2023-01-16

预设逻辑的证明系统

X.Y. Newberry

摘要

本文提出了一种推导系统，用于 P. F. Strawson 提出的预设逻辑。该系统基于 M. Richard Diaz 于 1981 年描述的真值相关逻辑。在另一篇论文中，我概述了一种基于真值树的 t-相关逻辑推导系统。结论是：一个重言式为真值相关，当且仅当树中的所有变量都自相矛盾。树有可能在并非所有变量都自相矛盾的情况下终止。在这种情况下，相应的公式仍然是重言式，但不是真值相关的重言式。这一概念被扩展到谓词演算，即预设逻辑或其某种变体。

1. 引言

本文旨在建立一种推导系统，使空洞句子（例如 $\forall x(x \neq x \rightarrow x = x+1)$）在其中不可推导。在这种逻辑中，哥德尔自指句不可推导[它是空洞的]，，但 $\sim(Ex)Prf(x, g)$或许可以推导。这里，g 是哥德尔句子的哥德尔数。而 $Prf(x, z)$ 表示x是一个序列的哥德尔数，该序列是对哥德尔数为z的句子的证明。（Newberry，2015）

在 Newberry（2019b）中，我建议以 M. Richard Diaz（1981）的真值相关逻辑作为该系统的基础。我提出了一个基于语义树的该逻辑推导系统。（例如，Bergman 等人（1980）介绍了语义树法。）主要结论是，若重言式 L 中出现的所有命题变元都自相矛盾，那么 L 就是 t-相关的。本文尝试将同样的方法扩展到谓词演算。我们将通过把谓词句“翻译”为命题句来实现这一点。

2. 向谓词演算的“翻译”

2.1 含常元的无量词句子

句子仅包含应用于常元的谓词（即不含变元和量词的句子）时，情况很简单。应用于常量的谓词，例如 Pa、Pb、Qa、Qb，其行为与命题逻辑中彼此不同的命题变元相同。当它们全都自相矛盾时，该句子就是真值相关的，见附录 A 中的例 2.1。

2.2 带恒等的无量化句子

恒等将把常元归入等价类。这就是说，$a = b = c$意味着a、b、c指称的是同一个对象。于是，Pa、Pb、Pc将被视为同一个原子句。我们还可能有一个句子 $a = b \vee a = d$。这意味着每个分支都有自己的等价类。

在实际操作中，证明的第一步是将等价类中的所有常元“合并”为一个。例如，我们用 a 替换 b 和 c。之后，同样的原则也适用于上文第 2.1 节。

2.3 全称量化句

这种情况也相当简单。句子 $\exists x Ux$ 会在语义树顶端转换为一个全称量化句子。也就是说，它变为 $\sim\exists x Ux$，即$\forall x \sim Ux$。但后者会被实例化为 $\sim Ua$，其中 a 是某个常元。如果句子中有任何常元，那么 x 就会被实例化为这些常元之一。因此，我们得到带有常元的谓词，其行为与上文第 2.1 节中的情况相同。例 2.2。

2.4 存在量化句

这种情况稍微复杂一些。 句子 $\forall x Ux$在语义树顶端会被转化为一个全称量化句。也就是说，它会变成 $\sim\forall x Ux$，即$\exists x \sim Ux$。它会以 $\sim Ue$ 的形式实例化，其中 e是某个名称。现在的问题是，尽管 e 与树中的所有常量都不同，但我们不知道e是否指称树中已经提到的某个对象。我们该如何分析这种情况?

请看这个例子

$(P_1c_1 \,\&\, \sim P_1c_1) \vee (P_2c_2 \,\&\, \sim P_2c_2) \vee \ldots (P_ic_i \,\&\, \sim P_ic_i) \vee (\boldsymbol{P_2e} \,\&\, \sim \boldsymbol{P_2e}) \vee \ldots$ (2.4.1)

比如说，e指称的对象和c_2 相同，会怎样呢？这是否意味着$\boldsymbol{P_2e}$是冗余的，尽管（2.4.1）表明它并非冗余？答案是，e并不代表某个特定对象；P_2e更像是一种模式。子公式P_2e是某个存在句的实例化结果，比如说 $\exists x P_2x$。句子 $\exists x P_2x$保证至少存在一个对象e，使得P_2e成立，但并未指出它具体是哪一个对象。因此，我们需要问的是：如果不知道自己谈论的是哪个对象，又如何能证明任何事情？看看证明的结构就会发现，它实际上适用于论域中的任意对象 e。这是因为（如果语义树闭合），存在量词总会遇上全称量词，而全称量词的作用范围极广。用任意名称实例化 $\exists x P_2x$，等待中的全称量词也会用同一个名称实例化！（例 2.3，第 9 行。）请勿在家尝试，不过你甚至可以用c_1, 来实例化，语义树仍然会闭合。同样，e并不代表某个特定对象；它可以解释为任意对象。即使e被解释为一个不同于c_2的对象，证明也必须成立。因此，我们有理由认为P_2e是相关的。

但现在假设我们得到

$(P_1c_1 \,\&\, \sim P_1c_1) \vee (P_2c_2 \,\&\, \sim P_2c_2) \vee \ldots (P_ic_i \,\&\, \sim P_ic_i) \,\&\, \boldsymbol{P_ie} \vee \ldots$ (2.4.1)

or

$(P_1c_1 \,\&\, \sim P_1c_1) \vee (P_2c_2 \,\&\, \sim P_2c_2) \vee \ldots (P_ic_i \,\&\, \sim P_ic_i) \,\&\, (\boldsymbol{P_ie} \,\&\, \sim \boldsymbol{P_ie}) \vee \ldots$ (2.4.2)

例如，如果对于某个常量 c，$\exists x Px$ 和 Pc 出现在同一分支上，就会发生这种情况。

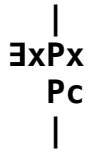


图 2.4.1

公式 (2.4.1) 和 (2.4.2) 表明，$P_i e$ 是冗余的。这里，$\exists x Px$ 是 Pc 的推论，而且其含义比 Pc 更广；它确实是冗余的。

2.5 带等价关系的量化句

我们注意到

1) 等价关系将常元归入等价类；每个分支都有自己的等价类。

2) 对任意常量 c，公式 $c = x$、$c = y$ 等都只是其他谓词；如果 $a \neq b$，那么$a = x$ 和 $b = x$ 是两个不同的谓词。

3）对于某个常量 c，我们可以将 $x \neq x$ 视为 $x = c \ \& \ x \neq c$。

例 2.4。

2.6 多元句

我们最好先来看一些例子。

~(∃x)(∃y)(Fxy & Gy)

令 *Fxy* =定义为= *8), Gy* =定义 *= 12)*。我们得到 ~∃x∃y*(x + y <= 8 & y = 12)*。这是一个哥德尔式句子。根据下方的图7.1，它不t相关。

```
      y
      |
16    | .
15    | .
14    | .
13    | .
12    | G G G G G G G G G G G G G G G G G G G G
11    | .
10    | .
9     | .
8     | F.
7     | F F.
6     | F F F.
5     | F F F F.
4     | F F F F F.
3     | F F F F F F.
2     | F F F F F F F.
1     | F F F F F F F F.
      ---------------------------------------- x
                              1 1 1 1 1 1 1 1 1 2
        1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
```

图7.1

让我们应用表格法:

∃x∃y(x + y <= 8 & y = 12) 假设否定

a + b <= 8 & b = 12 确定 a , b

a + b <= 8

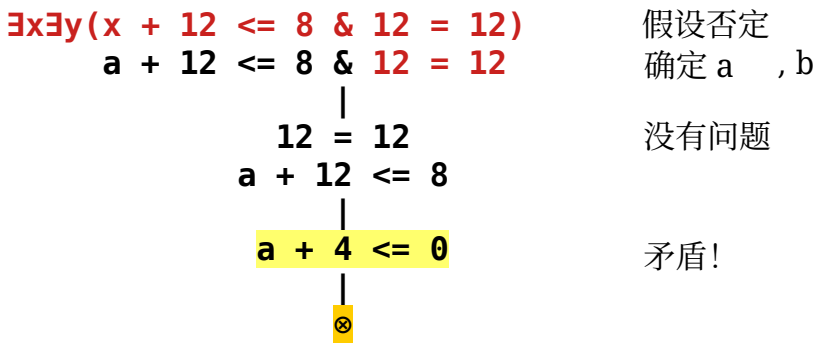
b = 12 矛盾?

a + b - 8 <= 0 矛盾?

⊗

有两个潜在的矛盾，而只有一个分支！（一旦遇到第一个矛盾，该分支就会闭合。）两个谓词不可能都相关。

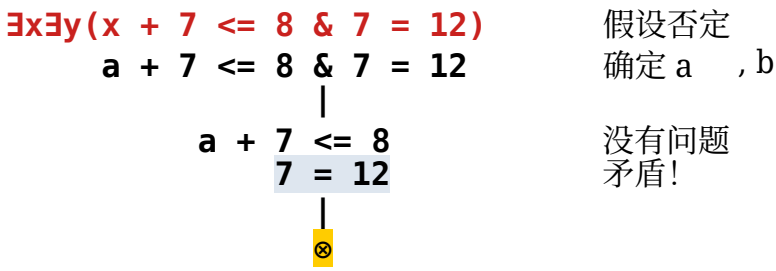
假设我们将 *y* 固定为 **12**：*~∃x∃y(x + **12** <= 8 & **12** = 12)*



假设否定
确定 a , b
没有问题
矛盾!

该谓词 *12 = 12* 是冗余的。

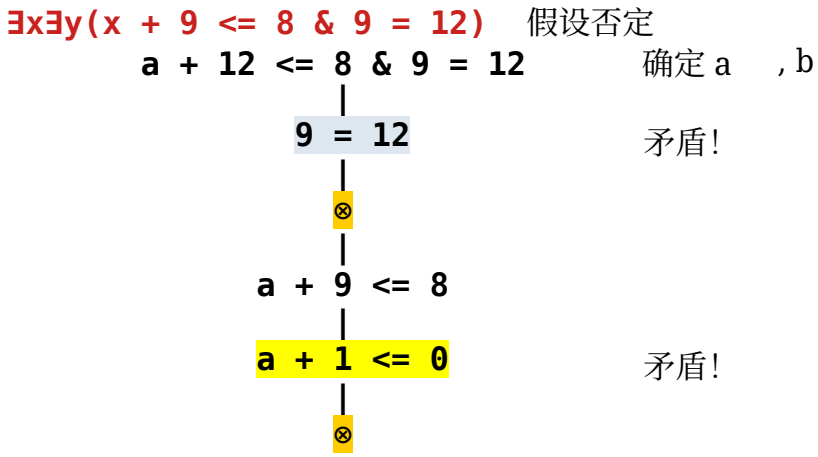
假设我们将*y*固定为**7**：*~∃x∃y(x + **7** <= 8 & **7** = 12)*



假设否定
确定 a , b
没有问题
矛盾!

谓词*x + 7 <= 8* 是冗余的。

假设我们将*y*固定为**9**：*~(∃x)(∃y)(x + **9** <= 8 & **9** = 12)*



假设否定
确定 a , b
矛盾!
矛盾!

无论哪种矛盾先出现，分支都会关闭。该公式有两个与 t 相关的子集，即 *{x + 9 <= 8}* 和 *{9 = 12}*。

但是，对于任何自然数 n，公式 *~(∃x)(∃y)(x + **n** <= 8 & **n** = 12)* 都不会是 t-相关的。
因此，*~∃y(∃x(x + y <= 8) & ∃x(y = 12)* 不是 t-相关的。

句子 ~(∃x)(∃z)(x + z <= *8* & z = *12*) 与哥德尔句子 G = ~(∃x)(∃z)(Prf(x,z) & Diag(k,z)) 非常相似，其中 Prf() 表示 x 是一个序列（即哥德尔数），而该序列是句子（其哥德尔数为）z 的证明；Diag(k,z)) 则只有在 z 为 G 的哥德尔数 ⌜G⌝ 时才成立。如果 ~(∃x)(Prf(x,⌜G⌝) 确实为真，那么从图形上看，情况会与图7.1 非常相似：Prf() 和 Diag() 分别选出的自然数有序对集合 (x,z) 不会相交。这意味着，即使 ~(∃x)(Prf(x,⌜G⌝) 为真且可证，G 也不会是 t-相关的！

* * * * * * *

将上式与 *Fxy* =定义= *(x + y < 8), Gy* =定义= (x + y > 8) 比较。我们得到 ~∃x∃y*(x + y < 8 & x + y > 8).*

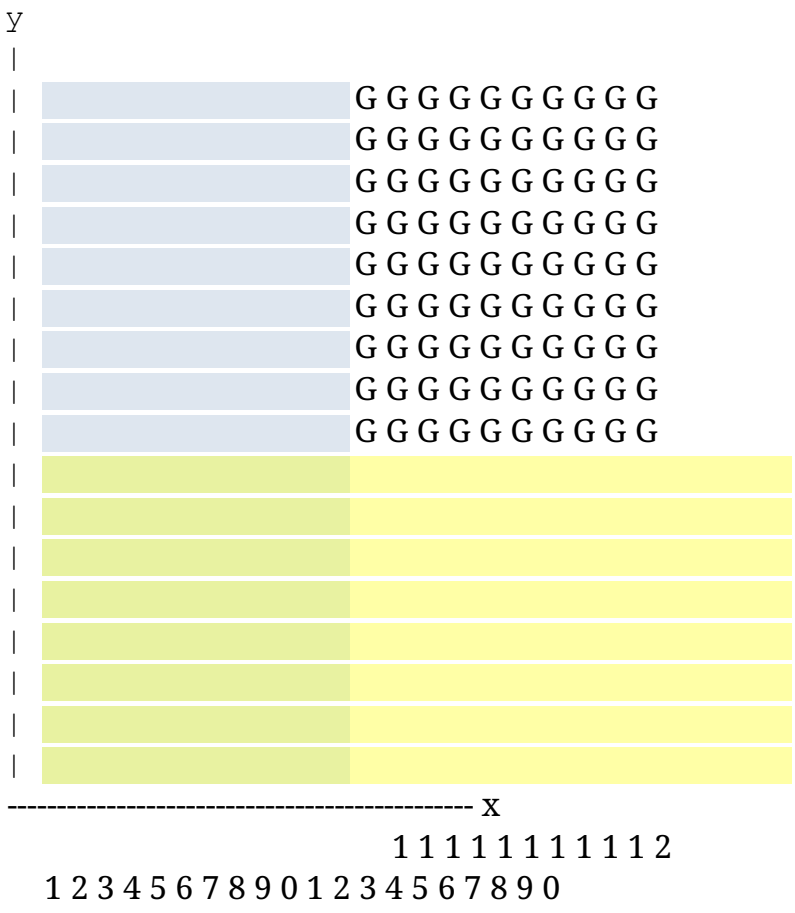


图6.2

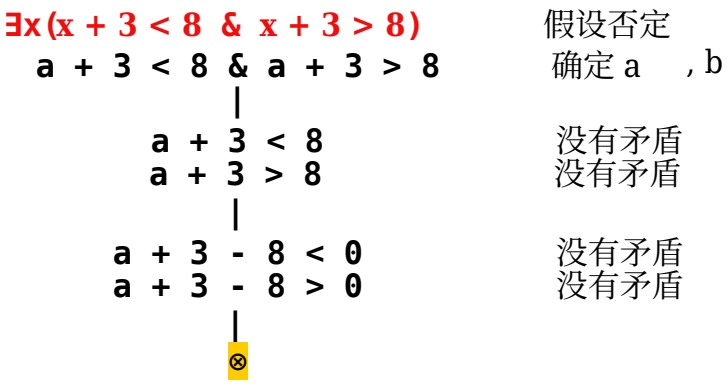
这是一棵树。

∃x∃y(x + y < 8 & x + y > 8) 假设否定
a + b < 8 & a + b > 8 确定 a , b
a + b < 8 ?
a + b > 8 ?
a + b - 8 < 0 ?
a + b - 8 > 0 ?
⊗

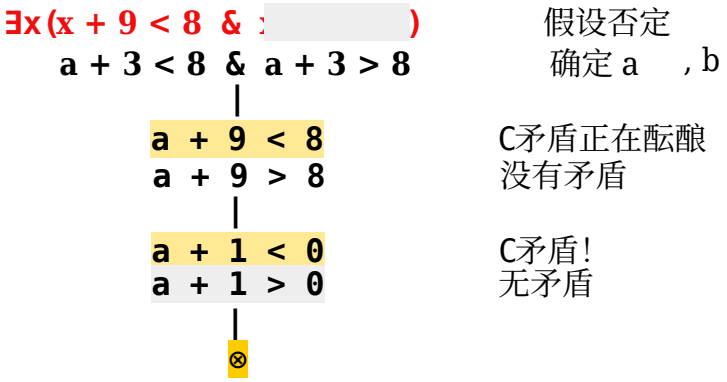
存在数*a*和*b*，使得*a + b < 8*；也存在数*a*和*b*，使得*a + b > 8*。没有问题。这些谓词本身并不自相矛盾。

然而，它们确实彼此矛盾。矛盾的发生需要两者兼备，因此两者都至关重要！

当我们在区间 [1,7] 中的任意位置固定y时，就会得到一个 t-相关句子。例如，令 y = 3:



然而，由于不存在同时满足二者的自然数，$a + 3 < 8$ 和 $a + 3 > 8$ 彼此矛盾。当我们在区间 [8,∞) 中任意固定y时，会得到一个非相关句子:

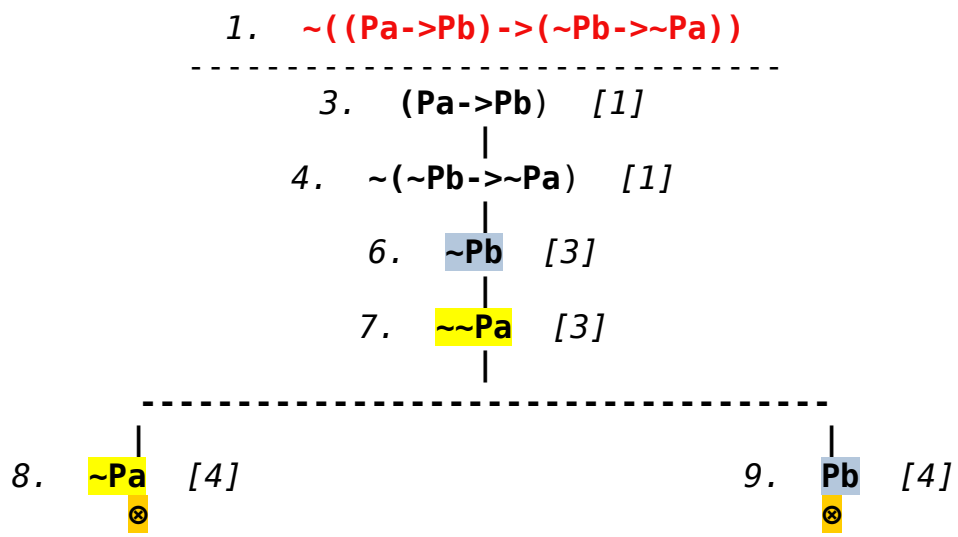


谓词$x + 9 > 8$ 是冗余的。相对于x，情况完全对称。

附录 A – 示例

例 2.1 – 含常元的无量词句子。

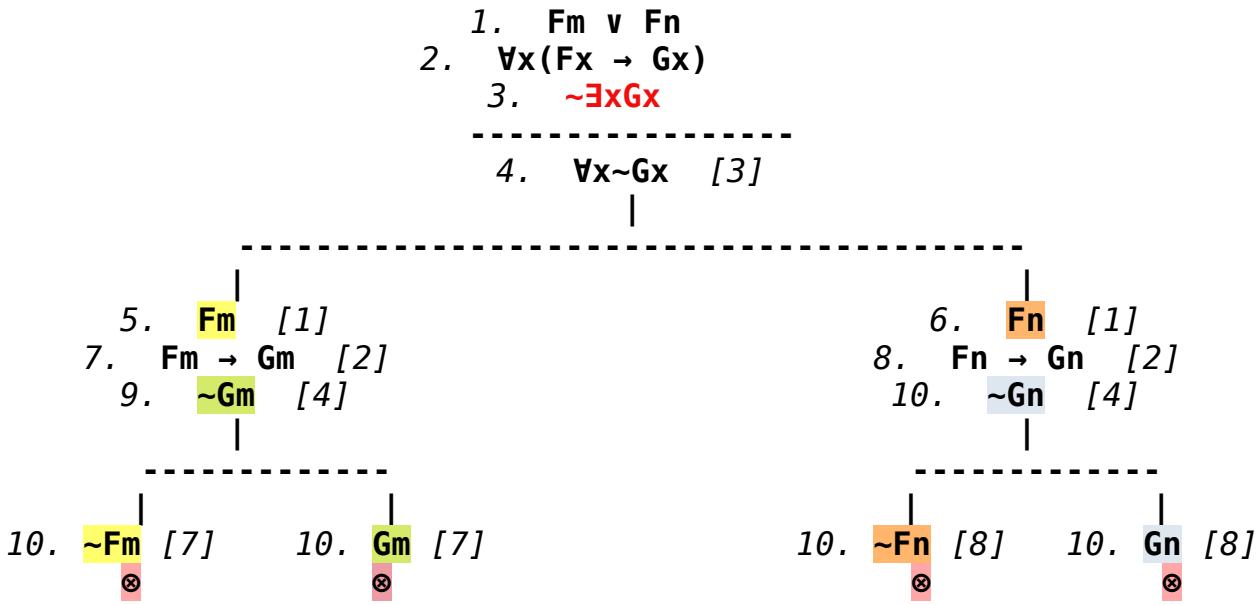
(Pa → Pb) → (~Pb x → ~Pa)。这是一个重言式，下面给出一个语义树证明 f.



谓词 *Pa* 和 *Pb* 的行为类似于命题逻辑中的命题变元。它们都自相矛盾，即该句子是真值相关的，因此为真。

例 2.2 – 全称量化句子

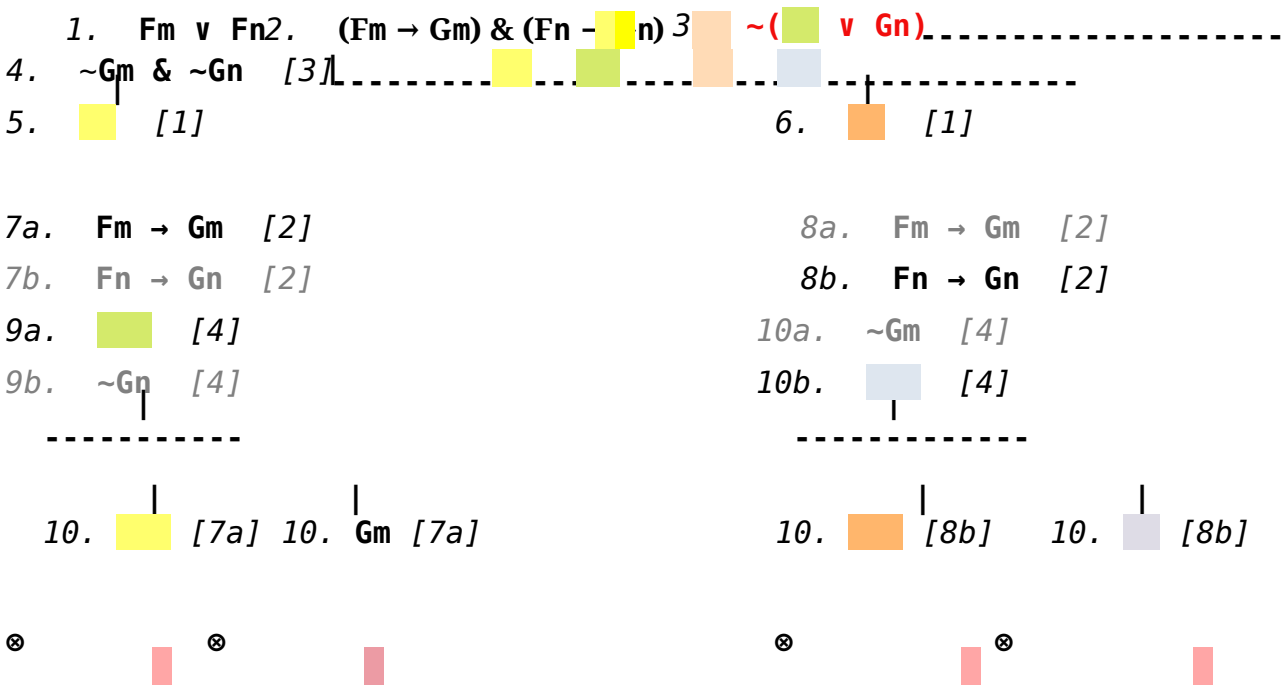
举例如下：*(Fm ∨ Fn), ∀x(Fx → Gx) ⊢ ∃xGx*



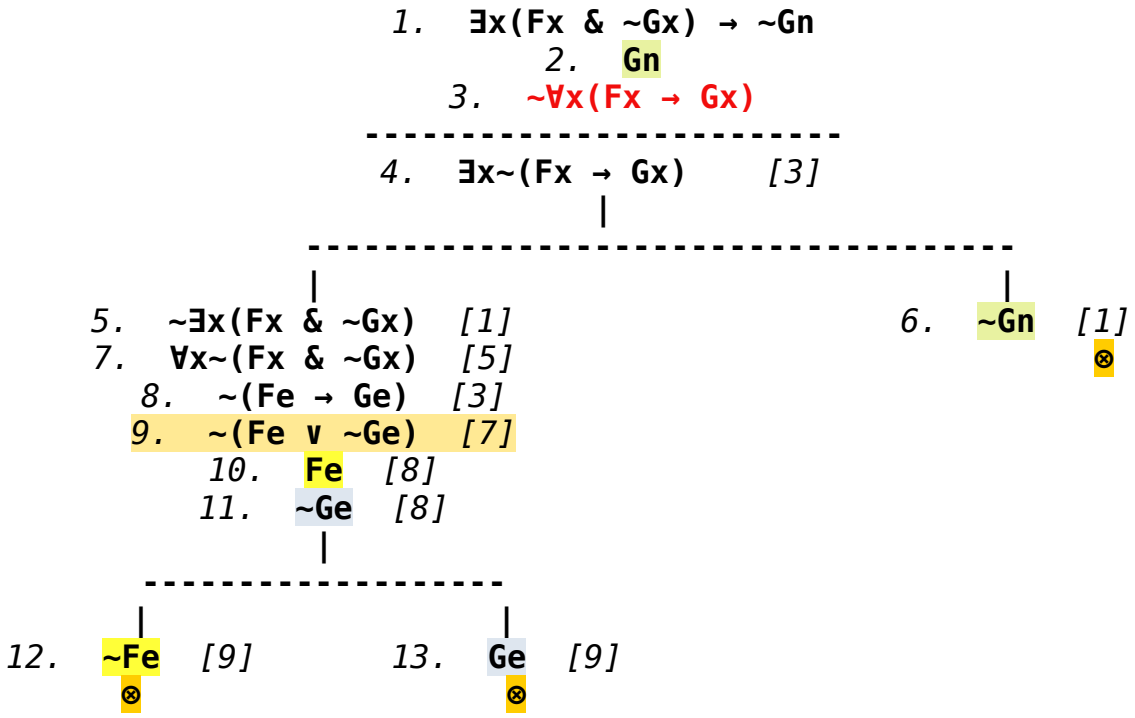
所得的树有四个原子谓词：*Fm, Fn, Gm, Gn*。它们都自相矛盾，因此我们得出结论：蕴涵 *(Fm ∨ Fn) & ∀x(Fx → Gx) -> ∃xGx*有效且 t-相关，也就是说，它为真。

事实上，我们可以通过给出一个反例，将上述三个句子的集合“翻译”为一个无量化句子的集合：

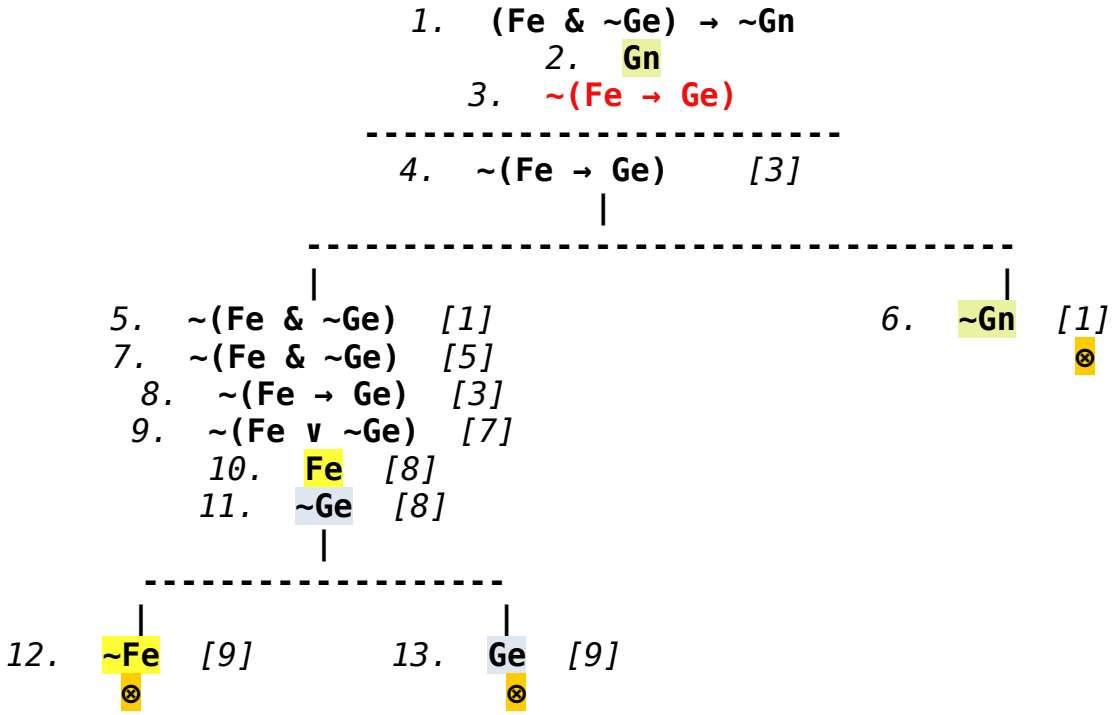
(Fm ∨ Fn), (Fm → Gm) & (Fn → Gn), ~(Gm ∨ Gn)。



例 2.3 – 存在量化句



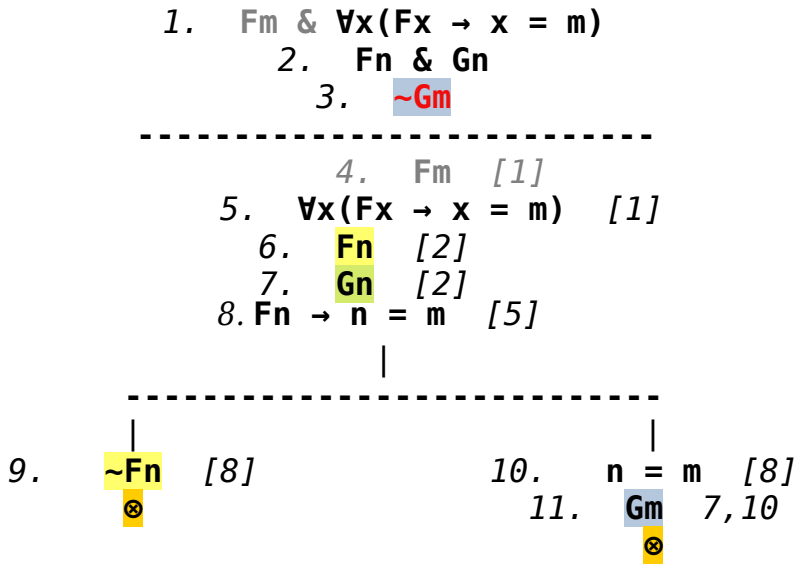
我们可以将上述前提“翻译”为无量词句子。



这里，*e*可以解释为任意对象，甚至可以是*n*，而树仍然会闭合。但是，即使*e*没有被解释为*n*，证明也必须成立。因此，*Ge*是相关的。

例 2.4 – 恒等

Fm & ∀*x*(*Fx* → *x* = *m*), *Fn* & *Gn* ⊢ *Gm*.



我们有四个原子谓词：*Fm*、*Fn*、*Gm*、*Gn*。在右侧分支上，我们得到了*n* = *m*，以及*Gm*自相矛盾；我们不需要明确写出*Gn*自相矛盾。*m*和*n*属于同一个等价类。在左侧分支上，我们有*Fn*自相矛盾，但没有 ***n* = *m***，也没有*Fm*自相矛盾。我们很容易验证，只要省略*Fm*，这棵树同样成立。但*Gn*则不能省略，因为我们根据第7行的*Gm*，在第11行得到了*Gn*。所以*Fm*并不相关。

附录B – 原型案例

设*F*和*G*为原子谓词。共有四种原型案例。

案例1： ~∃xKx [∀x~Kx]案例1.1： ~∃x(Fx & Gx) [∀x(~

形 1.2： ~∃x(Fx v Gx) [∀x(~Fx & ~Gx)] 清

案例2： ∃xKx

案例2.1： ∃x(Fx & Gx) 案例*1.1*的否定情形 2.2： ∃x(Fx v Gx) 案例*1.2*的否定，

案例1.1： ~∃x(Fx & Gx) [∀x(~Fx v ~Gx)]

这些预设是： ∃x*Fx*和 ∃x*Gx* （Newberry 2019a。）

F F F F F . . G G G F.不*t*相关

F 和 *G* 不重叠。每个对象都是 *(~Fx v ~Gx)*。

By flipping the signs of *Fx*, *Gx*, i.e. *Jx =def= ~Fx*, *Kx =def= ~Gx* 我们哦btain ~∃x*(~Jx & ~Kx)* = **∀x*(Jx v Kx)***，也就是说，最后一个公式并不是真正独立的情形。

t-相关性的条件（预设）：∃x*(~Jx)* • ∃x*(~Kx)*

J J J J J * * K 相关* * * * K K K K K K

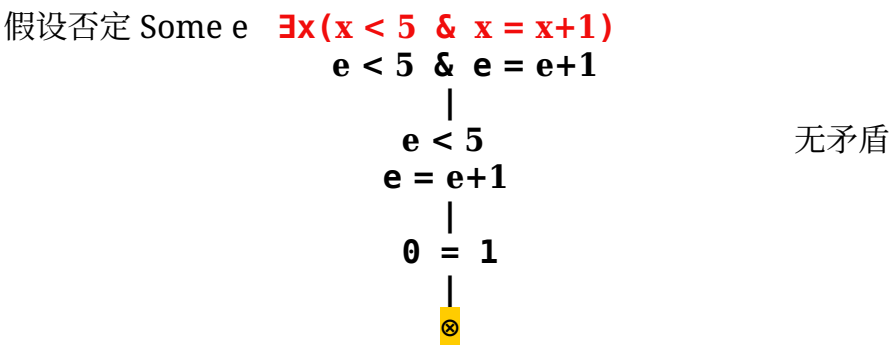
（符号'*'同时表示*J*和*K*。）

例 B1.1: ~∃x*(x < 5 & x > 5)*

∃x(x < 5 & x > 5) 假设否定
e < 5 & e > 5 一些 e
e < 5 没有矛盾
e > 5 没有矛盾
e < 5 & e > 5 → ⊥
⊗

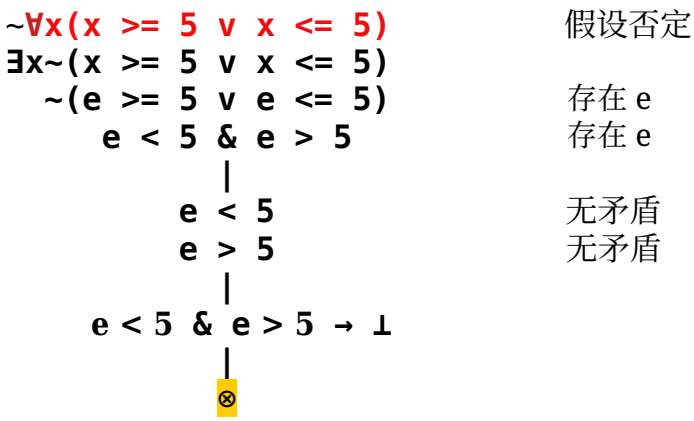
这两个谓词相互矛盾。

示例 B1.2： ~∃x(x < 5 & x = x+1)



谓词 x < 5 是冗余的。

示例 B1.3： ∀x(x >= 5 v x <= 5)



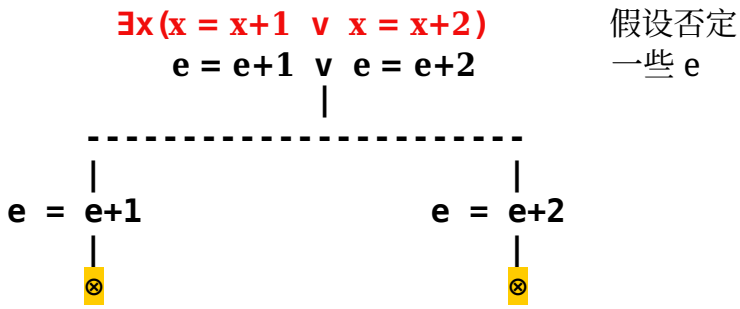
这棵树与情形 1.1.1 非常相似。两个谓词都相关。

情形 1.2：~∃x(Fx v Gx) [∀x(~Fx & ~Gx)] 清洁板

只有两个谓词都为空时，这个句子才成立。

. . .

情形 1.2。1 ~∃x(x = x+1 v x = x+2)

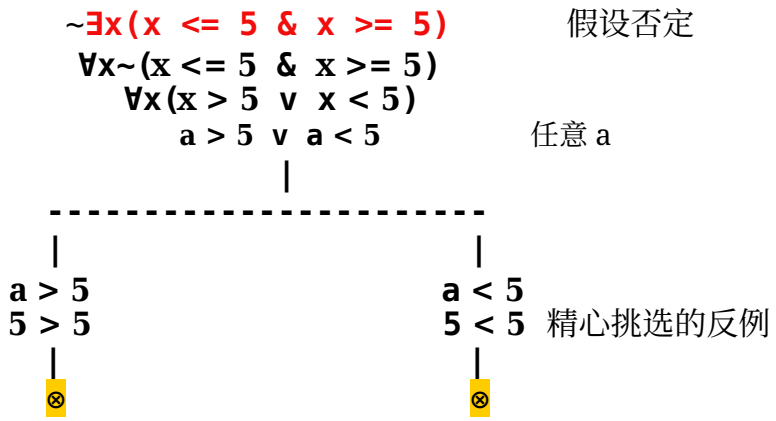


案例2.1：∃x(Fx & Gx) *1.1* 的否定

预设与案例1.1相同：∃x*Fx* 和 ∃x*Gx*。 如果句子成立，它们会自动得到满足。

F F F F F * *

例 2.1.1： ∃x(x <= 5 & x >= 5):



情形 2.2：∃x(Fx v Gx) *1.2* 的否定，非空棋盘

F F F F F . . G G G

情形 2.2.1： ∃x(x < 5 v x > 5)

```
~∃x(x < 5  v  x > 5)          Assume negation
 ∀x~(x < 5  v  x > 5)
∀x(x >= 5  &  x <= 5)
   a >= 5  &  a <= 5           Any a
          |
       a >= 5
       4 >= 5                  Judiciously selected counterexample
          ⊗
          |
       a <= 5
       6 <= 5                  Judiciously selected counterexample
          ⊗
```

不t相关。T 该句子有两个 t-相关真子集：{*x* < *5*} 和 {*x* > *5*} .

情形 2.2.2： ∃x(x < 5 v x = x+1)

```
~∃x(x < 5  v  x = x+1)        Assume negation
 ∀x~(x < 5  v  x = x+1)
∀x(x >= 5  &  x # x+1)
   a >= 5  &  a # a+1          Any a
          |
       a >= 5
      a ≠ a+1                  Judiciously selected counterexample
          |
       4 >= 5                  Judiciously selected counterexample
          ⊗
```

谓词 *x = x+1* 无关。

参考文献

Bergmann, M., Moor, J., Nelson, J.（1980）《逻辑学》，兰登书屋，纽约，

Diaz, M.R. (1981) 相关逻辑专题，慕尼黑，德国：Philosophia 出版社。

Newberry, X.Y. (2015) 对角引理在亚里士多德逻辑中失效，*The Reasoner* 第10卷，第1期，
http://arxiv.org/abs/1510.0439

Newberry, X.Y. (2019a) 预设逻辑语义学，
https://arxiv.org/abs/1509.06837

Newberry, X.Y. (2019b) 真值相关逻辑 – 命题演算，
https://arxiv.org/abs/2204.10887

Strawson, P.F.（1952）逻辑理论导论，伦敦：Methuen

版权所有 © X.Y. Newberry 2019 - 2022

