}(t)$的扰动视为“显著”扰动。我们还将 α定义为“显著性比率”，其定义如下：

$$\mathcal{R}_a^\alpha = \frac{P_a^{(100-\alpha)}}{P_a^\alpha(t)}. \tag{4.1}$$

高/低百分位数和比率（4.1）分别用作每个变量的最大值和最小值，以及二者之比的替代指标，因为这些统计量极难收敛。在本文余下部分中，我们将分析范围限制在最强和最弱的 5% 扰动（$\alpha = 5$），并在提及 α 时省略上标

Rapids 文章不得超过此页长度

R。我们确认，只要 $3 < \alpha < 10$，结果在定性上都相似。较低的 α 值需要更多实验才能获得收敛的统计结果（对于 $\alpha = 5$，每种尺寸需要 $O(10^5)$），而较高的 α 值则会开始纳入不再能被视为“极端”的扰动。这些定义与蒙特卡洛科学背景下因果显著和不显著事件的定义一致。反过来，显著性比率衡量两组之间的差异，并表明区分它们有多困难。图4顶行展示了能量范数的这三项度量，第二行展示了涡量平方范数的对应度量。另一个略有不同的问题是，哪些扰动在同一时段内放大得最多或最少。图4最后两行展示了动能放大的显著性比率和百分位数，$\tilde{\psi}_q(t) = \psi_q(t)/\psi_q(0)$，以及梯度的相应数据，$\tilde{\psi}_\omega(t) = \psi_\omega(t)/\psi_\omega(0)$。

图 4(a) 和 4(b) 表明，较小的扰动比大的扰动具有更高的显著性比率，尤其是最小的扰动 Δ_0，其大小处于耗散区间。对于最大的情况 Δ_4，显著性比率始终低于 1.5，而且该比率在很大程度上可由初始条件的差异解释。这意味着该比率与动力学关系不大，几乎完全可以追溯到扰动从流场中移除的能量。这些 Δ_4 扰动的初始幅值约为初始场的十分之一；考虑到它们的增长相似，可以得出结论：它们的尺寸过大，无法识别单个结构。其余扰动则并非如此，因为从场中扣除的能量很少。例如，Δ_2 扰动最初平均扣除了流场 0.03% 的能量，而且在整个演化过程中，参考模拟与受扰动模拟之间的能量差异所占百分比保持不变。相比之下，$\tau \approx 2$ 处的扰动能量约占场能量的 3%，是能量差异的十倍。由此可以得出结论，Δ_4 扰动本质上包含了一部分几乎完全均匀的流场。请注意，这也可以作为积分尺度的另一种定义，并且 $\Delta_4/L_{\mathcal{E}} \approx 1$。由于本研究的目标是识别单个结构，因此我们不再针对这一尺寸开展实验。

图4还显示，最小的扰动 Δ_0 与较大的扰动表现不同。图4(a,d,g,j)中 Δ_0 的显著性比率较高，并非源于显著扰动，而是源于不显著扰动的演化。几乎在所有情况下，扰动的增长率都随时间单调下降，唯一的例外是 Δ_0中的 P^5：无论是扰动能量还是其梯度，增长率都随时间上升。另一个例外是 Δ_1 的动能，其增长率在图4(c, i)中几乎保持恒定。这两种较小扰动的这种行为在放大过程中尤为明显，因为所有扰动在 $\tau = 0$时都从单位值开始。它们尺度较小，因此某些 Δ_0 扰动可能同时受到包含它们的较大尺度以及耗散的支配（Yoshida 等（2005））。我们的结果表明，对于大于 Δ_1的速度扰动，这种行为不可能发生。比较图4(k)和4(l)可见，Δ_0在 $\tilde{P}^{95}_{\omega}$ 中与惯性扰动合并，但在 $\tilde{P}^{5}_{\omega}$中则偏离它们。若假设扰动最初呈线性演化，就可以将其初始能量分解为投影到不稳定流形上的部分和投影到稳定流形上的部分。要使扰动经历瞬态收缩，初期投影到稳定流形上的部分必须主导动力学。随着扰动尺度增大，能量注入不稳定流形的概率上升，而注入稳定流形的概率相应降低，直到约在 $\Delta > \Delta_1$时，再也找不到收缩的扰动。从流场结构的角度看，这是可能的，因为流场具有间歇性，因此 Δ_0 可能小于局部耗散区间（Frisch 与 Vergassola（1993））。反过来，显著的 Δ_0扰动大于局部耗散区间，因此必然包含一些不受耗散收缩影响的惯性动力学。

无论范数和扰动尺度如何，所有扰动的最大显著性比率都出现在区间 $\tau \in (0.5,\ 1.5)$ 内，峰值时间略有差异。基于梯度的范数达到峰值的时间略早于基于动能的范数，但远晚于初始瞬态；在初始瞬态中，扰动梯度的增长速度远快于其速度。

根据放大定义的显著性比率，$\tilde{\mathcal{R}}_q^5$ 和 $\tilde{\mathcal{R}}_\omega^5$ 在图4(g, j) 中的大部分统计特征，与图$\mathcal{R}_q$ 和$\mathcal{R}_\omega$ 在图4(a, d) 中基于绝对幅值的显著性比率相同。所有情况下，最大显著性比率出现的时间都略有延迟，但仍处于相同的量级。它们的最大显著性比率较为平缓，幅值经过一段时间后趋于平稳。基于放大计算的显著性比率平均值较低，这主要是因为初始扰动幅值的影响被消除了。从其定义可以很容易看出这一点，

$$\psi_q'(\tau) \approxeq \psi_q'(0)\tilde{\psi}_q'(\tau) = \psi_q'(0)\exp\left(\int_0^\tau \Lambda(t)\ \mathrm{d}t\right), \tag{4.2}$$

其中，$\Lambda(t) = \mathrm{d}[\log(\psi_q'(t))]/\mathrm{d}t$ 是平均有限尺寸有限时间李雅普诺夫指数。注意，$\Lambda(t)$ 是平均增长的局部增长率，一般而言，它不同于每个扰动的增长率。因此，(4.2) 是一种近似，其中 $\tilde{\psi}_q'$ 和 $\Lambda(t)$ 不依赖于 $\psi_q'(0)$。这表明，绝对范数与放大之间的差异必然源于系统中对初始扰动的记忆。如果 $\psi_q'(0)$ 和 $\psi_q'(\tau_{\max})$ 近似独立，那么幅值的显著性比率必然大于或等于放大的显著性比率。放大情况下显著性比率较小的结果是，显著区域与不显著区域更难区分，因此也更难识别单个结构。

最后，图4(k) 显示，瞬态期间最大涡量平方增长的结果很好地塌缩到一起。这与我们的假设一致：初始瞬态中的涡量平方增长取决于耗散尺度的再生，因此大致具有普适性。

迄今为止的分析依赖于对扰动的一种定义。为确认我们的结果，我们开展了类似的实验，采用针对紧致区域内涡量而非速度的扰动。该过程类似于方程（3.1–3.5），但将速度场替换为涡量场。这些扰动较难与改变局部旋转速率的物理机制联系起来，但有助于我们探查流场中与显著性相关的结构差异。由于这些结果强化了我们先前的结论，却没有带来任何新的有力结论，因此我们在附录A中讨论这些结果。

我们的目标是刻画受到扰动时表现出极端行为的区域。因此，能够区分显著区域与不显著区域，是后续分析的基础。在这一前提下，定义因果作用时最显而易见的时间延迟，是显著性比率达到最大值的时间，$\tau_{\max}$。此外，在差异很大的扰动尺度、范数和扰动类型下，时间延迟仍保持一致，这表明区间 $\tau \in (0.5,1.5)$ 在我们的实验中最为相关。在确定采用某个时间延迟之前，我们先考察这一选择对识别显著区域的关键程度。图5 展示了按如下方式定义的显著性的“持久性”：

$$\mathcal{P}(\tau;a) = \frac{\mathrm{prob.}\left[\left(\psi_a'(\tau) > P_a^{95}\right)\ \&\ \left(\psi_a'(\tau_{\max}) > P_a^{95}\right)\right]}{\mathrm{prob.}\left[\psi_a'(\tau_{\max}) > P_a^{95}\right]}, \tag{4.3}$$

即，认为在 $\tau = \tau_{\max}$ 时刻显著的扰动在其他

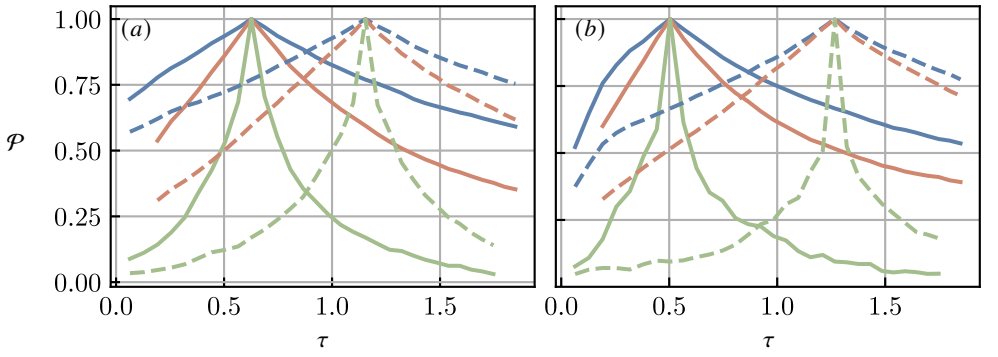


图5：大小为 Δ_2 的速度扰动的显著性持久性随时间的变化。蓝色线表示 (a) $P(\tau, q)$ 和 (b) $P(\tau, \omega)$。橙色线表示 (a) $P(\tau, \tilde{q})$ 和 (b) $P(\tau, \tilde{\omega})$。绿色曲线表示 (a) $P(\tau, \Lambda)$ 和 (b) $P(\tau, \Lambda_\omega)$。(a, b) 实线为$\tau_{\max} = \text{argmax}(R_\omega)$，虚线为 $\tau_{\max} = \text{argmax}(R_q)$

时刻也显著的概率。我们展示 Δ_2 的结果，但其他惯性尺度的结果在定性上相似。蓝色线表示 $P(\tau, q)$，揭示了绝对范数的持久性。以根据 R_q^5 ($\tau_{\max} \approx 1.15$) 得出的显著性最大时刻为参照，在 $\tau \in (0.5, 1.5)$ 区间内，最小持久性为 70%，这证明将 $\tau_{\max}$ 视为整个区间的代表是合理的。取 $\tau_{\max} \approx 0.6$（这是 R_ω 的最大值），在先前选择的 $\tau_{\max}$ 时刻，仍有 75% 的显著区域；在其他时刻也超过 50%。橙色所示的放大持久性在定性上表现相似，但处处较差。不过，在$\tau \in (0.5, 1.5)$ 区间内，其持久性最低仍为 50%。绝对持久性与相对持久性之间的差异，应该源于初始扰动范数的影响（如（4.2）中所假设），这种影响会持续很长时间。 $\Lambda(\tau)$ 的持久性以绿色曲线表示，结果表明它是一个非常局部的量，其持久性在 (0.5, 1.5) 区间内衰减至 10 % 以下。相比之下，初始扰动范数$\psi_q'(0)$ 的持久性起初会衰减，但始终不会低于 30%（未显示）。这些结果表明，（4.2）中引入的近似是合理的。 $\Lambda(\tau)$ 的局部性质很好地解释了 R_q^5 与 $\tilde{R}_q$ 的不同表现。后者会出现平台期，此时起初不同的扰动具有相同的增长率，如图4(g, j)所示。经过一段时间后，所有足够弱的扰动都会趋近于系统中最大李雅普诺夫指数所决定的增长率（Oseledets 1968）。平台期的开始（或一个非常弱的最大值）表明，每个扰动的增长率都变得近似相等，因此将其作为因果视界是合理的。在 R_q 中，添加的因子 $\psi_q'(0)$ 带来初始显著性，但随着后期积分项的增长，其重要性逐渐衰减。 $\psi_q'(0)$ 中衰减的显著性与 $\tilde{\psi}_q'(\tau)$ 中增长的显著性相乘，便产生了显著性比率的最大值。此时，初始扰动留下的记忆与 $\Lambda(\tau)$ 积分的增长处于同一量级。根据我们的分析，对于每个范数，使用显著性比率达到最大值的时刻作为因果视界是合理的。在本文余下部分，我们展示 $\tau = \tau_{\max}$ 时刻显著扰动和不显著扰动的结果。该时刻因尺度和范数而异，但在每种情况下，都可以将其视为区间 $\tau \in (0.5, 1.5)$ 的代表。

需要注意的是，(4.3) 是基于显著集合的交集，但也可以等价地针对不显著集合的交集来表述。以这种方式定义的持久性总是大于图5中所示的持久性，因此我们所做的分析

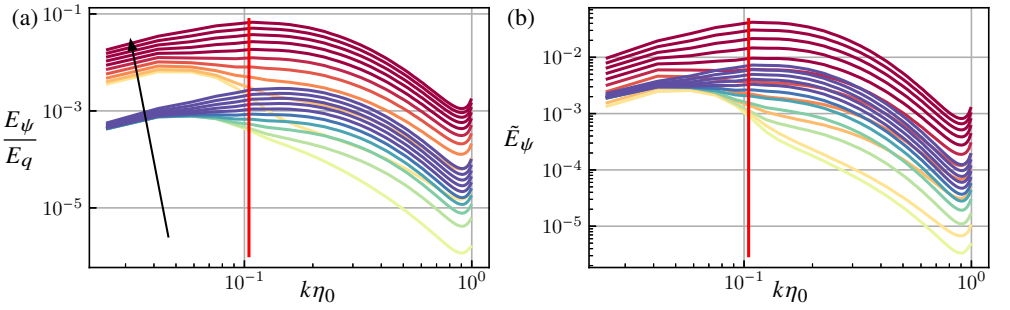


图6： Δ_2的显著（红色）和不显著（蓝色）速度扰动的平均谱，分别根据（a）ψ'_q 和（b）$\tilde{\psi}'_q$ 进行分类，颜色由浅至深表示时间变化。每种情况下，最深色的曲线对应于$\tau_{\max}$ 。红色竖线表示$k_2\eta_0$。

是两者中限制最严格的。关于不同范数之间关系的更多详情见附录C。

固定因果视界 $\tau_{\max}$ 后，我们可以定义显著扰动和不显著扰动集合。通过分别对两组扰动的统计量进行条件化，我们可以探究两组之间的差异。图6 显示了显著/不显著扰动的条件平均谱E_ψ 随时间的变化，以及两种扰动尺度下的情况： Δ_0 和 Δ_2。上排显示基于$\mathcal{R}_q$ 的集合的谱，下排则显示基于$\tilde{\mathrm{R}}_q$的集合的谱。值得注意的是，两种范数之间的差异主要体现为显著扰动谱的垂直平移，从而消除了 $\psi_q(0)$ 在（4.2）中的偏移。初始时，谱质量集中在扰动尺度附近；随着扰动开始增长，谱质量向较小尺度移动。这一现象可归因于初始瞬态，因此显著扰动和不显著扰动都适用。显著区域与不显著区域之间的差异主要体现在大于扰动尺度的尺度上：这些尺度在显著扰动中显著增长，在不显著扰动中则保持不活跃。在惯性尺度（例如 Δ_2）下，这一差异更加明显：两组中的小尺度增长程度相近，但不显著扰动不会发展出大尺度。对于最小的扰动 Δ_0，其演化不那么清晰，因为大多数波数都大于扰动尺度，而且两组之间的增长率差异分布在谱的大部分范围内（未显示）。解读显著情况下扰动较高的能量增长时应谨慎。由于 E_ψ是两个场之差的谱，较大的数值不一定代表较大的能量，也可能表示两者之间存在较大的空间能量差异。因此，显著扰动能够在空间上移位或变形大尺度结构，从而产生较大的能量差异，并反映在差值谱中。对受扰场进行目视检查也证实了这一点。

最后，我们探讨绝对显著和不显著的 q 扰动演化的几何特征。我们首先定义扰动能量分布的质心 $\boldsymbol{x}_\psi$ ，

$$\boldsymbol{x}_\psi(\tau;\boldsymbol{x}_0) = \frac{\int_\Pi \boldsymbol{x}\,\|\psi_q\|^2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\psi_q'^2(\tau;\boldsymbol{x}_0)}, \tag{4.4}$$

其中， Π 表示全域，我们构造了 ψ_q的相关张量 ，

$$\mathsf{D}_{ij}(\tau;\boldsymbol{x}_0) = \frac{\int_\Pi (x_i - x_{\psi i})(x_j - x_{\psi j})\,\|\psi_q\|^2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\psi_q'^2(\tau;\boldsymbol{x}_0)}, \tag{4.5}$$

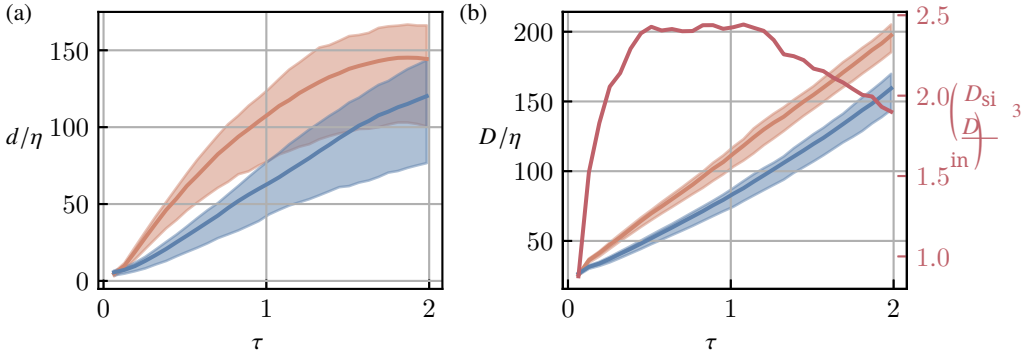


图7：（a） q-扰动质心与 Δ_2 之间平均距离随时间的变化。（b）同一情况下扰动大小的平均增长。红线和红色纵坐标表示显著扰动大小与不显著扰动大小之比的立方。（a、b）蓝色线表示显著扰动，橙色线表示不显著扰动。阴影轮廓包含了90%的概率质量。

其特征值为 D_i^2，特征尺度为$D = \sqrt[3]{D_0 D_1 D_2}$。该值可解释为等效球体的半径；这个球体具有恒定的能量密度，并包含相同的扰动能量。

图 7（a）显示了质心位移的平均演化 $d = \|\boldsymbol{x}_\psi - \boldsymbol{x}_0\|$对于 Δ_2。初始值约为 10η，即扰动半径的三分之一。两组扰动的位移起初都在增长，但显著扰动的增长速度明显更快。这是可以预料的，因为显著扰动具有较大的局部速度大小，因此更可能处于速度较快的区域。经过第一个周转时间后，两类扰动的总位移变得相近，因为显著扰动的速度有所下降。此时，质心移动了初始位移的三至四倍，初始位移的影响可以忽略不计。

幅值 D 显示于图7(b)中。对于显著扰动和不显著扰动，其初始值都非常接近 30η，而后者几乎正好是高斯函数的半径。这验证了将 D 用作其他时刻扰动典型半径度量的合理性。显著扰动在初始阶段比不显著扰动增长得更快，直到 $\tau \approx 1$，此时两者的增长率变得相等。红线表示平均显著扰动体积与不显著扰动体积之比（D_{si}/D_{in}）^{3}。在显著性达到最大的区间 $\tau \approx$ (0.5,1.5)内，该比值大致保持不变，并且大致等于扰动能量之比（见图4(a)）。这表明，惯性区间内显著扰动与不显著扰动之间的差异并不在于强度——二者的强度具有可比性——而在于尺度。显著扰动扩散得更快，直到其尺寸约为不显著扰动的2.5倍。在瞬态过程中，扰动尺度的增长率随时间几乎呈线性增长，并且远快于被置于同一位置的被动标量的增长速度（Richardson 1926）。更快的增长率意味着，扰动的产生项或压力项（见附录 B）必然主导其空间增长。关于被动标量、仅具有压力项的被动矢量与扰动之间差异的更多细节，可参见 Tsinober (2001)。

5. 从显著性到流标记

在上一节中，我们探讨了扰动场的性质，并提取了显著扰动和不显著扰动。本节将探讨流场中引入扰动的位置具有哪些特征，以及这些特征在两组位置之间有何不同。

首先，我们构建一个库，其中包含引入扰动的区域的粗粒化平均，例如，

$$\langle a\rangle(\boldsymbol{\xi};\Delta) = \int_{\Pi} g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi};\Delta)a(\boldsymbol{x},t=0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{5.1}$$

其中， a 表示任意标量、向量或张量场（例如涡量场）。对于标量变量，我们计算平均幅值 $\langle a\rangle$ 和平方 $\langle a^2\rangle$。对于向量场和张量场，我们将幅值定义为平均向量 $|\langle \boldsymbol{a}\rangle|$ 的 L_2范数；平均平方则表示平均平方幅值 $\langle|\boldsymbol{a}|^2\rangle$，对于张量而言，则为弗罗贝尼乌斯范数的平方。为简便起见，我们滥用记号，从现在起在提及平均值时省略幅值算子（例如，用 $\langle \boldsymbol{u}\rangle$代替 $\langle|\boldsymbol{u}|\rangle$）。类似地，$\langle \omega_i \mathrm{S}_{ij}\omega_j\rangle$表示$\langle\omega_i\rangle\langle \mathrm{S}_{ij}\rangle\langle\omega_j\rangle$，即平均场的乘积，等等。具体定义汇总于表2。库中的一些元素不言自明，但另一些则需要简要说明。张量 $\mathrm{A}_{ij} = \dot{}_{ij}\mathrm{S}_{jk} + \mathrm{S}_{ij}\dot{}_{jk}$可用于表征涡片的存在（Horiuti & Takagi，2005）。由于 A 是二阶张量，我们对其计算与 S 相同的粗粒化量。我们还跟踪速度梯度张量的不变量（Chong 等人，1990） Q 和 R，包括它们各自的平均值及其平方的平均值。它们分别通过作用于速度梯度张量的二阶不变量算子 $\mathrm{I}_2()$ 和三阶不变量算子 $\mathrm{I}_3()$ 定义（见表2）。涡量拉伸 $\omega_i \mathrm{S}_{ij}\omega_j$ 和应变率自放大 $\mathrm{S}_{ij}\mathrm{S}_{jk}\mathrm{S}_{ki}$是与速度梯度演化相关的重要量（Tsinober，2019）。另一个重要量是初始条件下扰动能量的源项 $\boldsymbol{u}_i \mathrm{S}_{ij}\boldsymbol{u}_j$（Tsinober 2001，另见附录 B）。类似地，$\tau_{ij}\mathrm{S}_{ij}$可用于表征跨越给定尺度的级联能量通量（Germano 等人，1991）。我们使用 $g(\boldsymbol{x};\Delta)$作为滤波器来计算τ_{ij}，其宽度与扰动相同。总计共有32个分类器。

为了评价库中的哪些元素是显著性的良好标记，我们使用线性支持向量机（SVM，Boser 等，1992），它是对一维阈值的推广。如果两个变量的概率质量没有重叠，阈值就能将它们区分开来。若能完全区分，支持向量机给出的得分 M 为 1.0；若无法区分，得分则为 0.5，此时最佳猜测就是随机猜测。图 8(a)对此进行了说明，其中展示了显著集合和不显著集合在 $(\log\langle \boldsymbol{u}^2\rangle)$ 下的条件概率密度函数（概率密度函数），黑线表示最优阈值。与图 8(a) 所示得分为 M ≈ 0.97 的良好分类器示例相比，图 8(b) 展示了一个较差的分类器示例，其得分为 M ≈ 0.605，其中 $(\log\langle\omega\rangle)$ 的值仅能稍微区分这些概率密度函数。因此，了解 $\langle\omega\rangle$ 只能略微提高从这两个集合中选出目标集合元素的几率，而了解 $\langle \boldsymbol{u}^2\rangle$ 则几乎可以确保元素被归入目标集合。正如图 8(b) 所示，得分低于 M ≈ 0.7 的分类器都不应被过于认真地看待。例如，若两个集合分别服从相同的正态分布，且均值相差一个标准差，则其得分约为 0.7；若均值相差两个、三个和四个标准差，得分则分别为 0.84、0.93 和 0.98。正如图 8(a, b) 中的示例所预示的，我们使用变量的自然对数作为分类器，因为我们发现，在大多数情况下，这样能使显著和不显著集合的概率密度函数形状相似，并接近正态分布。由于有些变量不是正定的，我们使用绝对值的对数；此外，我们还使用能保留符号信息的线性分类器。在这些情况下，我们只保留两个分类器中得分较高的一个。

图 8 其余部分用于展示使用一次一个变量的方法对不同扰动进行分类。图 8(c) 展示了对 q-扰动进行分类的得分，其对应的Δ_2。每个标记代表一个分类器的得分。横轴表示使用绝对 q-范数定义的显著性得分，$\mathcal{R}q$，而纵轴表示

i	符号	定义	含义	$(\mathrm{M}q,\ \tilde{\mathrm{M}}_q)$
0	$\langle \boldsymbol{u} \rangle$	$\left\lvert \int g u_i \right\rvert$	平均速度的大小	(0.90, 0.66)
1	$\langle \boldsymbol{u}^2 \rangle$	$\int g u_i u_i$	动能	(0.98, 0.50)
2	$\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$	$\left\lvert \int g \omega_i \right\rvert$	平均涡量的大小	(0.61, 0.59)
3	$\langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle$	$\int g \omega_i \omega_i$	涡量平方	(0.74, 0.67)
4	$\langle \mathrm{S} \rangle$	$\left\lvert \int g \mathrm{S}_{ij} \right\rvert$	平均应变幅值	(0.72, 0.76)
5	$\langle \mathrm{S}^2 \rangle$	$\int g \mathrm{S}^{ij} \mathrm{S}^{ij}$	归一化耗散	(0.75, 0.73)
6	$\langle s_+ \rangle$	$(\int g \mathrm{S}^{ij})_+$	平均应变的最大拉伸特征值	(0.73, 0.76)
7	$\langle s_m \rangle$	$(\int g \mathrm{S}^{ij})_m$	平均应变的中间特征值	(0.63, 0.62)
8	$\langle s_- \rangle$	$(\int g \mathrm{S}^{ij})_-$	平均应变的最压缩特征值	(0.72, 0.74)
9	$\langle s_+^2 \rangle$	$\int g (\mathrm{S}^{ij})_+^2$	应变最大拉伸特征值的平均平方幅值	(0.75, 0.73)
10	$\langle s_m^2 \rangle$	$\int_m^2 g(\text{显著性}ij)$	的应变特征值 平均应变的中间特征值	(0.66, 0.55)
11	$\langle s_-^2 \rangle$	$\int g (\mathrm{S}^{ij})_-^2$	平均应变的最压缩特征值	(0.75, 0.72)
12	$\langle \mathrm{A} \rangle$	$\left\lvert \int g \mathrm{A}_{ij} \right\rvert$	平均涡片张量（VST）的幅值 (0.75, 0.70)	
13	$\langle \mathrm{A}^2 \rangle$	$\int g \mathrm{A}^{ij} \mathrm{A}^{ij}$	VST 平方范数的幅值。	(0.75, 0.71)
14	$\langle a_+ \rangle$	$(\int g \mathrm{A}^{ij})_+$	平均 VST 的最大拉伸特征值	(0.74, 0.69)
15	$\langle a_m \rangle$	$(\int g \mathrm{A}^{ij})_m$	平均 VST 的中间特征值	(0.66, 0.55)
16	$\langle a_- \rangle$	$(\int g \mathrm{A}^{ij})_-$	平均 VST 的最小压缩特征值	(0.74, 0.69)
17	$\langle a_+^2 \rangle$	$\int g (\text{甲}^{ij})_+^2$	最大拉伸特征值的平均平方幅值	(0.75, 0.71)
18	$\langle a_m^2 \rangle$	$\int g (\mathrm{A}^{ij})_m^2$	VST 的特征值 平均 VST 的中间特征值	(0.64, 0.64)
19	$\langle a_-^2 \rangle$	$\int g (\text{甲}^{ij})_-^2$	平均 VST 的最压缩特征值	(0.75, 0.69)
20	$\langle Q \rangle$	$\mathrm{I}_2(\partial_j \int g u_i)$	平均速度梯度	(0.65, 0.6)
21	$\langle Q^2 \rangle$	$\int g \mathrm{I}_2 (\partial_j u_i)^2$	张量 第二不变量的平均平方幅值	(0.75, 0.69)
22	$\langle R \rangle$	$\mathrm{I}_3(\partial_j \int g u_i)$	速度梯度张量的 平均速度梯度的第三不变量	(0.67, 0.57)
23	$\langle R^2 \rangle$	$\int g \mathrm{I}_3 (\partial_j u_i)^2$	张量 速度梯度张量的第三不变量的平均平方幅值	(0.75, 0.69)
24	$\langle \boldsymbol{\omega}_i \mathrm{S}_{ij} \boldsymbol{\omega}_j \rangle$	$\int g \omega_i \int g \mathrm{S}_{ij} \int g \omega_j$	速度梯度张量 平均幅值的涡量拉伸	（0.78，0.74）
25	$\langle (\boldsymbol{\omega}_i \mathrm{S}^{ij} \boldsymbol{\omega}_j)^2 \rangle$	$\int g (\omega_i \mathrm{S}^{ij} \omega_j)^2$	涡量拉伸的平均平方幅值	（0.75，0.7）
26	$\langle \mathrm{S}^{ij} \mathrm{S}^{jk} \mathrm{S}_{ki} \rangle$	$\int g \mathrm{S}_{ij} \int g \mathrm{S}_{jk} \int g \mathrm{S}_{ki}$	平均幅值的应变自放大（0.78、0.75）	
27	$\langle (\mathrm{S}^{ij} \mathrm{S}^{jk} \mathrm{S}_{ki})^2 \rangle$	$\int g (\mathrm{S}^{ij} \mathrm{S}^{jk} \mathrm{S}_{ki})^2$	平均平方值　　应变自	(0.76, 0.71)
28	$\langle \boldsymbol{u}_i \mathrm{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j \rangle$	$\int g u_i \int g \mathrm{S}_{ij} \int g u_j$	放大的幅值 扰动产生的平均幅值 (0.83, 0.67)	
29	$\langle (\boldsymbol{u}_i \mathrm{S}^{ij} \boldsymbol{u}_j)^2 \rangle$	$\int g (u_i \mathrm{S}^{ij} u_j)^2$	平均平方　　扰动	(0.97, 0.53)
30	$\langle \tau_{ij} S_{ij} \rangle$	$\int g \tau_{ij} \mathrm{S}^{ij}$	产生 平均亚格子能量传递	(0.70, 0.60)
31	$\langle (\tau_{ij} S_{ij})^2 \rangle$	$\int g (\tau_{ij} \mathrm{S}^{ij})^2$	平均亚格子能量传递平方	(0.73, 0.66)

表2：分类器库。I_i 是计算张量的第 i个不变量的算子。$\mathrm{M}q$ 和 $\tilde{\mathrm{M}}q$ 分别是大小为 Δ_2的q扰动的幅值分类得分和放大分类得分。更多信息请参阅正文。

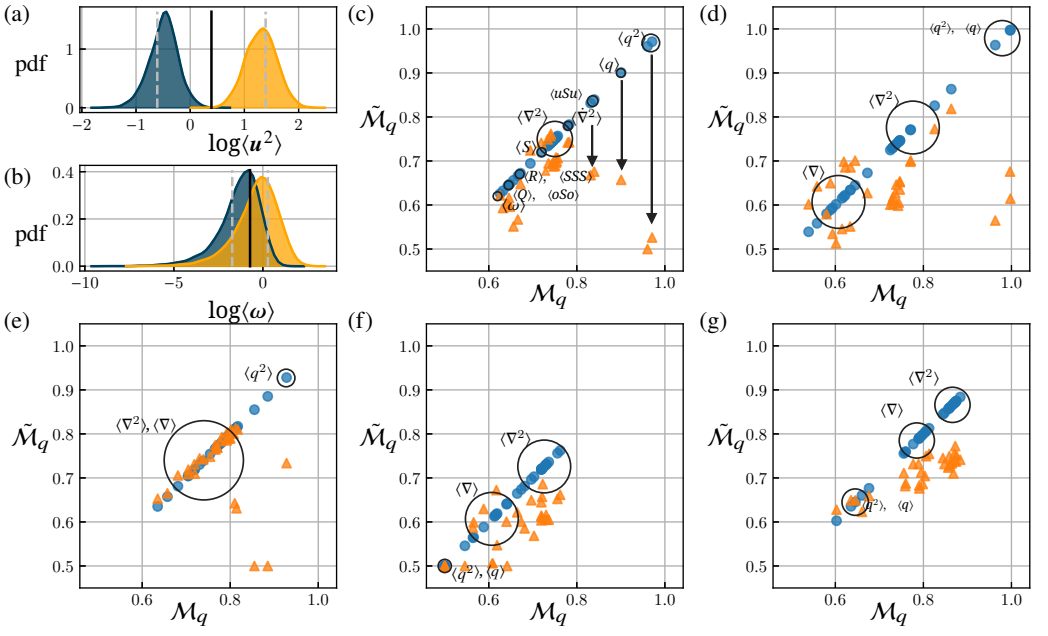


图8：显著/不显著区域分类。(a) 一个效果良好的分类器示例（尺寸为 Δ_3时，针对 q扰动的log⟨q^2⟩）以及范数Rq。(b) 同一情况下一个效果不佳的分类器示例（log⟨ω⟩）。(c-g) 不同扰动和显著性标准下的分类得分。横坐标为与Rq相关的得分。纵坐标的分类器分别为（蓝色）Rq和（橙色） $\tilde{\text{R}}q$。(c) 在 Δ_2下的 q扰动。(d) 在 Δ_3下 q扰动的分类。(e) 在 Δ_0下 q扰动的分类。(f) 在 Δ_2下 ω扰动的分类。(g) 在 Δ_0下 ω扰动的分类。

蓝色圆点对应绝对 q-范数，橙色三角形对应相对 q-范数。圆点本身不提供额外信息，但有助于直观比较这两种范数。图中有几个值得注意的方面，其中最显而易见的或许是得分往往会聚集成簇。在这些集群内部，分类器的分类得分差异微乎其微，因此可以认为它们彼此等效。

对于绝对 q-范数，⟨$\boldsymbol{u}^2$⟩是最佳分类器，得分接近1。扰动源项的幅值 ⟨$(\boldsymbol{u}_i \text{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j)^2$⟩同样表现出色，但这是因为它是一个与 ⟨$\boldsymbol{u}^2$⟩类似的二次型。我们使用分类器 ⟨$(\boldsymbol{u}_i \text{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j)^2$⟩/⟨$\boldsymbol{u}^2$⟩对其进行检验。该分类器衡量扰动与应变率之间的初始对齐，单位为应变。它不包含初始能量，只包含其放大，因此是一个表现很差的分类器（$\text{M}_q \approx 0.55$）。这两个量 ⟨$\boldsymbol{u}$⟩和⟨$\boldsymbol{u}_i \text{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j$⟩的平均值与 ⟨$\boldsymbol{u}^2$⟩的得分相近。它们分别反映了与区域尺度相当的尺度上的动能，以及同一尺度上扰动的放大。当得分为$\text{M}_q \approx 0.75$时，我们会看到一组分类器，它们在图8(c)中标记为“⟨∇^2⟩”，代表以下梯度平方及相关量：⟨ω^2⟩, ⟨S^2⟩, ⟨A^2⟩, ⟨Q^2⟩, ⟨R^2⟩, ⟨$a_\pm^2$⟩, ⟨$s_\pm^2$⟩。所有这些量都包含与强涡旋或强涡片及其相关应变率有关的信息。

两个分类器的得分均为 $\text{M}_q \approx 0$。78；⟨$(\text{S}_{ij}\text{S}_{jk}\text{S}_{ki})^2$⟩和 ⟨$(\omega_i \text{S}_{ij} \omega_j)^2$⟩，二者归为一组⟨$\dot{\nabla}^2$⟩。它们是速度梯度生成项的总幅值。由于它们作为分类器的表现略优于梯度幅值，因此可以认为，强烈的梯度生成与显著性有关。基于这一点，我们还测试了分类器

$\langle(S_{ij}S_{jk}S_{ki})^2\rangle/\langle S^2\rangle^3$ 和 $\langle(\omega_i S_{ij}\omega_j)^2\rangle/(\langle S^2\rangle\langle\omega^2\rangle^2)$，它们几乎不包含梯度幅值的信息，而侧重于梯度放大。可以将它们视为平均应变率自对齐和涡量-应变对齐。它们的分类得分较低，为 ≈ 0.6，这表明生成项作为分类器的相关性主要取决于梯度的强度，其次才取决于梯度放大。对于$\langle A^2\rangle$也可以作出类似的判断，它包含有关涡片的信息，但也包含梯度幅值的信息。分类器$\langle A^2\rangle/(\langle S^2\rangle\langle\omega^2\rangle)$只包含有关涡量-应变结构的信息，而不包含其幅值信息。它完全失效，得分为 $M_q \approx 0.5$。速度梯度张量的平方不变量也有同样的情况，因为分类器 $\langle Q^2\rangle/\langle S^2\rangle^2$ 和 $\langle R^2\rangle/\langle S^2\rangle^3$ 的得分为 $M_q \approx 0.55$。

分类器的排名接下来是平均应变率的幅值，$\langle S\rangle$，其得分为$\mathcal{M}_q \approx 0。72$。除 $\langle \boldsymbol{u}\rangle$外，这是唯一能够提供一定分类能力的平均幅值。剩下的一个，$\langle\omega\rangle$，是一个较差的分类器，得分为$\mathcal{M}_q \approx 0。605$。尽管没有标注，下一个分类器是 $\langle\tau_{ij}S_{ij}\rangle$，得分为$\mathcal{M}_q \approx 0。73$。如果从分类器中移除$\mathcal{S}_{ij}^2$的影响，得分就会降至随机猜测的水平，即$\mathcal{M}_q \approx 0。5$。这表明，级联过程与分类无关；分类反而与局部应变率相关。表2中的所有其他量都无法对显著性进行分类。

现在，我们可以将这些数字与动能放大的分类结果 $\tilde{q}$ 进行比较。梯度的分类得分与绝对范数相当，略好或略差；但动能标记的得分急剧下降，使其无法用作分类器。图中用黑色垂直箭头明确标出了这一点。

图 8(d、e)分别相当于图8(c)，但尺寸较大（Δ_3）和较小（Δ_0）。分类器的总体结构相同，但也存在一些差异。首先，依赖动能的分类器在扰动尺度较大时表现更好，而依赖梯度的分类器在扰动尺度较小时表现更好。这与湍流领域的常见认知一致：梯度与小尺度相关，动能则与较大尺度相关；不过，这种关联在此处是通过引入扰动体现出来的。其次，扰动越小，动能（和涡量平方）的放大就越容易被分类。无论扰动尺度大小如何，动能都不是放大效果的理想分类指标；而扰动较小时，梯度对放大效果的分类能力会有所提升。这与梯度作为绝对范数分类指标时整体表现的提升是不同的。对于 Δ_2，梯度对放大效果和绝对范数的得分几乎相同；而在 Δ_3 中，前者低于后者，在 Δ_0 中则相反。这种现象最可能是由初始扰动的影响造成的。对于较大的扰动，初始扰动的幅值更为重要，因此，估计其在给定时间后的范数与估计其初始范数之间具有很强的相关性。对于小扰动则不同，因为初始范数并没有那么重要；分类时扰动的大部分幅值来自放大作用。

最后，8（f）和8（g）分别显示了 ω扰动对应的分类得分，适用于 Δ_2 和 Δ_0。这些扰动与动能扰动的主要区别在于，动能标记从来都不是优秀的分类器。对于任何范数，它们都无法判定显著性，$\mathcal{M} \in$（0.5，0.6），而且扰动越小，其表现越差。相比之下，强梯度标记的得分略高于相同大小的 q扰动。动能放大的得分在ω扰动和 q扰动中非常相似，并且随着扰动减小而提高。

总体而言，(i) 与动能相关的分类器对于绝对范数的表现最佳；(ii) 与梯度平方或梯度平方的乘积相关的分类器对所有范数都较为合理；(iii) 复杂分类器相较于简单分类器几乎没有增加多少价值。当平均值在平方幅值之前进行运算时，它们起到滤波器的作用；但

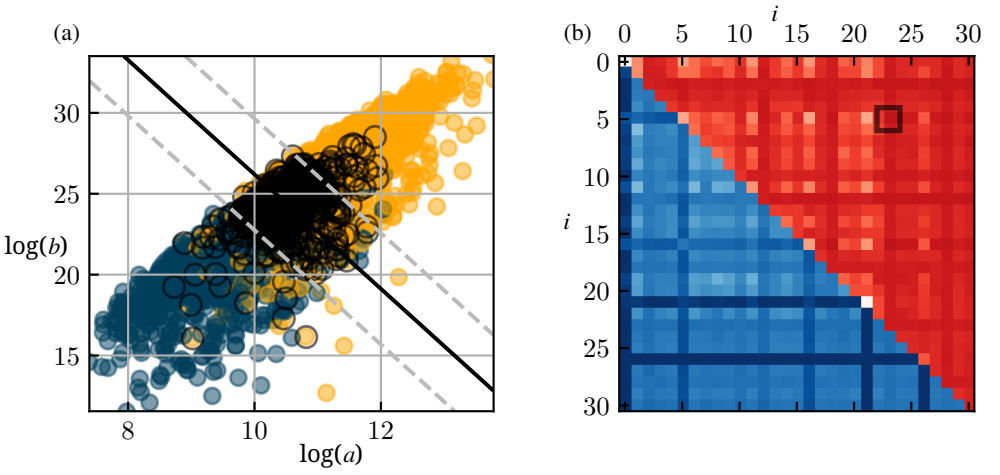


图9：同时使用两个分类器对显著/不显著区域进行分类。(a) 两个分类器共同作用以改善分类效果的示例。(b) 对于大小为 Δ_3的 q-扰动，从（浅色 - 0.5）到（深色 - 1.0）的分类器对的分类得分。（蓝色）Rq 和（红色） $\tilde{\mathrm{R}}q$。深色方括号对应于(a)。

当它们在平方之后进行运算时，则起到累加器的作用。梯度平方优于平均值作为分类器，这表明显著性与单元中包含的尺度有关，即与单元大小及更小的尺度有关，而不只是与单元尺度同量级的尺度有关。这同样适用于动能：平方幅值几乎是完美的分类器，而平均值则不是。尽管得分较低，但与扰动同量级的尺度并非无关紧要，因为诸如 $\langle \mathsf{S} \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ 这样的分类器仍能够提供一定的分类能力。

图 9 探讨了同时使用多个分类器能够在多大程度上改善分类效果。对于多个分类器，支持向量机将阈值推广为分隔两组的超平面。图9(a)展示了使用两个分类器时该过程的一个示例。在二维双对数变换中，一个有用的特性是，超平面对应于分类器幂的乘积，例如，两个分类器的情形为 $b^n a^m = c$ （a，b），这可能暗示相关的无量纲组。例如，一个值得注意的组合是（$\langle \boldsymbol{u} \rangle$，$\langle \mathsf{S} \rangle$），它对于 q-扰动在 Δ_2处的 Rq 分类效果良好。双对数空间中的所得超平面近似表明了无量纲组$\langle \boldsymbol{u} \rangle^2 \langle \mathsf{S} \rangle$，其单位与扰动的源项$\langle \boldsymbol{u}_i \mathsf{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j \rangle$相同，并且是一个出色的分类器。图9(b)展示了库中每一对预测变量的得分图，分别针对绝对范数和动能的放大。当一个非对角点颜色较深（得分较高）时，两个预测变量中的一个单独使用时基本上就能取得相同的得分。结果是，深色线从对角线垂直和水平地“辐射”出来，这表明同时使用多个预测变量所带来的边际收益非常有限。发现的大多数无量纲组都是库中已有的更优分类器的较差版本。需要指出的是，我们通过这一过程“发现”了$\langle \boldsymbol{u}_i \mathsf{S}_{ij} \boldsymbol{u}_j \rangle$。我们意识到它是初始条件下的产生项，并基于这一提示将其事后添加到库中。对于同时使用三个分类器，也得出了类似结论：分类效果的提升可以忽略不计（未显示）。

最后，图 10 展示了图 8(c) 中所示的“预测”分类得分与“后验推断”得分之间的差异。后者评估在已知显著性的情况下，区分分类器强值与弱值的难易程度。因此，它们衡量了在已知未来显著性的情况下，能够多大程度上估计流场过去的状态。

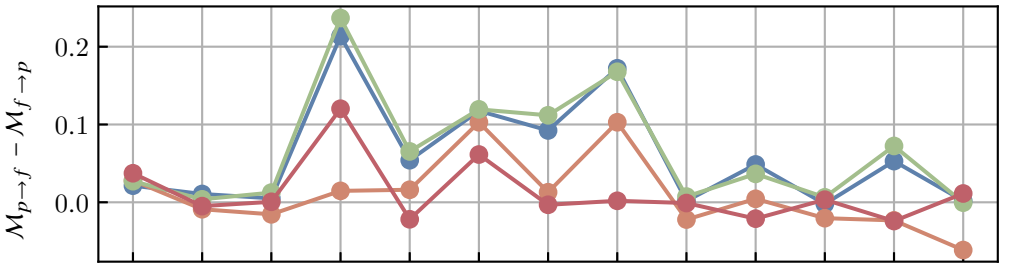


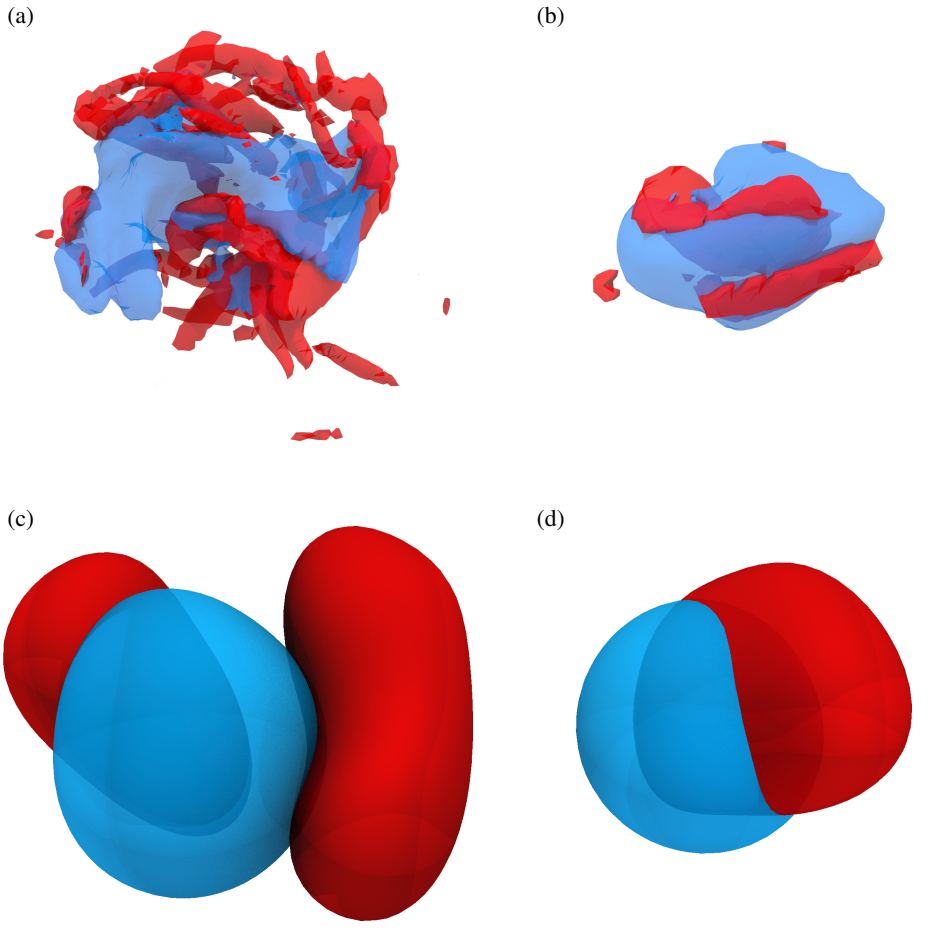
图10：对于大小为 Δ_2 的 q-扰动，不同分类器的预测得分与事后预测得分之差。蓝色表示 R_q^5，橙色表示 $\tilde{\mathrm{R}}_q^5$，绿色表示 $\mathrm{R}\omega$，红色表示 $\tilde{\mathrm{R}}\omega$。每个范数均取显著性最大的时间点。仅显示差异大于 $|\Delta \mathrm{M}| > 0。03$ 的分类器。

严格来说，因果关系并不要求进行后验推断，但了解哪些原因是必要的——也就是可以通过后验推断得出的原因——哪些不是，仍然很有用。分类器的总体表现是：基于幅值平方的分类器可以进行后验推断，而基于平均值的分类器则不行。大多数后验推断效果没有变差的平均值分类器，其得分接近 0.5（例如 $\langle Q \rangle$ 基于梯度的范数）。唯一的例外是 $\langle \mathrm{S} \rangle$，它既是一个合理的预测器，也是一个合理的后验推断器。这些结果进一步证明，相关结构是扰动和平均应变率中包含的小尺度，而其他分类器则不那么重要。

6. 从流动标记到结构

上述分析表明，梯度局部强度是预测扰动放大及其绝对幅值最可靠的指标。然而，预测并不完美，其他性质很可能也在表征这些区域。本节将从流场中提取显著区域和不显著区域，并研究其结构。~我们研究 Δ_2 的显著集合和不显著集合，使用 $\mathrm{R}q$ 表示 q-扰动，该扰动具有惯性区间的代表性。我们的研究结果表明，其他扰动尺度提供的信息较少，这些扰动的绝对范数也并不特别显著。相比之下，相对范数更为重要，因为绝对范数在很大程度上可以由引入流场的扰动幅值解释，这一点在较大的情形（例如 Δ_4）中尤为明显。

图 11 展示了一个显著（绝对意义和相对意义上均显著）的 Δ_2区域，以及一个不显著区域的示例。通过将流场乘以一个更宽的窗口函数 $g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi};\ 3\Delta_2)$提取该结构，从而涵盖受扰区域及其周边。我们展示了涡量平方（红色）和湍动能（蓝色）的等值面。通过从速度场中减去该区域的平均速度，使后者具有伽利略不变性。在本节余下部分，我们将这一量称为“动能”。我们分别对显著集合和不显著集合进行渗流分析（Moisy 与 Jiménez，2004年），以确定各个量的适当阈值。如果对两个集合都使用同一个固定阈值，那么不显著集合中的大多数成员都会完全低于该阈值。两个结构都包含一个几乎居中的动能



˜图11：对于 Δ_2，显著区域（a、c）和不显著区域（b、d）的示例，其中 R_q 和 R_q 。红色等值线表示涡量平方，蓝色等值线表示动能。两种等值线的水平值均通过渗流分析确定。

对象，周围环绕着涡量平方结构。本节余下部分将通过计算两组扰动的若干统计量来研究它们。

或许最简单的统计量是两个条件平均值：一个代表显著结构，另一个代表不显著结构。要获得各向同性流动的条件平均值，需要为每个区域选择一致的参考轴。

例如，将平均速度矢量对齐后，我们对显著结构得到的条件平均类似于速度射流，但几乎没有保留速度梯度的信息。平均而言，这一平均场能够表征显著区域中 80% 的能量，却只能表征其 0.02% 的涡量平方。它所提供的信息微不足道，因为显著区域中存在强动能这一事实早已为人所知。将旋转准则改为对齐最强涡量（平均涡量并非显著性的良好标记）、应变率特征坐标系，或梯度分布的协方差后，涡量的平均投影仍从未超过 10%。结论是

正如图 11(a) 所示，梯度的局部结构足够复杂，因此条件平均永远无法代表各个独立元素。

或者，也可以获得一个代表滤波速度梯度的局部平均值，因为滤波速度梯度是更简单的对象。图11（c、d）展示了 Δ_2从滤波速度场中提取的显著区域和不显著区域示例。我们对速度场使用滤波器g（$\boldsymbol{x}$； Δ_2），从而避免在流场中引入另一个长度尺度。滤波后的场要简单得多，通常包含一个大范围的强动能区域、一个至三个强涡量平方连通区域，以及一至两个强应变率区域。对于滤波情形，我们发现能够产生最佳结果的过程类似于Elsinga & Marusic（2010）所采用的方法，该方法依赖于将流场定向至应变率的局部特征向量坐标系。在我们的情形中，应变率是一个局部平均值。尽管应变率特征坐标系确定了坐标的角度，但方向并未确定，可以通过反射对其进行调整。我们用于计算条件流场的算法如下：

（CF1）以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心，获取显著/不显著区域的滤波流场。下文中的“场”指速度、涡量和应变率场。（CF2）将各场乘以 $g(\boldsymbol{x}; 3\Delta)$，从而隔离该区域的邻域。（CF3）计算所隔离邻域的平均应变率，并对各场进行旋转。此时，各场已与应变率特征坐标系对齐。（CF4）对旋转后的涡量平方场进行分割，以识别邻域中最强的涡量平方结构。计算该结构的平均涡量矢量。（CF5）根据涡量矢量的哪个分量具有最大幅值，将条件平均分为三类。请注意，每个分量的幅值都可用于衡量其与应变率各特征向量的对齐程度。（CF6）利用三种自由反射，确保：（i）涡量矢量的最强分量为正；（ii）涡旋的质心位于垂直于其最强涡量分量的正半空间内。

该过程不同于Elsinga& Marusic(2010) 在（CF5）中的做法，因为这些作者没有考虑涡量与应变之间不同对齐方式对应的不同条件场。我们与他们的条件场之间的其他差异，要么源于 CF6，即采用了不同的定向准则；要么源于显著或不显著条件。需要指出的是，该流场属于 O(3) 对称群，因此只需进行一次反射即可得到相同的结果。不过，这要求在旋转流场之前先计算 CF4和 CF5 ，因为必须预先知道轴的方向。相比之下，流场与笛卡尔网格对齐后，反射的计算成本很低；将反射安排在最后一步，算法效率更高。

表 3 汇总了与条件结构相关的最重要的平均信息。两组之间第一个显著差异是各对齐方式对应的元素数量不同。显著区域中的强涡量优先与拉伸最大的特征值对齐（66%），很少与压缩最大的特征值对齐（3.4%）。在不显著条件场中也观察到这些偏好，但程度明显较弱（压缩方向为 12.2%，拉伸方向为 53.6%）。需要注意的是，这些对齐关系是根据大小为 $3\Delta_2$ 的区域的平均应变，以及该区域内大小为 Δ_2 的最强涡量平方对象的平均涡量矢量确定的。涡量在较大（粗粒化）尺度上优先与应变的拉伸特征值对齐，这一点此前已有研究证实（Leung 等 2012年；Lozano-Durán 等 2016）。本研究进一步揭示，这种偏好在强且显著的区域中更为突出，而弱且不显著的区域则表现出较弱的优先对齐倾向。表 3 还展示了各项量化指标

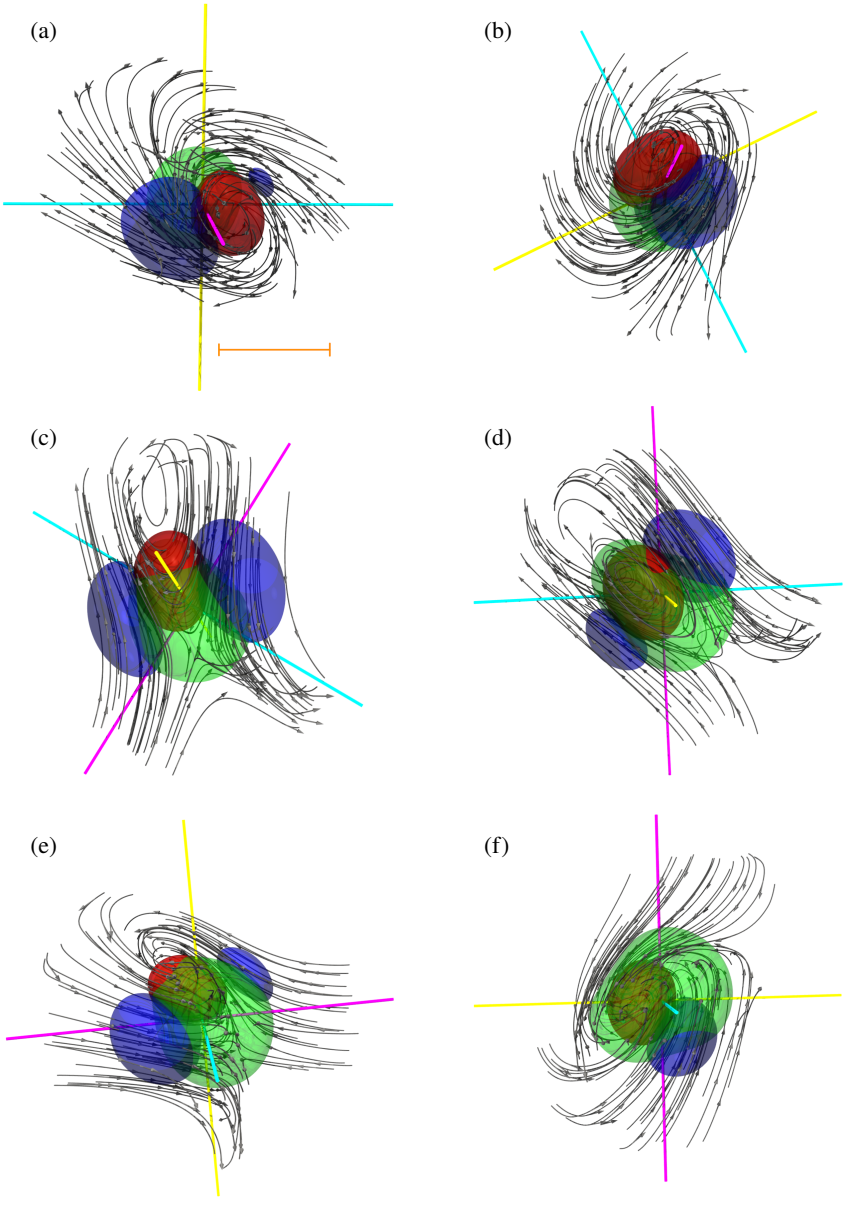


图12：根据 CF 算法所述，条件化到显著（a、c、e）和不显著（b、d、f）区域存在时的流场。使用 Δ_2 的 q 扰动的相对 $\tilde{q}$ 范数计算。（a–f）红色等值面表示涡量平方，绿色等值面表示应变强度，蓝色等值面表示局部动能大小。阈值与各条件结构的总动能/涡量平方成比例，但在所有情况下都相等。带箭头的灰线是在随结构移动的参考系中的流线。彩色坐标轴表示平均应变率的三个主方向：洋红色表示压缩程度最大，黄色表示中间方向，青色表示拉伸程度最大。（a、b）最强涡量与压缩程度最大的特征向量对齐。（c、d）与（a、b）相同，但对应中间特征向量。（e、f）与（a、b）相同，但对应拉伸程度最大的特征向量。（a）中的橙色比例尺对应于 60η。

Δ	Kind	总计	压缩			中间			拉伸		
			%	q^i	ω^i	%	q^i	ω^i	%	q^i	ω^i
Δ_2	显著	3135	3.4	0.47	0.05	31	4.57	0.43	66	9.12	0.75
	不显著		12.2	0.33	0.11	30.7	0.83	0.28	53.6	1.30	0.37
	随机		7.7	0.39	0.08	31.7	1.59	0.34	60.6	2.96	0.53
Δ_4	显著	1966	10.99	0.58	0.10	44.66	2.75	0.48	44.35	2.73	0.46
	不显著		15.16	0.27	0.08	37.95	0.81	0.24	46.90	0.93	0.29
	随机		13.78	0.42	0.10	42.37	1.48	0.36	43.85	1.49	0.35

表3：关于 Δ_2 动能放大的条件结构的信息。“Total”表示每个类别中发现的事件数。“%”表示属于三个类别中每一类的结构占结构总数的百分比。 q^i 和 ω^i 是条件平均的总能量和涡量平方的度量（更多详情请参见正文）。

q^i 和 ω^i，定义为，

$$\left(q^i\right)^2 = \frac{\int_\Sigma q_c^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_\Sigma \left(q_f'\right)^2 g^2(\boldsymbol{x}; 3\Delta_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}, \tag{6.1}$$

其中，$(q_f')^2$ 是滤波速度场的平均动能，而 $q_c^2(\boldsymbol{x})$ 是条件场的动能。它们表示条件场相对于假设的均匀平均强度场的强度。量化结果进一步印证了这一观点：与不显著结构相比，显著结构具有更强的梯度和更高的动能，即使它们是按放大程度分类的。数据还表明，与拉伸特征向量对齐的最常见显著结构，是三者中最强的。另一方面，压缩程度最高的显著结构涡量平方相对较低，但仍属于显著类别，这可能是因为它的动能较高。从流场中提取的随机集合，其数值介于显著集合和不显著集合之间，这进一步说明这些集合的主要特征是其强度。最后，我们使用 Δ_0重复了完整流程，该尺度位于耗散区间。在这里，黏性使得小得多的扰动区域相当平滑，并包含一到三个涡旋，因此无需滤波器。这些区域与尺度为 Δ_2的滤波结构有些相似，不过涡量结构更长。表3 列出了 Δ_0的平均值，显示出与滤波 Δ_2相似的定性特征。最显著的差异是，对于 Δ_2，显著结构所含动能的比例更高。这并不奇怪，因为大尺度比小尺度具有更多动能，而且我们已经表明，动能作为显著性指标的相关性会随着扰动尺度增大而减弱。

从图中可以获得更多见解12，图中展示了六个条件流场。对于每种对齐方式，结构都成对出现，且几乎完全相同。它们呈现出一个强涡旋与背景应变相互作用的情形，涡旋两侧则夹着一两个高动能区域。应变与涡量并不重合；在拉伸模式 (c)、(e) 中，强应变与一个驻点相关联。与 Elsinga & Marusic (2010) 对未滤波应变的中间特征向量进行对齐后得到的无条件未滤波平均场极为相似，条件流场中与中间特征向量对齐的那一项也与之惊人地相似。主导模式 (e) 显示，涡旋并未完全平行于拉伸程度最大的特征向量，而是朝中间特征向量倾斜。与 (c) 不同，后者

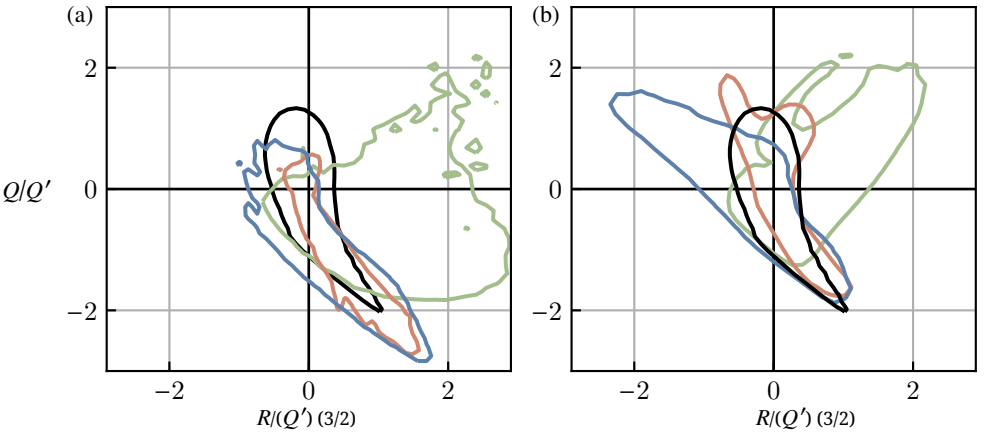


图13：图 12 中条件流场不变量的联合概率密度函数。等值线包含 80% 的概率质量。绿色曲线对应图 12(a, b)，橙色线对应图 12(c,d)，蓝色线对应图 12(e,f)。(a) 显著结构。(b) 不显著结构。(a, b) 黑色等值线表示滤波速度的无条件联合概率密度函数。

几乎是二维的，且能在图中得到忠实呈现；(e) 中的模式则明显是三维的，我们所展示的旋转是尽可能同时呈现驻点和涡旋的最佳尝试。最后，模式 (a) 显示一个涡旋受到外部应变场压缩，这是此前报道过的一种瞬态状态（Verzicco 等 1995），而在强梯度下，这种情况不太可能发生。

除了表 3 所暗示的更强动能外，模式 (a,c,e) 和 (b,d,f) 显示出不同的拓扑结构，这些结构将在图 13 中进一步探讨。图中展示了图 (Q, R) 中条件场的速度梯度张量不变量联合概率密度函数。需要注意的是，概率密度函数是针对条件场本身计算的，而不是针对构成这些场的元素计算的。因此，数据量有限，结果必然存在噪声。不变量有助于量化流场的局部拓扑结构以及梯度强度。图 13 展示了不变量的联合概率密度函数，每个函数都用其条件流场的均方根 Q'_s 进行了归一化。这些联合概率密度函数可与黑色等值线进行比较，后者表示滤波速度场的无条件联合概率密度函数。显著结构与不显著结构的一个主要区别是，不显著结构的涡量更强（$Q > 0$），而显著结构的应变更强（$Q < 0$）。这一点在中间型和拉伸型显著结构中尤为明显，其大部分概率质量落在右下象限（Vieillefosse, 1984）。与之相反，不显著结构倾向于上半平面，该区域代表涡量主导区域。最后，该图有助于阐明涡量与压缩特征值对齐时这些结构的行为。由于显著结构由应变主导，压缩型显著结构处于无条件概率极低的区域，而不显著结构则处于概率较高的上半平面。总体而言，强烈的应变主导区域比弱涡量主导区域对扰动更敏感。

6.1. 显著区域和不显著区域结构的统计

§4 中的分类器表明，显著区域内的结构对于显著性同样重要，甚至比大尺度结构更为重要。我们不再对这些结构取平均值，从而丢失重要信息，而是现在提供对它们的统计描述

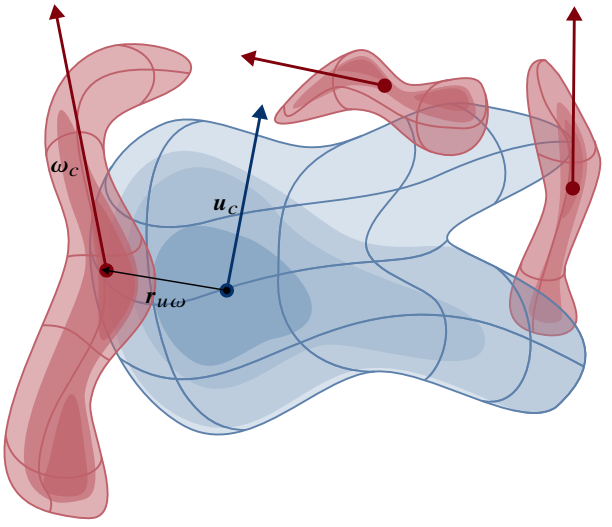


图14：大小为 Δ_2的分割区域示意图。红色体积表示涡量平方结构，蓝色表示动能。正文中提供了详细说明。

。我们通过对涡量平方场和动能场应用阈值，并对连通的强涡量平方区域和动能区域进行分割，来获取这些结构。与之前一样，我们根据渗流分析，分别为显著区域集和不显著区域集独立选择阈值。

图 14 展示了一个大小为 Δ_2 的区域示意图，其中通常包含少量动能对象和数个涡量平方对象。在示意图中，每个分割对象的质心使用动能或涡量平方作为质量分布计算得到，并以点表示。此外，还计算了每个区域的平均速度矢量 $\boldsymbol{u}_c$ 和平均涡量矢量 $\boldsymbol{\omega}_c$，并在图中以箭头表示。最后，矢量 $\boldsymbol{r}_{u\omega}$连接动能和涡量平方中最大对象的质心。根据这些定义，我们可以研究若干度量，用于区分显著区域与不显著区域，并且不直接依赖任何标记的强度。

图 15 展示了显著区域和不显著区域的若干几何统计量。对象数量的概率密度函数见 15（a）。与图11中的示例一致，显著区域和不显著区域中的涡量平方对象都远多于动能对象。它们的概率分布与泊松过程相符，但显著区域中的涡量平方对象除外；这些对象比泊松分布更为集中。泊松过程意味着，其他对象的存在性与已有对象相互独立。因此，显著区域中的涡量平方对象会“感知”彼此，而其余对象则不会。不显著区域基本上只包含一个动能对象，但即使在显著区域中，最大的动能对象平均也包含该区域90%的动能。对于不显著区域中的涡量平方结构，情况类似，其中最大的结构平均包含87%的涡量平方。而显著区域则并非如此，其次级涡量平方结构的体积与最大结构相当。其次级结构的平均体积占比为20%，其中第二大结构占总量的42%。

图 15(b, c) 展示了区域内不同对象之间的距离。不显著区域内的对象位于 $\boldsymbol{x}_0$ 附近，距离仅为几个 Kolmogorov单位。相比之下，显著区域内的对象彼此相距更远，

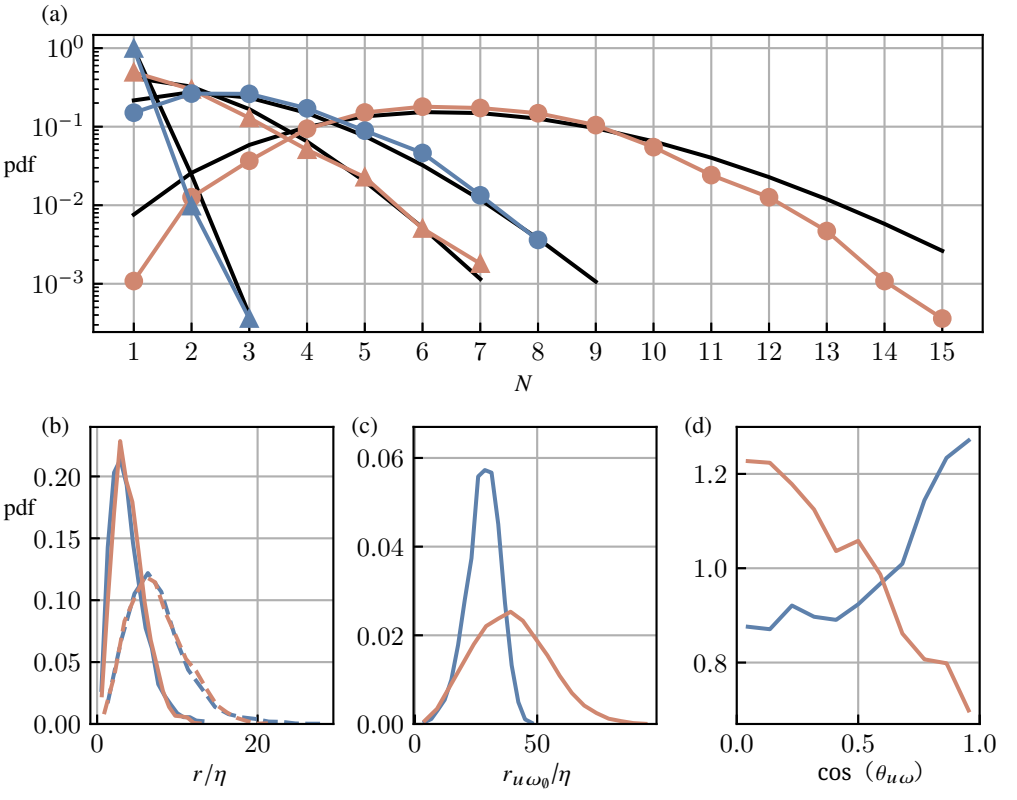


图15：对于大小为 Δ_2 的 q 扰动，显著区域（橙色线）和不显著区域（蓝色线）的相对 q 范数的几何统计。(a) 动能结构（三角形）和涡量平方结构（圆形）数量的概率密度函数。黑线表示泊松分布。(b) 距离 r_{ou}（实线）以及最强涡量平方对象的距离 $r_{u\omega_0}$（虚线）的概率密度函数。显著对象的距离除以四。(c) (b) 中未包含的涡量平方对象的距离 $\boldsymbol{r}_{u\omega_\emptyset}$ 的概率密度函数。(d) $\boldsymbol{u}_c$ 与最大 $\boldsymbol{\omega}_c$ 之间夹角的概率密度函数。

其中涡量平方对象之间的距离相当于扰动半径。图15(b) 中的橙色线表示显著区域内的距离，数值放大了四倍；这突出表明，除比例因子外，这些距离与不显著区域内的距离相似。然而，如图 15(c) 所示，显著区域内存在额外的涡量平方对象，打破了这种相似性。这些对象不符合相同的比例因子；考虑比例因子后，它们在不显著区域内的位置要远得多。这表明它们的性质有所不同，且可能与不显著区域的局部动力学无关。另一方面，显著区域内发现的所有涡量平方对象彼此相似，无论是距离还是体积。图15(d) 展示了 $\boldsymbol{\omega}_c$ 最强涡量结构的 $\boldsymbol{u}_c$之间夹角余弦的概率密度函数。这个角度不应与涡量和速度矢量之间、与非线性耗减相关的逐点夹角（Kraichnan 与 Panda（1988））混淆，因为这里的矢量并非位于同一点。相反，这一测量有助于阐释对象内速度的性质。根据毕奥-萨伐尔定律，涡量会诱导出与其正交的速度。这与显著区域的情况一致，其概率密度函数倾向于两矢量夹角余弦为零。相比之下，不显著区域则表现出速度与涡量趋于平行的倾向，这表明大部分速度

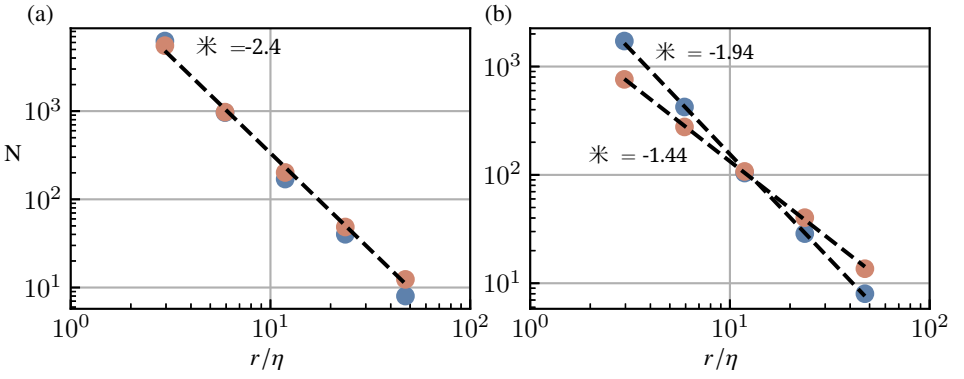


图 16：不显著（蓝色）区域和显著（橙色）区域的平均盒计数。虚线表示通过最小二乘拟合得到的分形维数。（a）动能区域。（b）涡量平方区域。

由区域外部的流场产生，而非由局部涡量产生。在每个区域内，涡量平方对象与动能对象的交集也提供了类似的认识：在显著区域中，它们仅共享 11% 的体积，而在不显著区域中则共享 47% 的体积。

图 11（a、b）表明，显著区域本质上比不显著区域更加“复杂”。我们通过计算动能和涡量平方分割的分形维数或盒计数维数来量化这种复杂性，如图 16（Moisy & Jiménez 2004年）所示。两组区域中的动能对象的分形维数差异很小，数值接近 $D \approx 2$。4。该数值介于表面和体积之间，可以被视为一种“厚实”而复杂的薄饼状结构，如图11（a、b）所示。这些图还直观展示了涡量平方对象所得分形维数数值所对应的结构类型。显著区域内的涡量平方对象的分形维数为 $D \approx 1$。4，介于线状结构和表面之间，并与涡旋团簇相关（Moisy & Jiménez 2004年；del Álamo 等 2006年）。相比之下，不显著区域包含的涡量平方对象分形维数为 $D \approx 1$。9，更接近涡片（例如见图11（b））。

7. 从结构到动力学相关性

我们已经识别、分类并分析了显著区域和不显著区域。在本节最后，我们将展示一个示例，说明为什么了解这些区域的性质能够为我们提供有关湍流的重要信息。为此，我们进行如下实验。考虑一个具有恒定能量输入强迫项的均匀各向同性湍流模拟，其定义见§2。该模拟作为参考，被标记为“A”。再考虑另外两个模拟“B”和“C”，它们除每个时间步都从 A 同化某个物理子域这一条件外，不受其他强迫项作用。这类实验类似于 Wang &Zaki (2022) 的同化实验，或 Di Leoni等人 (2020年) 在物理空间中的渐进约束。

图 17(a) 展示了所进行的三组模拟的示意图。以橙色和蓝色突出显示的子区域分别同化到模拟“C”和“B”中。首先，我们计算Q，用于滤波速度场，并采用 $g(\boldsymbol{x},\ \Delta_2)$ 作为滤波器。我们在图 13 中看到，显著性与扰动尺度耗散占主导相关，而不显著性则相反。这两种状态都可以根据 Q的符号来识别。因此，我们为第二不变量选取两个固定阈值，使得平均而言，

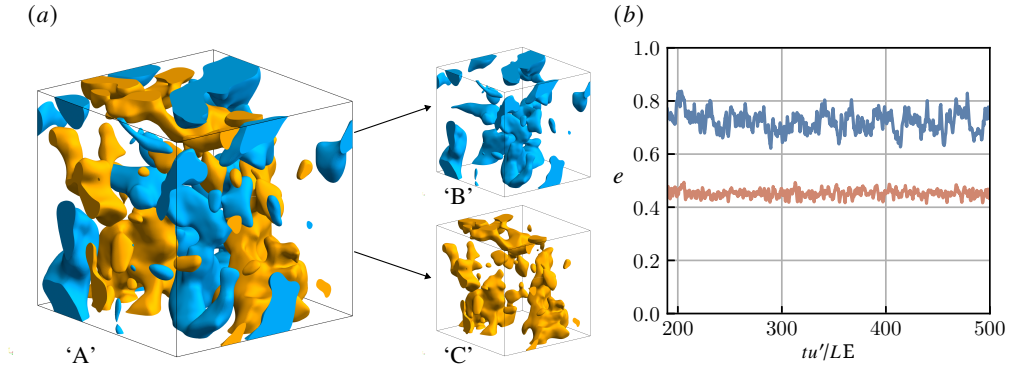


图17：（a）同化方案示意图。参考模拟位于左侧，其中负值最小的10%子体积以橙色表示，而其反向部分以蓝色表示。（b）同化模拟的相对误差。“B”以蓝色表示，“C”以橙色表示。

盒子体积中低于和高于这两个阈值的部分各占固定比例。图 17(a) 以蓝色和橙色标出了某一时刻对应的子体积。前者包含 Q 中最正的 10%，后者则包含最负的 10%。通过将子体积内三个速度分量的值复制到从属模拟中，并进行连续性校正，即可实现同化。该实验的主要结果见图 17(b)，其中展示了相对同化误差，

$$e_{\mathrm{B}}^2(t) = \frac{\int_\Omega (u_{\mathrm{B}}(t) - u_{\mathrm{A}}(t))^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_\Omega u_{\mathrm{A}}^2(t) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}, \tag{7.1}$$

“C”也同样如此。同化模拟在最初的$tu'/L_{\mathcal{E}} \approx 5$内经历瞬态过程，但此后保持稳定，同化误差以与“A”的耗散振荡周期相近的周期振荡。尽管两种模拟从“A”接收的流场体积总比例相同，但模拟“C”的误差几乎比“B”低60%。两种模拟从“A”接收的总能量比例大致相同，并且该比例约等于体积比例。我们在图7 中看到，扰动增长与扰动的扩散有关，而不是与局部幅值增长有关。因此，有理由认为，相较于强应变区域，相干涡需要更长时间才能扩散扰动；当同化后者时，同化误差也就更小。

8. 讨论与结论

在本研究中，我们将Jiménez (2018年) 的蒙特卡罗系综扩展到了 $Re_\lambda \approx 190$ 下的三维衰减各向同性湍流。鉴于充分发展湍流的多尺度特性，我们测试了不同扰动尺寸以及不同类型扰动的影响。我们追踪扰动随时间的演化，并使用分类算法将引入扰动处的流场特性与扰动的增长联系起来。

分析的第一部分探讨了能在某一区域内抵消速度或涡量的扰动性质。我们发现，扰动通常会随时间增长，唯一的例外是尺度处于耗散区间的微弱小扰动。我们观察到流场中扰动演化存在两个时间尺度。第一个较快的时间尺度与受扰区域内小尺度的增长有关，且与扰动尺度无关。第二个较慢的时间尺度对应于受扰区域本身的增长，它对扰动尺度的依赖较弱

于扰动尺度。我们的研究结果表明，扰动增长率开始不再依赖初始条件所需的时间约为一个大尺度周转时间。此外，我们发现，扰动是通过增大尺度而非增强强度来增长的，因此较小的扰动增长得更快，但始终不会超过较大的扰动。平均而言，扰动的直径随时间几乎呈线性增长。这种增长方式远快于被动标量的增长，凸显了扰动在流场中的主动性质对其空间扩展和强度的重要性。增长最多或最少的 5% 扰动分别被归类为显著扰动或不显著扰动。我们的研究结果表明，显著扰动比不显著扰动增长得更快。它们的谱在大尺度上不同于不显著扰动的谱：显著扰动的谱在大尺度上增长，而不显著扰动的谱则近似保持不变。这是因为显著扰动会使大尺度结构偏离其预期演化，或使其变形；而不显著扰动主要影响小于自身尺度的尺度。

在研究的第二部分，我们考察了流场中引入扰动的区域。我们研究了流场的哪些属性可以粗粒化到与扰动相同的尺度，同时仍能作为预测未来显著性的合理预测变量。我们发现，绝对范数（即一段时间后哪个扰动最强）在很大程度上取决于初始扰动。起初改变大量动能的扰动，经过一段时间后在总动能误差方面最显著；涡量平方也有类似的结论。我们发现，放大（即增长最多的扰动）取决于局部梯度的幅值。其中，基于小尺度梯度的标记优于基于扰动尺度梯度的标记。最简单的解释是，区域内的内容比“惯性”梯度对显著性更重要，但惯性应变率幅值除外。因此，要分离出惯性尺度的显著性，可能需要采用小波等策略，以限制扰动在尺度空间中的支撑范围。

除了考察可观测量的幅值，我们还研究了显著区域和不显著区域中的流场结构，既考察扰动尺度上的结构，也考察其中包含的更小尺度上的结构。我们发现，流场结构对显著性的依赖较弱，只有少数重要差异。与随机区域相比，显著区域中的涡量更倾向于与应变的最大拉伸特征向量对齐，扰动尺度上的应变大于涡量，并呈现出类似涡旋团簇的复杂结构。相反，不显著区域中的涡量更倾向于与压缩特征向量对齐，扰动尺度上的涡量大于应变，且结构较为简单，令人联想到涡片。强或弱涡量平方与涡旋团簇或涡片之间的关联已在Jiménez 等人 (1993)中有所观察。Meena 和 Taira (2021)采用一种基于图论的完全不同方法发现，应变占主导的区域会影响流场的其余部分，这与我们的观察结果一致。区域分形维数的差异尤其值得关注，因为它不依赖于任何强度，纯粹是几何性质。除了显著性之外，分形维数从流场中获取的唯一“全局”信息就是尺度；原则上，显著区域和不显著区域的尺度相同。然而，两组扰动的局部耗散不同。一种合理的模型认为，局部耗散会导致更大的局部雷诺数（Kolmogorov1962），进而形成更复杂的结构。

最后，我们通过一项简短的同化实验表明，显著区域和不显著区域与流场动力学有关。显著区域的惯性尺度应变能够放大扰动并将其扩散到整个流场，而惯性尺度涡量则无法如此高效地做到这一点。因此，当一次模拟从另一次模拟中接收到有关

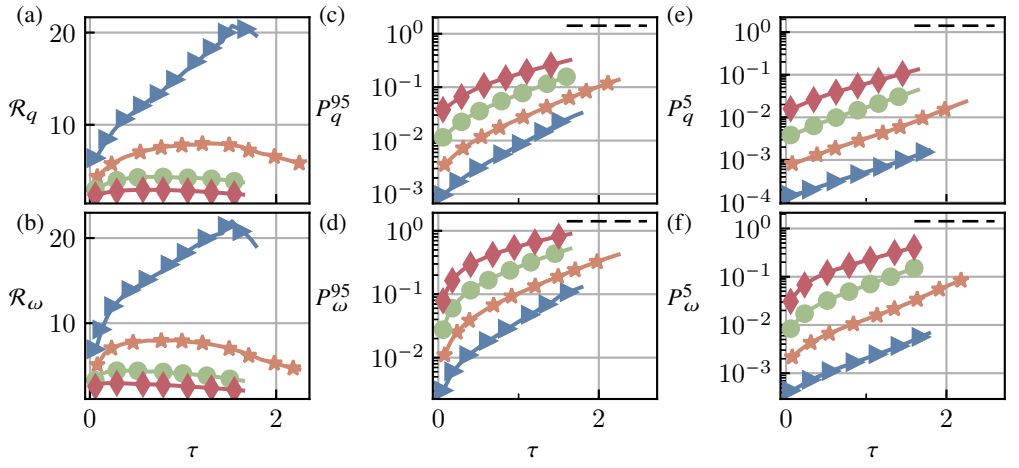


图18：涡量平方扰动中 ψ'_q (a、c、e)和 ψ'_ω (b、d、f)的第95百分位数（P^{95}）与第5百分位数（P^5）增长的统计。(a、b) 显著性比率，定义为两个百分位数之间的比值。(c、d) P^{95}。(e、f) P^5。

显著区域的信息时，其同步程度高于接收到来自不显著区域的相同流场体积时的同步程度。因此，显著区域对于同化和控制等任务更为重要，算法也能从中受益。例如，可以根据流场的显著性调整卡尔曼滤波器的协方差矩阵。这些任务无需直接计算成本高昂的显著性。相反，可以根据本文收集的显著区域的性质估算显著性，并取得与本研究一样的良好结果。

资助。本研究获得欧洲研究理事会Coturb和CausT项目资助，项目编号为ERC-2014.AdG-669505和ERC-2021.AdG-101018287。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

附录A. 涡量扰动的统计

图18 和19 与图4 类似，但针对涡量扰动绘制。由速度扰动得出的多数结论同样适用于涡量扰动，尽管存在一些差异。例如，绝对幅值的显著性在初始阶段主要受与涡量相关的更快动力学所主导，但在瞬态之后，其增长率与速度扰动的增长率相当，并且两类扰动都在相近的时间延迟处达到峰值。

比较图4(a) 和 18(a) 可知，涡量扰动的显著性约为两倍，但与此同时，图4(g) 和 19(a) 显示，“相对”显著性的数值相近。因此，“绝对”显著性较高，可归因于扰动初始条件的差异。湍流领域的常识认为，这种差异是由于涡量场比速度场具有高得多的间歇性。不太明显的是 Δ_0的行为，其˜相对速度显著性$\mathcal{R}_q$ 对于速度扰动而言大于涡量扰动。差异在于 P^5 速度扰动的行为不同：其增长明显滞后，甚至会在一段时间内收缩。另一方面，涡量扰动始终增长，如图19(e) 所示。一种可能的解释是，尽管

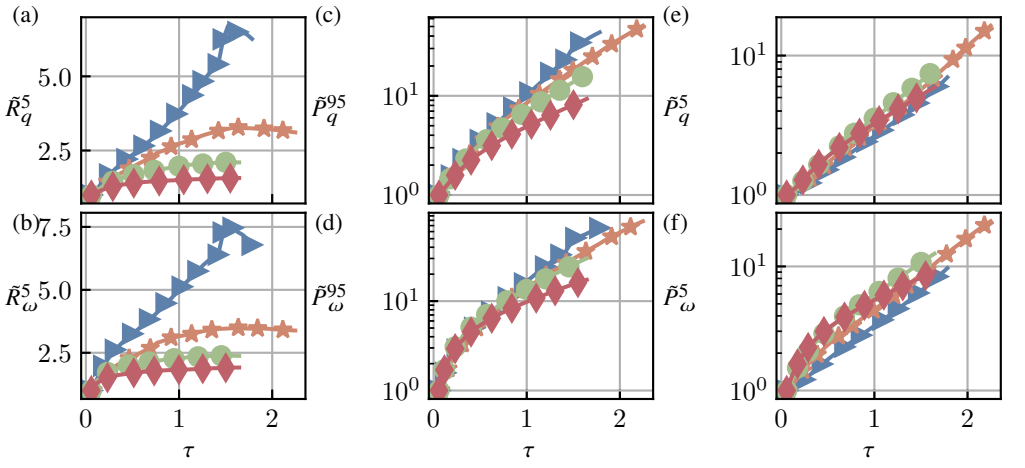


图19：涡量平方扰动中，$\tilde{\psi}'_q$ (a、c、e)和 $\tilde{\psi}'_\omega$ (b、d、f)的第95百分位数（P^{95}）与第5百分位数（P^5）增长的统计。(a、b) 显著性比率，定义为两个百分位数之比。(c、d) P^{95}。(e、f) P^5。

$\Delta_0 \approx 15\eta$ 对于速度结构而言，这是一个很小的尺寸；而对于涡量结构而言，其尺寸则与一个结构相当。如此大小的速度扰动至多会损害较大流动结构的一部分，而涡量扰动则更可能影响完整的涡量流动模式。图4 中关于增长率的大多数其他评论也适用于图19，尽管引入的扰动截然不同。

附录 B。扰动增长方程

将扰动流场的定义（3.1）代入纳维–斯托克斯方程（2.1、2.2）可得：

$$\partial_t \left(u_i + \psi_i\right) + \left(u_j + \psi_j\right) \partial_j \left(u_i + \psi_i\right) = -\partial_i \tilde{p} + \nu \partial_{jj} \left(u_i + \psi_i\right) \tag{B 1}$$

$$\partial_i \left(u_i + \psi_i\right) = 0. \tag{B 2}$$

从（B 1、B2）中减去未扰动方程，可得到扰动的演化方程：

$$D_t \psi_i = -\partial_i \check{p} - \psi_j \partial_j u_i - \partial_j \left(\psi_i \psi_j\right) + \nu \partial_{jj} \psi_i \tag{B 3}$$

$$\partial_i \psi_i = 0; \tag{B 4}$$

其中 $D_t \equiv \partial_t + u_j \partial_j$ 为物质导数，$\check{p}$ 为伪压力，它在（B 3）中强制满足（B 4）。将（B3）乘以 ψ，

$$\frac{1}{2} D_t \psi_i^2 = -\partial_j \left[\psi_j \check{p} + \frac{1}{2} \psi_j \psi_i^2 - 2\nu \psi_i S_{ij}\right] - 2\nu S_{ij}^\psi S_{ij}^\psi - \psi_i S_{ij} \psi_j, \tag{B 5}$$

其中 S_{ij}^ψ 是扰动场的应变率。对整个体积积分（B 5）可得，

$$\frac{1}{2} D_t \psi_q' = -2\nu \int_\Sigma S_{ij}^\psi S_{ij}^\psi - \int_\Sigma \psi_i S_{ij} \psi_j. \tag{B 6}$$

唯一导致误差产生的项是 $\psi_i S_{ij} \psi_j$，它的平均值必须为负，扰动才能增长。对于使动能为零的扰动，$\boldsymbol{\psi}_0 \approx -\boldsymbol{u}_0$，这表明项 $u_i S_{ij} u_j$ 应与显著性相关。

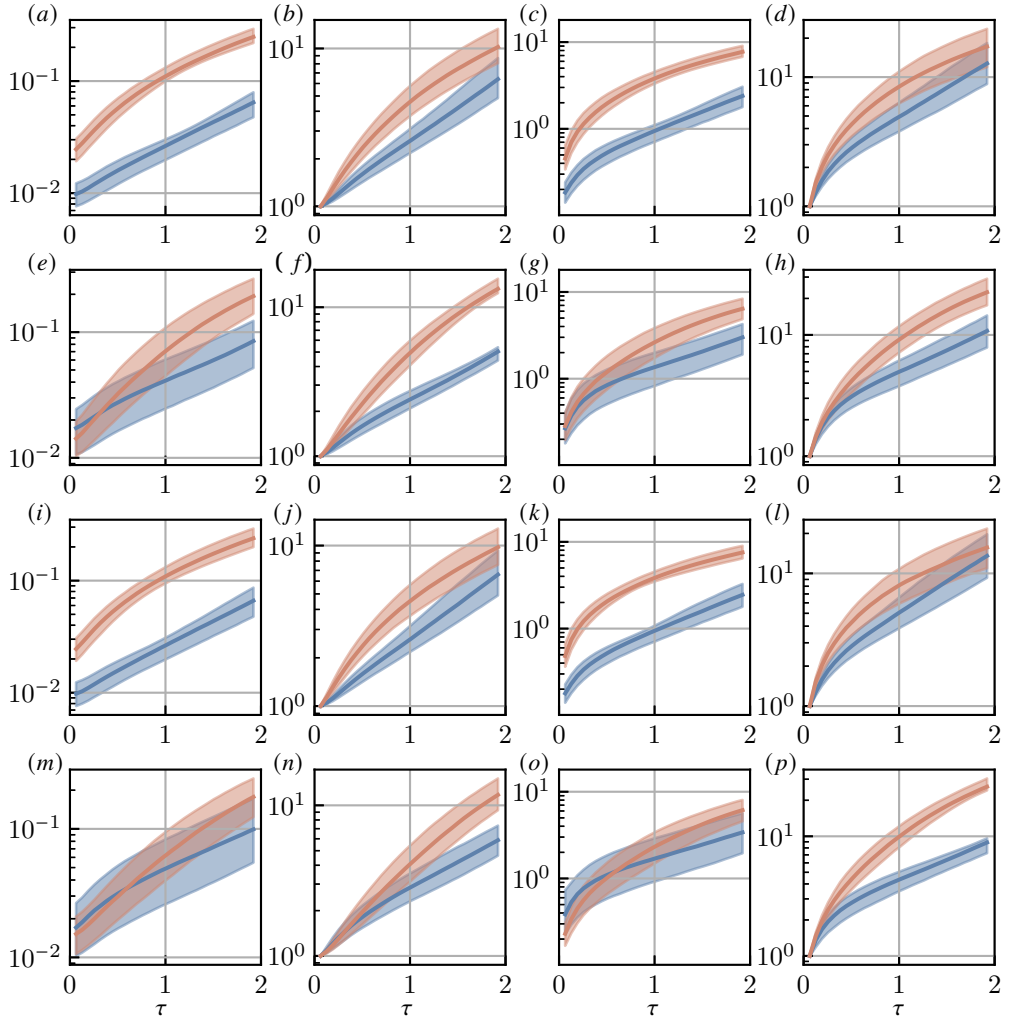


图 20：针对大小为 Δ_2 的 q 扰动，不同范数的交叉分类。从左到右，表示的幅值依次为 ψ'_q、$\tilde{\psi}'_q$、ψ'_ω 和 $\tilde{\psi}'_\omega$。从上到下，用于分类显著性的范数也按相同顺序变化。显著扰动为橙色，不显著扰动为蓝色。实线表示中位数，阴影轮廓包含每个时间点 80% 的概率质量。

（B5）右端散度算子下的各项不会产生净增长，但可以使扰动在流场中扩散（Tsinober 2001）。

附录C. 不同范数之间的关系

在本附录中，我们将比正文更详细地展示四种不同范数之间的关系。图 20 展示了使用一种范数分类后，用另一种范数表示的显著扰动和不显著项。因此，对角线上的图使用与分类时相同的范数表示，不提供额外信息。更值得关注的是非对角线上的图。如 4×4 排列中的图 (c) 和 (i) 所示，两种绝对范数能够很好地区分彼此对应的集合。两种相对范数之间也有类似的情况。使用绝对范数进行的分类仍然具有参考价值

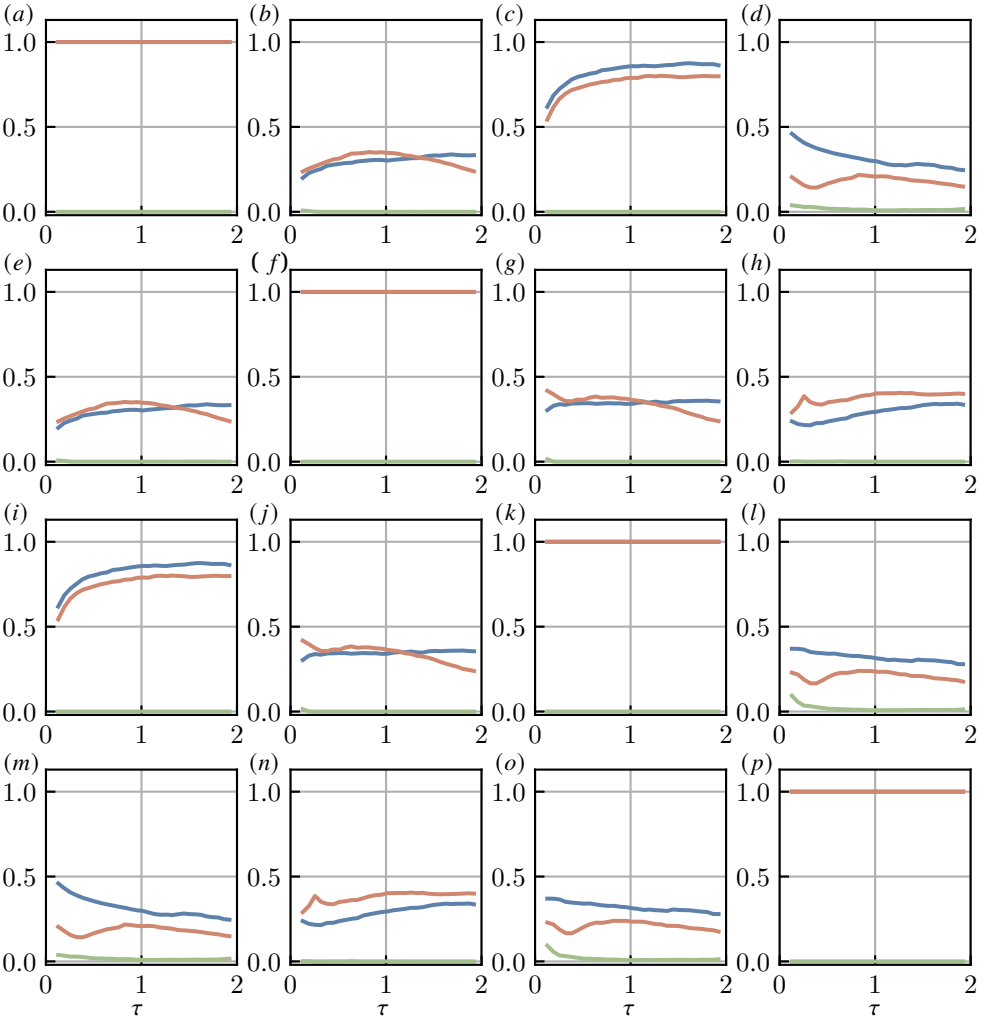


图 21：图 20的交叉分类交集比例。橙色线表示显著-显著交集，蓝色线表示不显著-不显著交集，绿色曲线表示不显著-显著交集及其反向交集之和。

从相关相对范数的角度来看也是如此，尽管时间更早，如图 (b) 和 (l) 所示。这意味着相对显著性先于绝对显著性出现。在图 20(e) 中也能在较晚时间观察到相同的效果。对于 q-范数，到时间窗口结束时，它能够完全区分显著项与不显著项。效果最差的交叉分类器是相对 ω-范数，它与任一种绝对范数几乎都没有关联；并且我们回想起，使用任何流标记几乎都无法进行分类。其余三种范数彼此之间具有较好的一致性，这说明为什么采用其中任意一种进行分析都会得到相似的结果。

显著扰动与不显著扰动在图 20 中彼此分开，并不意味着它们在其他范数下也等同于各自的定义；这只说明它们的分类相差不大。图 21 通过比较不同范数组合下显著集合与不显著集合的交集，展示了分类之间的差异。只需考察上三角图，因为图块关于对角线对称

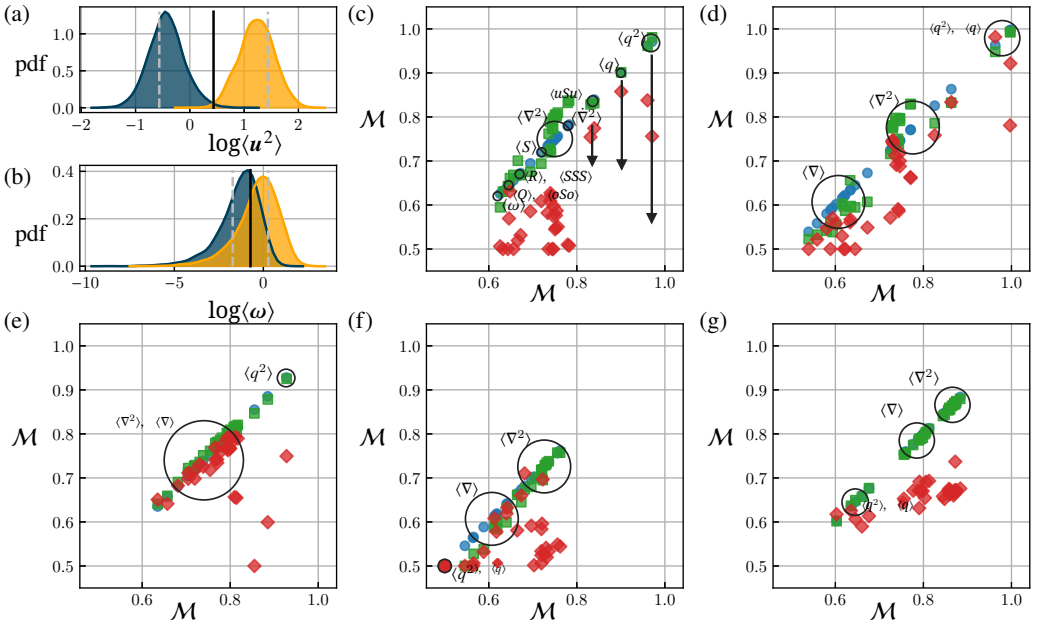


图22：显著/不显著区域分类。（a）一个良好分类器的示例（尺寸为 Δ_3 的 q 扰动对应的 $\log\langle q^2\rangle$ 和范数 R^5_ω）。（b）同一情况下的一个不良分类器示例（$\log\langle\omega\rangle$）。（c-g）不同扰动和显著性标准下的分类得分。横坐标始终为与 R^5_q 相关联的得分。颜色表示纵坐标对应的分类器：（蓝色）R^5_q、（绿色）R^5_ω 和（红色）$\tilde{\mathrm{R}}\omega$。（c）q 扰动，Δ_2。（d）q 扰动的分类，Δ_3。（e）q 扰动的分类，Δ_0。（f）ω 扰动的分类，Δ_2。（g）ω 扰动的分类，Δ_0。

，而后者仅表明自交点始终为 1。绿色曲线表示误分类，其中包括被归为不显著的显著事件总数，以及反向误分类的总数。与前一幅图一致，$\tilde{\psi}'_\omega$ 是唯一会造成明显误分类的范数，尤其是在较早的时间。结论是，对于衡量梯度放大的度量而言，一个周转时间左右的时间可能太长了，因为梯度放大的时间尺度短得多。

最后，图22展示了两种基于涡量平方积分的范数的分类得分，应与图8进行比较。首先，绿色方块表示绝对 ω-范数$\mathcal{R}\omega$ 本质上，依据梯度指标进行的分类效果相较于绝对q-范数有所提升，而依据动能进行的分类效果略有下降，不过影响很小。最显著的效果是小尺度梯度指标（$\langle\nabla^2\rangle$，$\langle\dot{\nabla}^2\rangle$）的有效性有所提高。小扰动（$\Delta_0$）在两种绝对范数下的得分几乎相同，这可能是因为它们本质上只包含一个尺度。最后，红色菱形所示的梯度放大很难分类，而且几乎˜所有标记的得分都很低，这可能是因为$\mathcal{R}\omega$ 的演化时间尺度更短。

参考文献

del Álamo, J. C., Jiménez, J., Zandonade, P. & Moser, R. D. 2006 对数区中的自相似涡团簇。《流体力学杂志》561, 329–358。Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G. & Vulpiani, A. 1996 湍流中非无穷小扰动的增长。《物理评论快报》77 (7), 1262。

Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G. & Vulpiani, A. 1997 大尺度可预报性：李雅普诺夫指数概念的扩展。数学与理论物理杂志A辑 30 (1), 1。Batchelor, G. K. 1953 均匀湍流理论。剑桥大学出版社。Beebee, H., Hitchcock, C. & Menzies, P. 2009 牛津因果关系手册。牛津大学出版社。Bermejo-Moreno, I., Pullin, D. I & Horiuti, K. 2009 湍流中涡量平方与耗散的几何、网格分辨率效应及邻近性问题。《流体力学杂志》620, 121–166。Boser, B. E, Guyon, I. M & Vapnik, V. N 1992 一种用于最优间隔分类器的训练算法。载于第五届计算学习理论年度研讨会论文集，第144–152页。Brown, G. L. & Roshko, A. 1974 湍流混合层中的密度效应与大尺度结构。《流体力学杂志》64, 775–816。Cardesa, J. I., Vela-Martín, A. & Jiménez, J. 2017 五维湍流级联。《科学》357 (6353), 782–784。Choi, H., Moin, P. & Kim, J. 1994 壁面约束流动中的主动湍流控制与减阻。《流体力学杂志》262, 75–110。Chong, M. S., Perry, A. E. & Cantwell, B. J. 1990 三维流场的一般分类。《物理流体》A辑 2, 765–777。Di Leoni, P. C., Mazzino, A. & Biferale, L. 2020 与大数据同步：通过松弛法调整纳维–斯托克斯方程，实现湍流数据同化。《物理评论：X》10 (1), 011023。Duan, Ping, Yang, Fan, Chen, Tongwen & Shah, Sirish L 2013 基于传递熵方法的直接因果关系检测。IEEE 控制系统汇刊 21 (6), 2052–2066。Eckmann, J-P. & Ruelle, D. 1985 混沌与奇异吸引子的遍历理论。载于《混沌吸引子理论》，第273–312页。施普林格。Elsinga, G. E. & Marusic, I. 2010 湍流边界层中流动拓扑的演化与寿命。《物理流体》 22 (1), 015102。Frisch, U., Sulem, P.L. & Nelkin, M. 1978 一个描述间歇性充分发展湍流的简单动力学模型。《流体力学杂志》87, 719–736。Frisch, U. & Vergassola, M. 1993 多重分形模型的一个预测：中间耗散区间。载于《蒙特韦里塔》，第29–34页。施普林格。Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W. H. 1991 一种动态亚格子尺度涡黏性模型。《物理流体》A辑 3 (7), 1760–1765。Granger, C. WJ 1969 通过计量经济模型和互谱方法研究因果关系。《计量经济学》，第424–438页。Horiuti, K. & Takagi, Y. 2005 湍流中涡片结构的识别方法。《物理流体》A辑 17 (12), 121703。Hosokawa, I., Oide, S. & Yamamoto, K. 1997 各向同性湍流中“软蠕虫”的存在性与显著性。日本物理学会杂志 66 (10), 2961–2964。Hunt, J. C. R., Wray, A. A. & Moin, P. 1988 湍流中的涡旋、流束与汇聚区。载于《1988年夏季项目论文集》，第9–14页。斯坦福美国国家航空航天局与湍流研究中心。Iyer, K. P., Sreenivasan, K. R. & Yeung, P. K. 2020 三维各向同性湍流中的标度指数趋于饱和。《物理评论：流体》5, 054605。James, R. G, Barnett, N. & Crutchfield, J. P 2016 信息流？对传递熵的批判。《物理评论快报》116 (23), 238701。Jiménez, J. 2018 机器辅助湍流理论。《流体力学杂志》854, R1。Jiménez, J 2020a 计算机与湍流。《欧洲力学杂志B辑：流体》79, 1–11。Jiménez, J. 2020b 二维湍流中的偶极子与流束。《流体力学杂志》904, A39。Jiménez, J. 2020c 蒙特卡洛科学。《湍流杂志》21 (9-10), 544–566。Jiménez, J., Wray, A. A., Saffman, P. G. & Rogallo, R. 1993 各向同性湍流中强涡量的结构。《流体力学杂志》255, 65–90。Kawahara, G. & Kida, S. 2001 平面库埃特湍流中的周期运动：再生周期与猝发。《流体力学杂志》449, 291–300。Kim, J., Moin, P. & Moser, R. D 1987 低雷诺数充分发展槽道流中的湍流统计。《流体力学杂志》177, 133–166。Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W. 1967 湍流边界层的结构。《流体力学杂志》30, 741–773。

Kolmogorov, A. N. 1941年 不可压缩流体在极高雷诺数下的湍流局部结构。苏联科学院学报 30, 9–13. Kolmogorov, A. N. 1962年 关于黏性不可压缩流体在高雷诺数下湍流局部结构的既有假设的修正。《流体力学杂志》13 (1), 82–85. Kraichnan, R. H 1967 二维湍流中的惯性区间。《物理流体》10 (7), 1417–1423. Kraichnan, R. H. 与 Panda, R. 1988 各向同性衰减湍流中的非线性减弱。《物理流体》31 (9), 2395–2397. Lee, M. 与 Moser, R. D. 2015 将湍流槽道流直接数值模拟至 $Re_\tau \sim 5200$。《流体力学杂志》 774, 395–415. Leung, T. 、 Swaminathan, N. 与 Davidson, P. A. 2012 均匀各向同性湍流中结构的几何形态与相互作用。《流体力学杂志》710, 453–481. Lozano-Durán, A.án、Bae, H. 与 Encinar, M. P 2020 壁面湍流中含能涡的因果关系。《流体力学杂志》882. Lozano-Durán, A、Holzner, M 与 Jiménez, J 2016 摩擦雷诺数为 932 的湍流槽道对数区拓扑不变量的多尺度分析 803, 356 394 .《流体力学杂志》– . Lumley, J. L. 1967 非均匀湍流的结构。《大气湍流与无线电波传播》。Meena, M. G. 与 Taira, K. 2021 识别用于湍流流动调控的涡旋网络连接器。《流体力学杂志》915. Meneveau, C. 与 Sreenivasan, K. R. 1991 能量耗散的多重分形特性。《流体力学杂志》224, 429–484. Moisy, F. 与 Jiménez, J. 2004 各向同性湍流中强结构的几何形态与集群。《流体力学杂志》513, 111–122. Motoki, S.、Kawahara, G. 与 Shimizu, M. 2018 两块平行板之间的最大热传递。《流体力学杂志》851. Nagata, M. 1990 平面库埃特流中的三维有限振幅解：从无穷远处分岔。《流体力学杂志》217, 519–527. Onsager, L 1949 统计流体力学。《新物理学杂志》(1943-1954) 6 (2), 279–287. Orszag, S. A. 与 Patterson, G. S. 1972 湍流的数值模拟：统计模型与湍流。《物理学讲义》12, 127–147. Oseledets, V. I. 1968 乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数。《莫斯科数学会会刊》19, 197–231. Pastor, R.、Vela-Martín, A. 与 Flores, O. 2020 壁面湍流控制：行动/状态的统计表征。载于《物理学会议系列》，第 1522 卷，第 012014 页。IOP出版社。Judea Pearl 2009 因果关系。剑桥大学出版社。Pringle, C. CT. 与 Kerswell, R. R. 2010 利用非线性瞬态增长构造剪切流湍流的最小种子。《物理评论快报》105 (15), 154502. Richardson, L. F. 1926 以距离邻接图展示大气扩散。《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》110 (756), 709–737. Rogallo, R. 1981 均匀湍流数值实验，第 81315 卷。美国国家航空航天局。She, Z. S.、Jackson, E. 与 Orszag, S. A 1991 均匀湍流的结构与动力学：模型与模拟。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》434 (1890), 101–124. Siggia, E. D 1981 三维湍流小尺度间歇性的数值研究。《流体力学杂志》107, 375–406. Spalart, P. R. 1987 $Re_\theta = 1410$ **187**, 直接模拟湍流边界层至 。《流体力学杂志》– . Sugihara, G.、May, R.、Ye, H.、Hsieh, C.、Deyle, E.、Fogarty, M. 与 Munch, S. 2012 检测复杂生态系统中的因果关系。《科学》338 (6106), 496–500. Tsinober, A. 2001 湍流非正式导论，第 63 卷。施普林格科学与商业媒体。Tsinober, A. 2019 《作为物理现象的湍流本质：着重讨论范式性质的问题》，第 3 版。施普林格。Vela-Martín, A.、E.、M. P.、García-Gutiérrez, A. 与 Jiménez, J. 2021 一种与二阶统计量一致、适用于湍流槽道流时间分辨数据库的低存储方法，最高至 reτ = 5300。《计算机科学》56, 101476。

61 98

Vela-Martín, A. 与 Jiménez, J. 2021 各向同性湍流惯性区间中的熵、不可逆性与级联。《流体力学杂志》**915**, A36. Verzicco, R.、Jiménez, J. 与 Orlandi, P. 1995 局部压缩下的稳态柱状涡。《流体力学杂志》《流体力学杂志》**299**, 367–388. Vieillefosse, P. 1984 无黏流中微小流体元的内部运动。*Physica A* **125** (1), 150–162. Vincent, A. 与 Meneguzzi, M. 1991 均匀湍流的空间结构与统计性质。《流体力学杂志》**225**, 1–20. Wallace, J. M.、Eckelmann, H. 与 Brodkey, R. S. 1972 湍流剪切流中的壁面区。《流体力学杂志》**54**, 39–48. Wang, M. 与 Zaki, T. A 2022 槽道流中的湍流同步。《流体力学杂志》**943**. Wang, Q.、Hasegawa, Y. 与 Zaki, T. A. 2019 根据湍流中的远程测量结果重建稳态标量源的空间分布。《流体力学杂志》**870**, 316–352. Wang, W.、Chu, X.、Lozano-Durán, A.án、Helmig, R. 与 Weigand, B. 2021 湍流边界层与多孔介质之间的信息传递。《流体力学杂志》**920**. Yamada, M. 与 Ohkitani, K. 1988 完全发展湍流中的惯性子区与非正李雅普诺夫指数。理论物理进展**79** (6), 1265–1268. Yoshida, K.、Yamaguchi, J. 与 Kaneda, Y. 2005 湍流中通过数据同化再生小涡。《物理评论快报》**94** (1), 014501。