arXiv:2302.04631v1 [math.OA] 7 Feb 2023

可补子模的交并非可补

附录：希尔伯特 C^*-模中的弗里德里希斯角与交替投影

Koen van den Dungen††、Bram Mesland§*、Adam Rennie†*

††德国波恩大学数学研究所 §荷兰莱顿大学数学研究所

†澳大利亚伍伦贡大学数学与应用统计学院，伍伦贡

2023年2月10日

摘要

我们通过一个（反）例子证明，希尔伯特 C^*-模中可补子模的交不一定是可补的，从而回答了 [MR] 中的一个未解决问题。

关键词：两个投影、冯·诺依曼交替投影定理、弗里德里希斯角、希尔伯特 C^*-模、局部-整体原理。

MSC2020：46L08, 47A46

可补子模的交

设 X 是 C^*-代数 B 上的右希尔伯特 C^*-模，且 $M \subset X$ 是一个闭的 B-子模。M 的正交补是子模

$$M^\perp := \{x \in X : \forall m \in M \ \langle x, m\rangle = 0\}.$$

回顾一下，若映射是可补的，则称 M

$$M \oplus M^\perp \to X, \quad (m, x) \mapsto m + x,$$

是 Hilbert C^*-模之间的同构。给定两个可补子模 $M, N \subset X$，它们的交集 $M \cap N \subset X$ 是一个闭 B-子模。在 [MR] 中，第二位和第三位署名作者提出了：

“据我们所知，两个可补子模的交集是否仍然可补，尚未解决。”

在本文中，我们对这个问题给出了否定的回答。下面的反例由第一位署名作者提供。

*电子邮件：kdungen@math.uni-bonn.de, b.mesland@math.leidenuniv.nl, renniea@uow.edu.au

例。考虑定义在 C^*-代数$B := C([-\pi/2, \pi/2])$ 上的希尔伯特 C^*-模 $X := C([-\pi/2, \pi/2],\ \mathbb{C}^2)$。对于 $t \in [-\pi/2, \pi/2]$，定义投影值函数

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \sin^2 t \end{pmatrix} & t \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & t < 0 \end{cases}.$$

对于 X 中的可补子模 $M := \mathrm{Im}(P)$ 和 $N := \mathrm{Im}(Q)$，我们有

$$M \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in C([-\pi/2, \pi/2]),\ x(t) = 0 \text{ for } t \geq 0 \right\},$$

其中，$t = 0$ 处的性质源于 P, Q 的像中任意 x 的连续性。因此，连续性再次说明，其补空间为

$$(M \cap N)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in C([-\pi/2, \pi/2]),\ y(t) = 0 \text{ for } t \leq 0 \right\}.$$

因此，任何满足 $y(0) \neq 0$ 的向量 $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in C([-\pi/2, \pi/2], \mathbb{C}^2)$ 都不属于 $(M \cap N) + (M \cap N)^\perp$。所以，$M \cap N$ 是一个不是可补的闭子模。

参考文献

[MR] B.Mesland, A. Rennie, 希尔伯特C^*-模中的弗里德里希斯角与交替投影, J. Math. Anal. Appl.,**516** (2022), 126474.