天文学中贝叶斯推断的实用指南

Gwendolyn M. Eadie[1], [2]★、Joshua S. Speagle、[1,2,3] Jessi Cisewski-Kehe、[4] Daniel Foreman-Mackey、[5] Daniela Huppenkothen、[6] David E. Jones、[7] Aaron Springford[8] 和 Hyungsuk Tak[9,10,11]

[1]多伦多大学 *David A. Dunlap* 天文学与天体物理学系，多伦多，*M5S 3H4*，加拿大[2]多伦多大学统计科学系，多伦多，*M5S 3G3*，加拿大[3]多伦多大学 *Dunlap* 天文学与天体物理学研究所，多伦多，*M5S 3H4*，加拿大[4]威斯康星大学麦迪逊分校统计学系，麦迪逊，*WI*，*53706*，美国[5]计算天体物理中心，*Flatiron* 研究所，纽约第五大道*160*号，*NY 10010*，美国[6]*SRON* 荷兰空间研究所，尼尔斯·玻尔大道*4*号，*2333 CA* 莱顿，荷兰[7]德克萨斯农工大学统计学系，学院站，*TX 77843*，美国[8]*Cytel*，多伦多，安大略省，加拿大[9]宾夕法尼亚州立大学统计学系，大学公园，*PA 16802*，美国[10]宾夕法尼亚州立大学天文学与天体物理学系，大学公园，*PA 16802*，美国[11]宾夕法尼亚州立大学计算与数据科学研究所，大学公园，*PA 16802*，美国

arXiv:2302.04703v1 [astro-ph.IM] 9 Feb 2023

2023年2月10日

摘要

过去二十年来，贝叶斯推断在天文学中已变得十分普遍。与此同时，不同天文学子领域在贝叶斯推断所用的算法、术语、符号体系和解释方式上各有不同，这可能会让初学者和熟悉贝叶斯统计学的人都感到困惑。此外，天文学文献与统计学文献之间的选择也存在差异。本文的目标有两个：（1）提供一份参考资料，汇总并阐明不同学科中的术语和符号体系；（2）概述贝叶斯推断在天文学中的实用指南。本文结合天文学和统计学文献，讨论符号体系、似然与先验分布的设定、基于后验分布进行推断，以及后验预测检验等主题。我们无意介绍贝叶斯数据分析的整个领域，而是为已经了解贝叶斯方法“基本原理”的天文学家介绍一系列实用做法，帮助他们提升专业水平、拓展知识。此外，随着天文统计学和天体信息学领域不断发展，我们希望本文既能成为有用的参考资料，也能成为深入研读统计学和天文统计学文献的起点。

关键词： 天文统计学 – 计算方法 – 视差

1 引言

过去二十年来，贝叶斯推断在天文学中日益受到欢迎。在美国国家航空航天局的天体物理学数据系统（ADS）中，使用“keyword:statistical”和“abs:bayesian”进行搜索，得到了 2377 篇同行评审论文；自 2000 年以来，这一数字呈指数增长，2021 年发表的论文超过 237 篇。

贝叶斯分析因相较于传统方法具有若干关键优势，而在天文学中日益流行。首先，在给定模型、数据和先验假设的情况下，模型参数后验分布的估计能够比传统方法更全面地展现参数不确定性、联合参数不确定性以及参数关系。其次，贝叶斯概率区间的解释往往更贴近科学家的期望，是点估计加置信区间的一种颇具吸引力的替代方案；后者通常依赖于估计量的抽样分布。第三，贝叶斯分析能够轻松地对干扰参数进行边缘化，通过测量误差模型纳入测量不确定性，并纳入不完整数据，例如缺失数据和删失数据。第四，天文学家通常掌握有关参数值合理范围的先验知识（例如，来自物理理论以及以往的观测或实验），这些知识可以自然地纳入先验分布，从而改善最终推断。

值得注意的是，除了贝叶斯方法的上述优势外，高效且不断提升的计算能力，以及易于使用或开箱即用的算法，也以便捷实用的形式将贝叶斯方法带给了天文学家（例如，*em-cee* (Foreman-Mackey et al. 2013),*Rstan* (Stan Development Team2020), *PyStan*(Riddell et al. 2017), *PyMC3* (Salvatier et al. 2016),BUGS (Lunn et al. 2000), NIMBLE(de Valpine et al. 2017), andJAGS (Plummer et al. 2003)).

有趣的是，贝叶斯统计学日益流行，尽管贝叶斯方法很少在本科天文学和物理学课程中教授，而且直到最近才在天文学研究生课程中以基础形式引入（Eadie 等，2019b，a）。贝叶斯推断的新手和资深用户都面临着一些挑战，包括天文学和统计学文献中所使用的符号体系、术语、解释方式以及可选算法各不相同。

★ 电子邮件：gwen.eadie@utoronto.ca

© 0000 作者

如果要利用这些方法推动天文学领域的发展，就必须熟悉贝叶斯框架的最佳实践和常见陷阱。此外，天文学中的贝叶斯推断用户也面临着挑战，因为本科和研究生课程培训仍在逐步追赶最先进的贝叶斯推断方法。

本文的目标有两个。首先，我们旨在为天文学和统计学领域中贝叶斯推断所使用的术语和符号体系提供一种“对照”。其次，我们希望展示贝叶斯推断过程中一些实用的做法，并希望这些内容能为熟悉和／或在研究中使用贝叶斯统计学的天文学家带来有价值的贡献。为实现这些目标，我们在论文正文中讨论以下主题：符号体系（第 2.1 节）、似然的解释与确定（第 2.2 节）、先验分布的选择与评估（第 2.3 节）、后验分布的评估及基于后验分布进行推断（第 2.4 节），以及后验预测检验（第 2.5 节）。

本文并非旨在全面介绍贝叶斯推断，而是希望揭示贝叶斯统计学既是一门内容广博的学科，也是一个活跃的研究领域。我们着力指出贝叶斯推断中常见的错误和误解，并以此为切入点，强调值得进一步学习的重要主题。事实上，还有许多有价值的主题和子主题未能在本文中涉及，但我们特别列出了关键参考文献。例如，全文会涉及贝叶斯设计、后验预测检验、层次建模和贝叶斯计算等领域（Craiu &Rosenthal 2014；Robert 2014），还推荐了统计学和天文统计学领域关于贝叶斯数据分析的书籍（Gelman 等 2013；Carlin& Louis 2008；Hilbe 等 2017）。

为了便于阐述，我们在每节末尾都会贯穿使用一个示例——根据恒星的视差测量推断其距离。在贝叶斯框架下根据视差估计距离这一具体问题，已在其他研究中得到深入探讨（Bailer-Jones 2015；Astraatmadja & Bailer-Jones 2016a，b），并应用于盖亚 第二次数据发布（盖亚DR2）（Lindegren, L.et al.2018；Bailer-Jones 等，2018；Schönrich et al. 2019）。关于这一主题的深入探讨，请参阅这些论文。我们在此采用这个示例，是因为它具有普遍性，能带来一些有趣的挑战和潜在陷阱，也为阐释贝叶斯分析的规范实践提供了良好的框架。在此过程中，我们还将指出这些建议如何适用于天文学的其他领域。

2 贝叶斯模型的指定

2.1 符号体系与贝叶斯定理

天文学和统计学文献中都使用多种不同的贝叶斯推断符号体系。本节旨在澄清其中一些差异，同时提供一份“对照说明”，帮助天文学家更轻松地阅读统计学论文（例如，识别随机变量、概率分布函数等的符号）。

我们用 $\boldsymbol{y}$（向量化形式）表示随机变量 Y 的观测数据，并用 $\boldsymbol{\theta}$ 表示感兴趣的参数。后验分布由贝叶斯定理定义如下：

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \frac{p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{y})} \tag{1}$$

其中，$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ 是给定 $\boldsymbol{\theta}$ 时 $\boldsymbol{y}$ 的抽样分布（第 2.2 节），$p(\boldsymbol{\theta})$ 是先验密度（第 2.3 节），$p(\boldsymbol{y})$ 是先验预测密度（Schervish，1995）。给定数据 $\boldsymbol{y}$ 后，$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ 通常被视为关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，称为似然函数（它不是概率密度）；而 $p(\boldsymbol{y})$ 是一个不依赖于 $\boldsymbol{\theta}$ 的归一化常数（在天文学中通常称为模型证据）。在概率论和贝叶斯计算文献中，感兴趣的后验概率分布通常记作并称为目标分布，其符号为 π。不同学科对似然的符号表示也有所不同，我们将在第 2.2 节讨论。

为促进天文学与统计学这两个子学科之间的顺畅交流，明确说明模型选择和参数定义十分有益。例如，以表格形式列出所有模型参数、符号体系及其对应的先验概率分布，对读者很有帮助。此外，我们强调，论文中应完整说明任何贝叶斯模型，以提高可复现性（例如，通过详细附录或开放代码）。本着这一原则，我们在表1中给出了运行示例的完整贝叶斯模型，接下来将明确说明符号体系，并提供我们的开源代码[1]。

2.1.1 视差示例：定义符号体系

在本文的贯穿示例中，我们根据视差测量推断一颗恒星的距离。以千秒差距（kpc）为单位的真实但未知距离 d，与以毫角秒（mas）为单位的真实但未知视差 ϖ 之间的关系为

$$d\,[\mathrm{kpc}] = \frac{1}{\varpi\,[\mathrm{mas}]}. \tag{2}$$

我们的数据 y 是对视差的测量，并带有某个固定的不确定性 σ，我们将其视为已知。因此，在贝叶斯框架中，我们希望根据数据 y 推断参数 d，并求得后验分布：

$$p(d|y) \propto p(y|d)p(d). \tag{3}$$

在第 2.4.2 节中，我们将扩展此示例，根据星团内多颗恒星的视差测量，推断恒星团的距离。星团真实但未知的距离 $d_{\text{星团}}$ 与星团真实但未知的视差之间的关系同样由公式 2给出。在这种情况下，相应的后验密度表示如下：

$$p(d_{\mathrm{cluster}}|\boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{y}|d_{\mathrm{cluster}})p(d_{\mathrm{cluster}}), \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{y}$ 表示其恒星视差测量组成的向量。表1总结了该模型设定。

2.2 似然函数

统计学和天文学在符号体系与语言上的差异，可能会导致对似然的理解产生混淆。在贝叶斯统计学中，大写字母 Y 和 Θ 通常表示随机变量。例如，Gelman 等（2013）在其应用统计学教材中，以及 Schervish（1995）在其统计学理论教材中，都先写出联合概率密度 $p(\Theta, Y)$，然后将似然函数指定为 $p(Y = \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})$（其他地方有时写作 $\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})$），其中 $\boldsymbol{y}$ 是 Y 的固定观测值（即数据），而 $\boldsymbol{\theta}$ 是似然函数的自变量。也就是说，给定数据 $\boldsymbol{y}$ 时，似然是参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数（Gelman 等 2013；Schervish 1995；

[1] https://github.com/joshspeagle/nrp_astrobayes

表 1. 用于推断（1）恒星的距离参数 d（根据其视差测量 y，并假设其真实视差 ϖ 服从高斯分布；上图），以及（2）星团的距离参数 $d_{\rm cluster}$（根据 n 颗恒星的视差测量 $\boldsymbol{y}$；下图）的贝叶斯模型。

推断单颗恒星的距离参数 d	
抽样密度 / 似然（视差）	$p(y \mid d) = N(y \mid 1/d, \sigma^2)$，其中 $\varpi = 1/d$
先验（距离）	$p(d) \propto \begin{cases} d^2 e^{-d/L} & \text{如果 } d_{\rm min} < d < d_{\rm max}\text{服从常数 } L \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$
距离的后验	$p(d \mid y, \sigma_\varpi) \propto d^2 \exp\left[-\frac{d}{L} - \frac{(y-1/d)^2}{2\sigma^2}\right]$
推断恒星团的距离参数 $d_{\rm cluster}$	
抽样密度 / 似然（n 视差测量）	$p(\boldsymbol{y} \mid d_{\rm cluster}) = \prod_{i=1}^{n} N(y_i \mid 1/d_{\rm cluster}, \sigma_i^2)$
先验（星团视差）	$p(\varpi_{\rm cluster}) = N(\varpi_{\rm cluster} \mid \mu_\varpi, \sigma_\varpi)$
星团距离的后验	$p(d_{\rm cluster} \mid \boldsymbol{y}) \propto p(d_{\rm cluster})$ 指数 $\left[-\frac{(y_{eff}-1/d_{\rm 星团})^2}{2\tau^2}\right]$

[2]在上方和下方的方框中，σ a nd σ_i：$i = 1$、2、.....、n 均假定为已知。全文中，$N(y \mid a, b)$ 表示 y 均值为 a、方差为 b的高斯密度函数。

Carlin & Louis 2008；Berger & Wolpert 1988；Casella & Berger 2002）。然而，在天文学中，常能看到诸如“给定模型参数时数据的似然函数”这样的说法，这可能会被误解为将似然函数视作数据的函数。最后，我们指出，$\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数并不是 $\boldsymbol{\theta}$的概率密度函数。

在表 2中，我们总结了统计学和天文学文献中常见的似然符号体系，其表达方式从非常明确（例如 $f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$）到相当简化（例如 $P(\boldsymbol{y}|M)$）。我们注意到，天文学中有时会忽略一个细微之处，即 p 与 P之间的区别。在统计学中，f 和 p 通常用于表示连续随机变量的概率密度函数（pdf），而 P 或 Pr 用于表示离散事件的概率（概率质量函数（pmf）是个例外，通常记作 f、p或 P）。大写字母 F 通常保留用于表示累积分布函数（cdf）。

在特定天文学问题中确定应采用何种似然函数可能颇具挑战，因此必须谨慎选择合适的抽样分布。似然通常被设定为一组已知方差、独立同分布的高斯随机变量的乘积。虽然有时这种选择是合理的，但在许多情况下并不合适，而且会对推断产生实质性影响。例如，在描述高能源的亮度时，泊松分布这类离散分布通常比高斯分布更为合适。其他情况下，数据方差的不确定性可能会促使我们采用基于 t-分布或其他非高斯参数族的似然函数。另一个需要考虑的问题是，所建模的数据是否是随空间或时间收集的；若是如此，通常就不应假定数据具有可交换性——即重新排列数据不会影响似然。遇到这种情况时，应考虑采用包含观测间相关性的扩展模型。

最佳实践是在似然函数中纳入测量过程的所有不可忽略因素。例如，若存在严重的截断和删失问题，务必将其考虑在内，因为在某些情况下，这些问题会显著影响参数推断（Rubin 1976；Eadie 等，2021）。其他常见的、需要检查并处理的问题包括测量不确定性、相关误差、测量偏差、抽样偏差和缺失数据。还有统计学文献中有不少关于这些主题的重要参考资料（Rubin1976；Little & Rubin 2019）。我们建议写下足够的数学细节，以便唯一确定似然；这不仅要通过代数方式定义感兴趣的物理过程，还要定义生成这些数据的抽样／测量过程。

2.2.1 视差示例：似然函数

该盖亚号航天器已测量了超过十亿颗恒星的视差（盖亚等，2018；Collaboration 等，2018）。通过模拟（Holl 等，2012；Lindegren 等，2012），经验上已证明这些视差服从均值等于真实视差的正态分布 ϖ 因此

$$p(y \mid \varpi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-\varpi)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ or equivalently,} \tag{5}$$

$$y \mid \varpi, \sigma \sim N(\varpi, \sigma^2) \tag{6}$$

其中 y 是测量视差，而 σ 是相应的（假定已知的）测量不确定性（Hogg，2018）。我们关注的参数是距离 d，因此将方程6改写为

$$p(y \mid d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-1/d)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ or equivalently,} \tag{7}$$

$$y \mid d, \sigma \sim N(1/d, \sigma^2). \tag{8}$$

我们注意到，类似的高斯模型假设广泛适用于观测天文学的各个子领域，例如通过视向速度（RV）探测系外行星（Danby 1988；Mayor 等 2011；Pepe 等 2011；Fischer 等 2013；Butler 等 2017）或通过凌星探测系外行星（Konacki 等 2003；Alonso 等 2004；Dragomir 等 2019）、推断光源的真实亮度（Tak 等 2017），或估算哈勃常数（Hubble 1929）。这是因为其统计细节类似：观测值带有高斯测量误差，估算出的测量误差不确定性 σ 被视为已知常数，而均值模型可以写成其他参数的确定性函数，例如 $\varpi = 1/d$ 在方程 6中所示。另一方面，正如前面提到的，在每种新的情境下，仔细考虑哪种模型最合适十分重要；

[t!]

表2. 不同语境中的似然记号。

符号体系	描述	语境
$f_Y(\boldsymbol{y}\,\vert\boldsymbol{\theta})$	随机变量 Y 的分布函数， 但将其视为关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，其中 $\boldsymbol{y}$ 固定	统计学
$p(\boldsymbol{y}\,\vert\boldsymbol{\theta})$	本文使用的格式（常见）	统计学与天文学
$\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta};\,\boldsymbol{y})$ 或 $\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})$	似然的显式符号表示，其中包含 自变量 $\boldsymbol{\theta}$	特定的统计学主题，例如， 最大似然估计
$P(\boldsymbol{D}\,\vert\boldsymbol{\theta})$	D 表示数据	天文学
$P(\boldsymbol{y}\,\vert M)$	M 表示模型假设， 隐含地表明参数	天文学、模型选择
$Pr(\boldsymbol{y}\,\vert\boldsymbol{\theta},\ H)$	H 表示一个特定的拟议模型	天文学、模型选择

基于高斯分布的模型有时会（i）被误用，（ii）被过度使用，或（iii）有时并不适用。

2.3 先验分布

先验概率分布，或先验，描述了我们在看到数据之前对模型参数的初始认知。先验可以为模型参数的某些取值赋予比其他取值更高的概率（或密度）。先验通常分为两类：信息性和非信息性。前一类概括了从先前研究、理论预测和/或科学直觉中获得的知识。后一类则试图尽可能少地包含关于模型参数的信息。信息先验可以是共轭先验（Diaconis & Ylvisaker 1979）、共轭先验混合（Dalal & Hall1983）、基于科学动机（Tak 等，2018；Lemoine 2019）、基于先前数据，或者在经验贝叶斯的情况下，基于手头的数据（通常称为数据驱动先验）（Carlin &Louis2000；Maritz 2018）。非信息先验可以是不适定的或“平坦的”、弱信息性的、杰弗里斯先验（Tuyl 等 2008），或其他参考分布。共轭先验有时也被定义为非信息先验。

一种常见的非信息性先验选择是非正规先验——这种先验不是概率分布，尤其是积分不等于 1。统计学文献中有关于非正规先验的优秀入门介绍（Gelman 等 2013，2017）。非正规先验的一个例子是在无界范围上采用平坦先验，例如 $\mathrm{Unif}(0,\infty)$ 或 $\mathrm{Unif}(-\infty,\infty)$。采用非正规先验时，务必检查由此得到的后验是否为正规的概率分布，然后再进行任何推断。若后验不正规，分析便不具有概率解释。经验检查可能不足以发现问题；后验样本可能无法显现后验不正规性的任何迹象，即使后验实际上并不正规，所形成的分布也看似合理（Hobert & Casella 1996；Tak 等，2018）。

关于量化先验影响的研究十分活跃（例如，有效先验样本量 Clarke 1996；Reimherr 等 2014；Jones 等 2020），围绕似然背景下如何选择先验的讨论也同样活跃（Reimherr 等 2014；Gelman 等 2017；Jones 等 2020）。

在天文学中，科学家往往倾向于采用非信息先验分布，这或许是因为信息先验被认为过于主观，或是因为缺乏关于相关参数且易于量化的信息。然而，所有先验都会为模型参数可能取值提供一些 信息，即使是“平坦”先验也不例外。值得注意的是，平坦先验经过变换后并非平坦。例如，在我们的例子（第 2.3.1 节）中，对恒星视差采用“非信息性”的均匀先验分布，实际上就距离而言颇具信息性（图 1 第三幅图）。因此，我们建议在采用默认先验或非信息先验之前，仔细考虑关于参数取值有哪些直接或间接信息；在天文学中，我们通常至少对允许值或物理上合理值的范围有所了解。即使非信息先验似乎确实合适，也必须检查所选分布是否符合已知的物理约束。

完整描述先验分布及其数学形式（包括定义这些分布的超参数取值），有助于促进可复现性和开放科学。遗憾的是，近期一项对天文学文献的荟萃分析表明，先验的定义往往不完整或未予说明（Tak 等，2018），这使得其他人难以解读研究结果。

总而言之，先验方面的良好实践包括：(1) 有现有知识时选择信息先验；(2) 缺乏先验知识时谨慎选择先验；(3) 检验其他先验的影响（参见第2.4节关于敏感性分析的讨论）；(4) 明确说明所选先验分布，以确保清晰性和可复现性。

2.3.1 视差示例：选择先验

对真实视差 ϖ 采用一种天真的先验选择，即令 $p(\varpi)\propto$ 为常数。这是一个非正规先验，它为 ϖ 从 $(0,+\infty)$ 范围内的所有取值赋予相同的密度。若要采用信息性且正规的方法，一种直接的做法是定义截断均匀先验，使 ϖ 在 $\varpi=(\varpi_{\min},\varpi_{\max})$ 之间服从均匀分布，因此

$$p(\varpi)\propto\begin{cases}\text{constant} & \varpi_{\min}<\varpi<\varpi_{\max}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{9}$$

或者等价地，

$$\varpi\sim\mathrm{Unif}(\varpi_{\min},\varpi_{\max}) \tag{10}$$

这里，$\varpi_{\min}$ 和 $\varpi_{\max}$ 是由科学家设定的超参数（例如，为 $\varpi_{\min}$ 采用某个基于物理考虑的截断值，并为恒星的 $\varpi_{\max}$采用最小合理距离）。因此，方程9中的先验可视为弱信息性的，因为边界体现了一些物理知识。同样，我们也可以改为定义一个

距离的均匀先验：

$$p(d) \propto \begin{cases} \text{constant} & d_{\min} < d < d_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{11}$$

或者等价地，

$$d \sim \text{Unif}(d_{\min}, d_{\max}) \tag{12}$$

其中 $d_{\text{最小值}} = 1/\varpi_{\text{最大值}}$ 且 $d_{\text{最大值}} = 1/\varpi_{\text{最小值}}$。与方程9类似，这个先验也可以视为弱信息性先验。然而，二者随 d 变化时的表现截然不同（见图1），这凸显了非信息性（或弱信息性）先验的解释可能会因参数化的选择而改变。

虽然方程11 中的先验看起来可能是非信息性的（因为它是均匀的），但实际上它对恒星的数密度 ρ 随距离的变化作出了强假设。该先验意味着，我们观测到远距离恒星的可能性与观测到较近恒星的可能性相同。然而，随着我们向太空深处观测，由距离 d 定义的立体角面积会增大，这意味着恒星数密度随距离增加而降低。因此，方程11表示所有距离出现的可能性相同，这意味着远距离处每单位体积的恒星数少于近距离处每单位体积的恒星数。

Bailer-Jones 等人 （2018）为视差推断问题提出了一个更好的先验，我们在此简要概述并重现这一先验。在给定距离 d 时，天空中无穷小立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 所探测到的物理体积 $\mathrm{d}V$ 随壳层的大小而变化，即 $\mathrm{d}\Omega \propto d^2$。这意味着，假设各处的恒星数密度 ρ 恒定，采用 $p(d) \propto d^2$ 形式的先验更为合适。然而，我们还可以更进一步——我们知道太阳位于银河系的盘面中，因此沿盘面径向向外移动时，实际的恒星密度 ρ 应随距离增加而降低。假设我们朝向外侧观测，并且恒星密度以长度尺度 L 指数递减（因此对于给定距离，我们有 $p(\rho|d) \propto e^{-d/L}$），则距离先验为

$$p(d) \propto \begin{cases} d^2 e^{-d/L} & d_{\min} < d < d_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{13}$$

这是截断 Gamma$(3, L)$ 分布的密度函数。使用公式 13 的科学家需要选择并定义三个超参数 $d_{\min}$、$d_{\max}$，以及 L。公式 13 是此前由 Bailer-Jones 等人（2018）提出的指数递减空间密度先验。图1展示了这里讨论的全部三个先验。

2.4 后验分布

方程1 的后验分布是贝叶斯推断的重点。一旦指定了先验分布和似然函数，后验分布便唯一确定。通常，分母项 $p(\boldsymbol{y})$ 无法通过解析方法求得。在这种情况下，$p(\boldsymbol{y})$ 可以通过数值积分进行估算。从 $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ 中抽取的样本可用于估算后验分布的性质。一种常用的获取样本的方法是构造一个马尔可夫链，使其平稳分布与目标分布 $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$相匹配，这种方法称为马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）。典型例子是 Metropolis-Hastings 算法（Metropolis 和 Ulam 1949；Metropolis 等人 1953；Hastings 1970；Gelman 等 2013），但也有许多变体，其中一些旨在应对特定挑战，例如对样本进行抽样高维或多峰目标分布；详情请参见Brooks 等人(2011)。

后验分布使我们能够推断模型参数，或由模型参数推导出的量。例如，后验均值 $E(\theta \mid y)$ 是 θ 的点汇总。后验分布也可用于定义参数的可信区间，以提供一段可能取值范围。我们强调，可信区间并非置信区间；给定先验信念、模型和数据，95% 可信区间表示参数有 95% 的概率 落在指定范围内；而 95% 置信区间则表示，如果针对多个数据集正确构造类似区间，预计其中 95% 会包含真实的（固定）参数值。

根据后验分布的特征，我们强调，点汇总和区间可能无法完整描述不确定性（例如，对于多峰后验分布）。此时，后验可视化能提供更全面的图景（见图 2）。关于贝叶斯分析的可视化工具的建议及相关开源软件包，可见统计学文献（Gabry 等人 2019；Gabry 与 Mahr 2019；Kumar 等人 2019；Vehtari 等人 2020）。将联合后验分布投影到两个参数维度上——在天文学文献中也俗称为角图 ——是最常见的可视化工具。在这类可视化图上绘制可信区域或等高线也很有帮助，不过默认使用“1-sigma”可信区域并非总是恰当（例如，当分布为非高斯时）。

后验分布还提供了一种实用方法，可用于获取其他具有物理意义的量的估计值和可信区间。例如，若模型的参数为 $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \kappa)$，且某个物理量可用例如 $\gamma = \beta^2/\alpha e^{\kappa}$ 来描述，那么对于 $\boldsymbol{\theta}$ 的每个样本，都可以计算出 γ 的一个样本。由此可得具有物理意义的量 γ 的分布，也可用来获取点估计和可信区间。换言之，在贝叶斯范式中，各模型参数的不确定性会以协调一致的方式自然传递至派生物理量的不确定性。

后验分布的形状可能很复杂（例如不对称，或具有多个众数）。当后验分布无法以闭式形式推导时，这可能带来计算上的挑战。幸运的是，人们已开发出许多用于近似后验分布的算法。不同算法各自适用于后验分布的不同特征，因此，事先了解后验分布可能呈现的形态，并进行初步探索，在实践中往往很有价值。除了前面提到的 MCMC 抽样算法外，人们还开发了许多其他技术。例如，积分嵌套拉普拉斯近似（Rue 等人 2009）用于近似后验分布；变分贝叶斯方法（Jordan 等人 1999；Blei 等人 2003；Hoffman 等人 2013）以及近似贝叶斯计算（Beaumont 等人 2009；Marin 等人 2012；Weyant 等人 2013；Akeret 等人 2015；Ishida 等人 2015；Beaumont 2019）则是在似然函数过于复杂或计算成本过高而无法求值时可采用的替代方案。

2.4.1 视差示例：推断恒星的距离

在我们的示例中，我们感兴趣的是：给定测量视差 y 及其相关的测量不确定性 σ （我们将其视为已知），推断距离 $d = 1/\varpi$ 的参数。

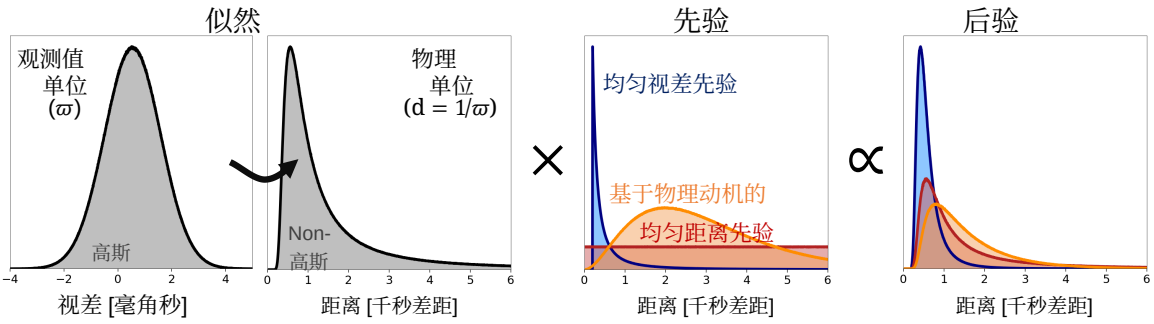

图 1. 基于测量视差推断恒星的距离 $d = 1/\varpi$。 最左侧：视差的似然 ϖ 服从正态分布，且假定方差已知。中间偏左：将参数从 ϖ 变换为 d 后得到非正态概率密度函数。请注意，对 d的分布施加了非负约束。中间偏右：我们重点展示了三种可能的先验 $p(d)$：视差均匀先验 $\varpi = 1/d$ (蓝色)、距离均匀先验 d (红色)，以及基于物理动机的先验（Bailer-Jones 等，2018）（橙色）。最右侧：与三种先验分别对应的后验。

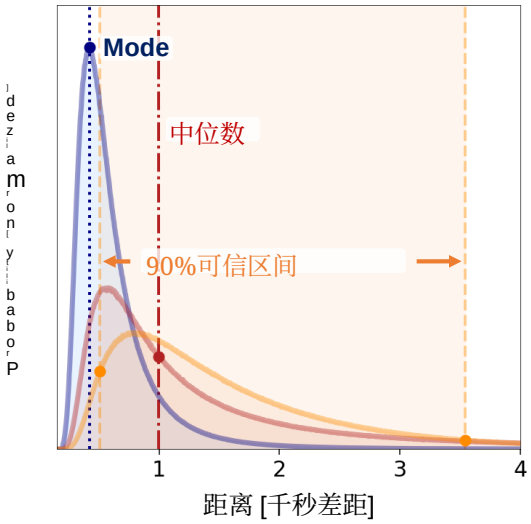

图 2. 图中展示了图 1所示每种先验分布对应的三种后验分布：视差均匀先验（蓝色曲线）、距离均匀先验（红色曲线）和基于物理动机的先验（橙色曲线）。图中还为每个后验标出了一个汇总统计量：众数（蓝色虚点线）、中位数（红色点划线）和90%可信区间（橙色虚线及阴影区域）。

根据贝叶斯定理，后验为

$$p(d|y) \propto p(y|d)p(d). \tag{14}$$

对于前面讨论的三种先验，这对应于以下后验：

$$\text{Equation 9} \quad \Rightarrow \quad p(d|y) \propto \frac{1}{d^2} \exp\left[-\frac{(y-1/d)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{15}$$

$$\text{Equation 11} \quad \Rightarrow \quad p(d|y) \propto \exp\left[-\frac{(y-1/d)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{16}$$

$$\text{Equation 13} \quad \Rightarrow \quad p(d|y) \propto d^2 \exp\left[-\frac{d}{L} - \frac{(y-1/d)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{17}$$

对于 $d_{\text{最小值}} < d < d_{\text{最大值}}$ （以及 0 否则）。虽然这些情况都没有点估计或可信区间的解析解，但可以使用计算技术进行计算。这三个后验分布的近似结果如图 1 和 2所示。不过在这个示例中，尽管得到的每个后验分布都是右偏的，但对于所考虑的每种先验分布，其形状都明显不同。

2.4.2 扩展示例：推断星团 中恒星的距离

现在，我们扩展这个例子，根据每颗恒星的视差测量集合，推断一个恒星团的距离。假设有 n 颗恒星位于大致相同的距离 $d_{\text{星团}}$，并且测量视差

$\boldsymbol{y} = \{y_1、\ y_2、\ \ldots\ldots、\ y_n\}$ 对每颗恒星而言，在给定 $d_{星团}$ 的情况下彼此独立，则合并后的似然是各个单独似然的乘积

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n | 1/d_{\rm cluster}) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i | 1/d_{\rm cluster}), \tag{18}$$

其中各个似然按照方程 6 定义。我们假设测量不确定性 σ_i 是已知常数。我们的后验为

$$p(d_{\rm cluster}|\boldsymbol{y}) \propto p(d_{\rm cluster}) \prod_{i=1}^{n} p(y_i | 1/d_{\rm cluster}). \tag{19}$$

n 个方差已知的独立高斯密度的乘积，是一个精度参数为 $\tau^{-2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2}$、均值参数为 $1/d_{星团}$ 的高斯密度。将观测到的视差合并，可得到有效视差 $y_{\rm eff} = \tau^2 \sum_{i=1}^{n} y_i/\sigma_i^2$，因此，

$$p(d_{\rm cluster}|\boldsymbol{y}) \propto p(d_{\rm cluster}) \exp\left[-\frac{(y_{\rm eff} - 1/d_{\rm cluster})^2}{2\tau^2} \right]. \tag{20}$$

使用$\varpi_{星团} = 1/d_{星团}$的先验共轭高斯分布，基于盖亚DR2数据，对附近的恒星团（M67）$\varpi_{星团}$的后验分布估计如图3所示。图3 上方面板展示了 M67 中恒星的各个视差测量值，并按信噪比排序。下方面板展示了假设的先验分布（左侧窄面板）以及星团视差的（估计）后验分布；随着分析中加入更多、更优质的数据，后验分布也随之变化。

注： 关于 p（$d_{星团}$）的先验决定了恒星星团的分布，而关于 p（d）的先验决定了单颗恒星的分布，二者并不相同。尽管假设它们相似或许是合理的，但它们并非可以互换的量，且确实可能遵循不同的分布。认识到诸如此类不同情境下先验之间的差异，是构建良好模型并继而做出良好推断的关键。

2.5 后验预测检验

获得后验分布后，建议使用后验预测检验（Gelman 等, 1996）来评估模型的充分性；该方法将数据的经验分布与贝叶斯模型所描述的分布进行比较。后验预测分布是在所选模型下并给定先前收集的数据时，假设的未来数据（$\tilde{\boldsymbol{y}}$）的后验分布：

$$p(\tilde{\boldsymbol{y}}|\boldsymbol{y}) = \int p(\tilde{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\theta}. \tag{21}$$

我们发现，后验预测检验在天文学中使用不足，但可能非常有用。后验预测检验不仅评估模型的充分性，还同时检验对后验所作的任何近似。它们是诊断计算抽样方法问题的宝贵工具。

在大多数情况下，后验预测分布没有闭式形式。不过，我们可以从后验预测分布中生成模拟观测值，并将其与原始数据进行比较。例如，对于$\boldsymbol{\theta}$的每个后验样本，抽取一个 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的随机样本，并将这些样本与真实数据进行比较。真实数据与模拟数据的分布之间存在显著或系统性的差异，可能表明模型存在问题。

对模拟数据和真实数据进行定量和／或图形比较是很好的做法。对于图形比较，可以使用叠加的密度图（图4的上图），但通常这不是一个好的选择，因为很难通过目视判断叠加密度之间的差异。对于图形比较，我们建议改用分位数-分位数(Q-Q) 图来描述任何差异（图4的下图）。

要构建 Q-Q 图，只需分别从原始数据和后验预测分布（或从后验预测分布模拟得到的数据）中计算分位数，然后将对应的分位数对相互作图（图 4的下方面板）。如果经验分布与后验预测分布相匹配，那么它们的分位数应沿着一条 1:1 直线分布。在统计计算软件语言中，用于绘制 Q-Q 图的函数很常见。

在我们的视差示例中，模拟数据和真实数据分布尾部的视差值存在一些不一致（图 4）。Q-Q 图比密度图更明确地显示了这一点，因为分布尾部的分位数并未沿着 1:1 直线分布（低于 ~ 10 百分位数以及高于 ~ 70 百分位数）。Q-Q 图任一端的差异可能是由偶然因素造成的，但严重偏离 1:1 直线的情况通常值得进一步调查。

此外，还有其他有价值的方法可用于检验贝叶斯模型以及后验分布近似的质量。例如，可以留出一部分数据，或获取额外的数据，然后将所得推断与基于原始数据的推断进行比较。也可以使用多种方法近似后验分布，并比较结果。这有助于诊断这样的情况：一个或多个抽样算法未能探索完整的参数空间，因而未能将后验样本中的高概率区域纳入其中。

除了模型和后验检验之外，还需要考虑先验分布的影响。图1 最右侧的面板展示了三个后验分布：每个后验分布分别使用了第2.3.1节所讨论的三个先验分布之一。虽然这些后验分布的形状大致相似（例如，均为右偏），但推断得到的汇总统计量可能相当不同（图2）。

更一般地，研究分析结果在若干不同先验分布下的差异，是一种重要的技术，通常称为敏感性分析。敏感性分析直接评估先验分布对后验分布的影响，因此我们建议采用这种方法——尤其是在可用于构建先验的信息有限时。另一方面，敏感性分析可能在一定程度上是临时性的（例如，尝试哪些先验、如何进行比较），这使得跨多个分析、仪器和模型汇总并比较先验影响变得困难。因此，在某些情形下，更具原则性的方法可能更受青睐，或可作为补充。其中一种方法是量化有效先验样本量（EPSS），即先验分布所提供的信息相当于多少个数据点。

对于共轭模型，有效先验样本量很容易计算。例如，若数据为 $y_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，其中 $i = 1, \ldots, n$，且共轭先验分布为 $\mu \sim N(\mu_0, \sigma^2/m)$，已知 σ^2，那么 μ 的后验分布的方差为 $\sigma^2/(n+m)$。因此，先验的作用相当于 m 个样本的作用，我们称有效先验样本量为 m。统计学文献中提出了多种方法，将这一概念从共轭模型推广至其他模型（Clarke 1996；Morita 等 2008；Reimherr 等 2014；Jones 等 2020），并进一步纳入位置差异，例如前述示例中 $|\bar{y} - \mu_0|$ 的值。Clarke（1996）和 Morita 等（2008）利用有效先验样本量来量化先验本身所含的信息，而不考虑数据；Reimherr 等（2014）和 Jones 等（2020）则侧重于先验对具体分析的影响

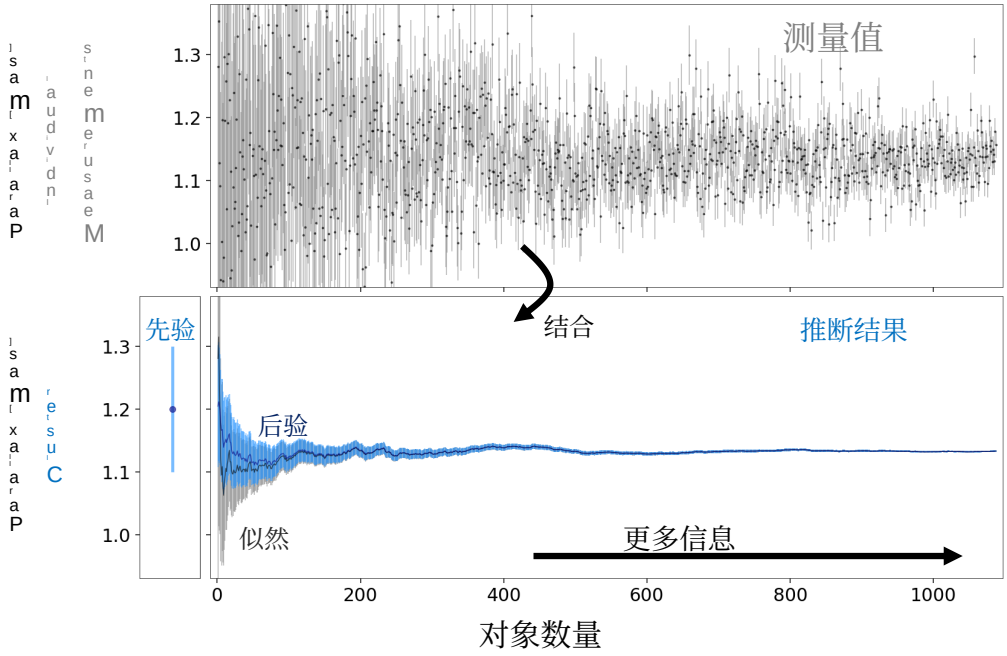

图3。疏散星团 M67 的扩展示例。对图1 所示示例的扩展，展示如何根据许多恒星的视差测量推断疏散星团（M67）的距离。上图：可能属于该星团的成员恒星（根据自行判断）的视差测量值（灰色），按观测信噪比排序 $\varpi_{\rm obs}/\sigma_{\varpi}$。下图：随着越来越多的恒星加入分析，星团视差的联合似然（灰色）和后验分布（蓝色） $\varpi_{\rm cluster} = 1/d_{\rm cluster}$。左侧窄面板展示了星团视差的高斯先验分布。恒星数量较少时，先验的位置会对后验产生显著影响。然而，随着纳入的恒星越来越多，数据所提供的信息将占据主导地位。

所产生的影响。后者通常与科学研究更为相关，也与敏感性分析更加吻合。

本节概述的良好实践可总结为：(1) 采用多种方式概括后验推断；(2) 通过定量和图形方式检查后验分布（例如，使用后验预测检验、*Q*-*Q* 图）；(3) 提供证据，证明已完成诊断检验。

2.5.1 扩展示例：后验预测检验

我们通过计算观测到的恒星视差的后验预测分布，来考察用于估计恒星团距离的模型是否有效。在本例中，后验预测分布可以写成闭式形式（因为它是高斯分布）；我们也可以从后验中模拟 $d_{\text{星团}}$ 的取值，随后再模拟给定 $d_{\text{星团}}$时的预测视差测量值 $\varpi_{\text{pred},\ i}$。

在图 4中，我们分别通过密度图和*Q*-*Q* 图，比较了模拟数据集与观测数据集的分布和估计分位数。尽管两者存在差异，尤其是在分布的尾部，但总体而言，聚类模型再现了数据的大部分观测特征。值得进一步研究这些差异在不同模型下是否仍然存在，例如假设每颗恒星的距离并不相同，或假设测量不确定性并非完全已知的模型。

2.6 结论

我们希望本文梳理、阐释并介绍统计学文献中的基本贝叶斯推断符号体系和技术，尤其是论证完整指定模型、进行后验预测检验，以及使用诸如*Q*-*Q* 图这类尚未得到充分利用的工具的价值。总之，我们强调，在天文学中进行贝叶斯推断时应遵循以下可靠实践：

- 应明确符号体系，并恰当使用术语来解释似然和可信区间等概念，这将有助于跨学科合作和研究结果的可重复性。
- 应将似然描述为给定数据时参数的函数。
- 应尽可能在有充分依据时使用信息先验。仔细考虑关于这些参数有哪些直接或间接的信息。
- 谨慎使用非信息先验，并评估其在参数变换下的性质。
- 检验后验分布对不同先验分布的敏感性。
- 从似然、先验和后验的角度完整地说明贝叶斯模型，并尽可能提供开源代码。
- 对模型进行后验预测检验，并在适当情况下使用*Q*-*Q* 图等可视化方法。
- 力求纳入测量过程中所有不可忽略的影响因素。

我们希望未来天文学家与统计学家之间的跨学科合作能够持续发展。数据

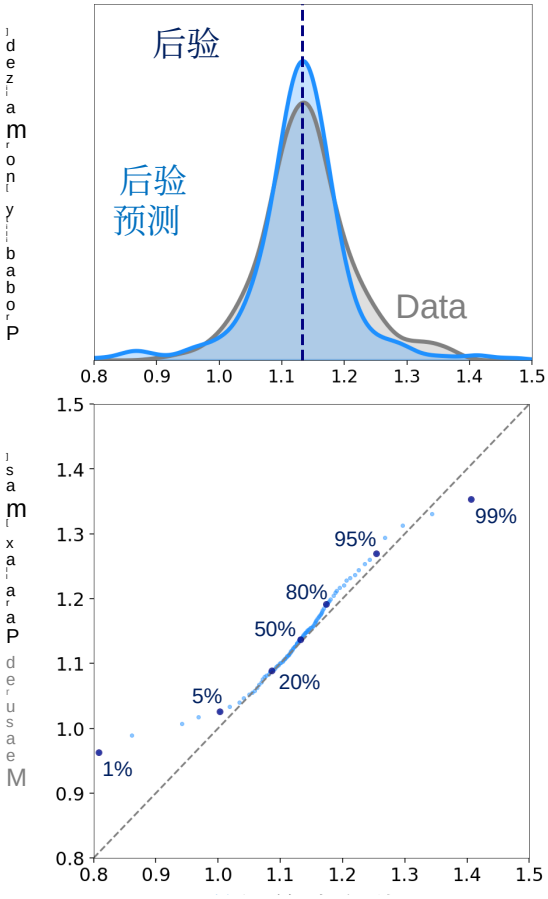

图4. 分位数-分位数（*Q-Q*）图。此图展示了一种对图3所示模型进行后验预测检验的方法。上图：数据中的视差测量分布（灰色）以及后验预测模拟值（浅蓝色）。后验均值以深蓝色虚线表示。目测两者的分布似乎相当一致，但分位数-分位数（*Q-Q*）图提供了更多信息，并显示情况并非如此。下图：后验预测模拟视差数据分位数的*Q-Q*图（*x*轴）与观测视差分位数（*y*轴）。如果真实数据和模拟数据服从相同的分布，那么这些分位数就会落在一比一线上。然而，在低于 ~ 10百分位数以及高于 ~ 70百分位数处，差异十分明显。

来自薇拉·鲁宾天文台、詹姆斯·韦布空间望远镜等尖端望远镜的数据，有望推动天文学领域的发展；但要充分理解这些新信息，最好将其置于已有知识和严谨统计推断的背景下。贝叶斯推断提供了一个框架，使这类分析与发现得以开展。先验信息和基于非高斯分布的似然较为常见的天文学领域，尤其能从贝叶斯方法中受益，例如 X 射线和伽马射线天文学。

贝叶斯推断是一个广泛的主题，本文并未涵盖许多子主题。我们希望，本文不仅能成为一份实用的参考资料，也能成为一系列更具体的论文的开端，探讨天文学和物理学中的贝叶斯方法与技术。

致谢

GME感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC, RGPIN-2020-04554）提供的探索研究资助。JCK衷心感谢美国国家科学基金会通过资助项目编号 AST 2009528 和 DMS 2038556 提供的支持。DH 获得荷兰科学研究组织（NWO）“女性科学卓越计划”（WISE）的资助。

数据可用性

运行示例中使用的数据经许可提供，谨此感谢 Phill Cargile（哈佛-史密森天体物理学中心 |）。

参考文献

Akeret J., Refregier A., Amara A., Seehars S., Hasner C., 2015, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》, 2015, 043 Alonso R., et al., 2004, 《天体物理学杂志快报》, 613, L153 Astraatmadja T. L., Bailer-Jones C. A. L., 2016a,《天体物理学杂志》,832,137 AstraatmadjaT.L.,Bailer-Jones C.A.L.,2016b,《天体物理学杂志》, 833,119Bailer-Jones C. A. L., 2015, 《太平洋天文学会刊》, 127, 994Bailer-Jones C. A. L., Rybizki J.,Fouesneau M., Mantelet G., Andrae R.,2018, 《天文学杂志》, 156, 58Beaumont M. A., 2019, 《统计学及其应用年度评论》, 6, 379 BeaumontM. A., CornuetJ.-M., MarinJ.-M., Robert C.P., 2009, 《生物统计学》, 96, 983 Berger J. O., Wolpert R. L., 1988, 《似然原理》. IMS讲义-专著丛书 Vol. 6, 数理统计学会 Blei D. M., Ng A. Y., Jordan M. I., 2003, 《机器学习研究杂志》, 3, 993 Brooks S., Gelman A., Jones G., Meng X.-L., 2011, 《马尔可夫链蒙特卡罗方法手册》. CRC 出版社 Butler R. P., et al., 2017, 《天文学杂志》, 153, 208 Carlin B. P., Louis T. A., 2000, 《数据分析的贝叶斯与经验贝叶斯方法》. 统计科学丛书 Vol. 88, Chapman & Hall/CRC Boca Raton Carlin B. P., Louis T. A., 2008, 《数据分析的贝叶斯方法》. CRC 出版社 Casella G., Berger R. L., 2002, 统计推断, second edn. Duxbury Pacific Grove, CA Clarke B., 1996, 《美国统计学会杂志》, 91, 173 Collaboration G., et al., 2018, yCat, pp I–345 Craiu R. V., Rosenthal J. S., 2014, 《统计学及其应用年度评论》, 1, 179 Dalal S., Hall W., 1983, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 45, 278 Danby J., 1988, Willmann-Bell, 1988. 2nd ed., rev. & enl. Diaconis P., Ylvisaker D., 1979, 《统计年刊》, pp 269–281 Dragomir D., et al., 2019, 《天体物理学杂志快报》, 875, L7 Eadie G., et al., 2019a, in 《美国天文学会通报》. p. 233 (arXiv:1909.11714)Eadie G., et al., 2019b, in Canadian Long Range Plan for As- trononyandAstrophysicsWhite Papers.p.10(arXiv:1910.08857), 数字对象标识符: 10.5281/zenodo.3756019Eadie G. M., Webb J. J., Rosenthal J. S., 2021, arXiv e-prints,p. arXiv:2108.13491Fischer D. A., Marcy G. W., Spronck J. F., 2013, 《天体物理学杂志增刊系列》, 210, 5 Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J., 2013, 《太平洋天文学会出版物》, 125, 306 Gabry J., Mahr T., 2019, bayesplot: 贝叶斯模型绘图, https://mc-stan.org/bayesplot

Gabry J., Simpson D., Vehtari A., Betancourt M., Gelman A., 2019, 皇家统计学会杂志 A 辑, 182, 389 Gaia C., et al., 2018, 《天文学与天体物理学》, 616 Gelman A., Meng X.-L., Stern H., 1996, 《中华统计学志》 , 6, 733 Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Dunson D. B., Vehtari A., Rubin D. B., 2013, 贝叶斯数据分析. CRC 出版社 Gelman A., Simpson D., Betancourt M., 2017, 《熵》, 19, 555 Hastings W. K., 1970, 《生物统计学》, 57, 97 Hilbe J. M., De Souza R. S., Ishida E. E., 2017, 天体物理数据的贝叶斯模型：使用 R、JAGS、Python 和 Stan. 剑桥大学出版社 Hobert J. P., Casella G., 1996, 《美国统计学会杂志》, 91, 1461 Hoffman M. D., Blei D. M., Wang C., PaisleyJ., 2013, 《机器学习研究杂志》, 14, 1303 Hogg D. W., 2018, 盖亚数据的似然函数 (arXiv:1804.07766)Holl B., Lindegren L., Hobbs D., 2012, 《天文学与天体物理学》, 543, A15 Hubble E., 1929, 《美国国家科学院院刊》, 15, 168 Ishida E. E., et al., 2015, 《天文学与计算》, 13, 1 Jones D. E., Trangucci R. N., Chen Y., 2020, arXiv 预印本 arXiv:2001.10664 Jordan M. I., Ghahramani Z., Jaakkola T. S., Saul L. K., 1999, 《机器学习》, 37, 183 Konacki M., Torres G., Jha S., Sasselov D. D., 2003, 《自然》, 421, 507 Kumar R., Carroll C., Hartikainen A., Martin O. A., 2019, 《开放源代码软件杂志》Lemoine N. P., 2019, 《奥伊科斯》, 128, 912 Lindegren, L. et al., 2018, 《天文学与天体物理学》, 616, A2 LindegrenL., Lammers U.,HobbsD.,O'MullaneW., BastianU.,Hernández J., 2012, 《天文学与天体物理学》, 538, A78Little R. J., Rubin D. B., 2019, 缺失数据的统计分析, third edn. 约翰·威立父子公司 Lunn D. J., Thomas A., Best N., Spiegelhalter D., 2000, Statistics and computing, 10, 325 Marin J.-M., Pudlo P., Robert C. P., Ryder R. J., 2012, Statistics and Computing, 22, 1167 Maritz J. S., 2018, 带有应用的经验贝叶斯方法. CRC 出版社 Mayor M., et al., 2011, arXiv 预印本 arXiv:1109.2497 Metropolis N., Ulam S., 1949, 《美国统计学会杂志》, 44, 335 Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E., 1953, 《化学物理杂志》, 21, 1087 Morita S., Thall P. F., Müller P., 2008, 《生物统计学》, 64, 595 Pepe F., et al., 2011, 《天文学与天体物理学》, 534, A58 Plummer M., et al., 2003, in 第三届分布式统计计算国际研讨会论文集. pp 1–10 Reimherr M., Meng X.-L., Nicolae D. L., 2014, arXiv 预印本 arXiv:1406.5958 Riddell A., et al., 2017, stan-dev/pystan: v2.17.0.0, 数字对象标识符:
1
0.
5
2
8
1/ze
nodo.1003176,https://doi.org/10.5281/zenodo.1003176Robert C. P., 2014, 《统计学及其应用年度评论》, 1, 153 Rubin D. B., 1976, 《生物统计学》, 63, 581 Rue H., Martino S., Chopin N., 2009, Journal of the royal statistical society: Series b (statistical methodology), 71, 319 Salvatier J., Wiecki T. V., Fonnesbeck C., 2016, 《PeerJ计算机科学》, 2, e55 Schervish M. J., 1995, 统计理论. 施普林格统计学丛书, 施普林格 Schönrich R., McMillan P., Eyer L., 2019, 《皇家天文学会月刊》, 487, 3568 Stan Development Team 2020, RStan：Stan 的 R 接口, http://mc-stan.org/Tak H., Mandel K., van Dyk D. A., Kashyap V. L., Meng X.-L., Siemigi- nowska A., 2017, 《应用统计年刊》, 11, 1309 Tak H., Ghosh S. K., Ellis J. A., 2018, 《皇家天文学会月刊》, 481, 277 Tuyl F., Gerlach R., Mengersen K., 2008, 《美国统计学家》, 62, 40 VehtariA., GelmanA., Simpson D., Carpenter B., Bürkner P.-C., 2020,贝叶斯分析, 16, 667 Weyant A., SchaferC., Wood-Vasey W. M., 2013, 《天体物理学杂志》, 764, 116 de Valpine P., Turek D., Paciorek C. J., Anderson-Bergman C., Lang D. T., Bodik R., 2017, 《计算与图形统计学杂志》, 26,403

本文由作者准备的 TEX/LATEX 文件排版而成。