arXiv:2302.04652v1 [cs.SC] 9 Feb 2023

基于积分基的 D-有限函数 HermiteReduction *

Shaoshi Chen[a, b]、Lixin Du[c]、Manuel Kauers[c]

[a]KLMM，数学与系统科学研究院，中国科学院，北京 100190，中国[b]中国科学院大学数学科学学院，北京 100049，中国[c]代数研究所，约翰内斯·开普勒大学，林茨 A4040，奥地利 schen@amss.ac.cn, lixin.du@jku.at manuel.kauers@jku.at

2023年2月10日

摘要

Trager 的 Hermite 约化通过积分基解决代数函数的积分问题。迄今为止，将该算法推广到 D-有限函数仅限于 Fuchsian 情形。在本文中，我们去除了这一限制，并提出了一种基于积分基的约化算法，适用于任意 D-有限函数。

1 引言

令 R 为一类单变量函数 x，其导子为 D_x。例如，R 可以是有理函数域或代数函数域。在符号积分的背景下，可积性问题在于判定给定元素 $f \in R$ 是否能表示为某个 $g \in R$ 的 $f = D_x(g)$。如果存在这样的 g，我们就称 f 在 R 中可积。可积性

*S. Chen 部分得到了国家自然科学基金项目（11871067、11688101）、中国科学院青年创新促进会基金以及国家重点研发计划项目（2020YFA0712300）的资助。L. Du 得到了奥地利科学基金项目 P31571-N32 的资助。M. Kauers 得到了奥地利科学基金项目 P31571-N32 和 I6130-N 的资助。

问题的一种较宽松形式是分解问题，其任务是针对给定的$f \in R$，构造元素 g、$r \in R$，使得 $f = D_x(g) + r$，且 r 在某种意义下是最小的。理想情况下，这种“某种意义”应满足：只要 f 可积，就有 $r = 0$。如果 $f \in R$ 依赖于第二个变量 t，还可以考虑创造性望远镜问题：给定元素 $f \in R$，任务是构造c_0，……，$c_r \in R$，且它们不全为零，使得对于所有 $i \in \{0, \ldots, r\}$，c_i 都不含 x，并且

$$c_r D_t^r(f) + \cdots + c_0 f = D_x(g) \quad \text{for some } g \in R.$$

算子 $L = c_r D_t^r + \cdots + c_0$（如果存在）称为 f 的望远镜算子，而 g称为 L 的证书。

Zeilberger 首先证明了 D-有限函数存在望远镜算子 [22]。Almkvist 和 Zeilberger [4] 解决了超指数函数的可积性问题和创造性求和问题。Abramov 和 van Hoeij 利用伴随 Ore 代数 [2] 解决了 D-有限函数的可积性问题。Chyzak [12] 将创造性求和方法从超指数函数推广到了广义 D-有限函数。在过去十年中，基于约化的望远镜方法逐渐流行起来；该方法无需计算相应的证书即可找到望远镜算子。由于证书往往比望远镜算子大得多，有时甚至并非必需，这种方法提高了望远镜算法的效率。该方法最初针对有理函数提出 [5]，随后推广到超指数函数 [6]，、代数函数 [10]，、Fuchs 型 D-有限函数 [11]，以及 D-有限函数 [21, 7]。针对代数函数和 Fuchs 型 D-有限函数的基于约化的望远镜算法采用了积分基的概念，而已知适用于任意 D-有限函数的基于约化的望远镜算法则采用了不同的方法。

Kauers 和 Koutschan [17] 针对 Fuchs 型 D-有限函数提出的可积性概念，最近已由 Aldossari [3] 推广到任意 D-有限函数。因此，一个问题随之产生：对于任意 D-有限函数，是否也存在一种基于约化的望远镜算法，并且该算法以积分基为基础？本文旨在对此问题给出肯定的回答。本文基于第二作者博士论文[13]第 6 章的研究成果。

首先，我们在 [17, 3] 第 2 节回顾 D-有限函数的积分基。然后，在第 3 节中，我们将 Fuchsian 情形的 Hermite 约化扩展到非 Fuchsian 情形，从而降低 D-有限函数在有限处的极点阶。我们不采用多项式约化 [6, 10, 11, 8] 来降低无穷远点处的极点阶，而是介绍无穷远处的Hermite约化。结合有限处和无穷远处的 Hermite 约化，我们能够在第 4 节确定 D-有限函数的可积性，并在第5节给出一种基于约化的 D-有限函数求 telescoping 算法。

2 积分基

下面我们回顾任意线性微分算子[17, 14, 15, 3]的赋值函数和积分基。设 C 为一个零特征域，C 为 C的代数闭包。设 $C(x)[D]$ 为一个 Ore代数，其中 D 表示关于 x 的微分，并满足交换关系 $Dx = xD+1$。对于一个满足 $\ell_n \neq 0$的算子 $L = \ell_0 + \ell_1 D + \cdots + \ell_n D^n \in C(x)[D]$，我们考虑左 $C(x)[D]$-模 $A = C(x)[D]/\langle L\rangle$，其中 $\langle L\rangle = C(x)[D]L$。$A$ 中的元素称为 D-有限函数。在没有歧义时，A 中的等价类 $P + \langle L\rangle$ 也记作 P。A 中的每个元素都可以唯一表示为 $P = b_0 + b_1 D + \cdots + b_{n-1}D^{n-1}$，其中 $b_i \in C(x)$。

对于每个 $\alpha \in C$，一个 L 阶算子 n 具有 n 个形如如下的线性无关解

$$(x-\alpha)^{\mu} \exp(p((x-\alpha)^{-1/s}))b((x-\alpha)^{1/s}, \log(x-\alpha)) \tag{1}$$

其中 $s \in \mathbb{N}$、$\mu \in C$、$p \in C[x]$ 和 $b \in C[[x]][y]$满足相应条件。这类对象称为 α 处的广义级数解，见 [16, 18]。对于 $\alpha = \infty$，算子 L 具有 n个形如如下的线性无关解

$$x^{-\mu} \exp(p(x^{1/s}))b(x^{-1/s}, \log(x^{-1})) \tag{2}$$

其中 $s \in \mathbb{N}$、$\mu \in C$、$p \in C[x]$ 和 $b \in C[[x]][y]$满足相应条件。对于每个 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，令 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 为 L 在 α 处的广义级数解的所有有限 C-线性组合所构成的集合。则 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 是一个维数为 n 的 C-向量空间。全文中，我们假设对于每个 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，$\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 中的所有级数都具有 $p \in C[x]$、$\mu \in C$ 和 $b \in C[[x]][y]$（这总能通过适当地选择 C 来实现）。如果 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 中的所有级数都具有 $p = 0$ 和 $s = 1$，则称 L 在 α 处为 Fuchsian。若算子 L 在所有 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处均为 Fuchsian，则简称该算子为 Fuchsian。在此情形下，A 的元素称为 Fuchs 型 D-有限函数。

为简便起见，以下始终假设 C 是 $\mathbb{C}$ 的子域。给定两个复数 a、$b \in \mathbb{C}$，当且仅当 $\mathrm{Re}(a) \geq \mathrm{Re}(b)$ 时，我们称 $a \geq b$。对于每个 $\alpha \in \bar{C} \cup \{\infty\}$，令 $z = x - \alpha$（或在 $\alpha = \infty$ 时令 $z = \frac{1}{x}$）。项 $t := z^r \exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell$ 的赋值 $\nu_\alpha(t)$ 是局部指数 r 的实部。在 α 处，非零广义级数 f 的赋值 $\nu_\alpha(f)$ 是 f 中所有项（系数非零）的赋值的最小值。0 的赋值定义为 ∞。在 α 处的广义级数 f 称为整的，如果 $\nu_\alpha(f) \geq 0$。非整级数 f 被称为在参考点处有极点，其在 α 处的极点阶定义为 $-\nu_\alpha(f)$。请注意，在这一术语体系中，可能出现 $\nu_\alpha(f') < \nu_\alpha(f) - 1$。例如，$f = \exp(x^{-2})$ 在 0 处是整的，而 $f' = -2x^{-3}\exp(x^{-2})$ 在 0 处的赋值为 -3，而不是 -1。级数的赋值只取决于其局部指数，而不取决于其指数部分。该赋值与 [3, 定义 5.4] 中的赋值相同。

对于每个 $\alpha \in \{\infty\}$，算子 $P = b_0 + b_1 D + \cdots + b_{n-1}D^{n-1}$ in $A = C(x)[D]/\langle L\rangle$ 通过以下方式作用于广义级数 $f \in \mathrm{Sol}_\alpha(L)$:

$$P \cdot f = b_0 f + b_1 f' + \cdots + b_{n-1} f^{(n-1)},$$

其中 $'$ 是关于 x 的导子。令 $f_1, \ldots, f_n$ 为 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 的一组基，其形式如 (1)（若 2），则形式如 ($\alpha = \infty$)。赋值函数 val_α: $A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 定义如下：

$$\mathrm{val}_\alpha(P) := \min_{i=1}^{n} \nu_\alpha(P \cdot f_i). \tag{3}$$

那么，$\mathrm{val}_\alpha(P)$ 是所有在 α 处的级数 $P \cdot f$ 的赋值中的最小值，其中 f 遍历 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 中的所有级数解。因此，赋值函数的这一定义与 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 的基的选取无关。若元素 $P \in A$ 在 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处满足 $\mathrm{val}_\alpha(P) \geq 0$，则称其在该处（局部）整。若 P 在 α 处不是局部整的，则称 P 在 α 处有极点，其在 α 处的极点阶定义为 $-\mathrm{val}_\alpha(P)$。若元素 $P \in A$ 对所有 $\alpha \in C$ 都满足 $\mathrm{val}_\alpha(P) \geq 0$，则称其（全局）整；也就是说，$P$ 在所有有限处都局部整。当 L 为 Fuchsian 时，这一整性的概念便退化为 [11, 17] 中讨论的 Fuchsian 情形。

所有全局整元素 $f \in A = C(x)[D]/\langle L \rangle$ 构成一个 $C[x]$-模。该模的一组基称为 A 的（全局）整基。这样的基确实存在，而且，Fuchsian 情形下用于计算整基的算法 [17] 可直接应用于非 Fuchsian 情形。更多性质见 [3]。

对于固定的 $\alpha \in C$，非零有理函数 $f \in C(x)$ 的赋值 ν_α 是一个整数 $m \in \mathbb{Z}$，满足 $f = (x-\alpha)^m p/q$，其中 $p, q \in C[x]$，最大公因式 $(p, q) = 1$ 且 $(x-\alpha) \nmid pq$。按照惯例，设 $\nu_\alpha(0) = \infty$。有理函数 $f = p/q \in C(x)$ 的赋值 ν_∞ 为 $\deg_x(q) - \deg_x(p)$。对于每个 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，有理函数的赋值与其在 α 处的洛朗级数展开的赋值相同。集合 $C(x)_\alpha = \{f \in C(x) \mid \nu_\alpha(f) \geq 0\}$ 构成 $C(x)$ 的一个子环。在某个固定的 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处局部整的所有元素 $f \in A$ 构成一个 $C(x)_\alpha$-模。这个模的一组基称为 α 处 A的局部整基。这样的基也可以通过 [17, 3]计算。

整基 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 始终是 $C(x)$-向量空间 A的一组基。积分基的一个关键特性是，它们能明确表示极点。将元素 $f \in A$ 写成组合 $f = \sum_{i=1}^n f_i \omega_i$，其中 $f_i \in C(x)$，则 f 在 $\alpha \in C$ 处有极点，当且仅当至少一个 f_i 在该处有极点。此外，$\lfloor \mathrm{val}_\alpha(f) \rfloor$ 是所有 f_i在 α处赋值的下界。

引理 1. 设 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是 A 在某个固定的 $\alpha \in \bar{C} \cup \{\infty\}$处的局部整基。设 $f \in A$ 和 $f_1, \ldots, f_n \in C(x)$ 满足 $f = \sum_{i=1}^n f_i \omega_i$。则

1. f 在 α 处是整的，当且仅当对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$f_i \omega_i$ 在α处是整的。
2. $\lfloor \mathrm{val}_\alpha(f) \rfloor = \min_{i=1}^n \nu_\alpha(f_i)$。

证明。(1)：方向“⇐”显然。为证明“⇒”，设 f 在 α 处是 $\tilde{}$整的。于是存在 $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n \in C(x)_\alpha$ 使得 $f = \sum_{i=1}^n f_i \omega_i$。因此 $\sum_{i=1}^n (\tilde{f}_i - f_i)\omega_i = 0$，继而对所有 i均有 $\tilde{f}_i = f_i$，因为 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是一个$C(x)$-向量空间，其 A。作为 $C(x)_\alpha$ 的元素，f_i's 在 α 处是整的。因此，$f_i \omega_i$'s 在 α 处是整的。

(2)：令 $\tau := \min_{i=1}^{n} \nu_\alpha(f_i)$。我们需要证明 τ 是一个整数，使得

$$\tau \le \mathrm{val}_\alpha(f) < \tau + 1.$$

¯设 $z \in C(x)$ 满足 $\nu_\alpha(z) = 1$。由于 $z^{-\tau} f_i \omega_i$ 在 α 处是整的，我们有 $z^{-\tau} f$ 在 α 处是整的。因此，$\mathrm{val}_\alpha(z^{-\tau} f) = \mathrm{val}_\alpha(f) - \tau \ge 0$，这意味着 $\tau \le \mathrm{val}_\alpha(f)$。另一方面，假设 $\mathrm{val}_\alpha(f) \ge \tau + 1$。那么 $z^{-(\tau+1)} f$ 在 α 处是整的。然而，$z^{-(\tau+1)} f$ 不属于由 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 生成的 $C(x)_\alpha$-模，因为存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\tau = \nu_\alpha(f_i)$，进而 $z^{-(\tau+1)} f_i \notin C(x)_\alpha$。这与 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是 α 处局部整基这一事实矛盾。

■

设 $W = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 是 A 在 $C(x)$ 上的一组向量空间基。对于 $f \in A$，将其导数 $D \cdot f$ 记为 f'。令 $e \in C[x]$ 为且 $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C[x]^{n \times n}$ 满足 $eW' = MW$ 且 $\gcd(e, m_{1,1}, m_{1,2}, \ldots, m_{n,n}) = 1$。若 W 是整基，且 L 在所有有限处都是 Fuchsian 情形，则 e 必定无平方因子，参见[11, 引理 3]。若 W 是无穷远处的局部整基，且 L 在无穷远点处是 Fuchsian 情形，则对于所有 i, j，$\deg_x(m_{i,j}) < \deg_x(e)$，参见 [11, 引理 4]。然而，在非 Fuchsian 情形下，这两个事实不再成立，如以下示例所示：

例 2。算子 $L = x^3 D^2 + (3x^2 + 2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$ 在 $\mathbb{C}$ 中只有一个奇点 0，它是不规则奇点。无穷远点是正则奇点。因此，L 在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 中除 0 以外的所有点都是 Fuchsian 的，这意味着 L 是一个非 Fuchs 算子。在点 0，有两个线性无关解 $y_1(x) = 1$ 和 $y_2(x) = \exp(x^{-2})$，它们属于 $\mathrm{Sol}_0(L)$。$A = \mathbb{C}(x)[D]/\langle L \rangle$ 的一个整基为 $\omega_1 = 1$ 和 $\omega_2 = x^3 D$，它同时也是无穷远处的局部整基。于是

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

其中 $e = x^3$。在这个例子中，e 不是无平方因子的。

例 3。设 $L = xD^2 - (3x^3 + 2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$。无穷远点是不规则奇点。因此，$L$ 在无穷远点不是 Fuchsian 的。存在两个线性无关解 $y_1(x) = 1$ 和 $y_2(x) = \exp(x^3)$，它们属于 $\mathrm{Sol}_\infty(L)$。$A = \mathbb{C}(x)[D]/\langle L \rangle$ 在无穷远处的一个局部整基为 $\omega_1 = 1$ 和 $\omega_2 = x^{-2} D$。于是

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

在此示例中，$e = 1$ 且条件 $\deg_x(m_{i,j}) < \deg_x(e)$ 不成立。

称为在 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处正规，如果存在 r_1、...、$r_n \in C(x)$，使得 $\{r_1 \omega_1, \ldots, r_n \omega_n\}$ 是 α 处的局部整基，则称 $A = C(x)$ 上的 $C(x)$-向量空间基 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 在 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处正规。给定一个整基和一个无穷远处的局部整基，Trager [20] 提出了一种算法，用于在代数函数域中计算一个在无穷远点处正规的整基。同样的过程也适用于当前情形，参见 [3, 算法 5。20]

3 Hermite 约化

Hermite 约化最早由 Ostrogradsky 于 1845 [19], 提出，是一种经典的符号积分技术，可将有理函数约化为仅含简单极点的被积函数。Trager 通过积分基将 Hermite 约化从有理函数域推广到了代数函数域 [20] 。Trager 的 Hermite 约化解决了代数函数的积分问题。随后，这项工作又扩展到了 Fuchsian D-有限函数的情形 [11]。我们将进一步把 Hermite 约化扩展到一般的 D-有限函数，包括非 Fuchsian 情形。为约化无穷远处的极点阶，我们为 D-有限函数发展了无穷远处的 Hermite 约化，其作用与多项式约化相同 [6, 10, 11, 8]。在本节中，我们将在同一框架下阐述有限处和无穷远处的 Hermite 约化。更准确地说，我们将使用 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$ 处的局部整基来约化 D-有限函数在 α处的极点阶。

为方便起见，我们引入一些关于具有有理系数的矩阵的赋值的记号。对于每个 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，矩阵$T \in C(x)^{n\times n}$ 在 α处的赋值，记为 $\nu_\alpha(T)$，定义为该矩阵所有元素在 α 处赋值的最小值。 $T \in C(x)^{n\times n}$的次数，记为 $\deg_x(T)$，定义为 $-\nu_\infty(T)$。特别地，有理函数$f = p/q \in C(x)$的次数为 $\deg_x(p) - \deg_x(q)$。

3.1 局部情形

设 $L \in C(x)[D]$ 的阶为 n，且 $A = C(x)[D]/\langle L\rangle$。对于任意但固定的点 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，设 $W = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 是 A在 α处的局部整基，则存在矩阵 $T \in C(x)^{n\times n}$使得 $W' = TW$。记 $z = x - \alpha$（若 $\alpha = \infty$，则记为 $z = \frac{1}{x}$）。设 $\lambda = -\nu_\alpha(T)$ 为 T在 α 处的极点阶。则 $\lambda \in \mathbb{Z}$，且存在矩阵 $M = (m_{i,\ j})_{i,\ j=1}^{n} \in C(x)_\alpha^{n\times n}$使得

$$W' = \frac{1}{z^\lambda} MW \quad \text{and} \quad \nu_\alpha(M) = 0,$$

其中 $M = z^\lambda T$。设 $f = \frac{1}{z^d}\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \in A$，满足 $d > 1$（若 $\alpha = \infty$，则为 $d \geq 0$），且 $a_1, \ldots, a_n \in C(x)_\alpha$。为了降低 f 在 α 处的极点阶 d，我们寻求$b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in C(x)_\alpha$，使得

$$\frac{1}{z^d}\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i = \left(\frac{1}{z^{d+\mu}}\sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i\right)' + \frac{1}{z^{d-1}}\sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i, \tag{4}$$

其中 $\mu \in \mathbb{Z}$ 是一个整数，满足 $\nu_\alpha(z') = \nu_\alpha(z) + \mu$。在这种情况下，若 $\alpha \in \bar{C}$，则 $\mu = -1$（因为 $(x - \alpha)' = 1$）；若 $\alpha = \infty$，则 $\mu = 1$（因为 $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$）。此外，$z' = -\mu z^{\mu+1}$。

对 (4) 两边求导并乘以 z^d，得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i'}{z^\mu}\omega_i + b_i z^d\left(\frac{\omega_i}{z^{d+\mu}}\right)' + c_i z\omega_i\right) \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i'}{z^\mu}\omega_i + \frac{b_i}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\omega_j + \mu(d+\mu)b_i\omega_i + c_i z\omega_i\right), \tag{6}$$

其中 $\mu(d+\mu) = z^d(z^{-(d+\mu)})'$。注意，$b_i$ 在 α 处是整的。因此 $b_i' z^{-\mu} \in$ $_z C(x)$ $_\alpha$，因为 $\nu_\alpha(b_i' z^{-\mu}) \geq 1$。例如，若 $\alpha \in C$，则 $(1+(x-\alpha)+$ $\cdots)'(x-\alpha) = (x-\alpha)+\cdots$；若 $\alpha = \infty$，则 $(1+\frac{1}{x}+\cdots)'x = -\frac{1}{x}+\cdots$。因此，若 $-(\lambda+\mu) > 0$，即 $\lambda < -\mu$，则方程 (6) 可模 z 化简：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu(d+\mu)b_i\omega_i \mod z. \tag{7}$$

由此可知，$b_i \equiv \mu(d+\mu)^{-1}a_i$ 模 z 是方程 (7) 在 $\bar{C}(x)_\alpha/\langle z\rangle$ 中的唯一解。若 $\lambda \geq -\mu$，则将 (5) 乘以 $z^{\lambda+\mu}$ 并将该方程模 $z^{\lambda+\mu+1}$ 约化，得到

$$\sum_{i=1}^{n} z^{\lambda+\mu}a_i\omega_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i z^{d+\lambda+\mu}\left(\frac{\omega_i}{z^{d+\mu}}\right)' \mod z^{\lambda+\mu+1}. \tag{8}$$

令 $\psi_i := z^{d+\lambda+\mu}\left(\frac{\omega_i}{z^{d+\mu}}\right)'$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$。为了进行 Hermite 约化，我们必须证明（8）在 $\left(\bar{C}(x)_\alpha/\langle z^{\lambda+\mu+1}\rangle\right)^n$ 中总有一个解（$b_1, \ldots\ldots, b_n$）。

在 Fuchsian 情形下，Chen 等人 [11] 证明了 $\lambda = 1$。当 $\alpha \in C$ 时，他们证明了 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 构成 α 处的局部整基，因此（8）有解，且该解唯一。当 $\alpha = \infty$ 时，他们没有求解模系统（8），而是引入多项式约化来降低 x 中的次数。我们将证明 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 仍构成无穷远点处的局部整基。这样，多项式约化就可以表述为无穷远处的Hermite约化，正如 [11]的一位匿名审稿人所猜测的那样。

在非 Fuchsian 情形中，可能出现 $\lambda > 1$，见例 2（关于$\alpha = 0$）和例 3（关于 $\alpha = \infty$）。另一个区别是，$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 可能不再是 α 处的局部整基，见下面的例 4。幸运的是，我们将在本节证明，线性系统 (8) 在$\left(\bar{C}(x)_\alpha/\langle z^{\lambda+\mu+1}\rangle\right)^n$ 中仍有唯一解。证明分两步。首先，我们证明 $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ 在 $C(x)$上线性无关，然后求出一个有理解 $(b_1, \ldots, b_n)$，其各项在 α处的赋值均非负。因此，b_i属于 $C(x)_\alpha$。对 b_i 模 $z^{\lambda+\mu+1}$ 取商后，便得到 (8) 的唯一解。一旦知道 (8) 有解，通过比较两边 ω_i的系数，我们就可以求得其解 $b = (b_1, \ldots, b_n)$，方法是求解以下同余方程线性系统：

$$(z^{\lambda+\mu}a_1, \ldots, z^{\lambda+\mu}a_n) \equiv b(M + \mu(d+\mu)z^{\lambda+\mu}I_n) \mod z^{\lambda+\mu+1}, \tag{9}$$

其中 I_n 是 $C[x]^{n\times n}$中的单位矩阵。

例 4. 续例 2。对于 $\alpha=0$ 和 $\lambda=3$，设 $\psi_i=x^{d+2}(x^{1-d}\omega_i)'$，其中 $i=1,\ 2$。直接计算可得

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(d-1)x^2 & 1\\ 0 & -(d-1)x^2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}. \tag{10}$$

在本例中，ψ_1，ψ_2 是整元，但并不构成0处的局部整基，因为$\frac{1}{x^2}(2\psi_1+\psi_2)=-2(d-1)\omega_1-(d-1)\omega_2$在0处是整的。事实上，若 $d>1$，则 $\{\psi_1,\frac{1}{x^2}(2\psi_1+\psi_2)\}$是0处的局部整基。现在(9)变为

$$(a_1x^2,a_2x^2)\equiv(b_1,b_2)\begin{pmatrix}-(d-1)x^2 & 1\\ 0 & -(d-1)x^2-2\end{pmatrix}\mod x^3.$$

当 $d>1$ 时，尽管系数矩阵在 $\bar{C}(x)_0/\langle x^3\rangle$ 上不可逆，该方程仍有唯一解

$$\begin{cases}b_1\equiv-(d-1)^{-1}a_1 \mod x^3,\\ b_2\equiv\frac{1}{4}\left((d-1)x^2-2\right)\left(a_2x^2+(d-1)^{-1}a_1\right) \mod x^3.\end{cases}$$

设 $\mathcal{O}_\alpha$ 表示 $C(x)[D]/\langle L\rangle$ 中所有在 $\alpha\in C\cup\{\infty\}$ 处局部整的元素的集合。尽管 $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ 可能不是 α 处的局部整基，但它与之相差不远。在例 4 中，我们有 $C(x)_0\psi_1+C(x)_0\psi_2\subseteq\mathcal{O}_0\subseteq\frac{1}{x^2}(\bar{C}(x)_0\psi_1+\bar{C}(x)_0\psi_2)$。一般而言，若将 α 处的局部整元表示为 $C(x)$ 中系数属于该集合的 $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ 的线性组合，则这些系数在 α 处的极点阶至多为 $\lambda+\mu$。

命题 5。设 $\alpha\in C\cup\{\infty\}$ 和 $W=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ 是 A 在 α 处的局部整基。设 $z=x-\alpha$（或在 $\alpha=\infty$ 时为 $z=x^{-1}$）和 $\mu\in\mathbb{Z}$ 满足 $\nu_\alpha(z')=\nu_\alpha(z)+\mu$。设 $\lambda\in\mathbb{Z}$ 和 $M\in\bar{C}(x)_\alpha^{n\times n}$ 满足 $z^\lambda W'=MW$ 和 $\nu_\alpha(M)=0$。对于某个整数 $d>1$（或在 $\alpha=\infty$ 时为 $d\geq0$），定义 $\psi_i:=z^{d+\lambda+\mu}(z^{-d-\mu}\omega_i)'$。若 $\lambda\geq-\mu$，则

$$\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i\subseteq\mathcal{O}_\alpha\subseteq\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i.$$

特别地，当 $\lambda=-\mu$ 时，有 $\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i=\mathcal{O}_\alpha$。在这种情况下，$\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ 构成 α 处的局部整基。

证明。我们使用与 [10, 引理 10] 中相同的技术来证明这一命题。为了证明 $\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i\subseteq\mathcal{O}_\alpha$，我们只需证明，对于每个 $i=1$、.....、n，元素 ψ_i 在 α 处是整的。求导后，我们得到 $\psi_i=z^\lambda\omega_i'+\mu(d+\mu)z^{\lambda+\mu}\omega_i$。由于 $z^\lambda W'=MW$ 和 $\nu_\alpha(M)=0$，因此可知 $z^\lambda\omega_i'$ 在 α 处是整的。然后，由于 $\lambda+\mu\geq0$，ψ_i 在 α 处也是整的。

接下来我们将证明 $\mathcal{O}_\alpha\subseteq\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i$。反设存在一个元素 $f\in\mathcal{O}_\alpha\setminus\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n\bar{C}(x)_\alpha\psi_i$。此外，我们可以找到一个形如 f 的元素

$$f=\frac{1}{z^{\lambda+\mu+1}}\sum_{i=1}^nc_i\psi_i \quad\text{with } c_i\in\bar{C}(x)_\alpha \text{ and } \nu_\alpha(c_i)=0 \text{ for some } i.$$

设 $g = z^{-\mu-1}\sum_{i=1}^{n} c_i'\omega_i$，它是整的。那么它们的和也

$$\begin{aligned} f+g &= z^{d-1}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i\left(z^{-d-\mu}\omega_i\right)' + c_i' z^{-d-\mu}\omega_i\right) \\ &= z^{d-1}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i z^{-d-\mu}\omega_i\right)' = z^{d-1}\left(z^{-d-\mu}h\right)' \end{aligned}$$

必须是整的，其中 $h = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i$。由于 $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ 是 α 处的一个整基，根据引理 1，我们有 $0 \le \mathrm{val}_\alpha(h) < 1$。存在一个广义级数解 $y_i \in \mathrm{Sol}_\alpha(L)$，使得 $h\cdot y_i$ 包含一项 $T = z^r \exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell$，其中 $0 \le r < 1$、s、$\ell \in \mathbb{N}$ 和 $p \in C[x]$。对于这个固定的级数 y_i，令 T 为 $h\cdot y_i$ 的主导项，即在所有赋值最小的项中，指数 ℓ 最大的那一项。令 $k = \deg_x(p)$ 和 $c = \mathrm{lc}_x(p)$ 分别为 p 在 x 中的次数和首项系数。那么

$$\begin{aligned} &\left(z^{d-1}Dz^{-d-\mu}\right)\cdot T \\ &= \mu(d-r+\mu)z^{r-1}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell \\ &\quad + \tfrac{\mu ck}{s} z^{r-\frac{k}{s}-1}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell + \cdots \\ &\quad - \mu\ell z^{r-1}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^{\ell-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中，“…”表示赋值高于 $r-\frac{k}{s}-1$ 的某些项。

若 $k=0$，则

$$\mu(d-r+\mu)z^{r-1}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell$$

是 $\left(z^{d-1}Dz^{-d-\mu}\right)\cdot(h\cdot y_i)$ 的主导项；这里我们使用了 $d>1$（若 $\alpha=\infty$，则使用 $d\ge 0$）这一假设，因为对于 $d=1$（若 $d=-1$，则使用 $r=0$），系数（$d-r+\mu$）为零。

若 $k>0$，则

$$\frac{\mu ck}{s} z^{r-\frac{k}{s}-1}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell$$

是 $\left(z^{d-1}Dz^{-d+\mu}\right)\cdot(h\cdot y_i)$ 的主导项。

上述计算表明，$z^{d-1}\left(z^{-d-\mu}h\right)' = f+g$ 在 α 处不可积，这与我们关于 f 可积性的假设矛盾。因此，$\mathcal{O}_\alpha \subseteq \frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^{n}\bar{C}(x)_\alpha\psi_i$。

■

定理6。使用命题 5中的相同记号。设 $d>1$（或 $d\ge 0$若 $\alpha=\infty$）。若 $\lambda \ge -\mu$，则对任意 $a_1,\dots,a_n \in C(x)_\alpha$，线性系统为

$$\sum_{i=1}^{n} z^{\lambda+\mu}a_i\omega_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\psi_i \tag{12}$$

在 $\left(\bar{C}(x)_\alpha/\langle z^{\lambda+\mu+1}\rangle\right)^n$ 中有唯一解 $(b_1,\dots,b_n)$。

证明。 由命题 5， $C(x)_\alpha$-模由以下元素生成

$$\left\{\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\psi_1,\ldots,\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\psi_n\right\}$$

包含一个秩为 n 的子模 $\mathcal{O}_\alpha$。因此 $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$ 在 $\bar{C}(x)$ 上线性无关。于是存在唯一的 $t_1,\ldots,t_n \in \bar{C}(x)$，使得 $\sum_{i=1}^n z^{\lambda+\mu}a_i\omega_i = \sum_{i=1}^n t_i\psi_i$。

要找到一个解 b_i，我们必须证明 $t_i \in C(x)_\alpha$ 对所有 $i=1,\ldots,n$ 都成立。若如此，$b_i \equiv t_i$ 模 $z^{\lambda+\mu+1}$ 就是方程 (12) 的唯一解。由于 $a_i \in \bar{C}(x)_\alpha$，且这些 ω_i 在 α 处都是整的，该元素

$$\sum_{i=1}^n a_i\omega_i = \frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n t_i\psi_i$$

在 α 处是整的。根据命题5，

$$\frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n t_i\psi_i \in \mathcal{O}_\alpha \subseteq \frac{1}{z^{\lambda+\mu}}\sum_{i=1}^n \bar{C}(x)_\alpha\psi_i.$$

于是 $\sum_{i=1}^n t_i\psi_i \in \sum_{i=1}^n \bar{C}(x)_\alpha\psi_i$. 由于 $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$ 在 $C(x)$ 上线性无关，因此对所有 i，都有 $t_i \in C(x)_\alpha$。因此 $t_i \in C(x)_\alpha$，如所声称。 ■

根据定理 6，我们可以按照本节开头所述，对 D-有限函数执行一步 Hermite 约化。元素 b_i属于 $\bar{C}(x)_\alpha/\langle z^{\lambda+\mu+1}\rangle$ 的形式为

$$b_i = b_{i,0} + b_{i,1}z + \cdots + b_{i,\lambda+\mu}z^{\lambda+\mu} \quad \text{with} \quad b_{i,j} \in \bar{C}.$$

因此，在方程（4）中，对于 $\alpha \in C$，若 $d > \max\{1,\lambda\}$，则可以保证 $\frac{1}{z^{d+\mu}}\sum_{i=1}^n b_i\omega_i$ 的系数是真有理函数。对于 $\alpha=\infty$，若$d \geq \max\{0,\lambda\}$，则 $\frac{1}{z^{d+\mu}}\sum_{i=1}^n b_i\omega_i$ 的系数是多项式。

例 7。 接着看例 2 和 4。在 $\alpha=0$ 处的一个局部整基为 $\omega_1=1$ 和 $\omega_2=x^3D$。于是 $\lambda=3$。考虑 D-有限函数

$$f = \frac{(-2x^2-x^4)\omega_1 + (-2+3x^2-3x^4)\omega_2}{x^4}$$

并在 0 处使用 Hermite 约化，以降低 x 在其分母中的幂次。因此，我们从 $z=x$，$\mu=-1$，$d=4$，$a_1=-2x^2-x^4$和 $a_2=-2+3x^2-3x^4$开始。由 (9)，可得

$$(a_1x^2, a_2x^2) \equiv (b_1,b_2)\begin{pmatrix}-3x^2 & 1\\ 0 & -3x^2-2\end{pmatrix} \mod x^3.$$

根据定理 6，我们知道该方程有唯一解。事实上，我们求得一个解 $b_1=\frac{2}{3}x^2$，$b_2=\frac{4}{3}x^2$。然后在0处进行一步 Hermite 约化，将 f 化简为

$$f = \left(\frac{2\omega_1+4\omega_2}{3x}\right)' + \frac{(-4-3x^2)\omega_1+(13-9x^2)\omega_2}{3x^2}.$$

例8。 设 $L = xD^2 - (3x^3 + 2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$ 是例 3中相同的算子。在 $\alpha = \infty$ 处， $A = \mathbb{C}(x)[D]/\langle L\rangle$ 的局部整基为$\omega_1 = 1$ 以及 $\omega_2 = x^{-2}D$。于是

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = x^{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda = 2$。考虑 D-有限函数

$$f = 4x^3 + \frac{1}{x}D = 4x^3\omega_1 + x\omega_2 = x^3\left(4\omega_1 + \frac{1}{x^2}\omega_2\right)$$

并使用无穷远处的Hermite约化来降低其在 x中的次数。因此，我们从$z = \frac{1}{x}$， $\mu = 1$， $d = 3$， $a_1 = 4$ 和$a_2 = \frac{1}{x^2}$开始。由(9)，可得

$$(a_1x^{-3}, a_2x^{-3}) \equiv (b_1, b_2)\begin{pmatrix}4x^{-3} & 1\\ 0 & 4x^{-3} + 3\end{pmatrix} \mod x^{-4}$$

这个系数矩阵在 $C(x)_\infty/\langle x^{-4}\rangle$上不可逆。然而，根据定理6，我们知道该方程有唯一解。事实上，我们找到一个解$b_1 = 1$， $b_2 = \frac{4}{9x^3} - \frac{1}{3}$。接着，进行一步无穷远处的Hermite约化，将 f 化简为

$$f = \left(x^4\omega_1 + \left(\frac{4}{9}x - \frac{1}{3}x^4\right)\omega_2\right)' + \left(x - \frac{4}{9}\right)\omega_2.$$

对于有理函数 $g \in C(x)$以及任意点 $\alpha \in C$，若 $\nu_\alpha(g) \neq 0$，则有$\nu_\alpha(g')$ $= \nu_\alpha(g) - 1$。因此，有理函数的极点阶在每次求导后恰好增加一阶。对于 D-有限函数，其极点阶至少增加一阶。引理 5 给出了其在每次求导后极点阶的下界 [3,。 7]。

引理 9. 设 $g \in A$。对于任意 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$，若 $\mathrm{val}_\alpha(g) \neq 0$，则 $\mathrm{val}_\alpha(g') \leq \mathrm{val}_\alpha(g) + \mu$，其中 $\mu = -1$ 若 $\alpha \in C$，且 $\mu = 1$ 若 $\alpha = \infty$。

证明. 设 y_i 是 $\mathrm{Sol}_\alpha(L)$ 中满足 $\mathrm{val}_\alpha(g) = \nu_\alpha(g\cdot y_i)$ 的一个广义级数解。令 $z = x - \alpha$（若 $\alpha = \infty$，则令 $z = 1/x$）。令 $T = z^r\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell$，其中 $r \neq 0$、s、$\ell \in \mathbb{N}$、 $p \in C[x]$ 是 $f\cdot y_i$的主导项，也就是说，在所有具有最小 r 的项中，取指数 ℓ 最大的那一项。令 $k = \deg_x(p)$，且$c = \mathrm{lc}_x(p)$。于是

$$\begin{aligned}D\cdot T = &-r\mu z^{r+\mu}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell\\ &+ \frac{\mu ck}{s}z^{r-\frac{k}{s}+\mu}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^\ell + \cdots\\ &- \ell\mu z^{r+\mu}\exp(p(z^{-1/s}))\log(z)^{\ell-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

注意到 $r - \frac{k}{s} + \mu \leq r + \mu$和 $r \neq 0$（根据假设，$\mathrm{val}_\alpha(g) \neq 0$）。因此， $D\cdot T$ 在 $g'\cdot y_i$中的项的赋值小于或等于 $r + \mu$，这意味着 $\mathrm{val}_\alpha(g') \leq \mathrm{val}_\alpha(g) + \mu$。 ∎

令 $W = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 为无穷远处的局部整基。令 $\lambda \in \mathbb{Z}$和 $M \in C(x)^{n\times n}$ 满足 $W' = x^\lambda MW$和 $\nu_\infty(M) = 0$。则 $\lambda = -\nu_\infty(x^\lambda M) = \deg_x(x^\lambda M)$。通过重复进行无穷远处约化，我们可以尽可能地降低 x 中的次数，并将 $f \in A$ 分解为

$$f = g' + h \quad \text{with} \quad h = \sum_{i=1}^{n} h_i \omega_i \tag{14}$$

其中 $g \in A$, $h_i \in C(x)$，且 $\deg_x(h_i) < \max\{0, \lambda\}$ 对所有 i 均成立，并且 g 的系数是多项式。下面的引理给出了 A 中 h 的任意假设性整的次数上界。

引理 10. 设 $h \in A$ 如 (14)所示。若 h 在 A中可积，则 $h = (\sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i)'$，其中 $b_i \in C(x)$，且 $\deg_x(b_i) \le \max\{0, \lambda\}$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立。

证明。假设 h 在 A 中可积。那么存在 $H = \sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i \in A$，使得 $b_i \in C(x)$ 且 $h = H'$。由 (14) 可知， h 的系数满足 $\deg_x(h_i) < \max\{0, \lambda\}$，这意味着 $\nu_\infty(h_i) > \min\{0, -\lambda\}$。由于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是无穷远处的局部整基，根据引理 1 可得 $\mathrm{val}_\infty(h) > \min\{0, -\lambda\}$。

我们要证明，对所有 i，$\deg_x(b_i) \le \max\{0, \lambda\}$，也就是说，对所有 i，$\nu_\infty(b_i) \ge \min\{0, -\lambda\}$。反设 $\tau := \min_{i=1}^{n}\{\nu_\alpha(b_i)\} < \min\{0, -\lambda\}$。由于 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是无穷远处的局部整基，根据引理 1，我们得到 $\mathrm{val}_\infty(H) < \tau + 1 \le \min\{0, -\lambda\}$。因此， H 在无穷远处有极点。根据引理 9，我们有

$$\mathrm{val}_\infty(h) \le \mathrm{val}_\infty(H) + 1 \le \min\{0, -\lambda\}.$$

这就导致矛盾。因此，对所有 i，$\deg_x(b_i) \le \max\{0, \lambda\}$。 ∎

3.2 全局情形

为避免基域的代数扩张，可以在某个无平方因子多项式的所有根处同时进行 Hermite 约化。

令 $W = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 为 $A = C(x)[D]/\langle L\rangle$ 的整基。令 $e \in C[x]$ 和 $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C[x]^{n\times n}$ 满足 $eW' = MW$，且 $\gcd(e, m_{1,1}, m_{1,2}, \ldots, m_{n,n}) = 1$。令 v 为非平凡无平方因子多项式， $\lambda \in \mathbb{N}$ 为整数，且满足 $v^\lambda \mid e$ 和 $\gcd(\frac{e}{v^\lambda}, v) = 1$。令 $f = \frac{1}{uv^d}\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \in A$，其中 $u, a_1, \ldots, a_n \in C[x]$ 满足 $d > 1$，且 $\gcd(u, v) = \gcd(v, v') = \gcd(v, a_1, \ldots, a_n) = 1$。求导时， ω_i 可能会引入分母，即 e 的因子。不失一般性，我们假设$e \mid uv^d$。设 $d > \max\{1, \lambda\}$。为了执行一步 Hermite 约化以降低重数 d，我们在 $C[x]$ 中寻找 $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$，使得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i}{uv^d} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i}{v^{d-1}}\right)' + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i}{uv^{d-1}}. \tag{15}$$

如果 $\lambda = 0$，那么 $\gcd(e, v) = 1$。将 (15) 乘以 uv^d 并将该等式模 v 化简，得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i \equiv -(d-1) \sum_{i=1}^{n} b_i u v' \omega_i \mod v. \tag{16}$$

由于 $\gcd(u, v) = \gcd(v, v') = 1$，因此我们得到 $b_i \equiv -(d-1)^{-1}(uv')^{-1} a_i$ 模 v 是（16）在 $C[x]/\langle v \rangle$中的唯一解。如果 $\lambda \geq 1$，将（15）乘以 $uv^{d+\lambda-1}$ 并将该方程模 $v^{\lambda-1}$ 约简，得到

$$\sum_{i=1}^{n} v^{\lambda-1} a_i \omega_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i u v^{d+\lambda-1} \left(\frac{\omega_i}{v^{d-1}} \right)' \mod v^{\lambda}. \tag{17}$$

对局部情形中的论证稍作调整即可证明，（17）总有唯一解（$b_1,...,b_n$）属于 $\left(C[x]/\langle v^{\lambda} \rangle\right)^n$。令 $\psi_i := v^{d+\lambda-1}(v^{1-d}\omega_i)'$，其中 $i = 1, \ldots, n$。作为命题 5的类似结果，对于 $\alpha \in C$的每个根 v，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{C}(x)_{\alpha} \psi_i \subseteq \mathcal{O}_{\alpha} \subseteq \frac{1}{v^{\lambda-1}} \sum_{i=1}^{n} \bar{C}(x)_{\alpha} \psi_i. \tag{18}$$

因此，线性系统$\sum_{i=1}^{n} v^{\lambda-1} a_i \omega_i = \sum_{i=1}^{n} u b_i \psi_i$ 有唯一解（$b_1, \ldots, b_n$）属于 $\left(C[x]/\langle v^{\lambda} \rangle\right)^n$。令（$\omega_i$）两边的 17 个 $b = (b_1, \ldots, b_n$系数相等，即可通过求解以下同余方程组成的线性系统，得到向量 $b = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$(v^{\lambda-1} a_1, \ldots, v^{\lambda-1} a_n) \equiv b(uv^{\lambda} e^{-1} M - (d-1) u v^{\lambda-1} v' I_n) \mod v^{\lambda}, \tag{19}$$

其中 I_n 是 $C[x]^{n \times n}$中的单位矩阵。

通过反复应用上述 Hermite 约化步骤，我们可以尽可能地降低有限处的极点阶，即可以将任意$f \in A$ 分解为

$$f = \tilde{g}' + h \quad \text{with} \quad h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i \omega_i}{de}, \tag{20}$$

其中 $\tilde{g} \in A$、 h_1、...、 h_n、 $d \in C[x]$、 d无平方因子，最大公因式$(d, e) = 1$，且 $\tilde{g}$ 的系数是真有理函数。

引理 11。 设 $h \in A$ 如 (20)中所示。若 h 在 A中可积，则 $h = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i \omega_i}{u} \right)'$，其中 q_1，.....，q_n，$u \in C[x]$ 且 u |最大公因式(e, e')。此外，我们有 $d \in C$。

证明。假设 h 在 A中可积。那么存在 $H = \sum_{i=1}^{n} b_i \omega_i \in A$，使得$b_i \in C(x)$，且 $h = H'$。

如果 $\alpha \in C$ 不是 e的根，那么 b_i 在 α 处对所有 i都没有极点。否则，假设 b_i在某个 α处有极点， $i \in \{1, \ldots, n\}$。那么 H在 α处有极点，因为 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$是一个整基。但根据引理 9， h将会有

一个阶大于 1 的极点，这是不可能的，因为 $\gcd(d,e) = 1$ 和 d无平方因子。因此 b_i 在 α 处对所有 i 都是整的，故 d 是常数。

若 $\alpha \in C$ 是 e的根，则 b_i 在 α 处有一个阶至多为 $\nu_\alpha(e)$ –1 的极点。否则，设 $\tau := \min_{i=1}^{n}\{\nu_\alpha(b_i)\} \le -\nu_\alpha(e) \le -1$。由引理 1，$\mathrm{val}_\alpha(H) < \tau + 1 \le 0$。于是 H 在 α处有一个极点。因此，由引理 9 可得 $\mathrm{val}_\alpha(h) \le \mathrm{val}_\alpha(H) - 1$。于是 $\mathrm{val}_\alpha(h) < -\nu_\alpha(e)$。但由 $h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i\omega_i}{de}$可知，$\mathrm{val}_\alpha(h) \ge -\nu_\alpha(e)$，因为 $\gcd(d,e) = 1$。这就导致矛盾。

注意，若 α是 e的根，则 $\nu_\alpha(\gcd(e,e')) = \nu_\alpha(e) - 1$；若 α 不是 e的根，则 $\nu_\alpha(\gcd(e,e')) = 0$。因此， u 是这些 b_i 的分母的公倍数。 ■

例 12。 设 $L = x^3D^2 + (3x^2+2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$ 为例 2 和 4中的同一个微分算子。由于 $e = x^3$，我们有 $u =$ 最大公因式$(e,e') = x^2$。我们可以找到一个 Hermite 余项，使其积分的分母为u，例如，

$$f = \frac{2\omega_1 + \omega_2}{2x^3} = \left(\frac{-2\omega_1 - \omega_2}{4x^2}\right)'.$$

4 加法分解

现在，我们结合有限处和无穷远点处的 Hermite 约化，将 D-有限函数 f 分解为 $f = g' + h$，使得 f 可积当且仅当余项 h 为零。为实现这一目标，我们首先将所有余项限制在一个有限维向量空间中，然后找出该向量空间中所有可能的可积函数。这个过程类似于超指数情形 [6]、代数情形 [10]、Fuchsian 情形 [11] 以及 D-有限情形 [21, 7]。它为求解 D-有限函数的精确积分问题提供了另一种方法 [2]。

由于可能不存在一个 $A = C(x)[D]/\langle L\rangle$ 的基，使其在所有 $\alpha \in C \cup \{\infty\}$处都是局部整基，因此我们需要两个基，分别在有限处和无穷远点执行 Hermite 约化。设 $W = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A^n$是 A的一个在无穷远点处正规化的整基。存在 $T = \mathrm{diag}(x^{\tau_1}, \ldots, x^{\tau_n}) \in C(x)^{n\times n}$，满足 $\tau_i \in \mathbb{Z}$，使得 $V := TW$ 是无穷远处的局部整基。设 $e, a \in C[x]$和 $M, B \in C[x]^{n\times n}$满足 $eW' = MW$和 $aV' = BV$。由于 V 的导数为 $V' = (TW)' = \left(T' + \frac{1}{e}TM\right)T^{-1}V$，我们可以设 $a = x^\lambda e$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{N}$成立。对于满足 $\mu \le \delta$的任意整数 $\mu, \delta \in \mathbb{Z}$，定义 $C[x, x^{-1}]$ 中的 Laurent 多项式子空间如下：

$$C[x]_{\mu,\delta} := \left\{ \sum_{i=\mu}^{\delta} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in C \right\}.$$

定理 13. 设 $W, V \in A^n$ 如上所述。则任意元素 $f \in A$均可分解为

$$f = g' + \frac{1}{d}RW + \frac{1}{x^\lambda e}QV, \tag{21}$$

其中 $g \in A$, $d \in C[x]$ 无平方因子，且 $\gcd(d, e) = 1$, $R \in C[x]^n$, $Q \in C[x]^n_{\mu,\delta}$，其中 $\deg_x(R) < \deg_x(d)$, $\mu = \min\{-\tau_1, \ldots, -\tau_n, 0\}$ 和 $\delta = \max\{\lambda + \deg_x(e), \deg_x(B)\} - 1$。此外，$f$ 在 A 中可积，当且仅当 $R = 0$ 和

$$\frac{1}{x^\lambda e} QV \in U' \quad with \quad U = \left\{ \frac{1}{u} cV \;\middle|\; c \in C[x]^n_{\mu',\delta'} \right\},$$

其中 $u =$ 是 e 和 e' 的最大公因式，$\mu' = = \min\{-\tau_1, \ldots, -\tau_n, \nu_0(u)\}$，且

$$\delta' = \max\{\deg_x(u), \deg_x(B) - \lambda - \deg_x(e) + \deg_x(u)\}.$$

证明。令 $h \in A$ 为式（20）中的 Hermite 余项。利用扩展欧几里得算法，计算得到 r_i, $s_i \in C[x]$ 使得 $h_i = r_i e + s_i d$，且 $\deg_x(r_i) < \deg_x(d)$。于是 h可分解为

$$h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{de} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{d} \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{e} \omega_i. \tag{22}$$

将 h 写成向量形式，利用式（20），将 $f \in A$ 分解为

$$f = \tilde{g}' + \frac{1}{d} RW + \frac{1}{e} SW, \tag{23}$$

其中 $\tilde{g} \in A$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in C[x]^n$, $S = (s_1, \ldots, s_n) \in C[x]^n$。下一步，我们将降低 S 的次数，并将 S 限制在 C 上的一个与 f无关的有限维向量空间中。关于新基 V，我们重写式（23）中的最后一项：

$$\frac{1}{e} SW = \frac{1}{x^\lambda e} \tilde{S} V, \tag{24}$$

其中 $\tilde{S} = x^\lambda S T^{-1} \in x^\mu C[x]^n$ 满足 $\mu = \min\{-\tau_1, \ldots, -\tau_n, 0\}$。由于 V是无穷远处的局部整基，利用第3.1节的无穷远处的Hermite约化，由式（14）可得

$$\frac{1}{e} SW = (S_1 V)' + \frac{1}{x^\lambda e} S_2 V, \tag{25}$$

其中 $S_1 \in C[x]^n$ 和 $S_2 \in x^\mu C[x]^n$ 满足

$$\deg_x \left(\frac{S_2}{x^\lambda e} \right) \le \max \left\{ 0, \deg_x \left(\frac{B}{x^\lambda e} \right) \right\} - 1.$$

这意味着，次数$_x(S_2)$ $\le$ 至多为$\{\lambda +$ 次数$_x(e)$，次数$_x(B)\} - 1 = \delta$。因此 $S_2 \in C[x]^n_{\mu,\ \delta}$ 最后，我们令 $g = \tilde{g} + S_1 V$和 $Q = S_2$，从而得到分解式（21）。

对于最后一个断言，假设 f 是可积的（等价关系的另一个方向显然成立）。那么引理 11 表明 $d \in C$，因此R 必须为零，因为 $\deg_x(R) < \deg_x(d)$。因此，式（21）中的最后一项以及式（25）的左端也都是可积的。我们希望通过估计该整

在 $C\cup\{\infty\}$ 中所有点处该整的赋值来进行估计。由于 W 是全局整基，再次使用引理 11 ，可知

$$\frac{1}{e}SW=\left(\frac{1}{u}bW\right)',$$

其中 $b\in C[x]^n$ 和 $u=$ 是 e 与 e' 的最大公因式。于是

$$\frac{1}{x^\lambda e}QV=\frac{1}{e}SW-(S_1V)'=\left(\left(\frac{bT^{-1}}{u}-S_1\right)V\right)'=\left(\frac{1}{u}cV\right)',$$

其中 $c=bT^{-1}-uS_1\in C[x,x^{-1}]^n$。现在我们只需估计 c 在剩余的两个点 0 和 ∞ 处的赋值。根据 c 的表达式，可得

$$\nu_0(c)\geq\min\{\nu_0(bT^{-1}),\nu_0(uS_1)\}\geq\min\{-\tau_1,\dots,-\tau_n,\nu_0(u)\}=\mu'.$$

另一方面，由于 V 是无穷远处的局部整基，根据引理 10 可知，$\deg_x\left(\frac{c}{u}\right)\leq\max\left\{0,\deg_x\left(\frac{B}{x^\lambda e}\right)\right\}$。因此

$$\deg_x(c)\leq\max\{\deg_x(u),\deg_x(B)-\lambda-\deg_x(e)+\deg_x(u)\}=\delta'.$$

最后我们有 $c\in C[x]^n_{\mu',\ \delta'}$。 ∎

剩下的一步是将所有可积 D-有限函数约化为零。注意，在定理 13中， U 是一个维数为 C 的向量空间，其一组基为 $n(\delta'-\mu'+1)$

$$\left\{\frac{x^jv_i}{u}\;\middle|\;i=1,\dots,n;j=\mu',\dots,\delta'\right\},\tag{26}$$

其中 $V=(v_1,\dots,v_n)$。令 $K=\left\{\frac{1}{x^\lambda e}bV\;\middle|\;b\in C[x]^n_{\mu',\ \delta}\right\}$。对 U 的一组基中的所有元素求导并使用高斯消元，我们可以求得 U' 的一组基，并将 $K=(U'\cap K)\oplus N_V$ 分解为两个子空间的直和，其中 N_V 是 K 中的 $U'\cap K$ 的补空间。这意味着（21）中的 f 还可以进一步分解为

$$f=\tilde{g}'+\frac{1}{d}RW+\frac{1}{x^\lambda e}Q_2V,\tag{27}$$

其中 $\tilde{g}=g+g_1$ 满足 $g_1'\in U'\cap K$ 且 $Q_2\in C[x]^n_{\mu,\ \delta}$ 使得 f 在 A 中可积，当且仅当 $R=Q_2=0$。该分解（21）称为 关于 f 的 加性分解，相对于 x。当 L 是一个 Fuchs 算子时， f 的加性分解已在 [11, 定理 23] 中得到。

在实践中，我们可以在 K 中选择 $K\cap U'$ 的一个固定补空间。为此，我们在集合

$$\left\{x^jv_i\;\middle|\;i=1,\dots,n;j\in\mathbb{Z}\right\}$$

上定义项位置序使得 $x^{j_1}v_{i_1}>x^{j_2}v_{i_2}$ 当且仅当 $j_1>j_2$ 或 $j_1=j_2$ 且 $i_1<i_2$。令 lt(·) 表示 $A=C(x)[D]/\langle L\rangle$ 中某个元素的首项。例如，若

$p = 3x^2(v_1 + v_2) + 10xv_1 \in A$，则 $\mathrm{lt}(p) = x^2 v_1$。那么，K 中 $K \cap U'$ 的一个标准补空间是由以下元素生成的 K 的一个 C-向量子空间

$$\{h \in K \mid h \neq \mathrm{lt}(g) \text{ for all } g \in K \cap U'\}.$$

从现在起，令 N_V 表示 $K \cap U'$ 在 K中的标准补空间。这个 N_V 的定义与 [11], 中的定义基本相同，因为 D-有限函数与其 v_i的系数之间存在一一对应关系。

注意，Q_2 属于一个维数为 C-向量空间 $C[x]^n_{\mu,\ \delta}$

$$n(\delta - \mu + 1) = \max\{\lambda + \deg_x(e), \deg_x(B)\} + \max\{\tau, 0\}, \tag{28}$$

其中 $\tau = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$。若 L 是 Fuchsian，由 [11, 引理 4], 可知 $\deg_x(B) < \lambda + \deg_x(e)$。因此，$Q_2$ 属于一个维数至多为 $n(\max\{\tau, 0\} + \lambda + \deg_x(e))$ 的 C-向量空间。这是对 [11, 命题 22]的改进。

例 14。令 $L = xD^2 - (3x^3 + 2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$ 为与例 3中相同的算子。于是 $W = (\omega_1, \omega_2) = (1, x^{-2}D) = V$。因此 $e = 1$, $\lambda = 0$ 和$M = B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 3x^2 \end{smallmatrix}\right)$。在例 8中进行无穷远处的Hermite约化后，我们得到

$$f = \left(x^4\omega_1 + \left(\tfrac{4}{9}x - \tfrac{1}{3}x^4\right)\omega_2\right)' + \left(x - \tfrac{4}{9}\right)\omega_2. \tag{29}$$

于是 $\mu = 0$、$\delta = 1$、$u = 1$、$\mu' = 0$、$\delta' = 2$。U 的一组基为

$$\{\omega_1,\ \omega_2,\ x\omega_1,\ x\omega_2,\ x^2\omega_1,\ x^2\omega_2\},$$

因此，U' 由以下元素生成:

$$\{x^2\omega_2,\ 3x^2\omega_2,\ \omega_1 + x^3\omega_2,\ (1 + 3x^3)\omega_2,\ 2x\omega_1 + x^4\omega_2,\ (2x + 3x^4)\omega_2\}.$$

所以，$K \cap U'$的一组基为

$$\{3\omega_1 - \omega_2,\ 6x\omega_1 - 2x\omega_2\}.$$

集合 $K \cap U'$中所有元素的首项均为 ω_1或 $x\omega_1$。由于$\mathrm{lt}((x - \frac{4}{9})\omega_2) = x\omega_2$ 与这些项均不同，根据定理13 可知 f 在 $A = \mathbb{C}(x)[D]/\langle L\rangle$ 中不可积，且(29) 是 f 关于x的加性分解。

例 15。设 $L = x^3D^2 + (3x^2 + 2)D \in \mathbb{C}(x)[D]$ 是例2中的同一个算子。则 $W = (\omega_1,\ \omega_2) = (1,\ x^3D) = V$。因此 $e = x^3$，$\lambda = 0$ 以及$M = B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$。结合例7中所有有限点处的厄米特约化和无穷远处的Hermite约化，可得

$$f = \left(\left(\tfrac{2}{3x} - x\right)\omega_1 + \left(\tfrac{4}{3x} - 3x\right)\omega_2\right)' - \tfrac{4}{3x^2}\omega_1 - \tfrac{2}{3x^2}\omega_2.$$

于是 $\mu = 0$、$\delta = 2$、$u = x^2$、$\mu' = 0$、$\delta' = 2$。U 的一组基为

$$\left\{\tfrac{\omega_1}{x^2},\ \tfrac{\omega_2}{x^2},\ \tfrac{\omega_1}{x},\ \tfrac{\omega_2}{x},\ \omega_1,\ \omega_2\right\}.$$

$K \cap U'$ 的一组基为

$$\left\{-\tfrac{2}{x^2}\omega_1 - \tfrac{1}{x^2}\omega_2,\ \tfrac{1}{x^3}\omega_2,\ -\tfrac{2}{x^3}\omega_2\right\}.$$

因此，f 是可积的:

$$f = \left(\left(\tfrac{2}{3x} - x + \tfrac{4}{3x}\right)\omega_1 + \left(\tfrac{4}{3x} - 3x + \tfrac{2}{3x}\right)\omega_2\right)'.$$

5 应用

设 $K(x)[\partial_t, D_x]$（其中 $K = C(t)$）是一个 Ore代数，其中 D_x 是关于 x 的微分，而 ∂_t 则是关于 t 的微分或移位 $t \mapsto t+1$。设 I 是由 L 和 $\partial_t - u_t$生成的 $K(x)[\partial_t, D_x]$ 的一个左理想，其中 $L, u_t \in K(x)[D_x]$。商空间 $A = K(x)[\partial_t, D_x]/I$ 是关于 $K(x)$ 的有限维向量空间，其一组基为 $\{1, D_x, \ldots, D_x^{n-1}\}$，其中 n 是 L 的阶。A 中的每个元素 f 都可唯一地写成 $P_f + I$，其中 $P_f \in K(x)[D_x]$。将 f 映射到 $P_f + \langle L\rangle$，可得到从 A 到 $K(x)[D_x]/\langle L\rangle$ 的一个 $K(x)[D_x]$-模同构。利用这个同构，对于任意 $f \in A$，我们可以应用加性分解来检验 f（在 x中）是否可积。如果 $f \in A$ 不可积，则可以尝试求一个非零算子 $T \in C(t)[\partial_t]$（不含 x），使得 $T(f)$ 可积。若存在这样的算子 T，则称其为 f的望远镜算子。根据第 4 节中关于 x 的加性分解，对 $\partial_t^i \cdot f \in A$ 应用该分解可得

$$\partial_t^i \cdot f = g_i' + h_i$$

其中，当且仅当 $h_i = 0$ 时，g_i、$h_i \in A$ 和 $\partial_t^i \cdot f$ 在 A 中可积。若存在 c_0、c_1、……、$c_r \in K$ 使得 $\sum_{i=0}^r c_i h_i = 0$，则 $T = \sum_{i=0}^r c_i \partial_t^i$ 是 f 的一个望远镜算子（因为 ∂_t 和 D_x 可交换）。若这种望远镜算子存在，则其阶为最小阶。这种方法称为基于约化的望远镜法，已针对多类函数进行了研究 [5, 6, 9, 10, 11, 7, 21]。若 $\partial_t = D_t$ 表示关于 t 的微分，则望远镜算子总是存在 [22]。我们在 Maple 中实现了该算法。更多示例和代码见 [1]。与 Fuchsian 情形类似 [11, , 根据引理 24], , 对于任意 $i \in \mathbb{N}$，导数 $D_t^i \cdot f$ 都有如下形式的加性分解 (27)

$$D_t^i \cdot f = g_i' + h_i \quad \text{with} \quad h_i = \frac{1}{d} R_i W + \frac{1}{x^\lambda e} Q_i V \tag{30}$$

其中 $g_i \in A$，$d \in K[x]$，$R_i \in K[x]^n$，$Q_i \in K[x, x^{-1}]^n$，且 $\deg_x(R_i) < \deg_x(d)$ 且 $Q_i \in N_V$。由（28）可得望远镜算子的阶的一个上界，这是对 [11, 推论 25] 的推广。

推论 16. 每个 $f \in A$ 都有一个阶至多为 $n\deg_x(d) + \dim_x(N_V)$ 的望远镜算子，其上界为

$$n(\deg_x(d) + \max\{\tau, 0\} + \max\{\lambda + \deg_x(e), \deg_x(B)\}).$$

例 17. 设 $H = \sqrt{t - 2x}\exp(t^2 x)$ 是一个超指数函数。该函数被以下算子湮灭：

$$L = D_x - \frac{2t^2 x - t^3 + 1}{2x - t} \quad \text{and} \quad D_t - \frac{8tx^2 - 4t^2 x - 1}{2(2x - t)}.$$

$A = K(x)[D_x]/\langle L\rangle$ 的整基为 $\omega = 1$，其中 $K = \mathbb{C}(t)$；无穷远处的局部整基为 $v = x^{-1}\omega$。由于被积函数 H 对应于 $1 \in A$,

其在这些基中的表示为 $f = \omega = xv$。 f的加性分解为

$$f = \left(\left(\frac{x}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right)v\right)' - \frac{(t^3+1)x - t}{2t^4x(2x-t)}v.$$

接下来我们考虑导数 $D_t \cdot f$，它具有一个加法分解

$$D_t \cdot f = \left(\left(\frac{2x^2}{t} - \frac{3x}{t^3} - \frac{3t^3-6}{4t^5}\right)v\right)' - \frac{3(t^3-2)((t^3+1)x-t)}{4t^5x(2x-t)}v.$$

现在我们看到 f 和 $D_t \cdot f$ 在 $\mathbb{C}(t)$上是线性相关的，这产生了一个望远镜算子 $2tD_t - 3(t^3-2)$。这个望远镜算子通过不同的归约方法在 *[6,* 例 *21]* 中获得。

例18. 设 $F_n(x) = x^n J_n(x)$，其中 J_n 表示第一类贝塞尔函数。则 $F_n(x)$ 被以下算子湮灭：

$$L = D_x^2 + (1-2n)D_x + x \quad and \quad P = S_n + xD_x - 2n,$$

其中， S_n 是关于 n的移位算子。 $A = K(x)[D_x]/\langle L\rangle$ 关于 $K = \mathbb{C}(n)$ 的一个整基是 $W = (\omega_1, \omega_2) = (1, D_x)$，无穷远处的局部整基是 $V = (v_1, v_2) = (\omega_1, x^{-1}\omega_2)$。和之前一样， $F_n(x)$表示为 $f = 1 \in A$。 f和 $S_n \cdot f = -xD_x + 2n \in A$的加法分解如下：

$$f = (v_2)' + \frac{(2n-1)x - 1}{x}v_2,$$

$$S_n \cdot f = (-xv_1 - (2n+1)v_2)' + \frac{(2n+1)((2n-1)x-1)}{x}v_2.$$

现在我们可以求出一个望远镜算子 $S_n - 2n - 1$。这是通过 *[7]* 中的算法得到的。

致谢。感谢 Shayea Aldossari 分享他的 Maple 积分基程序包。

参考文献

[1] https://github.com/LixinDu/HermiteReduction.

[2] Sergei A Abramov 和 Mark Van Hoeij。线性函数方程解的积分。Integral Transforms and Special Functions，8(1-2):3– 12，1999。

[3] Shayea Aldossari。《简化微分方程的算法》。2020。博士论文。

[4] Gert Almkvist 和 Doron Zeilberger。积分号下求导法。《Journal of Symbolic Computation》，10：571–591，1990。

[5] Alin Bostan、Shaoshi Chen、Fr´ed´eric Chyzak 和 Ziming Li。双变量有理函数的创造性求和复杂度。载于《2010年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第203–210页，美国纽约州纽约，2010年。ACM。[6] Alin Bostan、Shaoshi Chen、Fr´ed´eric Chyzak、Ziming Li 和 Guoce Xin。超指数函数的 Hermite 约化与创造性求和。载于《2013年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第77–84页，美国纽约州纽约，2013年。ACM。[7] Alin Bostan、Fr´ed´eric Chyzak、Pierre Lairez 和 Bruno Salvy。D-有限函数的广义 Hermite 约化、创造性求和与定积分。载于《2018年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第95–102页，美国纽约州纽约，2018年。ACM。[8] Shaoshi Chen、Lixin Du 和 Manuel Kauers。代数函数的惰性 Hermite 约化与创造性求和。载于《2021年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第75–82页，美国纽约州纽约，2021年。ACM。[9] Shaoshi Chen、Hui Huang、Manuel Kauers 和 Ziming Li。针对超几何项的改进 Abramov-Petkovsek 约化与创造性求和。载于《2015年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第117–124页，美国纽约州纽约，2015年。ACM。[10] Shaoshi Chen、Manuel Kauers 和 C. Koutschan。基于约化的代数函数创造性求和。载于《2016年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第175–182页，美国纽约州纽约，2016年。ACM。[11] Shaoshi Chen、Mark van Hoeij、Manuel Kauers 和 Christoph Koutschan。基于约化的 Fuchs 型 D-有限函数创造性求和。《Journal of Symbolic Computation》，85：108–127，2018年。[12] Fr´ed´eric Chyzak。将 Zeilberger 快速算法扩展到一般全纯函数。《离散数学》，217：115–134，2000年。[13] Lixin Du。广义积分基及其在创造性求和中的应用。2022年。博士论文。[14] Erdal Imamoglu。使用有理函数系数求解线性微分方程的算法。2017年。博士论文。[15] Erdal Imamoglu 和 Mark van Hoeij。使用形式解的商空间与积分基计算二阶线性微分方程的超几何解。《Journal of Symbolic Computation》，83：254–271，2017年。

[16] Edward L. Ince。《常微分方程》。Dover，1926。[17] Manuel Kauers 和 Christoph Koutschan。积分 D-有限函数。载于《2015 年国际符号与代数计算研讨会论文集》，第 251–258 页，纽约，纽约州，美国，2015。ACM。[18] Manuel Kauers 和 Peter Paule。《具体四面体：符号求和、递推方程、生成函数、渐近估计》。Springer 出版公司，第一版，2011。[19]米哈伊尔·瓦西里耶维奇·奥斯特罗格拉茨基。关于有理分数的积分。圣彼得堡帝国科学院物理数学部公报，4:145–167，286–300，1845。[20] Barry M. Trager。《代数函数的积分》。1984。博士论文。[21] Joris van der Hoeven。为创造性求和构造约化：一般微分有限情形。《工程、通信与计算中的应用代数》，32(5):575–602，2021 年 11 月。[22] Doron Zeilberger。特殊函数恒等式的全纯系统方法。《计算与应用数学杂志》，32:321–368，1990。