arXiv:2302.04692v1 [quant-ph] 9 Feb 2023

强激光物理、非经典光态与量子信息科学

U.Bhattacharya[1],**Th. Lamprou**[2,3], **A. S. Maxwell**[4], **A.Ordóñez**[1], **E.Pisanty**[5], **J. Rivera-Dean**[1], **P. Stammer**[1], **M. F.Ciappina**[6,7,8], **M. Lewenstein**[1,9] **和 P. Tzallas**[2,10*1] ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques，巴塞罗那科学技术研究所，西班牙巴塞罗那卡斯特尔德费尔斯 08860[2] 希腊研究与技术基金会，电子结构与激光研究所，希腊克里特岛伊拉克利翁 GR-70013[3] 克里特大学物理系，邮政信箱 2208，希腊克里特岛伊拉克利翁 GR-71003[4] 奥胡斯大学物理与天文学系，丹麦奥胡斯 C DK-8000[5] 伦敦国王学院物理系，英国伦敦 WC2R 2LS[6] 广东以色列理工学院物理系，中国广东汕头大学路 241 号，邮编 515063[7] 以色列理工学院，以色列海法 32000[8] 广东省能源转换材料与技术重点实验室，广东以色列理工学院，中国广东汕头大学路 241 号，邮编 515063[9] 加泰罗尼亚高等研究院，巴塞罗那 Lluís Companys 路 23 号，邮编 08010[10] ELI-ALPS，ELI-Hu非营利有限公司，匈牙利塞格德 Dugonics tér 13 号，邮编 H-6720

*电子邮件：ptzallas@iesl.forth.gr

2023年2月10日

摘要。 强激光物理是一项依托高功率激光器的研究方向，取得了令人瞩目的成就，涵盖相对论粒子加速和阿秒科学等领域。另一方面，量子光学建立在低光子数光源的基础上，为量子技术领域的突破性发现开辟了道路，推动了从量子理论的基频检验到量子信息处理等方面的研究。尽管取得了巨大进展，直到最近，这些研究方向仍彼此割裂。这是因为，在强场极限下，大多数相互作用都已通过半经典近似成功描述，将电磁场视为经典场；解释观测结果并不需要纳入场的量子性质。近年来，强激光物理、量子光学与量子信息科学之间的联系逐渐建立起来。基于全量子化描述和条件制备方法的研究表明，强激光–物质相互作用可用于生成可控的纠缠态和非经典光态。这一成果为大量研究开辟了道路，这些研究源于强激光物理、量子光学与量子信息科学的协同作用。在介绍这些研究方向的基础知识之后，本文将

报告强激光–物质相互作用全量子化描述方面的最新进展，以及为生成非经典光态和纠缠态而开发的方法。此外，我们还将讨论利用强激光场进行非经典光工程的未来方向，以及其在超快科学和量子信息科学中的潜在应用。

目录

1 引言 tion 4

2 基 量子光学与非经典光工程基础 g 6

2.1 量子谐振子.62.2 光的相干态.72.3 量子态表征.82.4 非经典光态.102.4.1 光子数（福克）态.102.4.2 压缩光态.112.4.3 相干态叠加与光学“猫”态 122.4.4 纠缠态.14

3 强激光-物质相互作用基础：半经典方法 15

3.1 强激光-原子相互作用.163.1.1 阈上电离（ATI）和高阶阈上电离 173.1.2 高次谐波产生.183.1.3 非顺序双电离.193.1.4 强场近似.19

4 强激光–原子相互作用：完全量子化方法 20

4.1 强激光–原子相互作用的量子电动力学 . . . . . 224.1.1 使用单色驱动场基于HHG的条件测量：从极紫外到红外产生光学“猫”态和纠缠态 . . . . 234.1.2 使用双色驱动场基于HHG的条件测量：产生光学“猫”态，并使驱动场模式之间发生纠缠 264.1.3 基于阈上电离的条件测量与光学“猫”态的产生 . . . . 274.2 实验方法：产生光学“猫”态 . . . . . 314.2.1 控制光学“猫”态的量子特征 334.3 扩展至与复杂材料的相互作用及大规模纠缠态的产生.33

5 量子信息科学中的应用 35

5.1 拓扑、强关联系统、手性等的探测 . . . . . 365.1.1 利用高次谐波产生探测拓扑序.365.1.2 利用高次谐波产生探测强关联系统 . . . . . 375.1.3 利用高次谐波产生探测手性.395.2 拓扑、强关联系统、手性等的产生 . . . . 405.3 非经典光驱动的强场物理与阿秒科学 . 415.4 在 衰变 过程中产生纠缠.425.5 表征 衰变 过程中的退相干.42

6 结论 **43**

关键词：量子光学、量子电动力学、量子光、量子信息、强激光物理、高次谐波产生

1. 引言

直到20世纪50年代末，自然光（非相干光）一直是主要的可用光源，其量子描述已有完善的理论 formulation，并成功应用于大多数利用光–物质相互作用开展的研究。因此，对经典振荡电磁场的量子描述（如经典电动力学所给出的描述）一直未得到应用。20世纪50年代末至60年代初，三项开创性发现改变了这一局面：Hanbury Brown and Twiss 实验（使用非相干光开展） [1]，T. H. Maiman 发明激光（此前还发明了微波激射器）（参见 [2] 及其中的参考文献），以及 Roy Glauber 和 George Sudarshan 提出光学相干性的量子理论并发明光的相干态（用于描述经典振荡场）（参见 [3–5]）。这些成就有望极大加快科学进步，并带来无数革命性发现，推动研究从屡获诺贝尔奖的实验延伸至基础研究和技术的跨学科领域[6–21]。这一科学进步主要建立在量子光学（QO）和强激光物理（SLP）研究方向的发展之上；后者使激光技术，尤其是脉冲激光源取得了进展 [17, 18]。

具体而言，量子光学（QO）以电磁辐射的量子描述为基础，在很大程度上也建立在光学相干性的量子理论的表述之上[3–5，22–24]。其中一个关键方面是测量光强涨落并表征电磁场的量子态，通常通过光子统计测量、光子关联函数的测量 [1, 3, 4, 25], 以及量子层析方法 [26–32]来实现。在光–物质相互作用的研究中，大多数研究采用弱电磁场（低光子数光源），并以完全量子化理论描述这种相互作用。多年来，研究一直聚焦于单体或少体现象，力图理解原子–光相互作用的非微扰特性（近期综述见 [33]）。

量子光学是量子技术的核心 [34–36]。这是因为光被视为制备量子态（如压缩态、福克态和光学薛定谔“猫”态）的理想资源 [14, 15, 19–21,25, 26,37–53] ，这些量子态具有非经典性质。与经典光相比，这些光态具有一些显著的特征和优势。它们能够降低噪声，并具有量子关联这一显著特性。此外，与物质粒子相比，光在扩展至宏观尺度时受退相干的影响较小。这是因为电磁

光学频率下的环境可视为真空态（即没有粒子的环境），因此相对而言不易发生退相干。这些显著特性使非经典光成为新兴量子技术的关键要素。如今，非经典光态和纠缠光态的制备在量子技术中发挥着至关重要的作用，因为它们为量子信息科学的众多研究领域提供了独特资源，涵盖量子理论的基频检验、量子传感、隐形传态、通信、密码学、视觉科学，以及用于探测引力波的高精度干涉测量 [14, 15, 19–21, 34–36, 54–61]。然而，尽管迄今已取得进展，现有大多数非经典光源的应用仍受限于其光子数较低；与此同时，开发制备高光子数非经典光态和纠缠光态的新方案也被认为颇具挑战性。

另一方面，SLP 依赖于强激光场的使用，并且主要依靠采用半经典近似的模型，在这些模型中，电磁场被视为经典场。激光功率的提升发生在激光发明近十年之后 [62], ，这得益于纳秒（ns）和皮秒（ps）脉冲激光源的发展 [63, 64]。这些光源使非线性过程的观测成为可能。由于这些激光脉冲的电场相对较弱（与原子势的库仑场相比），这些相互作用可以通过涉及多光子吸收过程的最低阶微扰理论成功描述 [65]。在 80 年代末，飞秒（fs）[66, 67] 脉冲激光源的发展，加上啁啾脉冲放大（CPA）技术的开创性发展 [17, 18], ，为分子中的时间分辨实验 [68] 以及对微扰区以外现象的研究开辟了道路。特别是，高功率飞秒激光使科学界得以探索强场极限下的非线性相互作用；在这一极限下，激光电场强度与原子势相当，甚至更强 [69–72]。这类相互作用开辟了广泛研究的道路，涵盖相对论粒子加速（[17] 及其中的参考文献）、高次谐波产生 [73, 74], 、极紫外（XUV）高分辨率光谱学 [75, 76] 以及阿秒物理（AP） [77–82]。原子与强激光脉冲的相互作用是 SLP 和超快科学研究的核心。这些研究的核心过程是高次谐波产生：驱动激光脉冲中的低频光子与原子相互作用后，被上转换为极紫外光谱范围内的高频光子。人们已成功运用经典或半经典强场近似来描述这些相互作用，具体而言即三步模型 [70–72, 83], ；该模型将电磁场视为经典场，并忽略其量子本性。因此，量子光学（QO）与 SLP 相结合所带来的优势一直未能得到利用。通过将 QO 与 SLP 相结合，我们可以着手回答以下基本问题：（a）相互作用对驱动场有何反作用？以及（b）辐射与物质相互作用后处于何种量子态？回答这两个问题的重要性，直接关系到.....的适用性

SLP 与量子技术的结合。多个研究团队已初步尝试解决这些问题 [84–97]。然而，尽管这些研究提供了重要信息，却没有一项工作回答上述问题。这一状况近期已有所改变。理论和实验研究 [52, 53, 98], 采用强场极限下的完全量子化方法开展，将 SLP 和超快科学与量子光学联系起来。研究表明，强激光-物质相互作用以及针对高次谐波产生过程的条件制备方法 [99–102] 可用于产生具有可控量子特征的高光子数非经典光态和纠缠光态 [53, 98, 103–105]。这些显著特性可用于发展新一类非经典纠缠态，推动量子技术领域的研究。

在介绍量子光学以及强激光–物质相互作用的基础知识后，我们将在此讨论后者的全量子化描述。我们将重点讨论强激光–原子相互作用的量子电动力学（QED），以及如何通过相关方法调控高光子数非经典光态和纠缠光态的量子特征。随后，我们将探讨利用强激光驱动复杂材料开发新型非经典光源的潜在方向。最后，我们将重点介绍高光子数非经典光态和大规模纠缠光态的产生，以及它们在超快科学和量子信息（QI）科学中的潜在应用。

2. 量子光学与非经典光工程基础

量子光学是原子、分子与光学物理领域的一个重要研究方向，多年来已有大量书籍和文章对此进行讨论（参见 [22–24, 106–109]）。不过，为了内容完整，并介绍与本文相关的术语和定义，我们将在此讨论这一研究方向的若干基础知识。

2.1. 量子谐振子

量子光学的基础建立在电磁场的量子化之上。将电磁场展开为频率模式后，可将其写成一组彼此独立的量子谐振子（详细推导请参见 [23, 106, 108] ），每个谐振子都有一个频率 ω。因此，对于单个模式，相应的哈密顿量可写为$H = \frac{1}{2}(\hat{}\bar{p}^2 + \omega^2\hat{}\bar{x}^2) = \hbar\omega(\hat{}a^\dagger\hat{}a + 1/2)$，其中 $\hat{}\bar{x}$和 $\hat{}\ \bar{p}$是谐振子的正则算符，类似于谐势中粒子的位移和动量算符，¯ 并满足对易关系 $[\hat{}\bar{x},\ \hat{}\bar{p}] = i\hbar$；$\hat{}N = \hat{}a^\dagger\hat{}a$是光子数算符，其中 $\hat{}a^\dagger$ 和 $\hat{}a$ 分别是产生算符和湮灭算符，并满足 $[\hat{}a,\ \hat{}a^\dagger] = 1$。正则变量 $\hat{}\bar{x}$ 和 $\hat{}\ \bar{p}$ 与产生和湮灭算符之间的关系为 $\hat{}\bar{x} = \sqrt{\hbar/(2\omega)}(\hat{}a + \hat{}a^\dagger)$ 和 $\hat{}\bar{p} = i\sqrt{\hbar\omega/2}(\hat{}a^\dagger - \hat{}a)$。然而，在量子光学中，我们通常不使用正则变量 $\hat{}\bar{x}$ 和 $\hat{}\ \bar{p}$，而是

使用称为正交分量算符的无量纲算符 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$。它们与产生和湮灭算符之间的关系为 $\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$ 和 $\hat{p} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(i\sqrt{2})$。

前面给出的哈密顿量的本征态称为福克态$|n\rangle$，其 $n \in \mathbb{N}$ 及本征值为 $\hbar\omega(n + 1/2)$。因此，由于它们是光子数算符 N的本征态，福克态（也称为光子数态）具有确定的光子数，其中具有 $n = 0$ 个光子的态，即 $|0\rangle$，定义了所谓的真空态。在正交分量 x 表象中，福克态可写为 $\langle x|\,|n\rangle = \psi_n(x) = \psi_0(x)H_n(x)/\sqrt{2^n n!}$，其中 $H_n(x)$是 n阶埃尔米特多项式，而 $\psi_0(x) = \exp(-x^2/2)/\pi^{1/4}$ 则是真空态的波函数。

最后，与电磁场单模相对应的电场算符表示为 $\hat{E}(t) = \sqrt{\hbar\omega/(\epsilon_0 V)}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})$，其中 V 为量子化体积，ϵ_0 为真空介电常数。用正交分量算符表示时，可写为 $\hat{E}(t) = \sqrt{2\hbar\omega/(\epsilon_0 V)}(\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{p})$。在后文中，我们将继续使用这些表达式。

2.2. 光的相干态

通过 formulation of 光的相干态，可以对经典振荡场进行量子描述。单模经典电磁场通常被描述为具有确定振幅和相位的波。然而，在辐射量子理论中，振幅和相位是共轭变量，因此无法在同一实验中以任意精度加以确定。光的相干态（或 Glauber 态）是指这两个物理量的方差乘积达到下限的态，即两个正交分量中的涨落相等，并使海森堡不确定性关系给出的不确定性乘积 $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$ 与 $\Delta x = \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 达到最小。因此，相干态为经典场提供了最优描述。它们通常用希腊字母表示为 $|\alpha\rangle$，并可在福克态基中展开为

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\,, \tag{1}$$

其中 $\alpha = |\alpha|\exp(i\theta)$ 为复振幅，因此平均光子数为 $\langle n\rangle = \langle\alpha|\,\hat{N}\,|\alpha\rangle = |\alpha|^2$。这些态是湮灭算符的本征态，即 $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$；它们可通过将经典振荡电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}\ t)$ 与电磁场模式的矢势算符 $\mathbf{A}(\mathbf{r}\ t)$ 耦合而产生，使得描述该相互作用的哈密顿量为 $\hat{H} = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{J}(\mathbf{r}\ t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}\ t)$。与该哈密顿量对应的幺正演化可用位移算符表示为 $\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)$，它会使相应初始态在相空间中发生位移，位移幅度 α 正比于经典电流相对于频率为 ω 的模式的傅里叶分量。例如，若初始态为真空态 $|0\rangle$，则得到

ˆ 振幅为 α 的相干态，即 $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$。等价地，用正交分量表示可写为 $\alpha = (x_0 + ip_0)/\sqrt{2}$，其中 $x_0 = \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle$ 且 $\hat{p}_0 = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$; 位移算符为 $D = \exp(ip_0\hat{x} - ix_0\hat{p})$，其在 x 表示中的波函数为 $\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \psi_0(x - x_0)\exp(ip_0x - ip_0x_0/2)$，其中$\psi_0(x-x_0) = \pi^{-1/4}e^{-(x-x_0)^2/2}$是位移后的真空态波函数。相干态在自由场动力学下的时间演化，即由哈密顿量 $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ 所决定的演化，为 $|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)|\alpha\rangle = |\alpha\exp(-i\omega t)\rangle$，由此可知，相干态在自由场演化下仍保持相干态。因此，在正交分量 x 表示中，$\langle x|\alpha(t)\rangle = \psi_\alpha(x,t)$ 所得波函数描述了一个高斯波包，其形状不随时间改变，并以场的频率振荡，运动方式如同谐振子势中的经典粒子。

如果利用上述结果计算电场算符的期望值，我们得到 $\langle\alpha|E(t)|\alpha\rangle = |\alpha|\cos(\omega t - \theta)$，这正是经典电磁学中单色电磁场的表达式。因此，相干态被称为“经典”或“准经典”态。由相干态的统计混合态描述的场（例如热场）也被视为经典场，而任何无法由此类混合态描述的态通常都被认为是“非经典”态。

2.3. 量子态表征

光的量子态表征是量子光学中的一个重要主题，在论文的单个章节中几乎不可能面面俱到。通常用于表征并区分经典光场与非经典光场的一些最实用方法，主要基于以下测量：(I)q阶关联函数 $g^{(q)}(\tau)$ [3, 4, 11], (II) 光子数分布，以及 (III) 相空间中的维格纳函数（或 Q 函数、P 函数） [110]。这些方法中的任何一种单独使用都足以区分经典光与非经典光，但并非必要条件（详情参见参考文献 [111] 及其中的参考文献）。

在方法（I）中，使用 $g^{(q)}$ 函数（其中最常用的是 q=2 ）来表征电磁场的统计特性和相干度。 $g^{(q)}$（τ）函数通常通过干涉测量方法和q阶自相关测量获得，其中 q 是非线性阶数，τ 是光子信号之间的时间延迟。在方法（II）中，光子数分布可通过光子统计测量直接获得，其表示为 $P_n = |\langle n|\psi\rangle|^2$ （其中 $|\psi\rangle$ 是电磁场的量子态）。就这些方法而言，相干态呈现泊松光子数分布，其 $P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n! = e^{-\langle n\rangle}\langle n\rangle^n/n!$ ，且归一化的 $g^{(2)} = 1$。这指的是光子随机到达探测器的情形。如果光子数分布导致 $g^{(2)}(0) > 1$，并观察到光子聚束，则称该光源为超泊松分布光源。这指的是光子倾向于成束到达探测器的情形，即与相干态的光子相比，它们在空间（时间）上更加接近。需要指出的是

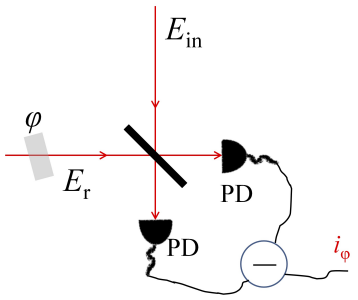

图 1. 零差探测与量子层析方法。E$_{in}$ 是待表征的场的状态，而 E_{r} 是本地振荡器的场 E_{r} （其中$E_{\text{r}} \gg E_{\text{in}}$）。BS 是分束器， φ 是E_{in} 场与 E_{r} 场之间可控的相移。两个相同的光电二极管（标记为 PD）采用平衡差分光电探测系统，在每个 φ值处提供光电流差i_{φ}。通过记录 i_{φ} 随 φ变化的数值，即可表征光的量子态。

非相干光也属于这种情形，其光子数涨落由光源的相干时间决定。具有亚泊松光子数分布且 $0 < g^{(2)}(0) < 1$ 的非经典光源会呈现光子反聚束特征。这是一种纯粹的量子效应，指的是与相干态的光子相比，光子倾向于更加均匀地到达探测器，并且在空间（时间）上彼此间隔更远。

在方法（III）中，可以通过实施零差探测技术和量子层析方法 [26–28]来获得维格纳函数。这种方法被认为是表征光态最完备的方法之一。图 1 展示了通过干涉法实施该技术的简化光路图。 E_{in} 是待表征量子态的电场。 E_{in} 场与本地振荡器E_{r} 的电场（ $E_{\text{r}} \gg E_{\text{in}}$）在时空上重叠于一个分束器（BS）上。 E_{r} 场来自干涉仪的第二个分支，该分支引入了可控相移 φ ，作用于 E_{in} 场和 E_{r} 场之间。BS 后的光场由一个平衡差分光电探测系统探测，该系统由两个相同的光电二极管（PD）组成。这样，在每个 φ 值处都能得到光电流差 i_{φ}。通过记录 i_{φ} 随 φ变化的数值，即可表征光的量子态。这些数值与电场算符的测量值$\hat{}$ $E_{\text{in}}(\varphi) \propto \hat{}x_{\varphi} \propto \cos(\varphi)\hat{}x + \sin(\varphi)\hat{}p$成正比，并用于通过拉东变换[112]重建维格纳函数。实验上，为表征光态只需完成这些操作。这是因为，在每个 φ 处对$\hat{}x_{\varphi}$ 进行重复测量，可得其本征值x_{φ}的概率分布 $P_{\varphi}(x_{\varphi}) = \langle x_{\varphi}|\hat{}\rho|x_{\varphi}\rangle$ ，其中$\hat{}\rho \equiv |\phi\rangle\langle\phi|$ 是待表征光态的密度算符，而 $|x_{\varphi}\rangle$ 是本征值为x_{φ}的本征态。通过使用参考文献 [113]中详述的最大似然迭代程序，计算矩阵元 ρ_{nm} ，即可在福克基中得到密度矩阵$\hat{}\rho$，从而获得光态的完整信息。拥有

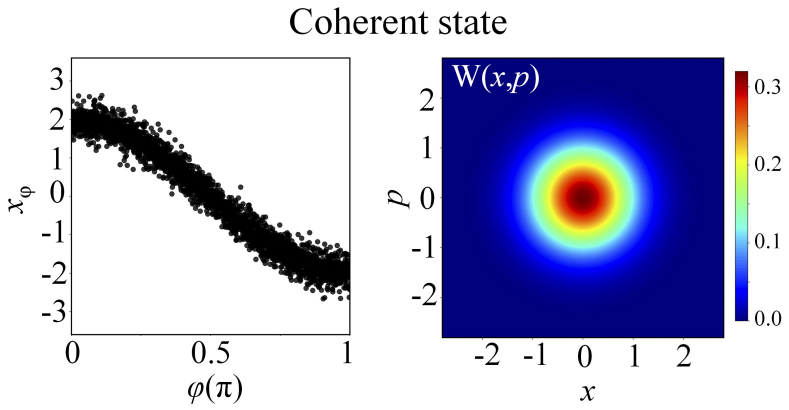

图 2。 相干光态的外差轨迹和维格纳函数 $|\alpha\rangle$。左图显示了计算得到的零差探测信号 x_ϕ，右图显示了相应的维格纳函数 $W(x, p)$，其中心位于 $|\alpha| = 2$。该图复现自参考文献 [98]。

确定这些值后，可通过密度矩阵的对角元素 ρ_{nn} 得到光态的平均光子数$\hat{}\rho$，以及关系式 $\langle n\rangle = \sum n\rho_{nn}$。图2 展示了相干态的计算零差轨迹（左图）和重建的维格纳函数（右图）。维格纳函数是经(x_0, p_0)平移后的真空态维格纳函数，呈现形式为 $W(x, p) = \frac{1}{\pi}\exp[-(x-x_0)^2-(p-p_0)^2]$ 高斯分布；其更简洁的形式为：

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi}e^{-2|\beta-\alpha|^2}. \tag{2}$$

在上式中，我们使用了变换 $x \equiv \mathrm{Re}[\beta-\alpha]$ 和 $p \equiv \mathrm{Im}[\beta-\alpha]$（其中 $\beta = (x+ip)/\sqrt{2}$ 为变量），该变换使维格纳函数以原点为中心，适用于 $\beta = \alpha$、$x = 0$ 和 $p = 0$。

2.4. 非经典光态

任何无法用相干态的混合来描述，或其维格纳函数呈现负值和/或非高斯分布的态，都被视为非经典态。这类态包括福克态、压缩态和相干态叠加，例如光学薛定谔“猫”态。由于这些态是量子技术的核心，以下各小节将介绍它们的一些主要特征。

2.4.1. 光子数（福克）态

从实验角度来看，福克态由单光子源提供。这类光源通过单原子和分子跃迁 [25, 114]，离子阱 [42]，固态材料中的缺陷中心 [115, 116]，量子点 [43],二维材料 [117]，等方式研制而成。如今，最常用的光源基于

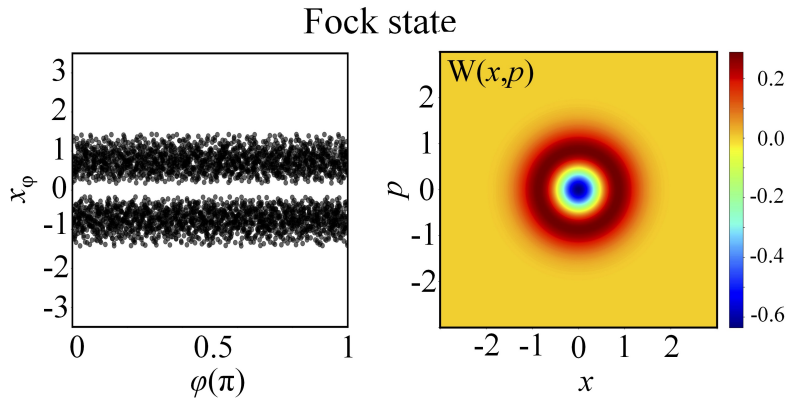

图 3. 福克态 $|n\rangle$ 的外差轨迹和维格纳函数，其中 $n = 1$。左图显示计算得到的零差探测信号 x_ϕ，右图显示相应的维格纳函数 $W(x, p)$。

非线性参量下转换过程 [44–47]，在这一过程中，高能光子与非线性介质相互作用后，会转化为一对低能光子。福克态呈现光子反聚束特性，其光子数分布为亚泊松分布，且光子数限定为 n。维格纳函数呈环状结构，以 $(x = 0, p = 0)$为中心，并呈现负值。其形式为 $W_n(x,p) = (-1)_\pi^{\ n} \exp(-x^2 - p^2) L_n(2x^2 + 2p^2)$ 根据式（2）中采用的变换，可写为：

$$W_n(\beta) = \frac{2}{\pi}(-1)^n e^{-2|\beta|^2} L_n(4|\beta|^2), \tag{3}$$

其中 L_n 为 n 阶拉盖尔多项式。图3 展示了单光子福克态 $|1\rangle$ 的计算外差轨迹（左图）及其对应的维格纳函数（右图）。

2.4.2. 压缩光态

与光的相干态不同，光压缩态的量子涨落并非均匀分布在各场正交分量上。它们是最小不确定度态：与相干态或真空态相比，一个正交分量上的涨落减小，而另一个则增大。它们由非线性相互作用产生，其中晶体中的参量下转换过程是最常用的方法之一 [38]（以及其中的参考文献）。这种相互作用可用哈密顿量 $\hat{} H = \hbar\chi(\hat{}a^2 - \hat{}a^{\dagger 2})$ 来描述，其幺正演化会引入所谓的压缩算符，其形式为 $\hat{}S(k) = \exp\left[-\frac{k}{2}(\hat{}a^2 - \hat{}a^{\dagger 2})\right]$。在此表达式中，$k = 2i\chi\tau$ 是压缩参数，χ是非线性耦合 $\hat{}$ 参数，τ 是相互作用时间。将 $S(k)$作用于真空态 $|0\rangle$，$\hat{}$即可得到压缩真空态 $|\mathrm{SV}\rangle = S(k)|0\rangle$；而位移压缩真空态 $|\mathrm{DSV}\rangle$ 则可通过将位移算符 $D(\alpha)\hat{}\hat{}$作用于 $|\mathrm{SV}\rangle$得到，即$|\mathrm{DSV}\rangle = D(\alpha)S(k)|0\rangle$，其在 x表象下的波函数为

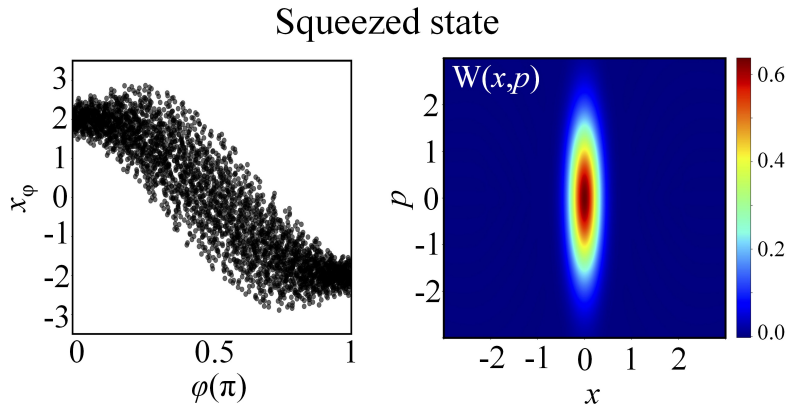

图 4. 振幅压缩态的外差轨迹和维格纳函数，参数为$|a| = 2$ 和 $k = 0.8$。左图显示计算得到的零差探测信号x_ϕ，右图显示相应的维格纳函数 $W(x, p)$，其中心位于 $|\alpha| = 2$。

$\psi_{\mathrm{DSV}}(x) = \pi^{-1/4} e^{-k/2} \exp\left[-e^{2k} \frac{(x-x_0)^2}{2} + ipx - i\frac{x_0 p_0}{2}\right]$。这些态的维格纳函数对应于一个高斯分布，它沿某一正交分量被“压缩”，而沿另一正交分量被拉伸。根据式（2）中使用的变换，可写为:

$$W_{DSV}(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2\left|\frac{(\beta-\alpha)}{e^{-2k}} + \frac{(\beta^*-\alpha^*)}{e^{2k}}\right|^2}. \tag{4}$$

图 4 展示了振幅压缩态的一个计算示例：外差轨迹（左图）及相应的维格纳函数（右图），参数为 $|\alpha| = 2$和 $k = 0.8$。

2.4.3. 相干态叠加与光学“猫”态

振幅和/或相位不同的相干态叠加，可以展现出没有经典对应物的真正量子特征 [37, 106, 107, 118]。单一场模中相干态叠加（CSS）的一般形式为 $|\mathrm{CSS}\rangle = \sum_i \xi_i |\alpha_i\rangle$，其中 $\alpha_i \neq \alpha_j \ \forall i \neq j$，而 ξ_i 是相应的概率振幅。若叠加由两个振幅相等 $|\alpha|$、相位相反的相干态组成，则该态的形式为$|\text{猫}\rangle_\pm = \frac{1}{N_\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$，其中 $N_\pm = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}$是相应的归一化因子。将 $|\text{猫}\rangle_+$ 和 $|\text{猫}\rangle_-$ 在福克基中展开后，分别只含有偶数和奇数光子数，通常称为偶和奇光学薛定谔“猫”态。这是因为在光学领域中，它们类似于薛定谔在其著名的思想实验 中提出的猫[119]。从该态在 x 表象中的波函数可以直接看出这一点，即 $\psi_\pm(x) \propto e^{-(x-x_0)^2/2} \pm e^{-(x+x_0)^2/2}$；它呈现两个峰，一个位于 $+x_0$（对应死猫），另一个位于 $-x_0$（对应活猫 ）。此外，根据叠加中相干态的振幅差异大小，振幅差异较小时称为光学“小猫”态，振幅差异较大时称为大型光学“猫”态，

分别而言。更一般地，当两个相干态的叠加形式为：

$$|\mathrm{CSS}\rangle = |\alpha_1\rangle \pm \xi\,|\alpha_2\rangle\,, \tag{5}$$

我们将其称为平移“猫”态，其中 $\xi = \langle\alpha_1|\,|\alpha_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}\,(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2-2\alpha_1^*\alpha_2)}$ 是两个态的耦合。光学“猫”态的维格纳函数呈现环形结构，并在两个相干态重叠的区域内具有负值。对于较大的光学“猫”态，维格纳函数在（x_i，$\pm p_i$）处呈现两个显著的类高斯峰值，其中 $\pm x_i = \langle\alpha_i|\hat{x}|\alpha_i\rangle$ 和 $\pm p_i = \langle\alpha_i|\hat{p}|\alpha_i\rangle$，并在两个相干态重叠的区域内呈现具有负值的强干涉图样。在这两种情况下，负值都与纯粹的量子干涉效应有关。应用式（2）中使用的变换，式（5）的维格纳函数可写为：

$$\begin{aligned} W(\beta) = \frac{2}{\pi N}\Big[& e^{-2|\beta-\alpha-\chi|^2} + e^{-|\chi|^2}e^{-2|\beta-\alpha|^2} \\ & - \left(e^{2(\beta-\alpha)\chi^*} + e^{2(\beta-\alpha)^*\chi}\right)e^{-|\chi|^2}e^{-2|\beta-\alpha|^2}\Big], \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $N = 1 - e^{-|\chi|^2}$ 是 $|\mathrm{CSS}\rangle = |\alpha_1\rangle - \xi\,|\alpha_2\rangle$ 在$|\alpha_1\rangle = |\alpha_2 + \chi\rangle$下的归一化因子。图5a 和5b 分别展示了移位光学“猫”态和移位大光学“猫”态的两个计算示例：外差轨迹（左图）及其对应的维格纳函数（右图）。

光学“猫”态被视为量子技术和量子信息科学中众多研究领域的一种资源。然而，这些态的产生并非易事，需要实施复杂的量子光学协议。S. Haroche 和 D. J. Wineland 的开创性工作首次实现了对这些态的观测，他们借助腔量子电动力学和离子阱实验制备了猫态 [14, 15]。随后，特别是从2004年到2017年，人们发展了量子态工程中的全光学方法，用于产生光学“猫”态和“小猫”态（参见 [48, 49, 51, 120, 121]）。这些方法借助线性光学元件，并以福克态、相干态和压缩光态作为初级光源来实现。然而，这些光源所产生的低光子数“猫”态限制了其在许多新颖量子技术研究中的适用性；通过发展能够产生具有可控量子特征的高光子数光学“猫”态的新方案，可以极大地推动这些研究。最近，人们借助强激光–物质相互作用发展了此类方案。具体而言，近期 [52, 53, 98], 在强场极限下采用完全量子化方法开展的理论和实验研究表明，在高次谐波产生过程中，强激光–原子相互作用和条件制备方法[99–102] 可用于产生具有可控量子特征的高光子数非经典光态和纠缠光态 [53, 98, 103–105]。第 4 节将进一步讨论这一问题。

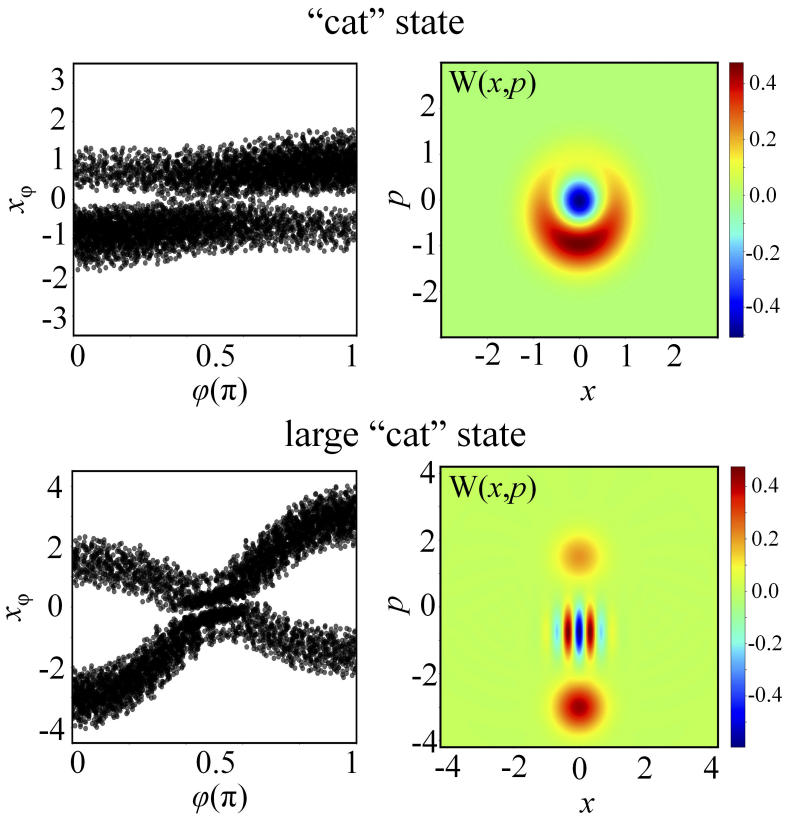

图 5. 相干态叠加 $|\mathrm{CSS}\rangle = \xi_1 |\alpha_1\rangle + \xi_2 |\alpha_2\rangle$ 的零差曲线和维格纳函数示例。左侧面板显示计算得到的零差探测信号 x_ϕ，右侧面板显示相应的维格纳函数 $W(x,\ p)$。（上图）：一个经过位移的光学“猫”态，其中 $\xi_1 = 0.7$, $\xi_2 = -1$, $\alpha_1 = 0.3$ 和$\alpha_2 = -0.6$。（下图）：一个经过位移的大型光学“猫”态，其中 $\xi_1 = 0.7$, $\xi_2 = -1$,$\alpha_1 = 1.5$ 和 $\alpha_2 = -3$。

2.4.4. 纠缠态

到目前为止，我们只考虑了电磁场的单一模式，该模式可由态 $|\psi_1\rangle$ 描述，例如福克态、相干态或压缩态。然而，如果将电磁场的另一个模式纳入考虑，并用态 $|\psi_2\rangle$ 描述，那么我们现在可以考虑由这两个模式组成的场的总系统。由于现在有两个模式，它们例如可以是不同的空间模式或频率模式，因此我们可以讨论一个双体系统，其中每个场模代表一个子系统。此时，场的总态例如由张量积 $|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$ 给出。然而，两个场模总态的最一般情形，则可表示为对每个模式进行基展开

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle |j\rangle , \tag{7}$$

其中，$c_{ij} = \langle ij| |\Psi\rangle$ 分别表示两个模式的基态 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$。现在，如果状态 $|\Psi\rangle$ 无法写成可分张量

乘积形式，即 $|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle$。量子形式体系允许纠缠这一事实 [122] 最初引发了解释上的困难，这源于爱因斯坦、波多尔斯基、罗森（EPR）和薛定谔的著名研究 [119, 123], ，并引出了对量子理论基础的疑问与研究 [122]。近 90 年后，纠缠的概念已发展成为现代量子技术的一种多用途工具和资源 [124]。

本文着重描述场中不同频率模式的纠缠态，每个模式均由一个相干态表示。这类纠缠相干态 [125] 将在高次谐波产生过程的分析中出现[98, 102, 103] (见第 4节)。除了利用高次谐波产生过程外，还可以通过干涉仪方案 [126] 或让相干态叠加入射到分束器上来产生纠缠相干态 [127]。

3. 强激光-物质相互作用基础：半经典方法

飞秒激光脉冲工程的巨大进步 [128] 推动了桌面激光系统的发展。如今，这些系统能够产生高功率激光脉冲，脉冲持续时间短至几个光学周期，载波波长范围从可见光和近红外（IR）一直延伸至中红外（M-IR）光谱范围 [129],以及太赫兹脉冲 [130]。

这些脉冲所能达到的高强度，使人们得以研究强场极限下的激光-物质相互作用，此时激光电场强度已接近原子内部的束缚场。在这一强度区域内的相互作用，促成了对物质各种状态下许多令人着迷的非线性过程的观测。其中包括强激光–原子相互作用以及高次谐波产生（HHG）过程，这为从极紫外（XUV）高分辨率光谱学到阿秒物理（AP）的众多研究开辟了道路。用于研究这些相互作用的典型装置以简化形式示于图 6中。简而言之，一束线性偏振飞秒激光脉冲被聚焦到靶上。以原子（惰性气体）作为靶介质时，驱动激光脉冲在相互作用区域内的强度通常为 $I_L > 10^{14}$ $\mathrm{W/cm^2}$。相互作用会产生离子、光电子以及沿激光场传播方向发射的高次谐波光子。由于谐波产生过程具有非线性，谐波光束的发散角小于驱动场。此类研究的核心是对光子与电荷（电子、离子）相互作用产物进行测量和表征。通常采用常规探测器/光谱仪以及用于测量超快过程的泵浦-探测方案来实现，而对相互作用过程的描述和实验结果的解释则基于半经典方法。

强激光–原子相互作用是 SLP 中最基频的过程之一。因此，为了介绍本文相关的术语和定义，我们将在下一节讨论强激光–

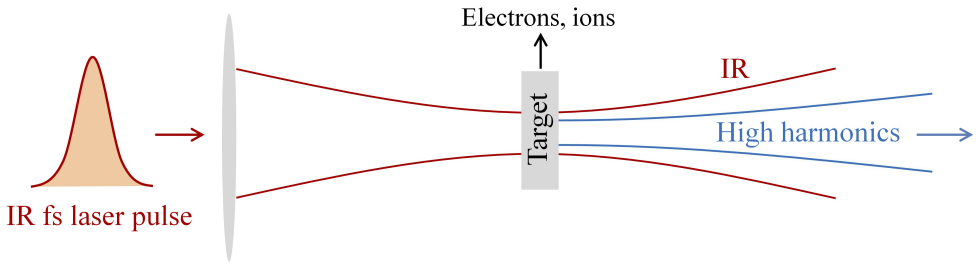

图 6. 研究强激光–物质相互作用的一种典型方法的简化示意图。红外激光脉冲聚焦于靶区，其中包含待研究的介质（原子、分子、固体等）。以原子作为靶介质时，驱动激光脉冲在相互作用区域的强度通常为 $I_L > 10^{14}$ W/cm^2 （适用于惰性气体）。介质长度小于驱动激光的共焦参数，因此沿传播方向所经历的强度相同。相互作用产物包括电子、离子以及沿驱动场方向发射的高次谐波。

原子相互作用。

3.1. 强激光–原子相互作用

强激光–原子相互作用的主要特征，可以借助过去几十年发展起来的理论工具来理解；这一研究始于 Keldysh 于 20 世纪 60 年代的开创性工作 [131–135]。根据 Keldysh理论，电子可以通过多光子电离、隧穿电离或越垒电离脱离原子实。这些区域可用 Keldysh参数 $\gamma = \sqrt{I_p/(2U_p)}$来表征，其中 I_p 是原子的电离势，$U_p = F_0^2/(4\omega_L^2) \approx 9.33 \cdot 10^{-14}\ [I_L(\mathrm{W/cm^2})\lambda_L^2(\mu\mathrm{m})]$ 是有质动力能，即振幅为 F_0 、频率为 ω_L的激光场中电子的平均振荡能量。当 $\gamma \gg 1$时，多光子电离占主导；而当 $\gamma < 1$ 和 $\gamma \ll 1$ 时，隧穿电离和越垒电离分别占主导（图 7a）。高次谐波产生和阿秒科学领域的大多数研究，都是在 $\gamma < 1$且谐波发射满足相位匹配的实验条件下进行的。因此，此处不讨论 $\gamma \gg 1$的情况。在 $\gamma < 1$的强度范围内，电子从被激光场 $E(t)$弯曲的原子势中隧穿逸出，随后在激光场中加速并获得动能，之后可能与母离子发生弹性或非弹性再碰撞。这种相互作用已由经典或半经典模型成功描述，其中包括将电磁场视为经典场的三步模型 [70–72, 83], 。这一再碰撞过程每隔半个驱动激光场周期重复一次，并通过阈上电离和高阶阈上电离过程产生电子（图 7b、c），产生高次谐波光子（图 7d），并通过非序列双电离产生双电荷离子（图 7e）。

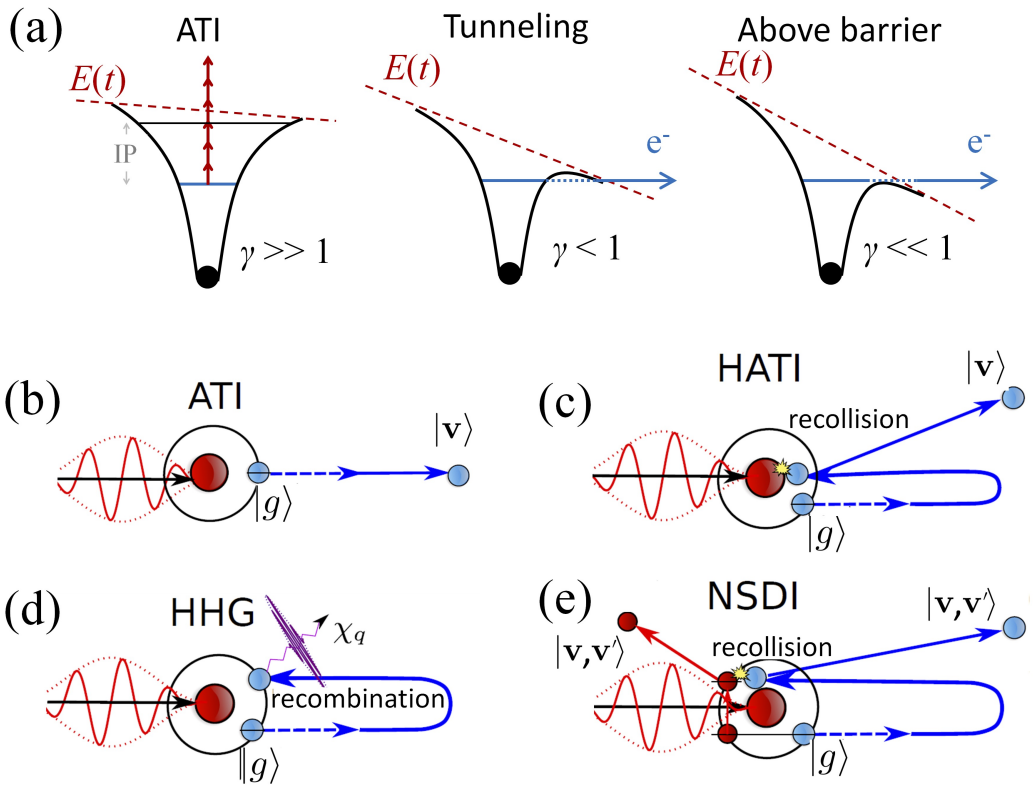

图7. (a) 强激光–原子相互作用的简化示意图。红外激光脉冲聚焦到靶区，其中包含原子（通常为惰性气体）。相互作用区域内激光脉冲的强度通常为 $I_L > 10^{14}$ W/cm^2。图中展示了激光场 $E(t)$ 影响下的原子库仑势，分别对应阈上电离、隧穿电离和越垒电离情形。红色竖直箭头表示多光子吸收。IP 表示电离势， γ 表示 Keldysh参数。电子从激光场作用下弯曲的原子势中隧穿而出，随后在激光场中加速并获得动能，之后可能与母离子发生弹性或非弹性再碰撞。该过程在驱动激光场的每半个周期重复一次，从而产生电子（通过阈上电离和高阶阈上阈上电离（HATI）过程）、离子（通过非序列双电离）和高次谐波光子。(b)–(e) 分别为高次谐波产生、阈上电离、阈上阈上电离和非序列双电离过程的示意图。初始和最终电子态分别由 $|g\rangle$ 和 $|\mathbf{v}\rangle$表示。图中描绘了两个经典光场：红色表示入射强红外激光场，紫色表示谐波发射。

3.1.1. 阈上电离（*ATI*）和高阶阈上电离

实验中得到确证的首个强场效应是阈上电离，即光电子通过吸收超过克服电离势垒所需数量的光子而发生电离。这一现象的范围从较低场强下所谓的“多光子”区域（在此区域中，光子吸收图像可以提供良好的模型），延伸到更高场强下微扰理论完全失效的区域；此时，准静态图像（通常称为光学隧穿）能提供更好的描述。阈上电离的一个显著特征是光电子能谱中出现“梳状”结构，

其中各峰之间相隔一个光子的能量；在时域中，这种现象源于一系列光电子波包之间的干涉，这些波包以驱动激光的周期性产生。

最早的阈上电离观测 [136] 只需要少数几个光子，仍可用最低阶微扰理论（LOPT）解释。然而，后来的结果 [137]表明微扰理论明显失效，从而促使人们采用诸如 Keldysh-Faisal-Reiss（KFR）理论之类的隧穿理论 [131, 133, 138] ，最终发展出得到广泛应用的强场近似（SFA）[139, 140] 及其半经典诠释；该诠释将其与经典图像——三步模型联系起来 [70, 71]。关于 SFA 历史与现状的完整综述，请参阅参考文献 [83]；另请参阅 [141] ，以了解阿秒科学和强场物理理论方法的更全面综述。

阈上电离的三步模型为这一过程提供了清晰的物理图像，可分为两个部分：(i) 直接阈上电离，如图7b 所示，其中电子在强激光场作用下从靶中释放出来，主要由激光场驱动传播至探测器，并且不再与其母离子发生显著的进一步相互作用；(ii) 高阶阈上电离（HATI），如图7c 所示，其中电离电子在激光驱动下与其母离子发生弹性再碰撞。直接阈上电离过程对应于相对较低的光电子能量，其经典截止能量为 $2U_{\mathrm{p}}$。相比之下，HATI 过程对应于高得多的光电子能量，通常表现为一个较长的平台区，其截止能量为 $10U_{\mathrm{p}}$ [142]，这直接模拟了三步模型中的经典动力学。然而，再碰撞动力学通常比三步模型丰富得多，也具有更强的量子力学特征——事实上，返回的电子会以能量很高、波长极短的波包形式回来，可用于形成母原子或分子离子的图像，例如激光诱导电子衍射（LIED） [143, 144]，（下文将对此进行讨论），或光电子全息术 [145, 146]。

3.1.2. 高次谐波产生

在阈上阈上电离中，隧穿逸出的光电子与其母离子之间的再碰撞过程，是强场物理的核心动力学特征之一。因为除了阈上阈上电离中的弹性散射外，这一过程还会导致多种结果，包括非弹性散射以及母离子的进一步电离。但最值得注意的是，它还可能使携带显著动能的光电子复合回其在母离子中留下的电子空穴。这种复合会产生高频辐射脉冲，以尖锐的光脉冲形式发射，其持续时间通常只有几十阿秒。这些脉冲通常形成周期性的脉冲序列，其频谱由激光驱动场的谐波组成，因此这种发射被称为高次谐波产生（图 7d）。

通常，人们会将这种发射非正式地视为发射一个单光子，该光子带走光电子的动能。本研究的主要目标之一，是阐明这种光子图像在多大程度上与严格的描述相吻合

量子光学领域内的理论描述。与阈上阈上电离中的光电子类似，发射辐射通常形成谐波频率梳，具有宽广而平坦的平台区，并在尖锐的截止处终止，随后发射呈指数衰减。该截止的位置由所谓的“截止定律”决定 [72, 83, 147]，$\hbar\Omega_{\text{cutoff}} = 3.17U_p + 1.32I_p$，其中包括经典三步模型的预测： [70, 71] 电子的最大再碰撞能量为 $3.17U_p$，再加上束缚能 I_p，并通过量子修正因子 1 作适当修正。32 [72, 147]。

实验上，高次谐波产生于20世纪80年代末首次被观测到 [73, 148], ，人们发现发射出的谐波是锁相的 [149]，并据此迅速发展成为一种极具吸引力的阿秒脉冲光源。随着这一领域日趋成熟，人们对高次谐波产生的微观 [150]和宏观相位匹配 [151–154] 方面都实现了更精准的控制，使其得以拓展至多种研究方向，包括将高次谐波发射视为参量非线性光学过程时对其守恒定律的研究 [155–161] 、通过多色调控波形来优化谐波截止 [162–164], 、对谐波发射偏振态进行精细调控 [157, 158, 165], 、利用靶连续态中的共振 [141, 166–168], ，以及控制发射光束中的光学奇点 [159–161, 169], ，等等。

3.1.3. 非顺序双电离

上述过程——阈上阈上电离（HATI）和高次谐波产生（HHG）——阐明了激光驱动的再碰撞分别导致弹性再碰撞或复合的情况。然而，如果发生再碰撞的光电子经历非弹性再碰撞，则可能通过非顺序双电离（NSDI）或非序列多重电离（NSMI）引发进一步电离。关于 NSDI 和 NSMI 的首批证据发现于 [170], ，当时多重电离靶的电离产额与序列电离机制所预测的结果并不吻合。随着激光强度增加，电离速率从非序列区向序列区转变，由此出现了著名的膝状结构 [171]。这种非序列行为最终被归因于一种再碰撞机制 [172, 173], ，该机制被描述为一种三步机制 [71], ，与 HHG 和 HATI 直接类似。图7e 展示了与 NSDI 相关的半经典过程。NSDI 中再碰撞的一个最有力指标，是两个电子之间的高度相关性 [173]。近期研究表明，在某些情况下，特别是在较低激光强度下，两个光电子的轨道角动量处于纠缠态[174]。

3.1.4. 强场近似

严格来说，物质与强激光场的相互作用由含时薛定谔方程（TDSE）描述，该方程能够捕捉波函数的演化以及物理可观测量随时间的变化。然而，要对系统的所有自由度求解 TDSE，在计算上

极具挑战性。此外，对数值结果作出物理解释也绝非易事。因此，人们非常欢迎各种近似方法。其中一种方法是强场近似（SFA） [72], 多年来，它一直被证明是描述强激光-物质相互作用的得力工具。鉴于该方法多年来已得到广泛研究和报道（参见 [83]），此处我们仅介绍强激光-原子相互作用中的基本内容。

原子与单模长波长（红外）线性偏振激光场$\mathbf{E}_{\rm cl}(t)$相互作用时的非相对论含时薛定谔方程，其频率为 ω_L ，写作：

$$i\hbar\frac{\partial\left|\Psi(t)\right\rangle}{\partial t}=\hat{H}\left|\Psi(t)\right\rangle, \tag{8}$$

^ ^ ^ 其中，哈密顿量 $H = H_a + H_{\rm int}$描述单活性电子（SAE）近似下的激光–靶系统。这里， H_a 是原子哈密顿量，而^$H_{\rm int} = e\mathbf{E}_{\rm cl}(t)\ \cdot$^$\mathbf{r}$ 是在偶极近似下的相互作用哈密顿量，描述原子如何通过偶极算符$\mathbf{d} = e$^$\mathbf{r}$与经典场$\mathbf{E}_{\rm cl}(t)$耦合。

在 $\gamma < 1$区域内，假定原子有效势对连续态中电子动力学的影响较小，因此可以用微扰理论处理。这导出了以下“标准强场近似”的表述：（i）电子动力学发生在由基态 $|\mathrm{g}\rangle$ 和散射态 $|\mathbf{v}\rangle$ （其中$\mathbf{v}$为电子动量）张成的子空间内。也就是说，忽略激发束缚态。（ii）基态振幅被视为 ≈ 1 ，即原子基态不会耗尽。（iii）在连续态中，电子态取自精确散射态基组，这些散射态是^ $H_a\left|\mathbf{v}\right\rangle = \mathbf{v}_{2m}^{\ 2}\left|\mathbf{v}\right\rangle$的本征态，且动量$\mathbf{v}$固定。然而，强激光场占主导地位，因此可以围绕束缚场对连续态进行微扰展开；在零阶近似下，电子可视为在激光场中运动、且不受原子势影响的自由粒子。作出这些近似后，波函数可写为 $|\Psi(t)\rangle = e^{iI_p t}(|\mathrm{g}\rangle + \int \mathrm{d}^3\mathbf{v}\ \ b(\mathbf{v}\ t)\left|\mathbf{v}\right\rangle)$，含时薛定谔方程（式（8））便可通过 $b(\mathbf{v}\ t)$精确求解，得到闭式表达。因此，可以分别利用电离振幅 $b(\mathbf{v}\ t)$和偶极矩阵元 $\langle\Psi(t)|$^$\mathbf{r}\ |\Psi(t)\rangle$，通过鞍点法计算离子、电子和高次谐波产生光谱。图8展示了一个具有代表性的高次谐波产生光谱和阈上电离谱示例；这些光谱是在氩原子与线偏振激光脉冲相互作用时计算得到的（使用Qprop软件 [175]），激光强度为 8×10^{13} W/cm^2，脉冲持续时间为 $\sim$30 fs。

4. 强激光–原子相互作用：完全量子化方法

近期出版物中已广泛讨论了强激光–原子相互作用的全量子化描述，以及用于生成非经典态和纠缠态的条件化方法 [52, 53, 98, 103, 105]。在此，

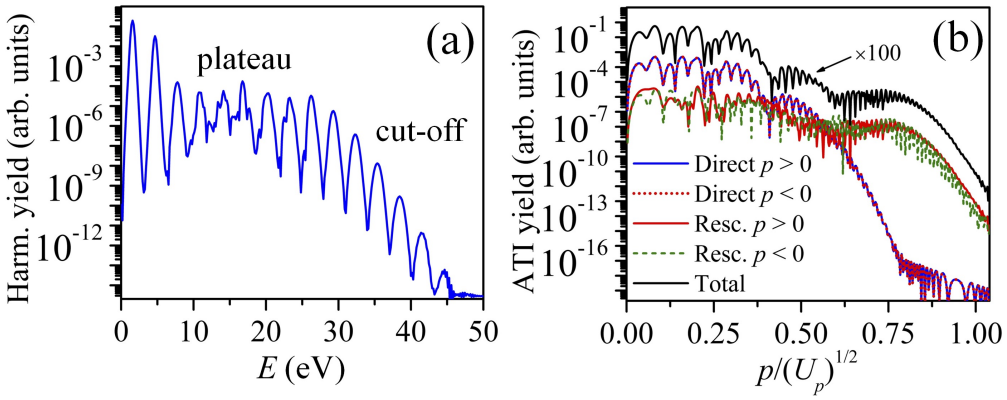

图 8. 氩原子与线偏振激光脉冲相互作用时计算得到的高次谐波产生（a）和阈上电离（b）谱，强度为 $8\times10^{13}\,\mathrm{W/cm^2}$，脉冲持续时间为 $\sim30\,\mathrm{fs}$。在（b）中，分别以不同颜色显示了对应于直接光电子以及正（$p>0$）和负（$p<0$）动量再散射光电子的光电子能谱。黑色实线所示的阈上电离谱包含直接电子和再散射电子的贡献，为便于观察，其数值放大了 100 倍。图经参考文献 [98]复现。

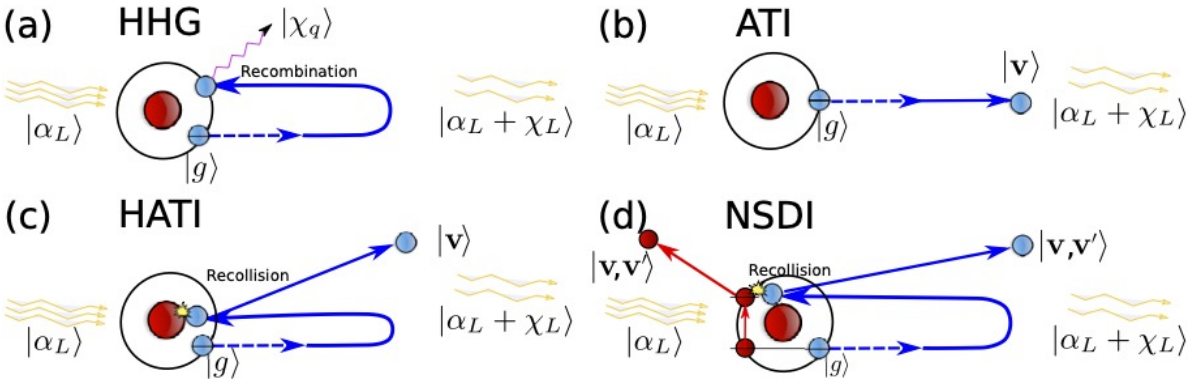

图 9. 强激光–原子相互作用的全量子化描述示意图。从（a）到（b）依次为高次谐波产生、阈上电离、阈上阈上电离和非序列双电离。转载自参考文献 [98]。

我们总结主要发现，并着重介绍与量子信息科学潜在应用相关的结果。

强激光–原子相互作用的全量子化描述如图 9所示，其中 $|\alpha_L\rangle$ 和 $|\alpha_L+\chi_L\rangle$ 分别是相互作用前后的驱动场模式的状态，$|\chi_q\rangle$ 是生成的高次谐波模式的状态，而 $|g\rangle$ 和 $|\mathbf{v}\rangle$ 分别是初始和最终电子态。需要注意的是，NSDI 中的电子可能处于纠缠态 [174], ，因此将其写成双粒子态。量子光学自由度也可能彼此纠缠，并与电子态发生纠缠；不过，为了便于清晰标注，我们将它们分别写出。

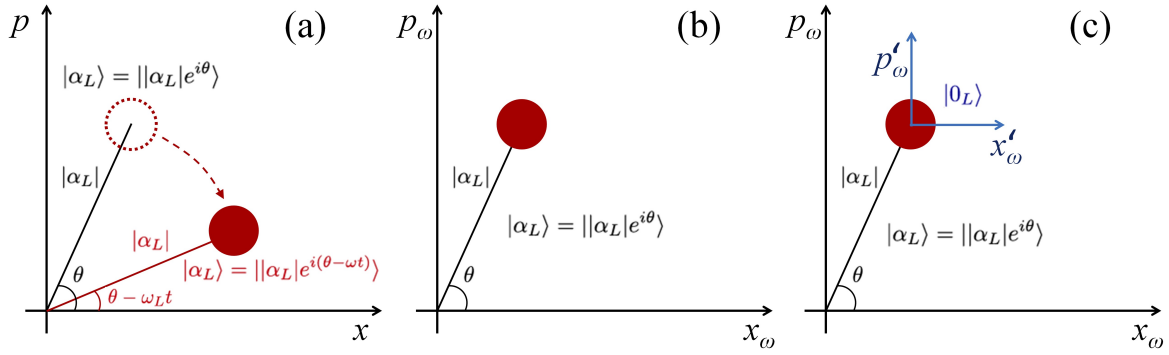

图10. 示意图展示了幺正变换如何影响我们在量子光学相空间中的参考系。(a) 初始时，若不施加任何变换，且只考虑由 H_f 引起的动力学，场的相干态会以 ω_L 的频率绕相空间原点旋转。(b) 当我们相对于 H_f 在相互作用绘景中进行描述时，参考系会以 ω_L的频率振荡，因为该哈密顿量引起的时间依赖性转移到了算符上，而量子光学态则固定在相空间中。(c) 最后，我们对参考系进行平移，使其原点现在与相干态重合。因此，在这个新参考系中，相干态可用真空态 $|0_L\rangle$ 表示。

4.1. 强激光–原子相互作用的量子电动力学

我们首先考虑原子中只有一个电子参与动力学过程的情形，该电子初始处于系统的基态，记为$|g\rangle$。我们用振幅为 α_L 的相干态描述激光场，其占据频率为 $\omega_L \in$IR 的模式，而所有其他模式均处于真空态，即 $|\Phi_i\rangle = |\alpha\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} |0_q\rangle$。为简便起见，我们考虑一组频率为 $\omega_q = q\omega_L$、 $q \in \mathbb{N}$ 的离散模式，并引入一个截止频率 $N_c\omega_L$，不考虑超过该频率的谐波。我们将该频率设为大于或等于高次谐波产生光谱的截止频率。综上，在动力学过程开始之前，系统的初始态可写为 $|\Psi(t_0)\rangle = |g\rangle \otimes |\alpha_L\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} |0_q\rangle$。

描述激光与相应原子中的单个电子之间动力学的哈密顿量为 $H = H_a + H_f + H_{\text{int}}$，其中 H_a 是原子哈密顿量， H_f 是电磁场的哈密顿量（如第 2.1 节所述），而 H_{int} 描述光与物质之间的相互作用。在长度规范和偶极近似下，后者可写为 $H_{\text{int}} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$，其中 $\hat{\mathbf{d}}$ 为偶极矩算符，$\hat{\mathbf{E}} = ig(\omega_L) \sum_{q=1}^{N_c} (a_q - a_q^\dagger)$ 为电场算符。为了简化对这些动力学过程的描述，我们通过施加一组幺正变换，转到一个更方便的参考系；这些变换对相空间中量子光学态的影响以图示形式呈现在图 10 中。首先，我们转到相对于 H_f 的相互作用绘景，使参考系以场的频率旋转（见图 10b），因此电场算符具有时间依赖性，即 $\hat{\mathbf{E}} \to \hat{\mathbf{E}}(t)$，其中 $\hat{a}_q \to \hat{a}_q e^{-i\omega_q t}$。其次，我们对

相空间中的参考系进行位移 α_L，使初始红外相干态 $|\alpha_L\rangle$ 位于平移后参考系的原点。为在哈密顿量中体现这一位移，电场分解为两个分量，即 $\mathrm{E}(t) \to \mathrm{E}_{\mathrm{cl}}(t) + \mathrm{E}(t)$；第一项是初始态 $|\Phi_i(t_0)\rangle = |\alpha_L\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} |0_q\rangle$ 中电场的平均值，即 $\mathrm{E}_{\mathrm{cl}}(t) = \mathrm{Tr}\left[\hat{}\mathrm{E}(t)\ |\Phi_i(t_0)\rangle\langle\Phi_i(t_0)|\right]$，第二项则表示围绕平均值的量子涨落。最后，我们转到相对于半经典哈密顿量 $H_{\mathrm{sc}}(t) = H_a + \mathrm{d}\cdot\mathrm{E}_{\mathrm{cl}}(t)$ 的相互作用绘景，使偶极算符具有时间依赖性，即 $\mathrm{d} \to \mathrm{d}(t)$。通过这最后一次变换，我们将半经典分析 [72, 83]，中的所有动力学都纳入时间依赖的偶极算符中，因此剩下的哈密顿量为 $H'(t) = \mathrm{d}(t)\cdot\mathrm{E}(t)$，它将电子偶极矩与电场算符耦合。相应的薛定谔方程为

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\,|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{d}}(t)\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{9}$$

现在初始条件给定为 $|\psi(t_0)\rangle = |\mathrm{g}\rangle \bigotimes_{q=1}^{N_c} |0_q\rangle$，其中 $q = 1$ 对应驱动红外频率。这个微分方程构成了下文分析的基础。

4.1.1. 利用单色驱动场进行基于*HHG*的条件测量：从极紫外到红外的光学“猫”态和纠缠态的产生

为了表征高次谐波产生过程后、电子处于基态时的量子光学态，我们将式（9）投影到 $|\mathrm{g}\rangle$，并将光态记为 $|\Phi(t)\rangle = \langle\mathrm{g}|\,\psi(t)$。我们进一步引入恒等式的强场近似版本，$\mathbb{1} = |\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}| + \int \mathrm{d}\mathrm{v}\,|\mathrm{v}\rangle\langle\mathrm{v}|$，其中激发束缚态的贡献已被忽略，因为根据强场近似，它们几乎不参与动力学 [72]。然而，进一步忽略电子连续态 $|\mathrm{v}\rangle$ 的贡献（因为连续态振幅远小于基态振幅）后，我们得到 $|\Phi(t)\rangle$ 的动力学可描述为

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\,|\Phi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\mathbf{d}(t)\rangle\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\,|\Phi(t)\rangle\,, \tag{10}$$

其中，$\langle\mathbf{d}(t)\rangle = \langle\mathrm{g}|\mathbf{d}(t)|\mathrm{g}\rangle$ 是相对于基态的偶极矩的时间依赖期望值。

由于式（10）中新相互作用哈密顿量在不同时刻的对易子只是一个复数，因此在求解式（10）中的薛定谔方程时，不同的场模不会发生耦合。因此，每个场模都经历独立演化，并且一个经典 振荡电流与每个模式相耦合。如第2.2节所述，与此类哈密顿量对应的幺正演化可以用位移算符表示，从而在相应量子光学模式的相空间中引起位移。因此，我们发现量子光学

模式在经历这些动力学过程后的系统状态为

$$|\Phi(t)\rangle = e^{i\varphi(t,t_0)} \bigotimes_{q=1}^{N_c} \hat{D}\big(\chi_q(t,t_0)\big)\,|0_q\rangle\,. \tag{11}$$

作为输出，我们在量子光学场模式中得到一个相干位移，其量为 $\chi_q(t,\ t_0)$，表示为

$$\chi_q(t,t_0) = -\frac{1}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \boldsymbol{g}(\omega_L)\cdot\langle \mathbf{d}(t)\rangle\, e^{i\omega_q t}, \tag{12}$$

这对应于时变偶极矩的傅里叶变换。考虑极限 $t \to \infty$时，该量的绝对值呈现出已知的高次谐波产生光谱特征 [98]。导出式（10）的近似，其基本假设是偶极矩算符的关联函数为零[102, 176]。需要指出的是，迄今为止，我们一直讨论的是单原子动力学，因此产生的位移 $\chi_q(t,\ t_0)$ 非常小。不过，这一解可以推广到更现实的情形：有 N_{ph} 个原子以相位匹配的方式参与动力学，此时将位移乘以相位匹配原子的数量 N_{ph}，即：

$$\chi_q(t,t_0) \to N_{\mathrm{ph}}\chi_q(t,t_0). \tag{13}$$

我们在式（11）中得到的解由相干态 $\{|\chi_q(t,t_0)\rangle\}_q$ 的张量积给出，因此正是我们在第 2 节中所称的经典态。然而，通过对谐波场模进行条件测量，我们有望生成相干态叠加形式的非经典光态，以及不同频率模式之间的纠缠相干态。这些条件操作之所以可行，是因为光物质相互作用使每个场模都由同一个偶极矩激发，从而使相应的位移 $\chi_q(t,t_0)$ 彼此相关。因此，高次谐波产生过程中实际被激发的模式是一个波包模式，它考虑了这些相关性[52, 98, 102, 103], ，并可用一组数态 $\{|\tilde{n}\rangle\}$来描述。此处，˜态 $|0\rangle$ 描述未产生谐波辐射的情形，因此对应于初始量子光学态。相反，$|\tilde{n}\rangle$ 在 $\tilde{n} \neq 0$ 时，则描述已产生谐波辐射的情形。这使我们能够定义一组正算符 $\{\Pi_{\tilde{0}}, \Pi_{\tilde{n}\neq\tilde{0}}\}$，用于描述是否产生了谐波辐射，或者等价地说，考虑场模间相关性的波包是否被激发。具体而言，元素 $\Pi_{\tilde{0}} = \big|\tilde{0}\big\rangle\big\langle\tilde{0}\big|$ 投影到不存在激发的子空间，而 $\Pi_{\tilde{n}\neq\tilde{0}} = \sum_{\tilde{n}\neq\tilde{0}} |\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}| = 1 - \big|\tilde{0}\big\rangle\big\langle\tilde{0}\big|$ 投影到存在高次谐波产生激发的子空间。基于HHG的条件测量对应于后一种情形，并可通过探测谐波辐射来验证。将这一操作应用于

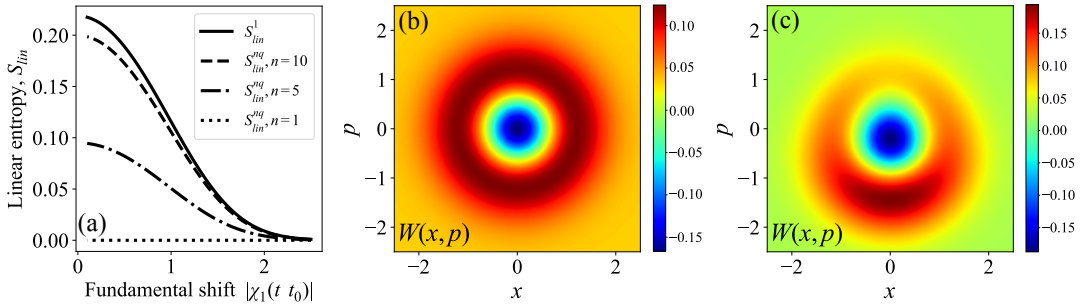

图 11。(a) 展示了线性熵随基频模位移变化的情况。线性熵定义为 $S_{lin}(\rho) = 1 - \mathrm{Tr}(\rho^2)$，其中$\rho$ 是对式（14）中的纠缠态关于某些谐波模进行偏迹所得的结果。该量可用作衡量相干态 [177, 178]之间纠缠程度的指标。具体而言， S^1_{lin} （实线）表示基频模与所有其他谐波模之间的纠缠，而 S^{nq}_{lin} 表示 n 个谐波模与其余模式（其中包括基频模）之间的纠缠。本图改编自参考文献 [103]。(b) 和 (c) 展示了式（15）中量子态在两种不同位移下计算得到的维格纳函数，分别为 $|\chi_1(t,t_0)| = 0.01$ 和 $|\chi_1(t,t_0)| = 0.5$。

式（11）中给出的态可得

$$|\Phi_{\mathrm{HHG}}(t)\rangle = |\alpha_L + \chi_1(t,t_0)\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} |\chi_q(t,t_0)\rangle - \xi_1(t,t_0)\,|\alpha_L\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} \xi_q(t,t_0)\,|0_q\rangle\,, \tag{14}$$

ˆ其中，在该表达式中，我们已撤销 $D(\alpha_L)$为得到式（9）而引入的变换，并定义了 $\xi_1(t,t_0) = \langle\alpha|\,\alpha + \chi_L(t,t_0)$以及 $\xi_q(t,t_0) = \langle 0|\,\chi_q(t,t_0)$。

式（14）所示的状态是场模之间高度纠缠的状态。我们强调“高度”，因为高次谐波产生过程激发的模式数很容易超过上限 $N_c > 10$。然而，该状态的纠缠性质在很大程度上取决于位移 $\chi_q(t,t_0)$ 的大小 [103] （见图 11a）。具体而言，当这些位移过大时，量 $\xi_q(t,t_0)$ 会变得非常小，得到的状态也会变为可分态。从式（14）可以看出，取极限 $\xi_q(t,t_0) \to 0$ 时，会得到如下形式的可分态$|\Phi_{\mathrm{HHG}}(t)\rangle = |\alpha_L + \chi_1(t,t_0)\rangle \bigotimes_{q=2}^{N_c} |\chi_q(t,t_0)\rangle$。值得注意的是，位移的数值取决于谐波产率；例如，通过改变气体密度 [53]来增加或减少参与高次谐波产生过程的原子数，即可增大或减小位移。

如前所述，该方案可用于在驱动场中产生相干态叠加，从而得到高光子数非经典光态。具体而言，将式（14）中的态投影到谐波被测得的态上，即 $\bigotimes_{q=2}^{N_c} |\chi_q(t,\ t_0)\rangle$，可得

$$|\Phi^{(\mathrm{IR})}_{\mathrm{HHG}}(t)\rangle = |\alpha_L + \chi_1(t,t_0)\rangle - \xi_1(t,t_0)|\xi_{\mathrm{HH}}(t,t_0)|^2\,|\alpha_L\rangle\,, \tag{15}$$

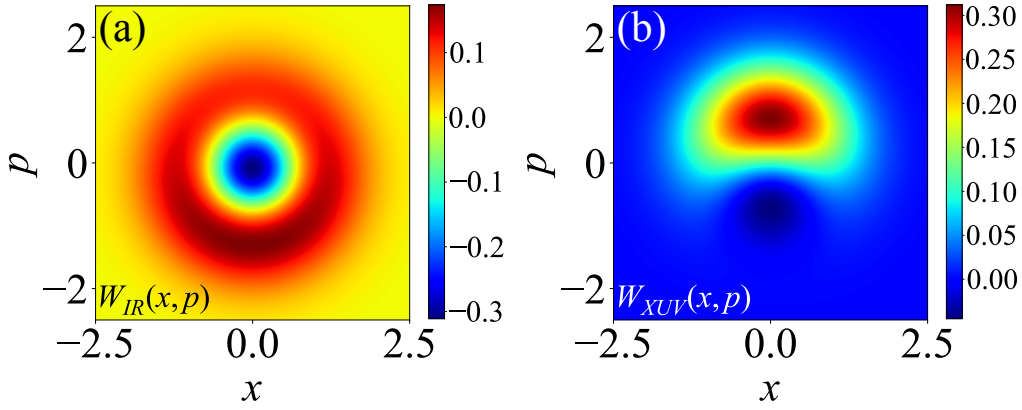

图12。（a）和（b）分别展示了与基频模的相干态叠加（其波长通常为 $\lambda_{\mathrm{IR}} = 800$ nm）以及 q次谐波模的相干态叠加相对应的计算维格纳函数。计算中，谐波截止设定为第11次谐波（对应波长为 $\lambda_{\mathrm{XUV}} = 72.7$ nm），$\chi_1 = -0.2$，使得 $\chi_q \approx 0.03$。虚部方向相反的位移反映了场模之间的关联。该图复现自参考文献 [103]。

其中 $\xi_{\mathrm{HH}}(t,t_0) = \prod_{q=2}^{N_c} \xi_q(t,t_0)$。$\chi_1(t,t_0)$ 的值决定叠加中相干态的可区分性，因此会产生如图 11b 和 c 所示的“幼猫态”或“猫态”。另一方面，当$\chi_1(t,t_0)$变得过大时，式（15）所示叠加中的第二项将消失，我们得到相干态 $|\alpha_L + \chi_1(t,t_0)\rangle$。注意，我们也可以对一个极紫外模执行相同操作，即测量除一个谐波模之外的所有场模（包括基频模）。这样便可获得频率属于极紫外区域 [103], 的相干态叠加，其频率为 $\omega_q = q\omega_L$ 的模式对应的结果为

$$|\Phi^{(q)}_{\mathrm{HHG}}(t)\rangle = |\chi_q(t,t_0)\rangle - \xi_q(t,t_0)\left|\bar{\xi}(q,t,t_0)\right|^2 |0\rangle\,, \tag{16}$$

其中我们定义了 $\bar{\xi}(q,\ t,\ t_0) = \prod_{q'\neq q} \xi_{q'}(t,\ t_0)$。在图12中，分别在（a）和（b）中展示了由式（15）和式（16）得到的维格纳函数示例，其中相空间中方向相反的位移反映了场模之间的关联 [103]。

4.1.2. 使用双色驱动场进行基于*HHG*的条件测量：生成光学“猫”态并实现驱动场模式之间的纠缠

利用这种条件测量技术，并结合更复杂的高次谐波产生方案，可以生成频率属于可见光和红外范围的更多纠缠态。例如，我们可以使用双色驱动场激发原子，如参考文献 [103] 所示。在这些实验中，[157, 179, 180], 将频率为 ω_1 和 ω_2、分别属于远红外和可见光谱区域的双色激光场组合起来驱动原子系统；这些激光场的偏振可以平行，也可以正交。

在这种情况下，场的初始态为 $|\alpha_{\omega_1}\rangle|\alpha_{\omega_2}\rangle$，而经过高次谐波产生过程后的场态为 $|\alpha_{\omega_1}+\chi_{\omega_1}\rangle|\alpha_{\omega_2}+\chi_{\omega_2}\rangle\bigotimes_q^{N_c}|\chi_q\rangle$。执行基于*HHG*的条件测量操作 [103], 后，最终的量子光学态可以写为

$$|\Phi_{\mathrm{HHG}}^{(\omega_1-\omega_2)}(t)\rangle = |\alpha_{\omega_1}+\chi_{\omega_1}\rangle|\alpha_{\omega_2}+\chi_{\omega_2}\rangle - \xi_{(\omega_1,\omega_2)}|\alpha_{\omega_1}\rangle|\alpha_{\omega_2}\rangle\,, \tag{17}$$

其中 χ_{ω_1}, χ_{ω_2} 表示双色驱动场模式的耗尽。因子$\xi_{(\omega_1,\omega_2)}$是一个复数，取决于初始相干态的相位和振幅以及所产生位移的相位和振幅。

4.1.3. 对阈上电离进行条件化并生成光学“猫”态

在阈上电离过程中，脉冲结束后会发现电子处于连续态中（见图 7）。因此，为了表征阈上电离后的量子光学态，我们将式（9）中的含时薛定谔方程投影到一个连续态$|\mathbf{v}\rangle$上。这样做并引入强场近似形式的恒等算符后，我们发现，只考虑直接阈上电离事件（即相对于再散射矩阵元的零阶近似）时，可以将含时薛定谔方程写为 [98]

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\,|\Phi(\mathbf{v},t)\rangle\,t}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{E}}(t)\cdot\langle\mathbf{v}|\mathbf{d}(t)|\mathrm{g}\rangle\,|\Phi(t)\rangle + \hat{\mathbf{E}}(t)\cdot\Delta\mathbf{r}\,|\Phi(\mathbf{v},t)\rangle\,, \tag{18}$$

其中我们定义了 $|\Phi(\mathbf{v}\ t)\rangle = \langle\mathbf{v}\rangle\,\psi(t)$，并且 $\Delta\mathbf{r}(\mathbf{v}\ t)$ 表示电子在连续态中传播期间产生的总位移，其表达式为

$$\Delta\mathbf{r}(t,\mathbf{v}) = \frac{e}{m}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\left[m\mathbf{v} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(t) + \frac{e}{c}\mathbf{A}(t'),\right] \tag{19}$$

其中，$\mathbf{A}(t)$ 是经典矢势，定义为 $\mathbf{E}_{\mathrm{cl}}(t) = -\,\partial\mathbf{A}(t)/\partial t$.

式（18）中给出的微分方程由两项组成。第一项引入了基态与连续态之间的跃迁矩阵元，该矩阵元刻画了电离过程对场模的反作用。另一方面，第二项取决于电子位移 $\Delta\mathbf{r}(\mathbf{v}\ t)$，因此考虑了连续态中的电子运动对场模的反作用。考虑到电子初始处于基态，该微分方程的解可写为 [98]

$$|\Phi(\mathbf{v},t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' e^{i\varphi(t,t',\mathbf{v})}\prod_q \hat{D}\big(\delta_q(t,t',\mathbf{v})\big)\hat{\mathbf{E}}(t')\cdot\langle\mathbf{v}|\hat{\mathbf{d}}(t')|\mathrm{g}\rangle\,|\Phi(t')\rangle\,, \tag{20}$$

其中，$|\Phi(t')\rangle$ 如式（11）所示，且我们定义

$$\delta_q(t,t',\mathbf{v}) = -\frac{1}{\hbar}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}\tau\ \mathbf{g}(\omega_q)\cdot\Delta\mathbf{r}(\tau,\mathbf{v})e^{i\omega_q\tau}, \tag{21}$$

它是电子位移的傅里叶变换。因此，根据式（20）所描述的演化，我们可以看到，系统的量子光学态首先发生了位移

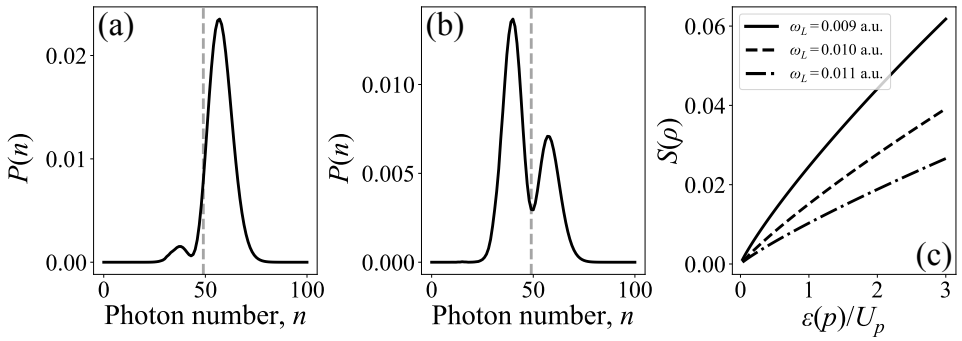

图13。在（a）和（b）中，我们展示了两个动量值下的光子数概率：（a）$p = 0.32\sqrt{U_p}$ 和（b）$p = -0.32\sqrt{U_p}$，其中 $p = mv - eA(t)/c$为正则动量。为便于表示，将系统的初始相干态设为 $|\alpha_L| = 7$。这些图取自参考文献 [98]。在（c）中，我们展示了纠缠熵 $S(\rho)$ 随光电子能量 $\mathcal{E}(\rho)/U_p$ 的变化，分别对应三个不同的频率：$\omega_L = 0.009$ 原子单位（实线），$\omega_L = 0.010$ 原子单位（虚线）和 $\omega_L = 0.011$ 原子单位（点划线）。该图取自参考文献 [105]。

位移量为 $\chi_q(t, t_0)$，这是基态 [181], 中的电子振荡 $|\Phi$导致的$t'\rangle$。在时刻 t' 发生电离过程，在解析表达式中体现为跃迁矩阵元 $\hat{\langle}\mathbf{v}|\mathbf{d}(t)|\mathbf{g}\rangle$的出现；电子由初始基态 $|\mathbf{g}\rangle$ 跃迁至连续态 $|\mathbf{v}\rangle$。这一事件在 t'引起场的最终态发生变化，这是因为该跃迁矩阵元与电场算符发生了耦合。最后，电子在场的驱动下于连续态中传播，表现为振荡并漂移的电荷，因此其行为如同经典电荷电流。这使场的量子光学态发生位移，对于第 q个模式，位移量为 $\delta_q(t, t', \mathbf{v})$，且取决于电子被探测到时的最终动量 $\mathbf{v}$。需要指出的是，这些动力学过程对应于直接电离情形，其动能小于$2U_p$。不过，电子仍可能经历再散射过程，这些过程决定了光电子能谱的高能部分（见第 3.1.1 节）。这些额外的动力学过程会使电子的动能最高达到 $10U_p$；当再散射发生时，电子与电磁场之间会产生额外耦合，从而反映在最终的量子光学态中（更多详情见参考文献 [98] ）。

方程（20）中的阈上电离之后，量子光学态的一个显著特征是，场模上的位移取决于电子的电离时刻 t'，这自然会形成量子叠加。这与高次谐波产生中的发现形成对比：在高次谐波产生中，系统的最终态是不同相干态的张量积，而叠加则是通过引入基于*HHG*的条件测量操作产生的。此外，阈上电离所得到的量子叠加态还取决于电子的最终动量$\mathbf{v}$。对此，参考文献 [98] 发现，位移 $\delta(t, t',\mathbf{v})$在动量为正值和负值时有所不同。具体而言，其相位差为

π， $\delta(t, t', \mathrm{v})$的虚部在动量 [98, 105]为正和为负时符号相反。这与v的符号决定电子传播方向这一事实有关，因此也决定了所产生的位移与输入驱动场是同相干涉还是反相干涉。这会增强或削弱基频模；计算光子数概率分布 $P(n)$即可观察到这一现象，对于$|\Phi^{\mathrm{IR}}(\mathrm{v}\ t)\rangle = \langle 0_{\mathrm{HH}}\rangle\, \Phi(\mathrm{v}\ t)$，其中 $|0_{\mathrm{HH}}\rangle$ 是 $\bigotimes_{q>2} |0_q\rangle$的简写。这里，我们假设谐波模保持在真空态 $|0_q\rangle$，以考虑未发射谐波的情况 [98]。在图13a和b中，我们展示了两个v值对应的 $P(n)$；这两个值的绝对值相同，但符号相反。为便于展示，初始相干态设为 $|\alpha| = 7$，因此垂直虚线表示初始平均光子数。我们观察到，对于正动量（图13a），位移倾向于增加平均光子数；而对于负动量（图13b），则倾向于降低平均光子数。不过，正、负动量的影响取决于载波包络相位，即脉冲包络与载波之间的相位差，因此，对该相位 π 的改变会导致相反的效果。另一方面，两幅图中的双峰结构表明，最终态是相干态的叠加 [98, 105]。

这种差异会导致场的最终量子光学态在正、负动量下有所不同，可用于生成光与物质之间的纠缠态 [105]。特别是，在仅考虑阈上电离过程时，系统的总态可写为

$$|\psi(t)\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{v}\, |\mathbf{v}\rangle\, |\Phi(\mathbf{v}, t)\rangle\,, \tag{22}$$

其形式为纠缠态，因为电子动量的不同取值会对场模产生不同影响。为简单起见，下面将讨论范围限定在一维情形，并假设只发射能量确定的电子。于是，前述状态可写为$|\psi(t)\rangle = |v\rangle\, |\Phi(v, t)\rangle + |-v\rangle\, |\Phi(-v, t)\rangle$，其中的纠缠量可用纠缠熵 $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \log_2 \rho)$ [182–184], 量化，其中ρ 是系统相对于其中一方的约化态。图 13c 展示了单活性电子情况下， $S(\rho)$ 随光电子能量 $\mathcal{E}(p)$ 的变化；所用场包含五个光学周期，频率则取中红外范围内的三种不同值。在此范围内，对于相应频率范围内目前可达到的场强 [105]， $|\delta_1(v, t', t)|$ 的值已足够大。可以看到，光电子能量越高，纠缠量越大；对于周期数相同的场，电子在场中振荡的时间越长（即频率越低），纠缠量也越大。要获得这些纠缠态，一个重要条件是电子以正、负动量发射的概率必须相等。换言之，光电子能谱必须是对称的。

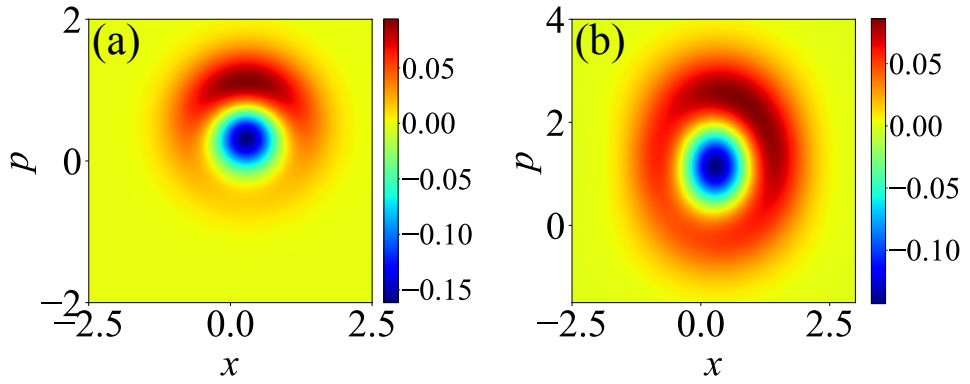

图 14. 在阈上电离过程条件下计算得到的基频驱动模式的维格纳函数 $W(x,p)$。(a) 对所有电子动量进行条件筛选（式（23））。(b) 对特定电子动量进行条件筛选（式（20））。转载自参考文献 [53]。

否则，其中一个分量会占据主导地位，使系统的最终态变为可分离态。使用多周期激光脉冲驱动系统时，可以实现这种对称性，也就是说，此时载波包络相位效应可以忽略；而对于只有几个光学周期的激光脉冲，情况则不再如此 [69, 185]（见图 8b）。最后请注意，当无法辨别电子的最终态时，量子光学态会成为如下形式的混合态：

$$\rho(t) = \int \mathrm{d}\mathbf{v}\, |\Phi(\mathbf{v},t)\rangle\langle\Phi(\mathbf{v},t)| \,. \tag{23}$$

图14展示了在分别对所有（图14a）和特定电子动量（图13b）进行条件测量时，基频驱动模式场态的维格纳函数的代表性示例。在对所有特定电子动量进行条件测量的情况下，$W(x,\ p)$在图14a中的形状与通过基于HHG的条件测量红外场态所生成的光学“猫”态非常相似。在以下近似条件下，这一结论成立：（i）在ATI过程中，谐波相干态振幅始终非常接近真空态；（ii）所产生的相干位移彼此相同且与时间无关。然而，在对特定电子动量进行条件测量时，情况会发生显著变化。在这种情况下，$W(x,\ p)$与通过基于HHG的条件测量生成的光学“猫”态的维格纳函数存在显著偏离。这是因为最终态是不同相干态的叠加（原则上，其数量多于两个），其中每个相干态都会受到在时刻 t'处取值的电场算符瞬时值的影响。的形状是$W(x,\ p)$在图14b中与叠加态中相干态相位的变化有关。不过，它也可能与小幅旋转有关，这些旋转对应于态叠加中各振幅相位的变化，而这最终取决于我们如何实施条件操作。关于这一问题的详细信息可参见参考文献 [53]。

4.2. 实验方法：光学“猫”态的产生

本小节将讨论一种实验方法的操作原理，该方法可用于实现上述理论发现。如图15a所示，该方案可实现：（a）通过对相互作用后的场模实施条件制备方法，生成非经典光量子态；（b）控制所生成非经典光量子态的量子特征；以及（c）表征光量子态。该方法已被成功用于生成和表征具有高光子数且可控的光学“猫”态，其采用强激光驱动的原子并基于HHG进行条件测量 [52, 53, 98]。

简而言之，一束线偏振的红外飞秒激光脉冲被聚焦，强度达到 $I_{IR} \sim 10^{14}$ $\mathrm{W/cm^2}$，作用于原子气体，从而产生高次谐波光子、离子和光电子（图 15a 中未显示）。相互作用前驱动激光场的相干态为 $|\alpha_L\rangle$。在与非关联原子相互作用期间（室温气体介质中的原子即属于此类），场态仍保持相干，但其振幅向较低值发生偏移。因此，相互作用后的驱动场态是振幅偏移态 $|\alpha_L + \chi_L\rangle$，而产生的谐波处于相干态 $|\chi_q\rangle$。随后，驱动场的模式被衰减（变为 $|\alpha_L + \chi\rangle$），进入少光子范围，并通过量子光谱仪（QS）方法以高次谐波产生为条件进行筛选 [52, 53, 98–101]。QS 是一种基于逐发次红外光子与高次谐波光子关联的红外光–高次谐波光子关联方法，只选择与谐波发射相关的红外光脉冲（图 15b）。该方法依赖于光子统计测量和能量守恒，即产生一个 q 谐波光子需要从红外场中吸收红外光子。QS 的输出仅包含反关联对角线上的红外光脉冲（图 15c）。通过选择这些点，我们使离开介质的红外场态受高次谐波产生过程制约。这是因为我们只选择与谐波发射相关的光脉冲，并去除了与所有残余过程相关的不需要的背景，例如电子激发或电离。这一操作相当于将 $\Pi_{\tilde{n}\neq 0} = \mathbb{1} - \Pi_{\tilde{0}}$ 算符作用于式（14）给出的场态，并将其投影到式（15）的谐波场模上） [102, 103]。由此产生红外场相干态叠加（式（15））， 即形成如下形式的光学薛定谔“猫”态：

$$|\phi_c^{(\mathrm{IR})}\rangle = |\alpha_L + \chi\rangle - \xi\,|\alpha_L\rangle\,. \tag{24}$$

该态的量子特性可通过测量其维格纳函数来确定。图16 展示了通过对高次谐波产生进行条件化而生成的红外光学“猫”态的维格纳函数测量结果。在此实验中，氩原子与 ≈ 30 飞秒红外脉冲相互作用，产生了高次谐波，脉冲强度为 $I_L \approx 8\times10^{13}$ 瓦/厘米^2。进行条件化时，使用了满足 $q > 11$的谐波（即主要是平台谐波）。

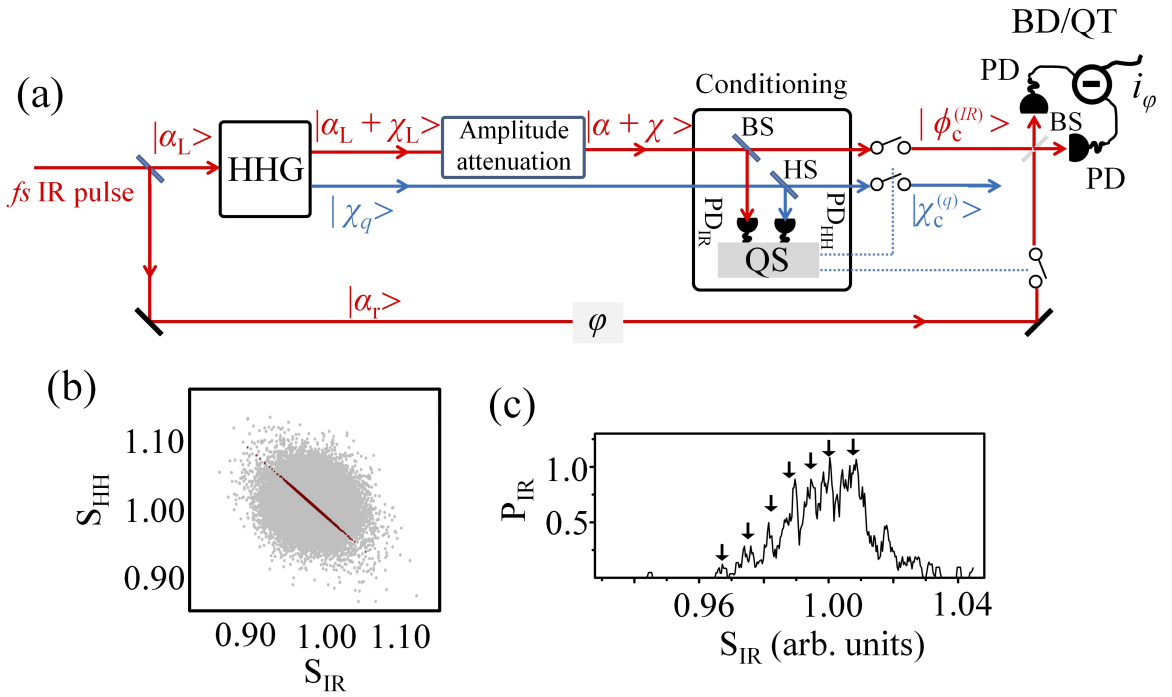

图15. 展示实验方法工作原理的示意图。 $|\alpha_L\rangle$ 是驱动场的初始相干态。 $|\alpha_L+\chi_L\rangle$、$|\alpha+\chi\rangle$ 分别是相互作用后和衰减后的红外场态。 $|\chi_q\rangle$ 是谐波的相干态（q 是谐波阶数）。 $|\phi_c^{(IR)}\rangle$ 和 $|\chi_c^{(q)}\rangle$ 是基于HHG的条件测量所得到的场态，对应于相干态叠加。BD/QT是用于通过量子层析（QT）表征态 $|\phi_c\rangle$ 的零差探测系统中的平衡探测器（BD）。 i_ϕ 是依赖于 ϕ 的输出光电流差，用于测量电场算符，并通过重建维格纳函数表征光态。 $|\alpha_r\rangle$是本地振荡器参考场的态，其相移 ϕ可控。PD是相同的红外光电二极管，PD_{HH} 是高次谐波光电探测器。BS是分束器。S_{IR} 和 S_{HH} 是PD和PD_{HH}的信号，用于基于HHG的条件测量。HS是平面镜，称为谐波分离器。HS与光谱滤波光学元件配合使用，可将全部或部分高次谐波反射至PD_{HH}。QS是用于根据高次谐波产生过程对场态进行条件化的量子光谱仪方法。(b)（S_{HH}、 S_{IR}）光子数分布（灰色点）。（S_{HH} 和 S_{IR}）的平均值均归一化为1。红点表示沿反关联对角线选取的点。(c)高次谐波产生过程中吸收红外光子的概率（P_{IR}）。箭头标示P_{IR}多峰结构中各峰的位置。(b)和(c)转载自参考文献 [98]。

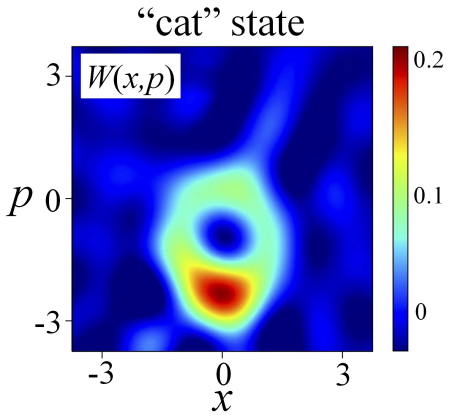

图16。 测得的维格纳函数 $W(x,p)$ 通过对高次谐波产生过程进行条件化而生成的红外光学“猫”态的维格纳函数。该测量结果与针对具有 $|\alpha| = 2$ 和$|\chi| = 1.5$ 的“猫”态所进行的理论计算得到的维格纳函数一致，其中 $\xi \approx 0.32$。转载自参考文献 [52]。

4.2.1. 控制光学“猫”态的量子特征

第4.2节所述的实验方法已被用于生成高光子数位移光学“猫”态和相干态叠加，并通过强激光–原子相互作用实现对其量子特征的控制 [52, 53, 98]。图17a和图17a展示了量子特征的控制：当 χ取值较低时，光学“猫”态会转变为“小猫”态。 χ 的值可以通过改变相互作用区域内的气体压力来控制（式（13））。如第 4.1.3节所示，同一方法也可用于对阈上电离进行条件化 [53, 98], ，原则上还可扩展至双电子电离过程等。除其与阈上电离/高次谐波产生过程中电子–光子关联相关的基础研究价值外，这还提供了一个额外的“旋钮”，可用于控制光学“猫”态的量子特性；这一特性对于量子技术应用极为宝贵。此外，正如第 4.1.2节所述，单色和双色驱动的激光-原子相互作用可在从极紫外到远红外的光谱范围内生成“大规模”纠缠光学相干态。这些态与无源线性光学元件（如移相器、分束器和光纤）[98] 相结合，可视为量子技术新应用的独特资源。

4.3. 拓展至与复杂材料的相互作用及大规模纠缠态的生成

当强激光场驱动各种物质态时，均观察到了高次谐波产生（HHG）过程。在强激光驱动的分子、团簇、液体、半导体材料、纳米结构、二维材料、固体表面上的激光–等离子体相互作用 [81, 83, 186, 187], 以及最近的量子关联材料（例如

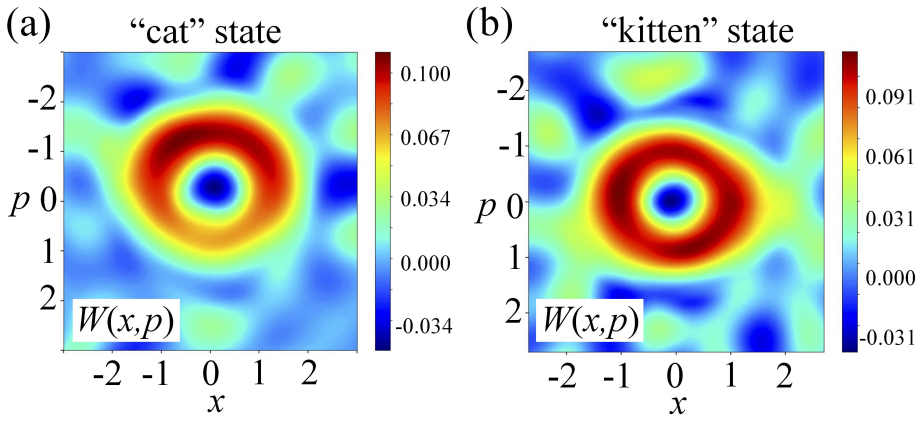

图17。测得的维格纳函数 W（x，p）分别对应于红外光学“猫”态（a）和“小猫”态（b）。光学“猫”态和“小猫”态是通过对不同 $|\chi|$取值下的基于HHG的条件测量产生的。测量结果与理论计算得到的“猫”态维格纳函数一致，其中 $|\alpha| = 1.4$ 和$|\chi| = 0.5$；以及“小猫”态，其中 $\xi \approx 0.88$ 和 $|\alpha| = 1.3$，并且 $|\chi| = 0.1$。$\xi \approx 0.99$转载自参考文献 [53]。

高温超导体 [188]）中，均观察到了这一过程。用于研究这些相互作用的实验装置基于图 6所示的示意图。值得注意的是，在与固体表面发生相互作用时， [81, 187], 驱动激光场和高次谐波会从靶区反射（图 6中未示出）。相互作用区域内激光脉冲的强度取决于靶的性质。通常，固态材料和二维材料的强度为$I_L > 10^{11}$ W/cm^2，原子（例如惰性气体）和分子（主要是双原子分子）的强度为 $I_L > 10^{14}$ W/cm^2，而固体表面上的激光–等离子体相互作用的强度为 $I_L > 10^{18}$ W/cm^2。

在上述大多数相互作用中，高次谐波产生过程均采用半经典方法描述，而这些方法在许多情况下依赖于为描述强激光–原子相互作用而发展的方法的扩展/修改（见第 3 节）。尽管这些相互作用的全量子化描述需要进行详细研究（例如，对于原子和分子靶，可采用含时薛定谔方程或强场近似 [83], ；对于固体，有时采用半导体布洛赫方程；而对于强关联系统，则需采用更复杂的方法），但原则上可以认为，它们有潜力作为额外资源，利用第4.2节所述方法来构造非经典态和纠缠态。这是因为在所有这些相互作用中：

- 相互作用前的驱动场处于相干态 $|\alpha_L\rangle$。
- 相互作用后，能量守恒表明，驱动场模式的状态为振幅平移相干态 $|\alpha_L + \chi\rangle$，而发射的高次谐波处于相干态 $|\chi_q\rangle$。我们注意到，在与量子关联材料相互作用的情况下，出射的相互作用场模式（基频与谐波）可能处于非经典态 [189]。

- 相互作用后，基频激光场可在少光子范围内以相干方式衰减，并通过量子光谱仪（QS）以高次谐波产生（HHG）为条件进行筛选。这将产生非经典光态。

这类研究已在强激光驱动的半导体中展开 [190, 191]。在这种情况下，电子可能从母原子（晶格中的一个母位点）隧穿出来，并在另一个原子（另一个位点）上复合。如果价带中的动力学过程较慢，这种情况很少发生，其物理过程与原子中的情况非常相似。量子性可以通过条件化产生。如果价带带内动力学更快，则可能导致电子最终位置与光之间出现显著纠缠，并产生非经典光态，而无需进行条件化；不过，条件化可能会增强量子效应。如果价带带内动力学过快，电子可能以随机相位在任意位置复合，从而导致强烈的退相干，并使谐波无法实现有效的相位匹配 [192]。

此外，已有关于强激光驱动的量子关联材料的理论研究[189, 193], ，也有关于将该方法应用于相对论激光等离子体相互作用的方案 [194] 。此外，高强度压缩光源生成方面的最新进展 [195–198] ，已推动人们开展实验和理论研究，探究这些光态的量子特征对多光子过程的影响 [196, 197], ，以及压缩光场的量子噪声对高次谐波产生过程的影响 [199]。

考虑到驱动场具有高光子数，且利用上述方法可产生大量非经典场模式（基频与谐波），强激光驱动的材料可被视为一种理想资源，可用于构造大规模量子关联态，而这对于量子信息科学和量子技术具有根本重要性。

5. 量子信息科学中的应用

当代量子技术在带纠错的容错量子计算方面面临重大困难，因此转而聚焦于各种类型的量子模拟（含噪中等规模量子，NISQ）设备 [200], 模拟和数字量子模拟器 [201]（关于近期进展的报告，包括量子计算和量子模拟，见 [202]），以及量子退火器 [203]。我们显然需要并正在寻求这样一类系统：它们不一定要模拟某些物理系统的量子动力学，却能生成大规模、可控、稳健的纠缠态和叠加态。尤其是，这将使我们能够以可控方式利用退相干，从而将这些状态用于量子通信 [204] （例如，以更安全、更快捷的方式实现高效的信息传输）、量子计量学 [56],传感和诊断 [205] （例如，精确测量光场的相移，或诊断量子材料）。

正如我们在本报告中所述，强激光物理的量子电动力学与量子光学相结合，可在量子信息科学中带来非平凡的应用。事实上，它提供了一套稳定且可重复的方法，用于生成大规模纠缠态和大规模量子叠加态[52, 53, 98, 103]。本节将讨论，事实上，通过与阿秒物理和量子光学的协同作用，量子信息科学还存在更多新的发展路径。这些研究首先关注量子信息科学的基础问题，但目标指向量子技术。它们尤其涉及：i）拓扑、强关联系统、手性等的探测（参见 [188, 206]）；ii）拓扑、强关联系统、手性等的生成（参见 [207]）；iii）利用条件化方法生成纠缠态/量子关联态（参见 [52, 53, 98, 191]）；iv）由非经典光驱动的强激光物理和阿秒物理；v）研究衰变 过程中量子关联态/退相干（参见 [174]）。

5.1. 拓扑、强关联系统、手性等的探测

近年来，应用阿秒物理方法诊断和探测拓扑序、强关联系统及手性的研究兴趣激增。高次谐波产生（HHG）过程在其中发挥着主要作用。这对于量子信息科学至少有两个方面的重要意义：i）与条件化方法相结合，必将带来生成大规模纠缠和大规模量子叠加态的新方法；ii）强关联材料本身表现出多体纠缠；强关联的拓扑或手性材料通常具有长程纠缠 [208]——HHG 或许能够对其进行探测和表征。

5.1.1. 利用 *HHG* 探测拓扑序

R. Huber 的开创性工作 等人 [209] 研究了拓扑表面能带中的光波驱动的狄拉克电流。“利用光的载波作为交流偏置，或许能够实现光学时钟速率的电子学” [209–212]。在这些论文中，作者直接观察到太赫兹光脉冲的载波如何加速拓扑态 Bi_2Te_3 中的狄拉克费米子。

最早将高次谐波产生用于探测拓扑的论文，是 D. Bauer 与合作者发表的一系列关于探测二聚化链中拓扑边缘态的论文 [213, 214], ，他们首先采用了自洽含时密度泛函理论方法。研究发现，当谐波光子能量小于带隙时，两种拓扑相的谐波产率相差 14 个数量级。对于具有拓扑边缘态的 Su-Schrieffer-Heeger （ SSH ）链，也得到了类似结论。近期，这种方法已拓展至探测 Kitaev 链中的马约拉纳费米子 [215]，以及具有邻近效应诱导 p 波超导的量子线中的马约拉纳费米子 [206]（见图18）。具体而言，研究表明，强场中的谐波发射谱会呈现由辐射边缘模导致的谱特征；这些特征存在于拓扑相中，而在平庸相中则不存在。研究结果表明，高次谐波产生光谱学可作为一种新型全光学工具，用于探测

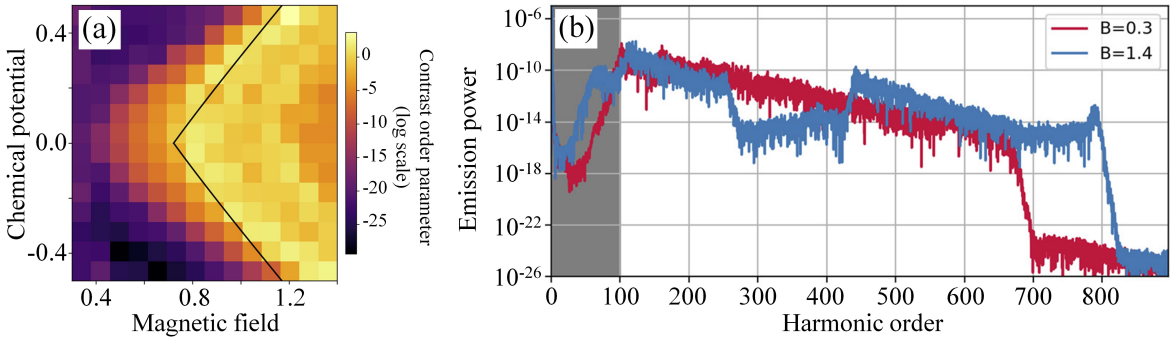

图 18. (a) 邻近效应诱导的 p 波超导体的相图由基于谐波发射谱的序参量得到；(b) 显示了两组参数下的谐波发射谱，分别对应拓扑相和平庸相。在低于带隙的频率范围内，平庸相（红色）中的发射受到抑制；而在拓扑相中，由于带隙中间的边缘态，频率高于半个带隙时便可发生发射。转载自参考文献 [206]。

仍存在争议的马约拉纳零模。

在具有开创性的*Nature Photon.* 论文中，M. Ivanov等人讨论了亚激光周期时间尺度上的拓扑强场物理 [216]。这些作者研究了 Haldane 模型 [217] 对超短超强激光脉冲的响应。他们证明，由于贝里曲率发挥着关键作用，电子在平庸绝缘体和拓扑绝缘体中的隧穿方式有所不同。阿秒延迟和谐波螺旋度可用于绘制系统的相图。强场还可用于调控二维材料的拓扑性质，这对谷电子学器件具有重要意义 [218]。A. Chacón等人 [219] 通过研究圆二色性获得了互补结果；圆二色性清晰地揭示了 Haldane 模型及其他陈绝缘体中的拓扑相和相变。

5.1.2. 利用高次谐波产生探测强关联系统

这是另一个快速发展的领域。正如近期综述 [220]所指出的：“极端非线性光学的一个标志性效应是材料体内发射激光的高次谐波。过去十年来，对这一现象的发现和深入研究带来了广泛的可能性，并开启了极端固态光子学这一新领域。尤其是，它为进入以往无法触及的光谱范围开辟了道路，并推动了新型固态光谱学和显微技术的发展，使人们能够对固体的电子结构进行细致探测。”

Silva 等人 [193], 在论文中介绍了强关联材料中高次谐波产生的开创性研究，其中利用高次谐波产生对光驱动相变至莫特绝缘体的超快多体动力学进行时间分辨研究。Orthodoxou 等人进一步利用量子蒙特卡罗、精确对角化和简化的动力学平均场方法，对二维莫特绝缘体开展了后续研究

模型 [221]。东京团队最近也报道了莫特绝缘体高次谐波产生的理论研究，他们采用无限时间演化块态分解（iTEBD）方法和精确对角化 [222, 223], ；此后，他们又与 Ph. Werner 合作，展示了莫特绝缘体中高次谐波产生的反常温度依赖性。这揭示了强自旋-电荷耦合对莫特绝缘体中高次谐波产生的关键影响。在具有反铁磁关联的系统中，“尽管能隙增大且电荷载流子的产生受到抑制，高次谐波产生信号却会随着温度降低而显著增强。这种反常行为在近期针对 Ca_2RuO_4 [224], 的高次谐波产生实验中也有观测，它源于自旋-电荷耦合与热系综之间的协同效应，以及电荷载流子之间强烈的温度依赖性相干性。”Roy等人还从理论上研究了强时间依赖合成矢势下费米子高次谐波产生的玻色子类似物[225] ，并将其作为区分莫特相和超流相的相位判别指标。人们甚至提出，可利用高次谐波产生探测难以测量的量子自旋液体的动力学特征，因为其高次谐波产生光谱对磁场的依赖性可能与常见有序磁体的表现大不相同 [226]。

基于超快激光和高次谐波产生的固态光谱技术日益普及。参考文献 [227] 报道了固体的偏振态分辨高次谐波光谱学。超快泵浦-探测光谱学已用于检测某些莫特绝缘体中哈伯德激子的存在 [228]。飞秒光脉冲还被用于在莫特-哈伯德绝缘体三氧化二钒中稳定持续数皮秒的非热瞬态相 [229]。在参考文献 [230], 中，作者建立了时间分辨高次谐波产生技术，用于追踪二氧化钒绝缘体到金属相变的光诱导动力学。与此密切相关的是 Johnson等人的研究，他们利用时间和光谱分辨的相干X射线成像，以飞秒时间分辨率在纳米尺度追踪二氧化钒中光诱导的绝缘体到金属相变[231] ，并观察到三氧化二钒光诱导结构相变中的晶格相干性超快损失 [232]。

在此背景下，也应提及对马约拉纳费米子的探测研究 [206, 215] 。Ivanov 和 Smirnova 的 MBI 团队运用动力学平均场理论的先进技术，研究了双带哈伯德模型的强激光场响应（[233], 另请参阅 M. Ivanov 对 [234]的贡献）。在这项工作中，作者提出了一种新型非线性方法，能够揭示强关联系统与少周期红外脉冲相互作用时的亚周期动力学。该方法可以解析二维哈伯德模型中局域多体态与离域多体态之间的电荷和能量流动路径；还可以描述激光脉冲结束后仍能存续的高度关联态的产生。

HHG 在强关联材料和凝聚态物质系统中的其他应用包括：i）提取固体中的高阶非线性电子响应 [235]; ii）增强固态纳米结构（如石墨烯）的 HHG

异质结构 [236]；iii）表征强关联系统中的量子临界性 [237]：在后一项研究中，研究人员将精确对角化方法应用于周期链上的扩展哈伯德模型。研究表明，在量子临界点附近，HHG 比在有能隙的电荷密度波相和自旋密度波相中更有效；iv）A. Landsmann 领导的俄亥俄州研究组 [238] 利用 HHG 研究了金属-绝缘体界面中的超快激光驱动动力学，并展示了莫特绝缘体/金属界面处的场致介电击穿。他们证明，高次谐波发射的强度与双重产生及其所对应的短程反铁磁序损失密切相关。

高次谐波产生还在宽温度范围（80K 至 300K）内对铜氧化物（钇钡铜氧化物）进行了研究，探测了高-T_c 材料 [188]的不同相。令人惊讶的是，高次谐波产生在各种强关联相中表现出差异：超导相的特征是在所有奇次谐波频率（第 3、5 和 7 次）处发射显著增强，而从赝能隙相到奇异金属相的转变，则表现为仅最高次谐波（第 7 次）的强度下降。通过在 d-波配对平均场区域内模拟包含唯象散射项的双带模型，再现了实验结果。在另一项研究 [239], 中，利用太赫兹（THz）双脉冲相干光谱，在一种铁基超导体中观察到了复振幅模或希格斯模的相干振荡，从而为基于光的希格斯模控制铺平了道路。希格斯模是一种难以捉摸的模式，由于它与电磁场之间存在非线性耦合，因而一直难以探测。

显然，如今已经可以利用高次谐波产生，以超短激光脉冲的光学速率对强关联材料进行成像和操控，这远远超越了量子系统的 Floquet工程。对于未来的量子信息应用，重要的是要记住，在所有这些过程中，自然会预期产生物质、光以及光-物质的大规模纠缠态。事实上，最近 Pizzi 等人 [189]提出了一种强驱动多体系统的量子光学理论，表明发射体之间存在关联会产生偏离光的相干态的多光子态发射。作者考虑了一个由二次哈密顿量描述的简化物质模型，并以高次谐波产生为例。他们证明，强驱动之前发射体间的关联会转化为输出光不同于相干辐射的特征，包括双峰光子统计、环形维格纳函数以及谐波间关联（面向大众的介绍见 [240] 以及图（19））。然而，发射辐射的性质中是否存在真正的非经典性，仍未得到明确证实。

5.1.3. 利用高次谐波产生进行手性检测

手性检测与利用高次谐波产生探测拓扑序有些相似，但如今主要指的是对分子靶标的探测。手性普遍存在于生物分子中；区分仅手性不同的分子具有

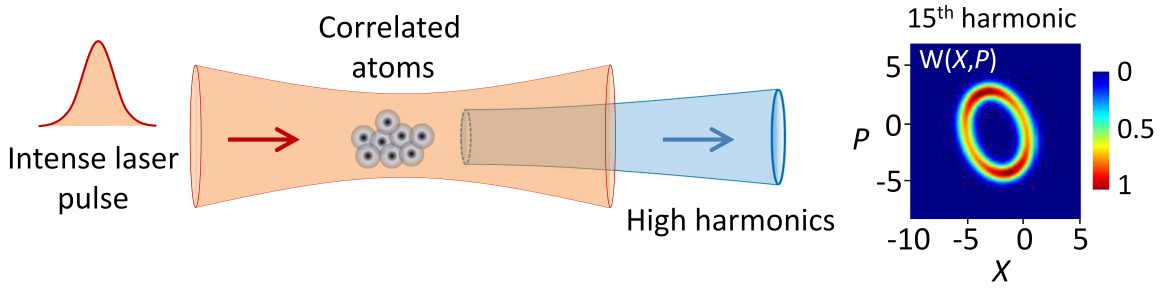

图 19. 强激光驱动的量子关联多体系统会产生具有奇异量子特征的光——多体系统的量子性会印刻在所发射光的状态中。图转载自参考文献 [240]，其中提及了参考文献 [189]的研究结果。

极其重大的技术意义，怎么强调都不为过。这里与量子信息科学相关的内容还涉及两个方面：i）分子（无论是否具有手性）提供了生成纠缠态的新方法，与固体中讨论的情况类似 [191], ：局域在一个原子核附近的电子在另一个原子核上复合；ii）将手性成像推广到多体手性系统的可能性。

近年来，O. Smirnova 及其合作者在手性分子的超快成像方面取得了许多开创性成果（参见 [241], 近期综述 [242] ）。在参考文献 [243, 244] 中，作者提出了局域手性光的概念，即利用其三维手性李萨如图形，使光在电偶极近似下呈现手性。这类手性光可以合成并加以利用，从而显著增强具有相反手性的分子之间高次谐波产生光谱的对比度。在参考文献 [245],中，他们研究了光的横向自旋；在超快手性成像中，当光被限制在很小的空间区域内时，就会产生横向自旋。这会产生偏振取决于分子手性的谐波。合成手性光的效应还延伸至其他阿秒科学特性，例如利用手性敏感非线性斯塔克位移，以对映体敏感的方式偏转自由感应衰减辐射 [246]。

最近，我们发现 [247] 手性分子在少周期红外线偏振脉冲的强场电离作用下，会发射具有扭转特性的光电子，其扭转（轨道角动量（OAM））取决于分子手性。这种效应称为光电子涡旋二向色性（*PEVD*），为成像手性提供了新方法，也为探究电子轨道角动量在手性分子中的基于再碰撞的现象中所起的作用带来了引人入胜的新视角。

5.2. 拓扑、强关联系统、手性的生成等

如上所述，阿秒物理和高次谐波产生是出色的探测工具；令人惊讶的是，超快激光脉冲和阿秒物理方法也可用于产生拓扑序、强关联态、手性等。在所有这些情况下，我们都预见到有可能产生新颖的光、物质及光-物质纠缠态，这些状态与

量子信息科学。当然，本文报告的这些想法与尝试实现室温高温 T_c 超导 [248], 或陈绝缘体 [249], 的研究密切相关；这些研究更多属于超快物理，但也涉及太赫兹物理。

S. Wall 的实验团队对太赫兹场控制 $La_{0.5}Sr_{1.5}MnO_4$ [250] 中面内轨道序的研究，是激光诱导相变的一个典型范例。我们也已开始探究在空穴掺杂铜氧化物的超导性中通过激光诱导涨落键的可能性 [251] 。近期发表于《物理评论B快报》 [207],的一项研究展示了从扭曲光中生成费米子陈绝缘体的理论可能性，该扭曲光具有线偏振，作用于类石墨烯材料。

一条尤为有趣的研究方向，是将拓扑、强关联系统、手性等的生成与更复杂的结构化激光结合起来，并综合运用偏振和轨道角动量效应。一个绝佳的例子是将左旋和右旋圆偏振双色激光场叠加，形成所谓的 MAZEL-TOV 构型[157, 165]。这种驱动会使电场呈现著名的三叶李萨如图形，并高效地产生圆偏振高次谐波。

另一个例子是这种光：它利用光的偏振态以及基频和双倍频率的叠加，在电场矢量的动力学中形成分数阶纽结 [252]。将这种形式的强激光脉冲作用于原子靶，会在高次谐波产生过程中引发环面纽结角动量的“奇异”守恒 [161]。将两个具有频率 ω 和 2ω 的延迟圆偏振脉冲结合起来，可以产生具有自扭矩的光：轨道角动量随时间变化的高次谐波产生极紫外光束 [169]。将结构化激光与条件化相结合，为产生大规模纠缠和带有拓扑“印记”的叠加态开辟了新的可能性——这些领域迄今尚未在量子信息应用中得到探索。

如参考文献 [253], 局域手性光 [243, 244], 所示，另一种结构化光可用于将三维手性高效地（即在电偶极近似层面）赋予非手性物质，例如原子。局域手性光会从初始的非手性基态中雕琢出一个手性轨道，使电子跃迁至具有手性形状的轨道。

5.3. 非经典光驱动的强场物理与阿秒科学 t

迄今为止，所有关于强场驱动过程的量子光学研究，都假定驱动场可用相干态描述。即使使用希尔伯特空间方法来描述，相应的场仍然是经典的。然而，在 Even Tzur 等人最近于 ATTO VIII 上报告的一项研究中 [254], ，这一假设被摒弃，他们首次展示了由非经典光场驱动的高次谐波产生过程。在最近的论文中 [255] ，他们表明，高次谐波产生光谱中的平台区和截止对驱动光的光子统计特性十分敏感。相干态（经典态）和福克光态会产生已确立的高次谐波产生截止定律，而热态和压缩态则能大幅超越这一规律。这为进一步探索开辟了道路

驱动源的非经典性质与谐波模的量子性质之间的相互作用。在另一篇论文中，[199] 他们还利用 SFA 的量子推广表明，由明亮（强）光驱动的物质动力学显著依赖于驱动光的量子态，而这会产生一种有效的光子统计力。值得一提的是，这些研究可追溯至一篇更早的论文《由量子光驱动的康普顿散射》[256], ，作者在文中推导出热态和压缩真空态驱动下康普顿发射谱的解析结果，并表明，与相干驱动相比，发射谱明显展宽，因此在平均强度相同的情况下可达到更高的发射频率。

5.4 衰变过程中的纠缠生成

最后，阿秒物理是研究衰变过程（即“整体”衰变为多个产物的过程）中量子关联与纠缠生成的理想平台。非顺序双电离（NSDI）便是一个典型例子：强场电离后发生激光诱导再碰撞，导致靶发生双电离，见图20a。电离产物之间，尤其是两个光电子之间的强关联早已为人所知 [173]。此前，研究人员已对两个光电子之间的相干性与干涉进行了深入研究 [257–260]。近期，A. Maxwell等人 [174] 利用出射电子轨道角动量之间的关联，研究了非顺序双电离中的纠缠生成。关于强场电离中轨道角动量的简要综述，参见 [261, 262]。关键步骤是利用中间激发态及其固有的轨道角动量叠加；在低强度范围内，“第二个”电子具有这一特性‡。因此，简单的守恒定律决定了两个电子的最终轨道角动量必定反相关；在某些最终动量下，这会形成最大纠缠的量子三能级系统，见图20b；同时，它对焦点平均或与离子发生退相干等非相干效应仍具有稳健性。

典型强场衰变过程中的连续谱产物将通过连续变量进行量化，这可能会使纠缠度量的分析复杂化。然而，使用轨道角动量（OAM）能大大简化纠缠的量化与测量任务，在轨道角动量空间中计算电离产物的约化密度矩阵也变得简单，并且在非序列双电离（NSDI）的情况下能清楚地显示纠缠。这也使得可以使用所谓的对数负性进行量化；它可用于描述混合态中的非相干效应。

5.5. 表征衰变过程中的退相干

最后，对衰变 过程的研究提供了一个独特的机会，让我们得以理解并表征量子与经典退相干。这可以追溯到开创性的理论研究，以及

‡ 这被称为再碰撞后电离（RESI）机制。

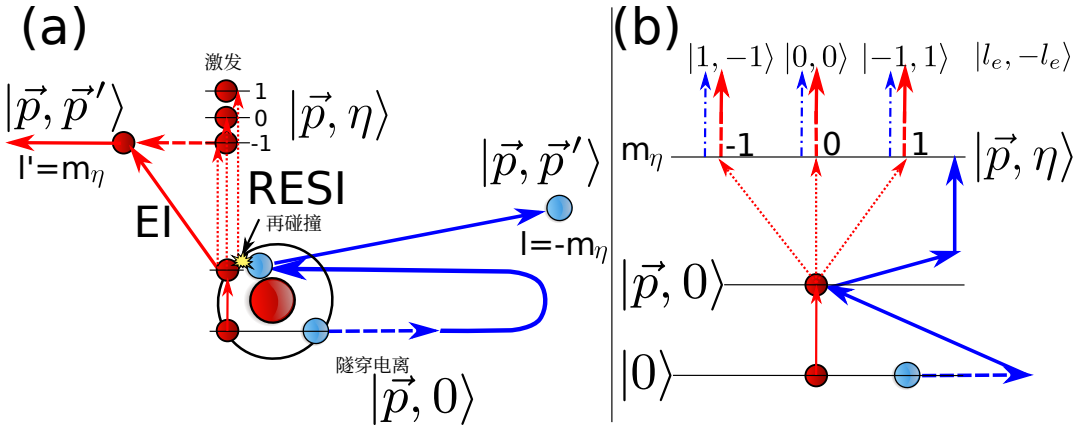

图 20. 非顺序双电离（NSDI），一种“衰变”过程，会导致两个光电子的轨道角动量（OAM）之间产生纠缠。在图（a）中，一个电子在强激光场作用下电离，并与母原子/分子发生再碰撞。这会导致以下两种情况之一：第二个电子通过电子碰撞电离（EI）直接电离，或第二个电子先被激发，随后发生电离（RESI）。图（b）重点展示 RESI：激发态中的轨道角动量叠加态被传递至最终态，同时两个电子之间呈现反关联。该图转载自参考文献 [263]报告了参考文献 [174],中的结果，该文献包含一幅类似的图。

先驱性的理论工作，作者包括 R. Santra 等 [264–266], F. Martín 等 [267], 或 M. Vacher 等 [268]。这些研究本质上都涉及单电子电离过程，该过程可能导致电子与母离子发生纠缠。因此，测量电子的约化密度矩阵能够提供有关退相干以及纠缠的信息。Mark Vrakking等 在这一领域提出了理论构想，并开展了首个实验研究 [269, 270](另见 M. Vrakking 对[234]的贡献)。这一研究方向的主要难题之一，是确保退相干源确实是量子的。事实上，通过仔细分析单电子电离过程中的各种退相干经典与量子模型，Ch. Bourassin-Bouchet 等 证明，退相干主要源于经典因素。

相比之下，在近期的研究中， [271], A. L’Huillier等人 研究了光电子径向和角自由度纠缠所导致的退相干。他们利用高光谱分辨率光电子干涉测量，研究了氦中经由 $2s2p$ 自电离态的双光子电离。结合实验与理论，我们表明， $2s2p$ 态与 $2p^2$ 态的强偶极耦合导致角自由度和径向自由度之间产生纠缠。在角度积分测量中，这表现为自电离过程中相干性的动态损失。

6. 结论

我们报告了强激光–物质相互作用全量子化描述方面的最新进展，以及用于产生可控纠缠态和非经典光态的方法的发展。这使得

强激光场物理与量子光学和量子信息科学得以建立联系。具体而言，在介绍量子光学、非经典光工程和强激光–物质相互作用的基础知识后，我们讨论强激光–物质相互作用的全量子化描述，重点关注强激光驱动原子的量子电动力学、高次谐波产生和阈上电离过程。随后，我们讨论用于从极紫外到远红外范围内制备光学“猫”态和纠缠态的量子操作（条件化），以及可用于控制其量子特征的方法。此外，我们还展望了将研究拓展到与复杂材料以及强量子光的相互作用；这些相互作用可作为额外资源，用于制备新型非经典态和纠缠态。最后，我们讨论强激光场物理和超快科学与量子光学及量子信息科学相结合所带来的一系列应用。

致谢

FORTH 的 P. Tzallas 团队感谢以下项目和机构的支持：LASERLABEUROPE V（H2020-EU.1.4.1.2 资助，编号 871124）、FORTH Synergy Grant AgiIDA（资助编号 00133）、NEP-Europe-Pilot 项目（编号 101007417）下的 H2020 框架计划研究与创新资助，以及 ELI–ALPS。ELI–ALPS 获得欧盟支持，并由欧洲区域发展基金共同资助（GINOP资助编号 2.3.6-15-2015-00001）。

ICFO 的 M. Lewenstein 研究组感谢以下资助：ERC高级资助NOQIA；科学与创新部国家研究局（PGC2018-097027-B-I00/10.13039/501100011033、CEX2019-000910-S/10.13039/501100011033、国家计划 FIDEUA PID2019-106901GB-I00、FPI、QUANTERA MAQS PCI2019-111828-2、QUANTERA DYNAMITE PCI2022-132919、研发项目“合作挑战”QUSPIN RTC2019-007196-7）；MICIIN，获欧盟下一代欧盟（PRTR-C17.I1）及加泰罗尼亚自治区政府资助；Fundació Cellex；Fundació Mir-Puig；加泰罗尼亚自治区政府（欧洲社会基金、FEDER 和 CERCA计划、AGAUR 资助编号 2021 SGR 01452、QuantumCAT U16-011424，该项目由加泰罗尼亚 ERDF 运营计划 2014—2020 共同资助）；巴塞罗那超级计算中心 MareNostrum（FI-2022-1-0042）；欧盟地平线 2020 FET-OPEN OPTOlogic（资助编号 899794）；欧盟地平线欧洲计划（资助协议 101080086 — NeQST）、波兰国家科学中心（Symfonia资助编号 2016/20/W/ST4/00314）；ICFO 内部“QuantumGaudi”项目；欧盟地平线2020研究与创新计划根据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议提供的资助，编号 101029393（STREDCH）和 847648（“La Caixa”青年领军人才奖学金，ID100010434：LCF/BQ/PI19/11690013、LCF/BQ/PI20/11760031、LCF/BQ/PR20/11770012、LCF/BQ/PR21/11840013）。然而，本研究中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟、欧洲气候、基础设施与环境执行机构

（CINEA）或任何其他资助机构的观点。欧盟和任何资助机构均不对这些观点和意见承担责任。M. F. Ciappina 感谢以下资金支持：广东省科技重大专项（极端条件下的未来功能材料 - 2021B0301030005）。P. Stammer 感谢以下资助：欧盟地平线2020研究与创新计划根据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议提供的资助，编号847517。J. Rivera-Dean 感谢以下支持：加泰罗尼亚自治区政府企业与知识部大学与研究秘书处，以及欧洲社会基金（L'FSE inverteix en el teu futur）–FEDER。A. S. Maxwell 感谢以下资助：欧盟地平线2020研究与创新计划根据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议提供的资助，SSFI 编号 887153。E. Pisanty 感谢英国皇家学会大学研究奖学金资助，资助编号 URF\R1\211390。作者贡献：U. B、Th. L.、A. M.、A. O.、E. P.、J. R.-D.、P. S.：贡献相同的作者，按字母顺序排列在作者名单中。M. F. C.、M. L. 和 P. T.：负责指导本研究。

参考文献

[1] R. Hanbury-Brown 和 R. Q. Twiss。两个相干光束中光子之间的关联。《自然》177，第27–29页（1956年）。[2] A. Siegman。《激光》（University Science Books，加利福尼亚州，1986年）。[3] R. J. Glauber。辐射场的相干态与非相干态。《物理评论》131，第6期，第2766页（1963年）。[4] R. J. Glauber。光学相干性的量子理论。《物理评论》130，第6期，第2529页（1963年）。[5] E. Sudarshan。统计光束的半经典描述与量子力学描述的等价性。《物理评论快报》10，第7期，第277页（1963年）。[6] S. Chu。诺贝尔讲座：中性粒子的操控。《现代物理评论》70，第685页（1998年）。[7] C. N. Cohen-Tannoudji。诺贝尔讲座：用光子操控原子。《现代物理评论》70，第707页（1998年）。[8] W. D. Phillips。诺贝尔讲座：中性原子的激光冷却与囚禁。《现代物理评论》70，第721页（1998年）。[9] E. A. Cornell 和 C. E. Wieman。诺贝尔讲座：稀薄气体中的玻色-爱因斯坦凝聚——前70年及近期的一些实验。《现代物理评论》74，第875页（2002年）。

[10]W. Ketterle。诺贝尔讲座：当原子表现得像波：玻色-爱因斯坦凝聚与原子激光器。《现代物理评论》74，第1131页（2002年）。[11] R. J. Glauber。诺贝尔讲座：光量子的一百年。《现代物理评论》78，第1267页（2006年）。[12] J. L. Hall。诺贝尔讲座：定义和测量光学频率。《现代物理评论》78，第1279页（2006年）。[13] T. W. Hänsch。诺贝尔讲座：对精确的热忱。《现代物理评论》78，第1297页（2006年）。[14]S. Haroche。诺贝尔讲座：控制盒中的光子并探索量子与经典的边界。《现代物理评论》85，第1083页（2013年）。[15]D. J. Wineland。诺贝尔讲座：叠加、纠缠与让薛定谔的猫复活。《现代物理评论》85，第1103页（2013年）。[16]A. Ashkin。诺贝尔讲座：光镊及其在生物系统中的应用（NobelPrize.org，瑞典斯德哥尔摩，2018年12月8日。
https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2018/ashkin/lecture/）。[17] G. Mourou。诺贝尔讲座：极端光物理及其应用。《现代物理评论》91，第030 501页（2019年）。[18] D. Strickland。诺贝尔讲座：产生高强度超短光脉冲。《现代物理评论》91，第030 502页（2019年）。[19] A. Aspect。诺贝尔讲座：从爱因斯坦的疑虑到量子技术：非定域性——一种富有成果的图景（NobelPrize.org，瑞典斯德哥尔摩，2022年12月8日。
https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/aspect/lecture/）。[20]A. Zeilinger。诺贝尔讲座：量子奇境之旅（NobelPrize.org，瑞典斯德哥尔摩，2022年12月8日。
https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/zeilinger/lecture/）。[21]J. Clauser。诺贝尔讲座：非定域量子纠缠真实存在的实验性证明（NobelPrize.org，瑞典斯德哥尔摩，2022年12月8日。
https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/clauser/lecture/）。[22] L. Mandel 和 E. Wolf。《光学相干性与量子光学》（剑桥大学出版社，美国纽约州，1995年）。[23] W. Vogel 和 D.-G. Welsch。《量子光学》（Wiley-VCH，魏恩海姆，2006年）。[24] D. F. Walls 和 G. J. Milburn。《量子光学》（施普林格，柏林、海德堡，2010年）。[25] H. J. Kimble、M. Dagenais 和 L. Mandel。共振荧光中的光子反聚束。《物理评论快报》39，第11期，第691页（1977年）。[26] G. Breitenbach、S. Schiller 和 J. Mlynek。压缩光量子态的测量。《自然》387，第471–475页（1997年）。[27] A. I. Lvovsky 和 M. G. Raymer。连续变量光学量子态层析。《现代物理评论》81，第1期，第299页（2009年）。

[28] H. Bachor 和 T. Ralph。《量子光学实验指南》（Wiley-VCH Verlag，德国魏恩海姆，2019年）。[29] G. M. D’Ariano 等。量子层析：表征光学器件的工具。《B辑光学杂志：量子与半经典光学》4，S127–S132页（2002年）。[30] R. Blume-Kohout。量子态的最优可靠估计。《新物理学杂志》12，043 034页（2010年）。[31] R. Blume-Kohout。利用单个零差探测器完整表征高斯双部纠缠态。《物理评论快报》102，020 502页（2009年）。[32] K. Vogel 和 H. Risken。根据旋转正交相位的概率分布确定准概率分布。《物理评论A》40，2847–2849页（1989年）。[33] J. Larson 和 T. Mavrogordatos。Jaynes-Cummings模型及其后续发展：现代研究方向（IOP量子技术系列）（IOP出版有限公司，布里斯托尔，2022年）。[34] A. Acín 等。量子技术路线图：欧洲共同体的观点。《新物理学杂志》20第8期，080 201页（2018年）。[35] I. A. Walmsley。量子光学：以新的视角审视科学与技术。《科学》348第6234期，525–530页（2015年）。[36] I. H. Deutsch。驾驭第二次量子革命的力量。《PRX量子》1第2期，020 101页（2020年）。[37] U. Leonhardt。《测量光的量子态》（第1版，编者：Knight, P. L. 和 Miller, A.；剑桥现代光学研究丛书，剑桥大学出版社，纽约，美国，1997年）。[38] U. L. Andersen 等。压缩光产生的30年发展。《物理学文摘》91，053 001页（2016年）。[39] D. F. Walls。光压缩态。《自然》306，141–146页（1983年）。[40] R. Loudon 和 P. L. Knight。压缩光。《现代物理学杂志》34，709–759页（1987年）。[41] K. Wakui 等。利用周期性极化的 $KTiOPO_4$ 产生的光子减除压缩态。《光学快报》15，3568–3574页（2007年）。[42] F. Diedrich 和 H. Walther。单个囚禁离子的非经典辐射。《物理评论快报》58，203–206页（1987年）。[43] P. Michler 等。量子点单光子闸门器件。《科学》290，2282–2285页（2000年）。[44] B. R. Gadway、E. J. Galvez 和 F. D. Zela。动量与偏振纠缠的单光子所产生的贝尔不等式违背。《物理学杂志B辑》42，015 503页（2009年）。

[45]S. Magnitskiy 等。基于自发参量下转换的纠缠光子源及其表征。俄罗斯激光研究杂志36，618页（2015年）。[46] H. Takesue 和 K. Inoue。利用光纤环路中的自发四波混频产生偏振纠缠光子对并违背贝尔不等式。《物理评论A》70，031 802(R)页（2004年）。[47] A. Vallés 等。在单光子的不同自由度之间产生可调纠缠并违背类贝尔不等式。《物理评论A》90第5期，052 326页（2014年）。[48] A. Zavatta、S. Viciani 和 M. Bellini。利用单光子添加相干态实现从量子到经典的转变。《科学》306，660–662页（2004年）。[49]A. Ourjoumtsev 等。产生用于量子信息处理的光学薛定谔小猫态。《科学》312，83–86页（2006年）。[50] B. Hacker 等。确定性制备纠缠原子-光薛定谔猫态。《自然·光子学》13，110页（2019年）。[51] D. V. Sychev 等。光学薛定谔猫态的扩展。《自然·光子学》11，379页（2017年）。[52]M. Lewenstein 等。在强激光-物质相互作用中产生光学薛定谔猫态。《自然·物理》17第10期，1104–1108页（2021年）。[53] J. Rivera-Dean 等。强激光场及其产生可控高光子数相干态叠加的能力。《物理评论A》105，033 714页（2022年）。[54] A. Gilchrist 等。薛定谔猫态及其在量子信息处理中的作用。《B辑光学杂志：量子与半经典光学》6第8期，S828–S833页（2004年）。[55] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone。量子增强测量：突破标准量子极限。《科学》306第5700期，1330–1336页（2004年）。[56] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone。量子计量学的进展。《自然·光子学》5，222–229页（2011年）。[57] P. Jouguet 等。远距离连续变量量子密钥分发的实验演示。《自然·光子学》7，378–381页（2013年）。[58] S. Lloyd 和 S. L. Braunstein。连续变量量子计算。《物理评论快报》82第8期，1784页（1999年）。[59] T. C. Ralph 等。利用光学相干态进行量子计算。《物理评论A》68第4期，042 319页（2003年）。[60]J. Joo、W. J. Munro 和 T. P. Spiller。利用纠缠相干态进行量子计量学。《物理评论快报》107第8期，083 601页（2011年）。[61]R. Schnabel。光压缩态及其在激光干涉仪中的应用。《物理评论》684，1–51页（2017年）。

[62] T. H. Maiman. 红宝石中的受激光辐射。《自然》187, pp. 493–494 (1960). [63] F. J. McClung and R. W. Hellwarth. 红宝石产生的巨脉冲光。《应用物理学杂志》33, p. 828 (1962).[64] A. DeMaria, D. A. Stetser and H. Heynau. 采用可饱和吸收体实现激光器自锁模。《应用物理快报》8, p. 174 (1966).[65]N. B. Delone and V. P. Krainov. 《原子中的多光子过程》（第2版，施普林格原子、光学与等离子体物理丛书）（施普林格出版社，2000, 2000).[66] P. F. Moulton. Ti:Al_2O_3的光谱与激光特性。《美国光学学会杂志B》3, p. 125 (1986).[67] R. L. Fork et al. 利用三次相位补偿将光脉冲压缩至6飞秒。《光学快报》12 no. 7, pp. 483–485 (1987). [68] A. H. Zewail. 诺贝尔讲座：飞秒化学——利用超快激光研究化学键的原子尺度动力学（NobelPrize.org., 斯德哥尔摩，瑞典，1999年12月8日。 https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1999/zewail/lecture/).[69] M. Protopapas, C. H. Keitel and P. L. Knight. 超高强度激光下的原子物理学。《物理学进展报告》60 no. 4, pp. 389–486 (1997).[70]K. C. Kulander, K. J. Schafer and J. L. Krause. 短脉冲激发、电离与谐波转换的动力学。载于 B. Piraux, A. L’Huillier and K. Rzążewski (编), 《超强激光原子物理学》，第316卷，北约高级研究所丛书B辑：物理学，pp. 95–110（普莱努姆出版社，纽约，1993).[71] P. B. Corkum. 强场多光子电离的等离子体视角。《物理评论快报》71, pp. 1994–1997 (1993).[72] M. Lewenstein et al. 低频激光场产生高次谐波的理论。《物理评论A》49 no. 3, pp. 2117–2132 (1994).[73] M. Ferray et al. 稀有气体中1064纳米辐射的多次谐波转换。《物理学杂志B辑：原子、分子与光学物理》21 no. 3, p. L31 (1988).[74] X. F. Li et al. 高激光强度下稀有气体中的多次谐波产生。《物理评论A》39, p. 5751 (1989).[75] C. Gohle et al. 极紫外频率梳。《自然》436, pp. 234–237 (2005).[76] A. Cingöz et al. 极紫外直接频率梳光谱学。《自然》482, pp. 68–71 (2012).[77] F. Krausz and M. Ivanov. 阿秒物理。《现代物理评论》81, p. 163 (2009).[78] P. B. Corkum and F. Krausz. 阿秒科学。《自然·物理》3, p. 381 (2007).[79] M. Reduzzi et al. 用于时间分辨研究的高次谐波产生光源进展。《电子能谱与相关现象杂志》204, pp. 257–268 (2015).

[80] R. Borrego-Varillas, M. Lucchini and M. Nisoli. 用于研究原子、分子和固体物理学中超快动力学的阿秒光谱学。《物理学进展报告》85, p. 066 401 (2022). [81] S. Chatziathanasiou et al. 气体和固态介质产生阿秒光脉冲。《Photonics》4 no. 2, p. 26 (2017).[82] I. Orfanos et al. 阿秒脉冲计量学。《APL Photonics》4 no. 8, p. 080 901 (2019).[83] K. Amini et al. 强场近似的交响曲。《物理学进展报告》82 no. 11, p. 116 001 (2019).[84] K. J. LaGattuta. 共振驱动氢原子发射的辐射。《物理评论A》48, p. 666 (1993).[85] Y. B. Wang et al. 基于非微扰量子电动力学的强激光场非序贯双电离频域理论。《物理评论A》85, p. 023 402 (2012).[86] D. N. Yangaliev, V. P. Krainov and O. I. Tolstikhin. 非定常系统辐射的量子理论及其在高次谐波产生中的应用。《物理评论A》101, p. 013 410 (2020).[87] F. I. Gauthey et al. 初始相干性在强驱动二能级原子产生谐波和边带中的作用。《物理评论A》52, p. 525 (1995).[88] A. Gombkötő et al. 量子化场诱导的高次谐波产生：相空间图像。《物理评论A》101, p. 013 418 (2020).[89] S. Varró. 高次谐波产生的量子光学层面。《Photonics》8, p. 269 (2021).[90] J. Gao, F. Shen and J. G. Eden. 以量子沃尔科夫态之间的跃迁解释高次谐波产生。《物理评论A》61, p. 043 812 (2000).[91]H. Hu and J. Yuan. 超短强激光脉冲中高次谐波产生的含时量子电动力学模型。《物理评论A》78, p. 063 826 (2008).[92] P. Fu et al. 高次谐波产生与阈上电离之间的相互关系。《物理评论A》64, p. 063 401 (2001).[93] M. Y. Kuchiev and V. N. Ostrovsky. 通过阈上电离和受激复合实现高次谐波产生的量子理论。《物理学杂志B辑：原子、分子与光学物理》32, pp. L189–L196 (1999).[94] V. I. Usachenko and V. A. Pazdzersky. 强激光场中的高次谐波产生：一种替代性量子力学模型。《物理学杂志B辑：原子、分子与光学物理》35, pp. 761–781 (2002). [95] A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova and A. M. Popov. 强激光场中原子的自发辐射。《实验与理论物理学杂志》125, pp. 587–596 (2017).

[96]I. A. Burenkov 和 O. V. Tikhanova。量子化场中的多光子受激韧致辐射特性。《物理学杂志B辑：原子、分子与光学物理》43，页码 235 401（2010年）。[97] A. Gorlach 等。高次谐波产生的量子光学本质。《自然·通讯》11，页码 4598（2020年）。[98] P. Stammer 等。强激光-物质相互作用的量子电动力学：量子态工程的工具。《PRX量子》4，页码 010 201（2023）。[99] I. A. Gonoskov 等。强场激光物理中的量子光学特征：高次谐波产生中的红外光子计数。《科学报告》6，页码 32 821（2016年）。[100] N. Tsatrafyllis 等。通过离开原子介质的红外驱动场的光子统计测量高次谐波。《自然·通讯》8，第15170号，第1–6页（2017年）。[101] N. Tsatrafyllis 等。与半导体相互作用后强激光脉冲中的量子光学特征。《物理评论快报》122，第19期，页码 193 602（2019年）。[102] P. Stammer。高次谐波产生中的纠缠与测量理论。《物理评论A》106，第5期，页码 L050 402（2022年）。[103]P. Stammer 等。从极紫外到远红外的高光子数纠缠态和相干态叠加。《物理评论快报》128，页码 123 603（2022年）。[104] J. Rivera-Dean 等。利用强激光场制备大型光学薛定谔猫态的新方案。《计算机与电子学杂志》20，第6期，第2111–2123页（2021年）。[105] J. Rivera-Dean 等。原子中的阈上电离过程之后的光-物质纠缠。《物理评论A》106，第6期，页码 063 705（2022年）。[106] C. Gerry 和 P. Knight。《量子光学导论》（剑桥大学出版社，2005年，纽约，美国，2005年）。[107] U. Leonhardt。《量子光学基础》（剑桥大学出版社，2010年，纽约，美国，2010年）。[108] M. O. Scully 和 M. S. Zubairy。《量子光学》（剑桥大学出版社，纽约，美国，2010年）。[109]P. Lambropoulos 和 D. Petrosyan。《量子光学与量子信息基础》（施普林格出版社，柏林、海德堡，2007年）。[110]W. P. Schleich。《相空间中的量子光学》（Wiley-VCH Verlag，柏林有限公司，柏林，2001年）。[111] D. V. Strekalov 和 G. Leuchs。非线性相互作用与非经典光。载于 R. W. Boyd、S. G. Lukishova 和 V. N. Zadkov（编），《量子光子学：开创性进展与新兴应用》，第51–101页（施普林格，瑞士，Cham，2019年）。[112]G. T. Herman。《从投影重建图像：计算机断层摄影基础》（学术出版社，纽约，1980年）。

[113] A. I. Lvovsky。量子同频层析成像中的迭代最大似然重构。《美国光学学会杂志B：量子与半经典光学》6，页码 S556（2004年）。[114]W. E. Moerner 和 L. Kador。固体中单分子的光学探测与光谱学。《物理评论快报》62，第2535–2538页（1989年）。[115] I. Aharonovich、D. Englund 和 M. Toth。固态单光子发射器。《自然·光子学》10，第2535–2538页（2016年）。[116] S. Castelletto 等。碳化硅室温单光子源。《自然·材料》13，第151–156页（2014年）。[117] A. Branny 等。二维半导体中量子发射体的确定性应变诱导阵列。《自然·通讯》8，页码 15 053（2017年）。[118] S. Haroche 和 J.-M. Raimond。《探索量子：原子、腔体与光子》（牛津大学出版社有限公司，纽约，美国，2006年）。[119] E. Schrödinger。量子力学的现状。《自然科学》23，第50期，第844–849页（1935年）。[120]A. Ourjoumtsev 等。由光子数态产生光学“薛定谔猫态”。《自然》448，页码 784–786（2007年）。[121] M. Dakna 等。利用分束器上的条件测量产生类薛定谔猫态。《物理评论A》55，页码 3184（1997年）。[122] R. Horodecki 等。量子纠缠。《现代物理评论》81，第2期，页码 865（2009年）。[123] A. Einstein、B. Podolsky 和 N. Rosen。量子力学对物理实在的描述能否被认为是完备的? 《物理评论》47，第10期，页码 777（1935年）。[124] M. Reid 等。专题综述：爱因斯坦-波多尔斯基-罗森佯谬：从概念到应用。《现代物理评论》81，第4期，页码 1727（2009年）。[125]B. C. Sanders。纠缠相干态综述。《物理学A辑：数学与理论》45，第24期，页码 244 002（2012年）。[126] B. C. Sanders。纠缠相干态。《物理评论A》45，第9期，页码 6811（1992年）。[127]S. J. van Enk 和 O. Hirota。纠缠相干态：隐形传态与退相干。《物理评论A》64，第2期，页码 022 313（2001年）。[128] S. Nolte、F. Schrempel 和 F. Dausinger。《超短脉冲激光技术：激光源与应用》，第195卷（施普林格光学科学丛书，施普林格国际出版，瑞士，2016年）。[129] J. Biegert、P. K. Bates 和 O. Chalus。新型中红外光源。《IEEE量子电子学专题选刊》18，第531–540页（2011年）。[130] J. Hebling 等。通过倾斜脉冲前沿激发产生高功率太赫兹脉冲及其应用前景。《美国光学学会杂志B》25，第B6–B19页（2008年）。[131] L. Keldysh。强电磁波场中的电离。苏联物理学—实验与理论物理学杂志20，第5期，页码 1307（1965年）。 [实验与理论物理学杂志，47，第5期，页码 1945（1965年）]。

[132] A. Perelomov、V. Popov 和 M. Terent’ev。《交变电场中的原子电离》。《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》23，第924页（1966年）。 [实验与理论物理学杂志，50卷第5期，第1393页（1966年）]。[133] H. R. Reiss。《强电磁场对弱束缚系统的影响》。《物理评论A》22，第924页（1980年）。[134] M. Ammosov、N. Delone 和 V. Krainov。《交变电磁场中复杂原子及原子离子的隧穿电离》。《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》64，第1191页（1986年）。 [实验与理论物理学杂志，91卷第6期，第2008页（1986年）]。[135] F. H. M. Faisal。《多光子过程理论》，第195卷（施普林格纽约，纽约州，2016年）。[136] P. Agostini 等。《氩原子六光子电离后的自由-自由跃迁》。《物理评论快报》42卷第17期，第1127页（1979年）。[137] S. L. Chin、F. Yergeau 和 P. Lavigne。《超强 CO_2 激光场（10^{14} W cm^{-2}）中的氩隧穿电离及多重电荷产生》。《物理学杂志B：原子与分子物理学》18，第L213页（1985年）。[138] F. H. Faisal。《原子对激光光子的多重吸收》。《物理学杂志B：原子与分子物理学》6，第L89页（1973年）。[139] M. Lewenstein 等。《阈上电离中的环：准经典分析》。《物理评论A》51卷第2期，第1495页（1995年）。[140] W. Becker、A. Lohr 和 M. Kleber。《隧道尽头的光：强场激光原子物理中的两步和三步模型》。《量子与半经典光学》7，第423页（1995年）。[141]G. S. J. Armstrong 等。《关于阿秒科学中解析方法与第一性原理方法的对话》。《欧洲物理学杂志D》75卷第7期，第1–31页（2021年）。[142] G. G. Paulus 等。《阈上电离谱平台》。《物理评论快报》72卷第18期，第2851页（1994年）。[143] M. G. Pullen 等。《利用激光诱导电子衍射对定向多原子分子成像》。《自然·通讯》6卷第7262篇，第1–6页（2015年）。[144] B. Wolter 等。《双电离乙炔化学键断裂的超快电子衍射成像》。《科学》354卷第6310期，第308–312页（2016年）。[145] Y. Huismans 等。《光电子时间分辨全息术》。《科学》331卷第6013期，第61–64页（2011年）。[146] C. Figueira de Morisson Faria 和 A. S. Maxwell。《一切皆关乎相位：超快全息光电子成像》。《物理学进展报告》83卷第3期，第034 401页（2020年）。[147] E. Pisanty、M. F. Ciappina 和 M. Lewenstein。《高次谐波截止的虚部》。《物理学杂志：光子学》2卷第3期，第034 013页（2020年）。[148] A. McPherson 等。《稀有气体中真空紫外辐射多光子产生的研究》。《美国光学学会杂志B》，JOSAB 4卷第4期，第595–601页（1987年）。

[149]P. Salières 等。《高次谐波空间和时间相干性的研究》（1997年）。arXiv:quant-ph/9710060。[150] M. Lewenstein 和 A. L’Huillier。《单原子物理学原理：高次谐波产生、阈上电离和非顺序电离》。载于《强场激光物理》，第147–183页（施普林格，纽约，纽约州，美国，2008年）。[151] R. Weissenbilder 等。《如何优化气体中的高次谐波产生》。《自然·物理评论》4，第713–722页（2022年）。[152] M. A. Khokhlova 和 V. V. Strelkov。《通过高阶频率混合实现高效极紫外产生》。《新物理学杂志》22卷第9期，第093 030页（2020年）。[153] A. S. Johnson 等。《由电离整形的少周期激光脉冲产生高通量软X射线谐波》。《科学进展》4卷第5期，第eaar3761页（2018年）。[154] T. Popmintchev 等。《由中红外光驱动的高次谐波扩展相位匹配》。《光学快报》33卷第18期，第2128–2130页（2008年）。[155] M. D. Perry 和 J. K. Crane。《混合场中的高次谐波发射》。《物理评论A》48卷第6期，第R4051页（1993年）。[156] J. B. Bertrand 等。《非共线高次谐波产生中的超高阶波混频》。《物理评论快报》106卷第2期，第023 001页（2011年）。[157] A. Fleischer 等。《高次谐波产生中的自旋角动量与可调偏振》。《Nat. Photonics》8，第543–549页（2014年）。[158] E. Pisanty、S. Sukiasyan 和 M. Ivanov。《利用双圆场产生高次谐波时的自旋守恒》。《物理评论A》90卷第4期，第043 829页（2014年）。[159] M. Zürch 等。《奇异光束中的强场物理》。《自然·物理》8，第743–746页（2012年）。[160] C. Hernández-García 等。《高次谐波产生中的阿秒极紫外涡旋》。《物理评论快报》111卷第8期，第083 602页（2013年）。[161] E. Pisanty 等。《高次谐波产生中的环面纽结角动量守恒》。《物理评论快报》122卷第20期，第203 201页（2019年）。[162] L. E. Chipperfield 等。《对于任意给定振荡周期产生最大可能电子再碰撞能量的理想波形》。《物理评论快报》102卷第6期，第063 003页（2009年）。[163] S. Haessler 等。《强场波形驱动的量子轨迹优化》。《物理评论X》4卷第2期，第021 028页（2014年）。[164] C. Jin 等。《利用合成双色或三色激光场产生最佳亚千电子伏特高次谐波的波形》。《自然·通讯》5卷第4003篇，第1–6页（2014年）。[165] O. Kfir 等。《用于产生螺旋偏振高次谐波的双圆场在线产生》。《应用物理快报》108卷第21期，第211 106页（2016年）。[166]R. A. Ganeev 等。《锡等离子体中双色泵浦共振诱导奇次和偶次谐波增强的实验与理论研究》。《物理评论A》85卷第2期，第023 832页（2012年）。

[167]V. V. Strelkov、M. A. Khokhlova 和 N. Y. Shubin。高次谐波产生与Fano共振。《物理评论A》89卷第5期，第053 833页（2014年）。[168] M. A. Khokhlova 等人。通过共振高次谐波产生获得的准单色XUV光的偏振控制。《物理评论A》103卷第4期，第043 114页（2021年）。[169] L. Rego 等人。产生轨道角动量随时间变化的极紫外光束。《科学》364卷第6447期，第eaaw9486页（2019年）。[170] A. L'Huillier 等人。稀有气体中多光子吸收诱导的多价离子，波长为0.53 μ米。《物理评论A》27卷第5期，第2503页（1983年）。[171] B. Walker 等人。氦强场双电离的精密测量。《物理评论快报》73卷第9期，第1227页（1994年）。[172] R. Moshammer 等人。强超短激光脉冲产生的 Ne^{n+} 离子的动量分布。《物理评论快报》84卷第3期，第447页（2000年）。[173] T. Weber 等人。多光子双电离中的关联电子发射。《自然》405卷第6787期，第658页（2000年）。[174] A. S. Maxwell、L. B. Madsen 和 M. Lewenstein。非顺序双电离中的轨道角动量纠缠。Nat Commun 13卷第1期，第4706页（2022年）。[175] D. Bauer 和 P. Koval。QPROP：用于强激光-原子相互作用的薛定谔方程求解器。Computer Physics Communications 174卷第5期，第396–421页（2006年）。[176] B. Sundaram 和 P. W. Milonni。高次谐波产生：简化模型及单原子理论与实验的关联。《物理评论A》41卷第11期。[177] G. S. Agarwal 和 A. Biswas。对偶相干态纠缠的定量度量。《B辑光学杂志：量子与半经典光学》7卷第11期，第350页（2005年）。[178] K. Berrada 等人。分束与纠缠生成：激发相干态。Quantum Information Processing 12卷第1期，第69–82页（2013年）。[179] I. J. Kim 等人。正交偏振双色激光场中的高效高次谐波产生。《物理评论快报》94卷第24期，第243 901页（2005年）。[180] J. Mauritsson 等人。利用双色激光场产生阿秒脉冲串。《物理评论快报》97卷第1期，第013 001页（2006年）。[181] L. B. Madsen。加速Kramers-Henneberger参考系中红外激光脉冲高次谐波产生的强场近似。《物理评论A》104卷第3期，第033 117页（2021年）。[182] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》（剑桥大学出版社，2010年）。ISBN 978-1-139-49548-6。[183]M. B. Plenio 和 S. Virmani。纠缠度量简介。Quantum Info. Comput. 7卷第1期，第1–51页（2007年）。

[184]P. van Loock。量子信息的光学混合方法。Laser & Photonics Reviews 5卷第2期，第167–200页（2011年）。[185] D. B. Milošević 等人。少周期脉冲引发的阈上电离。Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 39卷第14期，第R203–R262页（2006年）。[186] M. F. Ciappina 等人。纳米尺度的阿秒物理。《物理学进展报告》80卷第5期，第054 401页（2017年）。[187] A. Nayak 等人。强场物理中的鞍点方法与阿秒脉冲的产生。Physics Reports 833，第1–52页（2019年）。[188] J. Alcalà 等人。高温超导体量子相变的高次谐波光谱学。Proceedings of the National Academy of Sciences 119卷第40期。[189] A. Pizzi 等人。强驱动多体系统的光发射。《自然·物理》。[190] I. Gonoskov 等人。激光驱动半导体带内激发产生与控制非经典光（2022年）。arXiv:2211.06177。[191] J. Rivera-Dean 等人。Wannier-Bloch 图像下固体高次谐波产生的量子光学分析（2022年）。arXiv:2211.00033。[192] G. G. Brown 等人。从实空间视角看固态高次谐波产生中的退相干（2022年）。arXiv:2210.16889。[193] R. E. F. Silva 等人。强关联系统中超快多体动力学的高次谐波光谱学。Nat. Photonics 12，第266–270页（2018年）。[194]T. Lamprou 等人。利用高次谐波产生过程对相对论激光–等离子体相互作用进行量子光学光谱测量：一项提案。Photonics 8卷第6期，第192页（2021年）。[195] M. Manceau 等人。放大量子噪声产生的无确定均值的帕累托光子分布。《物理评论快报》123，第123 606页（2019年）。[196] K. Y. Spasibko 等人。超快光子数涨落增强多光子效应。《物理评论快报》119，第223 603页（2017年）。[197] G. Mouloudakis 和 P. Lambropoulos。共振跃迁中复合非线性与配对超聚束。《物理评论A》102，第023 713页（2020年）。[198]T. Lamprou 等人。关于高光子通量非经典光及其在非线性光学中应用的展望。High Power Laser Science and Engineering 8，第e42页（2020年）。[199] M. E. Tzur 等人。超快电子动力学中的光子统计力（2022年）。arXiv:2211.03091。[200] J. Preskill。NISQ 时代及之后的量子计算。Quantum 2，第79页（2018年）。

[201] I. M. Georgescu、S. Ashhab 和 F. Nori。量子模拟。《现代物理评论》86，第153–185页（2014年）。[202] J. Fraxanet、T. Salamon 和 M. Lewenstein。量子模拟的未来几十年（2022年）。（2022年）。arXiv:2204.08905。[203]E. Farhi 等人。应用于随机 NP完全问题实例的量子绝热演化算法。《科学》292卷第5516期，第472–475页（2001年）。[204] N. Gisin 和 R. Thew。量子通信。《自然·光子学》1卷第3期，第165–171页（2007年）。[205] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro。量子传感。《现代物理评论》89，第035 002页（2017年）。[206] N. Baldelli 等人。通过强场动力学探测马约拉纳零模。《ACS欧米伽》7卷第50期，第47 424–47 430页（2022年）。[207] U. Bhattacharya 等人。线偏振扭曲光产生的费米子陈绝缘体。《物理评论B》105，第L081 406页（2022年）。[208] B. Zeng 等人。《量子信息遇见量子物质》（施普林格纽约，2019年）。doi:10.1007/978-1-4939-9084-9。[209] J. Reimann 等人。亚周期观测拓扑表面能带中的光波驱动狄拉克电流。《自然》562卷第7727期，第396–400页（2018年）。[210] F. Krausz 和 M. I. Stockman。阿秒计量学：从电子俘获到未来的信号处理。《自然·光子学》8卷第3期，第205–213页（2014年）。[211] M. Hohenleutner 等人。实时观测高次谐波产生中相互干涉的晶体电子。《自然》523卷第7562期，第572–575页（2015年）。[212] S. Ghimire 和 D. A. Reis。固体中的高次谐波产生。《自然·物理》15卷第1期，第10–16页（2019年）。[213] D. Bauer 和 K. K. Hansen。有无拓扑边缘态的固体中的高次谐波产生。《物理评论快报》120，第177 401页（2018年）。[214] C. Jürß 和 D. Bauer。Su-Schrieffer-Heeger链中的高次谐波产生。《物理评论B》99卷第19期，第195 428页（2019年）。[215]A. Pattanayak、S. Pujari 和 G. Dixit。马约拉纳费米子在Kitaev链高次谐波产生中的作用。《科学报告》12卷第6722期，第1–7页（2022年）。[216] R. E. F. Silva 等人。亚激光周期时间尺度上的拓扑强场物理。Nat. Photonics 13，第849–854页（2019年）。[217]F. D. M. Haldane。无朗道能级的量子霍尔效应模型：“宇称反常”的凝聚态实现。《物理评论快报》61卷第18期，第2015页（1988年）。[218] Á. Jiménez-Galán 等人。利用光波控制二维材料的拓扑性质，实现亚周期、非共振谷操控。Nat. Photonics 14，第728–732页（2020年）。

[219]A. Chacón 等人。高阶谐波产生中的圆二色性：预示陈绝缘体中的拓扑相及其转变。《物理评论B》102卷第13期，第134 115页（2020年）。[220] E. Goulielmakis 和 T. Brabec。凝聚态中的高次谐波产生。Nat. Photonics 16，第411–421页（2022年）。[221] C. Orthodoxou、A. Zaïr 和 G. H. Booth。二维莫特绝缘体中的高次谐波产生。《npj量子材料》6卷第1期。[222] Y. Murakami 等人。一维莫特绝缘体中的高次谐波产生。《物理评论B》103卷第3期，第035 110页（2021年）。[223]Y. Murakami 等人。莫特绝缘体中高次谐波产生的反常温度依赖性。《物理评论快报》129卷第15期，第157 401页（2022年）。[224] K. Uchida 等人。莫特绝缘体 Ca_2RuO_4中的高阶谐波产生及其非常规标度律。《物理评论快报》128卷第12期，第127 401页（2022年）。[225] A. Roy、S. Bera 和 K. Saha。相互作用玻色子对合成电场的非线性动力学响应。《物理评论研究》2，第043 133页（2020年）。[226] M. Kanega、T. N. Ikeda 和 M. Sato。Kitaev 自旋液体中的线性和非线性光学响应。《物理评论研究》3，第L032 024页（2021年）。[227] N. Klemke 等人。固体的偏振态分辨高次谐波光谱学。《自然·通讯》10卷第1期，第1319页（2019年）。[228] D. Lovinger 等人。自旋和轨道涨落对 $LaVO_3$ 薄膜中莫特-哈伯德激子动力学的影响。《物理评论B》102卷第11期，第115 143页（2020年）。[229] G. Lantz 等人。一种原型非平衡莫特–哈伯德材料的超快演化与瞬态相。《自然·通讯》8卷第1期。[230] M. R. Bionta 等人。利用高次谐波光谱学追踪超快固态动力学。《物理评论研究》3卷第2期，第023 250页（2021年）。[231] A. S. Johnson 等人。VO_2中光诱导相变的超快 X 射线成像。《自然·物理》。[232]A. S. Johnson 等人。v_2o_3中光诱导结构相变期间晶格相干性的超快丧失。《物理评论快报》129，第255 701页（2022年）。[233] V. Valmispild 等人。强关联材料的亚周期多维光谱学（2022年）。arXiv:2208.04647。[234] L. Argenti 等人。第八届阿秒科学与技术国际会议，UCF（2022年）。网址：https://sciences.ucf.edu/physics/atto/。[235] S. Han 等人。利用高次谐波产生提取固体中的高阶非线性电子响应。《自然·通讯》10卷第3272期，第1–6页（2019年）。[236]I. A. Calafell 等人。石墨烯异质结构增强高次谐波产生。《先进光学材料》10卷第19期，第2200 715页（2022年）。

[237] C. Shao 等. 强关联系统接近量子临界点时的高次谐波产生。《物理评论快报》128卷第4期，第047 401页（2022年）。[238] A. AlShafey 等. 金属-绝缘体界面中的超快激光驱动动力学（2022年）。arXiv:2212.09176。[239] C. Vaswani 等. 铁基超导体中持久希格斯模的光量子控制。《自然·通讯》12卷第1期，第258页（2021年）。[240] P. Tzallas. 强激光场中的量子关联原子。《自然·物理》。[241] R. Cireasa 等. 在亚飞秒时间尺度上探测分子手性。《自然·物理》11卷，第654–658页（2015年）。[242] D. Ayuso、A. F. Ordonez 和 O. Smirnova. 超快手性：实现高效手性测量之路。《物理化学化学物理》24卷第44期，第26 962–26 991页（2022年）。[243] D. Ayuso 等. 用于高效控制手性光–物质相互作用的合成手性光。Nat. Photonics 13卷，第866–871页（2019年）。[244] D. Ayuso 等. 对映体敏感的单向光弯曲。《自然·通讯》12卷第3951期，第1–9页（2021年）。[245] D. Ayuso 等. 超短、紧聚焦光束在手性分子中引发的超快旋光。Optica 8卷第10期，第1243–1246页（2021年）。[246] M. Khokhlova 等. 自由感应衰减的对映体敏感操控。Sci. Adv. 8卷第24期，第eabq1962页（2022年）。[247] X. B. Planas 等. 利用光电子涡旋对分子手性进行超快成像。《物理评论快报》129卷第23期，第233 201页（2022年）。[248] A. Cavalleri. 光诱导超导性。Contemp. Phys. 59卷第1期，第31–46页（2018年）。[249] J. W. McIver 等. 石墨烯中的光诱导反常霍尔效应。《自然·物理》16卷，第38–41页（2020年）。[250]T. A. Miller 等. 太赫兹场对 $La_{0.5}Sr_{1.5}MnO_4$ 中面内轨道序的控制。《自然·通讯》6卷第8175期，第1–7页（2015年）。[251] S. Julià-Farré 等. 涨落的 Cu-O-Cu 键引发的空穴掺杂铜氧化物中的纳米尺度相分离与赝能隙。《物理评论B》101卷第12期，第125 107页（2020年）。[252] E. Pisanty 等. 利用光的偏振态编织分数阶纽结。Nat. Photonics 13卷，第569–574页（2019年）。[253] N. Mayer 等. 利用合成手性光场在原子上赋予手性。《物理评论快报》129卷第24期，第243 201页（2022年）。[254]M. Even Tzur 等. 由量子光驱动的高次谐波产生（2022年）。第八届阿秒科学与技术国际会议（摘要集），网址 https://sciences.ucf.edu/physics/ atto/book-of-abstracts/。

[255] A. Gorlach 等. 由量子光驱动的高次谐波产生（2022年）。arXiv:2211.03188。[256] M. Khalaf 和 I. Kaminer. 强量子光驱动的康普顿散射。Sci. Adv. 9卷第1期，第eade0932页（2023年）。[257] A. S. Maxwell 和 C. F. de Morisson Faria. 延迟非序贯双电离中的量子干涉。《物理评论A》92卷第2期，第023 421页（2015年）。[258]A. S. Maxwell 和 C. F. de Morisson Faria. 通过量子干涉控制低于阈值的非序贯双电离。《物理评论快报》116卷第14期，第143 001页（2016年）。[259] X. Hao 等. 阈值强度以下氩原子双电离中的量子效应。《物理评论快报》112卷第7期，第073 002页（2014年）。[260]W. Quan 等. 激光诱导非序贯双电离中的量子干涉。《物理评论A》96卷第3期，第032 511页（2017年）。[261] A. S. Maxwell 等. 强场电离中扭曲电子的操控。Faraday Discuss. 228卷第0期，第394–412页（2021年）。[262] Y. Kang 等. 强场电离中电子涡旋的守恒定律。《欧洲物理学杂志D》75卷第7期，第1–12页（2021年）。[263] M. Lewenstein 等. 阿秒物理与量子信息科学（2022年）。arXiv:2208.14769。[264] S. Pabst 等. 阿秒光电离中的退相干。《物理评论快报》106卷第5期，第053 003页（2011年）。[265]C. Arnold、O. Vendrell 和 R. Santra. 光电离后的电子退相干：核运动影响的全量子动力学处理。《物理评论A》95卷第3期，第033 425页（2017年）。[266]C. Arnold 等. 阿秒光电离后的分子电子退相干。《物理学杂志 B 辑：原子、分子与光学物理》 53卷第16期，第164 006页（2020年）。[267] M. Lara-Astiaso 等. 生物分子中极紫外诱导电荷迁移的退相干、控制与阿秒探测：理论展望。Faraday Discuss. 194卷第0期，第41–59页（2016年）。[268] M. Vacher 等. 多原子分子电离时的电子动力学：与量子核运动的耦合及退相干。《物理评论快报》118卷第8期，第083 001页（2017年）。[269] M. J. J. Vrakking. 阿秒纠缠与相干性的控制。《物理评论快报》126卷第11期，第113 203页（2021年）。[270] L.-M. Koll 等. 阿秒泵浦-探测实验中量子力学纠缠的实验控制。《物理评论快报》128卷第4期，第043 201页（2022年）。[271] D. Busto 等. 利用高分辨率阿秒光电子干涉测量探测电子退相干。《欧洲物理学杂志D》76卷第7期，第1–10页（2022年）。