arXiv:2302.04719v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Feb 2023

文章

福克-达尔文模型量子点热机在最大功率下提升效率

Francisco J. Peña [1,2]*、Nathan M Myers[3]*、Daniel Órdenes[1,2],Francisco Albarrán-Arriagada[4] 和 Patricio Vargas [5]

[1] 物理系，智利联邦理工大学，Av. España 1680，瓦尔帕莱索 11520，智利；francisco.penar@usm.cl (F.J.P.)、daniel.ordenes@usm.cl (D.O.)；[2] 纳米生物物理学千年核心 (NNBP)，Av. España 1680，瓦尔帕莱索 11520，智利；[3] 物理系，弗吉尼亚理工大学，美国弗吉尼亚州布莱克斯堡 24061；myersn1@vt.edu (N.M.M.)[4] 物理系，CEDENNA，智利圣地亚哥大学 (USACH)，Avenida Víctor Jara 3493，9170124，中央站，智利。francisco.albarran@usach.cl(F.A.A.)[5] 物理系，CEDENNA，智利联邦理工大学，Av. España 1680，瓦尔帕莱索 11520，智利；patricio.vargas@usm.cl (P.V.)* 通讯作者：francisco.penar@usm.cl；myersn1@vt.edu

学术编辑：name 收稿日期：date；接受日期：
date；出版日期：date

摘要： 我们研究了内可逆磁奥托循环的性能，该循环的工作物质由单个量子点构成，并采用广为人知的福克-达尔文模型对其进行描述。我们发现，调节抛物势阱的强度（几何限域）会影响所提出循环的性能，具体体现为功率、功、效率以及循环作为热机运行时的参数范围。我们证明，存在一个参数范围，使最大输出功率下的效率超过 Curzon-Ahlborn效率；后者是经典工作物质在最大功率下所达到的效率。

关键词： 磁循环；量子奥托循环；量子热力学。

1. 引言

过去十年来，对量子热机的研究取得了丰硕成果。量子热机包括量子引擎和制冷机等装置，其工作介质由量子系统构成 [1–5]。这些研究主要聚焦于不同工作状态下的各种热力学循环，例如奥托循环和斯特林循环 [6–10] ，以及不同量子工作物质的应用，例如自旋 [11–15], 、量子点 [16,17], 和量子谐振子 [18–22]。近期研究还考察了量子相干性和量子关联等量子特性对量子热机性能的影响[23–28]。量子热机的一个重要特点是有望超越其经典对应物的性能 [29,30], ，这为新一代高效率量子引擎和制冷机应用于新兴量子技术开辟了道路。

尽管近年来一些量子热力学循环已得到实验实现 [11,13,31,32], ，但这些器件主要是概念验证原型，而不是以功的形式提取有用能量的实用手段。这是因为，在目前实现这些量子引擎的框架下，将量子热机与另一台器件耦合以提取和利用功，是一项复杂且具有挑战性的任务。量子点是克服这些困难的一个有前景的平台，其易于制造且易于操控，已推动对其热电性质的研究取得重大进展 [16,33,34]。热力学循环可以通过

操控磁场等外部参数，使量子点工作介质在循环的不同步骤中产生电流 [16,35–38]来实现。原则上，利用现有技术可以提取该电流，供另一台器件使用。

在单电子系统和量子点的研究领域，著名的福克-达尔文模型已得到广泛研究。该模型描述了处于垂直外部磁场 [39] 中、受抛物势限域的圆形半导体量子点内的一个电子。福克-达尔文模型对于理解外部磁场下量子点的行为至关重要，并展示了几何限域与外场所产生限域之间的竞争 [40]。此外，传统量子点的福克–达尔文能谱也已通过输运光谱学实验得到验证 [40–43]。

热力学内可逆性对应于一种非平衡近似，该近似假设子系统内部可逆，随后它们之间不可逆地交换能量 [44]。因此，任何耗散都纯粹源于这些子系统之间的相互作用 [45–49]。内可逆热机分析的共同特点是，工作物质与热库之间的热量交换速率有限，因此循环效率受到额外限制。Curzon 和 Ahlborn（CA）将内可逆模型应用于卡诺循环，证明经典卡诺循环在最大功率下的效率为，

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}}, \tag{1}$$

其中T_c 和T_h 分别为冷、热储库的温度。值得注意的是，与卡诺效率一样，CA效率与工作物质的性质无关。

最近，在文献 [19] 中，Deffner指出，对于以单个经典或量子谐振子为工作介质的奥托循环，采用内可逆方法可得：经典工作介质的最大功率效率等于CA效率，而量子工作介质的最大功率效率则高于CA效率。这项工作的主要结论之一是，与卡诺效率不同，Curzon-Ahlborn效率并非最大功率效率的一般上界。也就是说，完全有可能找到最大功率效率超过CA效率的工作物质，正如在工作于线性区间之外的连续热机中已经证明的那样 [50,51]。鉴于此，值得探究其他量子工作介质（如量子点）是否也能提升热机性能。

在本研究中，我们将使用福克-达尔文模型量子点作为工作物质，研究一种有限时间内可逆磁奥托循环。我们发现，改变量子点几何结构会显著影响所考察的循环特性，包括使最大功率下的效率超过卡诺效率。这些结果表明，量子点可作为实施内可逆量子热力学循环的可行平台，具有技术应用价值。

本文安排如下。在第 2 节中，我们介绍描述工作物质的模型，包括能谱、配分函数、熵和内能。在第 3 节中，我们描述所研究的热力学循环，并推导功、热量、效率和功率的表达式。在第 4 节中，我们确定最大功率下的效率，并找出系统能够超过卡诺效率的条件。最后，在第 5 节中，我们总结本文的主要结论。

2. 模型

我们的工作物质由 Fock-Darwin（FD）模型描述。FD哈密顿量对应于一个处于外部磁场中的柱形量子点，该磁场垂直于量子点所在的平面，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*}\left[\left(p_x - \frac{eyB}{2}\right) + \left(p_y + \frac{exB}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2\left(x^2 + y^2\right), \tag{2}$$

其中e 是电子电荷，m^* 是电子的有效质量（取决于材料的特性），ω_0 是表征谐振阱强度的有效参数，而 B 是z 方向磁场的强度。该问题具有柱对称性，其本征能量为，

$$E_{nm} = \hbar\Omega\left(2n + \mid m \mid +1\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c m, \tag{3}$$

其中 $\omega_c = eB/m^*$ 是回旋频率，n 和m 分别是径向量子数和磁量子数（n=0,1,2,... 和m=$-\infty$,...,+∞），而 Ω 是系统的有效频率，

$$\Omega = \omega_0\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{2\omega_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

注意，当参数 $\omega_0 \to 0$时，式（3）中的能级呈现圆柱坐标系下通常的朗道能级形式。对于强磁场，(ω_c/ $2\omega_0 >> 1$)，式（3）可简化为，

$$E_{n,m} = \frac{\hbar\omega_c}{2}(n + 1/2 + |m| + m), \tag{5}$$

当 $|m| + m = 0$ 且$m < 0$时。我们注意到，在此极限下，每个以n标记的朗道能级均具有无限简并度。

本文考虑抛物势阱的低频耦合，其值为 $\omega_0 \sim 2.637$ 太赫兹，换算为能量单位后，耦合约为 1.7 meV。该数值与量子点带内光学跃迁的典型能量相当 [39]。对于有效质量为 $m^* \sim 0.067m_e$[39,52,54] 的圆柱形砷化镓量子点，此类跃迁的能量约为 ~ 1 meV。根据上述数值，量子点长度可通过 $l_{dot} = \sqrt{\hbar/m^*\omega_0} \sim 25$ nm 计算。该有效质量对应的回旋频率为 $\omega_c(B = 1) \sim 2.62$ THz，对应的磁场强度为 $B = 1$ T。需要指出的是，我们将忽略塞曼劈裂和自旋轨道相互作用；在砷化镓系统中，这两者的影响都很小 [39,52]。

我们的工作物质的配分函数可写为 [53]，

$$\mathcal{Z}_d = \frac{\omega_+\omega_-}{4\omega_0^2}\operatorname{csch}\left(\frac{\hbar\beta\omega_+}{2}\right)\operatorname{csch}\left(\frac{\hbar\beta\omega_-}{2}\right), \tag{6}$$

其中，$\beta = 1/k_BT$ 为逆温度，频率 $\omega_\pm$ 由下式给出，

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_c^2 + 2\omega_0^2 \pm \omega_c\sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}\right). \tag{7}$$

请注意，若 $\omega_0 \to 0$，则 $\omega_- \to 0$ 和 $\omega_+ \to \omega_c$，从而得到朗道问题的典型配分函数。

熵 y、$S(T,\ B)$和内能 $U(T,\ B)$，由配分函数通过以下公式推导得出，

$$S(T,B) = k_B \ln \mathcal{Z}_d + k_B T \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_d}{\partial T} \right)_B , \tag{8}$$

and,

$$U(T,B) = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_d}{\partial T} \right)_B . \tag{9}$$

特别是，内能完全可以用 β、 ω_+ 和 ω_- 表示，

$$U(T,B) = \frac{1}{2} \left[\hbar\omega_+ \coth \left(\frac{\hbar\beta\omega_+}{2} \right) + \hbar\omega_- \coth \left(\frac{\hbar\beta\omega_-}{2} \right) \right] . \tag{10}$$

注意，这个表达式只是两个振子的内能之和，其中一个振子的频率为ω_+，另一个振子的频率为 ω_-。相反，由于式（6）中配分函数存在前因子，熵无法以这种方式分解。该前因子计入了能级的简并度，并取决于外部磁场。只有在不存在这一项时，熵才能表示为频率分别为 ω_+ 和ω_- 的两个独立振子的熵之和。

尽管文献中广泛讨论了这些热力学量，但在此我们特别关注熵保持不变的条件，因为这将是分析循环性能的关键。为此，我们寻求温度与外部磁场之间的一种关系，使熵保持不变。图 1 展示了等熵轨迹随温度和磁场的变化。从图中可以看出，温度与磁场呈反向变化关系，即若要保持熵不变，磁场增大时温度必须降低。图 2展示了不同磁场强度下熵随温度的变化。从图中可以看出，在低温下存在一个很大的区域，熵几乎保持不变。在该区域，熵仅取决于配分函数中的简并度项，而该项与外场的大小成正比。因此，要观察到熵的变化，温度必须大幅升高。这导致图 1 中低温下观察到的近乎垂直的等熵线。

3. 内可逆奥托循环

图3的熵-磁场图中描绘的奥托循环由四个过程组成：两个等熵过程（水平线）和两个等容过程（垂直线）。在第一个过程中（$1 \to 2$），工作物质与热库断开接触，外部磁场从B_1 绝热地变为B_2。由于$B_1 < B_2$，尽管工作介质的温度下降，但其内能在此过程中增加。因此，这一过程恰当地归类为等熵压缩，其中磁场发挥的作用类似于体积的倒数。接下来的过程（$2 \to 3$）是等容加热过程，工作物质与温度为T_h 的热库接触，并与之交换热量，同时磁场保持不变。接下来的过程（$3 \to 4$）通过使工作物质与热库断开接触，并将磁场从B_2 绝热地变回B_1来完成。在这一过程中，尽管温度升高，工作介质的内能却下降，因此该过程对应等熵膨胀。最后一个过程（$4 \to 1$）是等容冷却冲程，工作物质与温度为$T_c < T_h$的热库热接触并与之交换热量，同时磁场再次保持不变。我们注意到，压缩和膨胀过程中的温度变化呈反常趋势（与典型情况相比

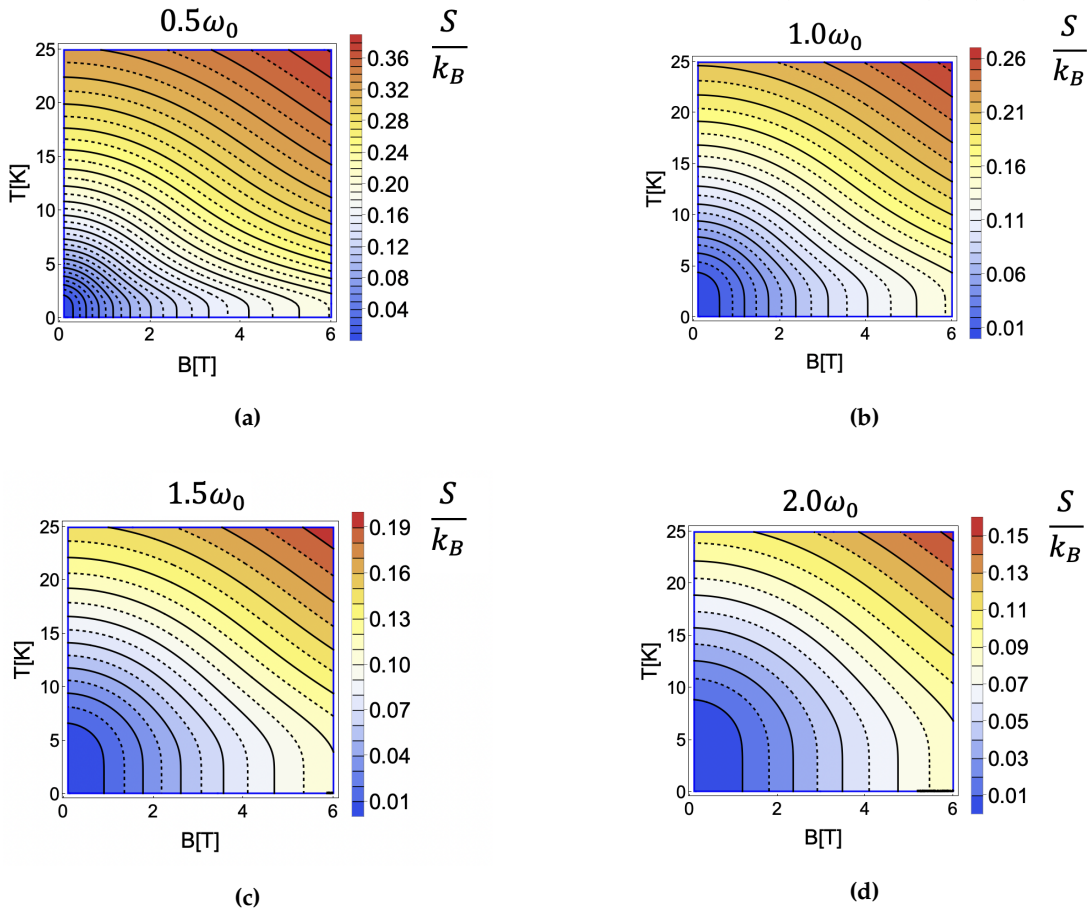

图 1. 等熵曲线随温度T（单位：开尔文）和外部磁场B（单位：特斯拉）的变化等高线图，展示了不同几何限域取值且 $\omega_0 = 2.67$ 太赫兹时的情况。

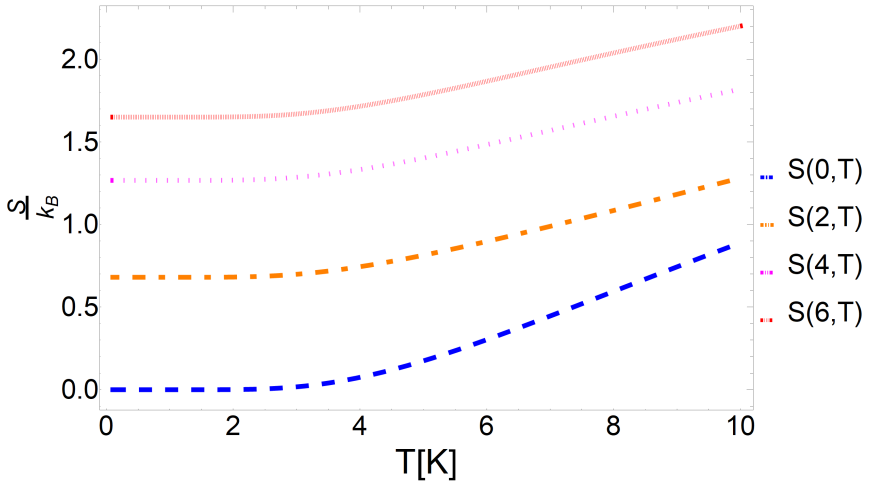

图 2. 磁场强度分别为$B = 0$ T（蓝色）、$B = 2$ T（橙色）、$B = 4$T（洋红色）和$B = 6$T（红色）时，熵随温度的变化。

奥托循环）源于维持熵恒定所需的温度与磁场之间的反比关系，这一点从图1中等熵曲线的负斜率可以看出。

等熵压缩冲程中温度下降这一事实可能会对循环性能产生不利影响，尤其是在温度下降显著的参数区域，例如图1所示的低温、低磁场区域。在这些区域，等熵曲线在温度方向上几乎垂直，这表明若要使压缩冲程保持等熵，磁场只需略微增强，温度就必须大幅下降。工作介质温度偏低，随后在加热过程中便会从热储库吸收大量热量。由于效率以总功与从热储库吸收的热量之比来衡量，在该区域运行的循环效率将显著降低。

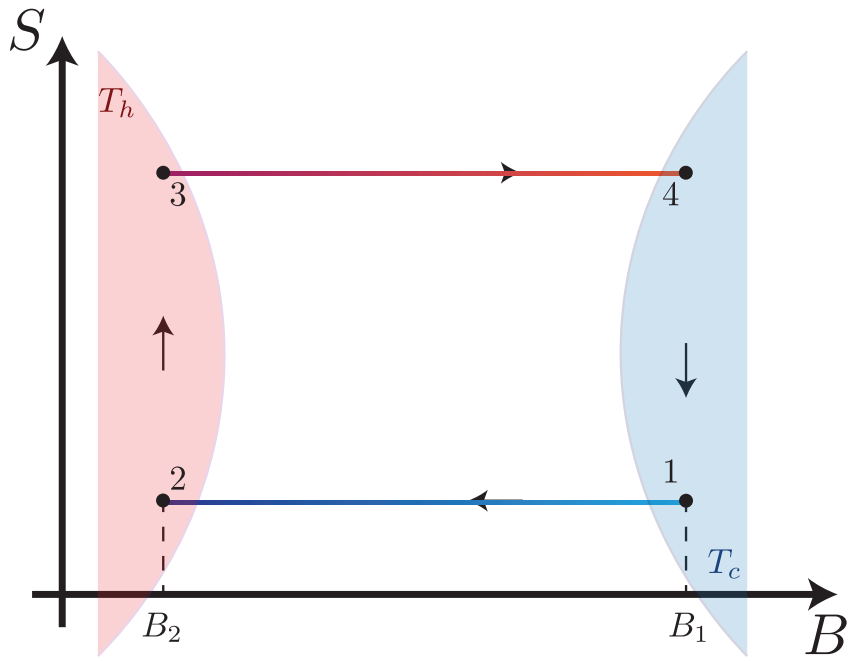

图3。 内可逆奥托循环的熵与外场关系图。请注意，系统仅在等容（垂直）冲程期间与热库接触。在内可逆性的假设下，工作物质在状态点 3 和 1 处不会完全热化至热储库和冷源的温度 T_h 和T_c。

从热力学角度看，该循环由两个热库的温度（T_h和 T_c）以及磁场的初始值和最终值（B_1 和 B_2）表征。在端可逆假设下，我们认为工作介质始终处于局域平衡状态，具有明确的温度，但从未与热库完全热化。按照参考文献 [19]，中确立的分析方法，我们使用下式确定等容加热冲程（$2 \to 3$）期间与热库交换的热量，

$$Q_{\text{in}} = U_3(T_3, B_2) - U_2(T_2, B_2), \tag{11}$$

其中我们注意到 T_3,$T_2 \neq T_h$。温度 T_2 和 T_3 满足以下条件，

$$T(0) = T_2 \quad \text{and} \quad T(\tau_h) = T_3 \quad \text{with} \quad T_2 < T_3 \leq T_h, \tag{12}$$

其中 τ_h 是加热过程的持续时间。我们可以通过应用傅里叶热传导定律，明确地模拟温度从 T_2 变化到T_3，

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha_h \left(T(t) - T_h\right), \tag{13}$$

其中 α_h 是一个常数，取决于工作介质的热导率和热容。求解方程（13）得：

$$T_3 - T_h = (T_2 - T_h)e^{-\alpha_h \tau_h}. \tag{14}$$

等熵膨胀过程（从 $3 \to 4$ 开始）与准静态循环的情况完全相同。由于在此过程中工作介质与热库断开耦合，功完全由内能的变化决定：

$$W_{\text{exp}} = U_4(T_4, B_1) - U_3(T_3, B_2). \tag{15}$$

等容冷却冲程（$4 \to 1$）可用与加热过程完全相同的方式建模。与冷源交换的热量为

$$Q_{\text{out}} = U_1(T_1, B_1) - U_4(T_4, B_1), \tag{16}$$

其中 T_1 和 T_4 满足以下条件

$$T(0) = T_4 \quad \text{and} \quad T(\tau_c) = T_1 \quad \text{with} \quad T_4 > T_1 \geq T_c. \tag{17}$$

与加热过程一样，温度变化可用傅里叶定律建模：

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha_c \left(T(t) - T_c\right), \tag{18}$$

通过求解方程（18），我们得到

$$T_1 - T_c = \left(T_4 - T_c\right) e^{-\alpha_l \tau_c}. \tag{19}$$

最后，绝热压缩过程（$1 \to 2$）中所做的功可由内能的变化求得，

$$W_{\text{comp}} = U_2(T_2, B_2) - U_1(T_1, B_1). \tag{20}$$

随后，热机的效率可由总功与热储库交换的热量之比求得，

$$\eta = -\frac{W_{\text{comp}} + W_{\text{exp}}}{Q_{\text{in}}}. \tag{21}$$

功率输出等于总功与循环时长之比，

$$P = -\frac{W_{\text{comp}} + W_{\text{exp}}}{\gamma(\tau_h + \tau_c)}, \tag{22}$$

其中，$\gamma > 1$ 是一个乘法因子，包含了等熵过程 [19]的持续时间。

由于熵在等熵过程中保持不变，我们可以根据条件$dS(T,B) = 0$得到T 和B 之间的关系。该一阶微分方程为：

$$\frac{dB}{dT} = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B}{\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T}. \tag{23}$$

对于福克-达尔文模型量子点，尽管配分函数的解析形式已知，如式（6）所示，但该方程无法直接得出解析解。尽管如此，仍可通过数值方法求解，正如为确定图 1 中的恒熵曲线所做的那样。此外，定义“磁长度”很有用，具体如下：

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \tag{24}$$

取磁长度之比，

$$r = \frac{l_{B_2}}{l_{B_1}} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}, \tag{25}$$

我们得到一个与经典奥托循环压缩比类似的量。

在 $\tau_h, \tau_c \to \infty$ 的极限下，工作介质将完全热化，我们预期可恢复准静态循环的行为。在此极限下，我们看到，

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_h \to \infty} \left(T_3 - T_h = (T_2 - T_h) e^{-\alpha_h \tau_h}\right) &\to T_3 = T_h, \\ \lim_{\tau_c \to \infty} \left(T_1 - T_c = (T_4 - T_c)\, e^{-\alpha_c \tau_c}\right) &\to T_1 = T_c. \end{aligned} \tag{26}$$

然而，正如式（22）所示，该极限也会导致功率输出趋于零。

4. 结果与讨论

我们首先考虑一个具体示例，其中热浴温度分别为 $T_c = 13$ K 和 $T_h = 25$ K，以说明循环性能。结果见图 4，其中展示了提取的功；效率则见图5 。在图 4中，我们观察到，随着抛物势阱参数 ω_0 减小，提取的功增加。相反，图 5 所示的效率呈现相反趋势，随着 ω_0 增大而提高。这一比较清楚地表明，功与效率之间存在权衡。此外，我们从图 4 中观察到，对于 $2\omega_0$的情况，存在总功为负的区域，这表明在此参数范围内，我们的循环已不再作为热机运行。鉴于此，接下来我们将探讨循环作为不同类型热机运行时的参数范围。

一般而言，热机有四种可能的类型，分别对应于符合热力学第一定律和第二定律的所有可能热量与功流组合。热机对应于正功输出，同时热量从热浴流入工作介质，再从工作介质流入冷浴。制冷机对应于负功输出，同时热量从冷浴流入工作介质，再从工作介质流入热浴。加热器对应于负功输出，且热量从工作介质流向两个热浴。最后，加速器对应于负功输出，同时热量从热浴流入工作介质，再从工作介质流入冷浴。

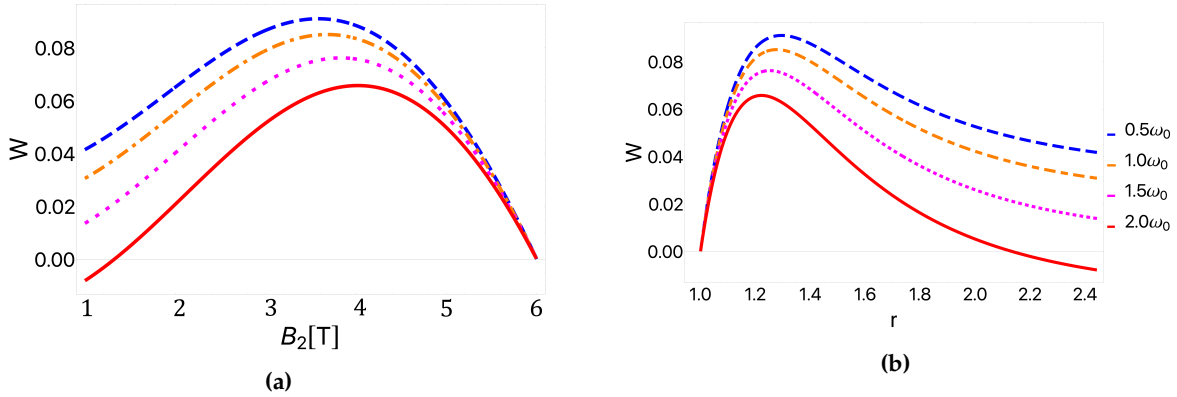

图4. 总功随 (a) 外场和 (b) 压缩比的变化，其中几何约束频率分别为 $0.5\omega_0$ （蓝色）、 ω_0 （橙色）、$1.5\omega_0$ （洋红色）和 $2\omega_0$ （红色）。取$T_c = 13$ K、$T_h = 25$ K 和 $B_1 = 1$ T。可以明显看到，随着量子点限域增大，净功显著减小。尤其是对于这些数值，$2\omega_0$ （红色曲线）对应的情况会转变为负净功。在这一转变点，循环从热机转变为制冷机。

通过数值计算，我们确定了整个11方程（15）、（16）和（20）在整个参数空间中的结果。通过比较所得热流和功流的符号，我们确定了该循环表现为热机、制冷机、加热器还是加速器的区域。

图 6 展示了在两个不同的 ω_0 取值下，循环作为热机或制冷机运行的区域随冷浴温度和外部磁场的变化情况，同时将热储库温度保持在 $T_h = 25$K。我们观察到，增大几何限域频率会缩小循环作为热机运行的区域。图 4可以解释这一现象：随着陷阱频率增大，提取功减小，进而转入负功工作区。从图 6可以看出，增大 T_c 会提高转入制冷机工作区时对应的磁场值。回顾图 4b，增大 T_c 相当于将峰值向左移动，因此在保持定性行为不变的同时，转入负功工作区的临界点也会向左移动。

为数值确定最大功率效率，我们将热浴温度固定为 $T_h = 25$K，并将高磁场的值固定为 $B_h = 12$ T。随后，我们在以下范围内改变冷浴温度：$T_c \in [0\text{K}、25\text{K}]$；并将低磁场的值从 $B_l \in [0\text{T}、12\text{T}]$。选取这一参数空间范围，是为了确保对于所有热浴温度组合，都能捕捉到功随压缩比变化曲线的峰值（见图 4b）。对于每个热浴温度比，我们扫描参数空间，以确定产生最大功率输出的磁场强度，随后确定该最大功率下的效率。图 7 展示了不同 ω_0取值下，最大功率效率随热浴温度比 T_c/T_h 的变化。随后，我们将这些最大功率效率与式（1）中的卡诺效率进行比较。

从图 7可以看出，在热浴温度比较低时，几何限域频率会显著影响最大功率效率。约束频率越低，最大功率效率越高。特别是对于 $\omega_0 = 0.5$ 的情况，我们发现存在一段热浴温度范围，此时最大功率效率高于卡诺效率。在较高温度下，对于所有约束频率，最大功率效率都会趋近于卡诺效率，这符合高温经典极限下的预期。

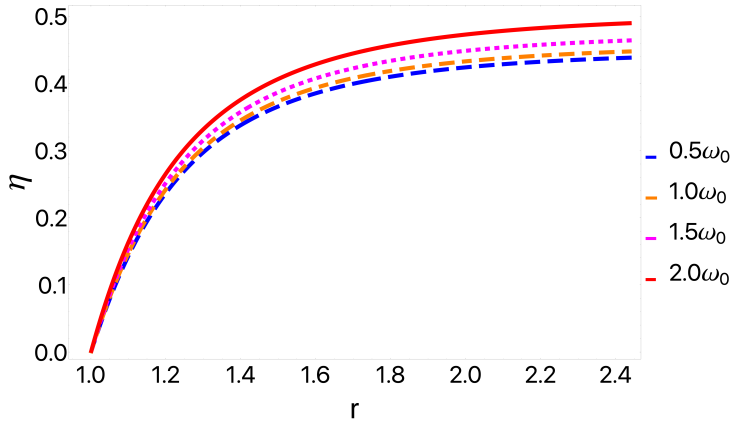

图5。 几何约束频率为 $0.5\omega_0$（蓝色）、 ω_0（橙色）、$1.5\omega_0$（洋红色）和 $2\omega_0$（红色）时，效率随r 的变化。取$T_c = 13$ K 和$T_h = 25$ K。可以观察到，随着几何限域增强，系统的效率也随之提高。

先前研究表明，以纯谐振子为工作介质的内可逆量子奥托热机，其最大功率效率高于卡诺效率 [19]。在 6式中的配分函数在极限 $\omega_0 \to 0$ [53]下简化为二维各向同性谐振子的配分函数，因此，发现较低的 ω_0 会使卡诺效率在某一区间内被超越，这一结果是合理的。在此，我们进一步证明，加入几何限域会对热机性能产生严格的负面影响。

另一个值得注意的特征是，随着热浴温度比趋近于零，最大功率效率渐近趋于平缓。这种行为同样源于图 1 中等熵曲线的结构。由于在低温区熵几乎不随温度变化，因此，在系统脱离该区域之前，使功率输出达到最大的压缩比（以及相应的最大功率效率）不会发生显著变化。这也解释了为何在较高约束频率下，这种渐近行为尤为明显：此时，等熵曲线相对于磁场近乎垂直所对应的温度范围更大。

5. 结论

本文分析了在外部磁场作用下，以量子点俘获电子为工作物质的内可逆奥托循环的性能。通过使用福克-达尔文哈密顿量对工作物质建模，我们发现，净功、功率和效率强烈依赖于抛物线囚禁频率的大小；该频率还会影响循环表现为热机还是制冷机。具体而言，我们发现，较大的囚禁频率会提高效率，但会降低功、功率和最大功率效率（EMP）。尽管如此，我们证明，在囚禁频率较小时，存在一个参数范围，使循环的最大功率效率超过 Curzon-Ahlborn效率。此外，我们发现，福克-达尔文模型量子点的熵对温度呈现强烈的非线性依赖，这在热机性能中具有鲜明特征，具体表现为最大功率效率在低温下呈渐近行为。

致谢： F.J.P. 感谢智利国家研究与发展局 Fondecyt、2020年研究启动项目资助（编号：11200032）、智利国家研究与发展局 Fondecyt 资助（编号：1210312）以及“纳米生物物理学千年核心”项目 NNBP NCN2021 _021提供的经费支持。N.M.M. 感谢美国空军科学研究办公室（FA2386-21-1-4081、FA9550-19-1-0272、FA9550-23-1-0034）和美国陆军研究办公室（W911NF2210247、W911NF2010013）的支持。F.A.-A. 感谢智利国家研究与发展局学术机构入职补助SA77210018和智利国家研究与发展局基础项目 AFB 220001提供的经费支持。P.V. 感谢智利国家研究与发展局 Fondecyt 资助（编号：1210312）和智利国家研究与发展局 PIA/基础资助（编号：AFB 220001）的支持。

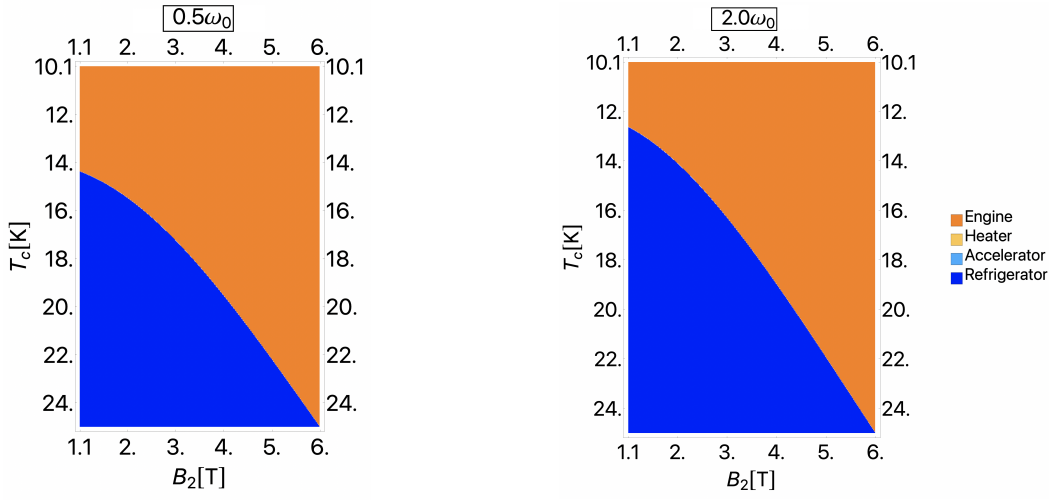

图6. 几何限域条件下，循环行为随外部磁场强度和冷浴温度的变化：(a) $0.5\omega_0$ 和 (b) $2\omega_0$。请注意，随着抛物势阱频率增大，制冷机区域也随之扩大。

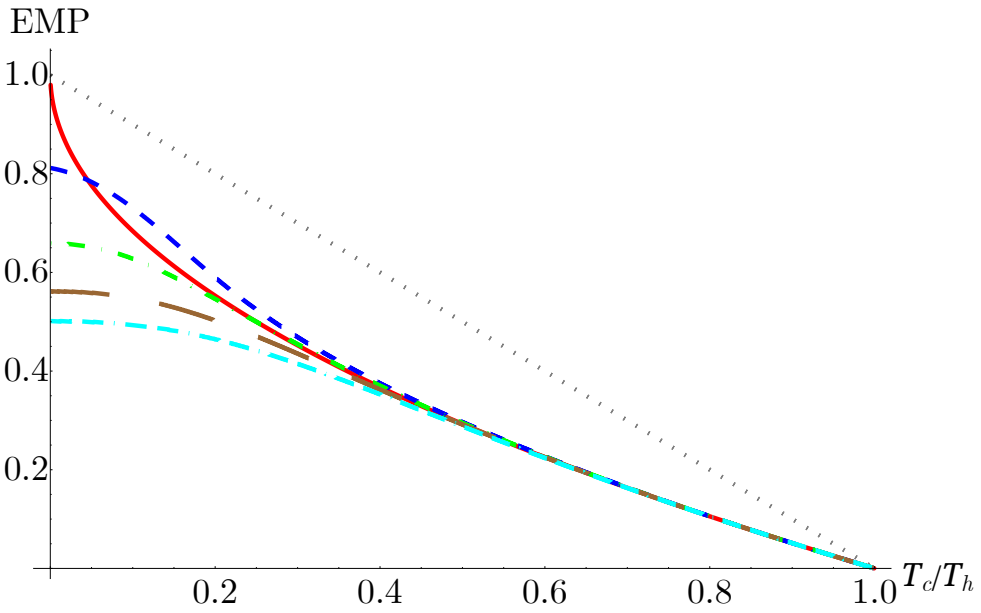

图7. 当点限域频率分别为 $0.5\omega_0$（蓝色，短虚线）、$1.0\omega_0$（绿色，点划线）、$1.5\omega_0$（棕色，长虚线）和 $2.0\omega_0$ =（青色，点划点线）时，效率随热浴温度比的变化。图中还给出了卡诺效率（黑色，点线）和 Curzon-Ahlborn 效率（红色，实线）以供比较。我们观察到，在较低的热浴温度比下，点限域频率较低时，最大功率效率超过了 CA。参数为 T_h=25K，磁场为 $B_h = 12$ T。

作者贡献： F.J.P. 和 N.M.M. 完成了稿件中详述的计算和分析。F.J.P. 撰写了稿件的初稿。N.M.M.、F.A.A.、D.O. 和 P.V. 参与了讨论，并共同撰写了稿件的最终版本。所有作者均已阅读并批准最终稿件。

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

1. Myers, N. M.; Abah, O.; Deffner, S. 量子热力学器件：从理论设想走向实验现实。《AVS量子科学》2022，4，027101。2. Kosloff, R.; Levy, A. 量子热机与制冷机：连续型器件。《物理化学年度评论》2014，65，365。3. Quan, H. T.; Liu, Y.-X.; Sun, C. P.; Nori, F. 量子热力学循环与量子热机。《物理评论E》2007，76，031105。4. Quan, H. T. 量子热力学循环与量子热机。II。《物理评论E》2007，79，041129。5. Bhattacharjee, S.; Dutta, A. 量子热机与电池。EPJ B 2021，94，239。6. Chen, J.-F.; Sun, C.-P.; Dong, H. 提升量子奥托热机的性能。《物理评论E》2019，100，032144。7. Myers, N. M.; Abah, O.; Deffner, S. 相对论能量下的量子奥托热机。《新物理学杂志》2021，23，105001。8. de Assis, R. J.; de Mendonça, T. M.; Villas-Boas, C. J.; de Souza, A. M.; Sarthour, R. S.; Oliveira, I. S.; de Almeida, N. G. 在有效负温度储库下运行的量子奥托热机的效率。《物理评论快报》2019，122，240602。9. Yin, Y.; Chen, L.; Wu, F. 量子斯特林热机的最优功率与效率。EPJ Plus 2017，132，45。10. Raja, S. H.; Maniscalco, S.; Paraoanu, G. S,; Pekola, J. P.; Lo Gullo, N. 有限时间量子斯特林热机。《新物理学杂志》2021，23，033034。11. Peterson, J. P. S.; Batalhão, T. B.; Herrera, M.; Souza, A. M.; Sarthour, R. S.; Oliveira, I. S.; Serra, R. M. 自旋量子热机的实验表征。《物理评论快报》2019，123，240601。12. Çakmak, B.; Müstecaplıoˇglu, Ö. 采用绝热捷径的自旋量子热机。《物理评论E》2019，99，032108。13. Ji, W.; Chai, Z.; Wang, M.; Guo, Y.; Rong, X.; Shi, F.; Ren, C.; Wang, Y.; Du, J. 以量子引导量化的自旋量子热机。《物理评论快报》2022，128，090602。14. Geva, E., and Kosloff, R. 有限时间运行的量子力学热机：以自旋-1/2系统为工作流体的模型。《化学物理学杂志》1992，96(4)，3054-3067。15. Henrich, M. J., Rempp, F., and Mahler, G. 量子热力学奥托机：自旋系统方法。《欧洲物理学杂志专题》2007，151(1)，157-165。16. Josefsson, M.; Svilans, A.; Burke, A. M.; Hoffmann, E. A.; Fahlvik, S.; Thelander, C.; Leijnse, M.; Linke, H. 接近热力学效率极限运行的量子点热机。《自然·纳米技术》2018，13，920。17. Erdman, P. A.; Mazza, F.; Bosisio, R.; Benenti, G.; Fazio, R.; Taddei, F. 基于相互作用量子点热机的热电性质。《物理评论B》2017，95，245432。18. Kosloff , R.; Rezek, Y. 量子谐振子奥托循环。Entropy 2017，19，136。19. Deffner, S. 最大功率下谐振子量子奥托热机的效率。Entropy 2019，11，875。20. Ding, X., Yi, J., Kim, Y. W., and Talkner, P. 测量驱动单温热机。《物理评论E》2019，98(4)，042122。21. Abah, O., Rossnagel, J., Jacob, G., Deffner, S., Schmidt-Kaler, F., Singer, K., and Lutz, E. 最大功率下的单离子热机。《物理评论快报》2012，109(20)，203006。22. Myers, N. M., and Deffner, S. 玻色子胜过费米子：对称性的热力学优势。《物理评论E》2019，101(1)，012110。23. Shi, Y.-H.; Shi, H.-L.; Wang, X.-H.; Hu, M.-L.; Liu, S.-Y.; Yang, W.-L.; Fan, H. 量子热机中的量子相干性。《物理学杂志A：数学与理论》2020，53，085301。

24. Altintas, F; Hardal, A. Ü. C.; Müstecaplıo˘glu, Ö. 拉比模型作为量子相干热机：从量子生物学到超导电路。《物理评论A》2015，91，023816。25. Rahav, S; Harbola, U.; Mukamel, S. 量子热机中的热涨落与相干性。《物理评论A》2012，86，043843。26. Barrios, G. A.; Albarrán-Arriagada, F.; Cárdenas-López, F. A.; Romero, G.; Retamal, J. C. 量子关联在光-物质量子热机中的作用。《物理评论A》2017，96，052119。27. Altintas, F; Hardal, A. Ü. C.; Müstecaplıo˘glu, Ö. 具有自旋压缩的量子关联热机。《物理评论E》2014，90，032102。28. Park, J. J.; Kim, K.-H.; Sagawa, T.; Kim, S. W. 由纯量子信息驱动的热机。《物理评论快报》2014，111，230402。29. K. Hamman, H. Leitch, Y. Hassouni, and G. De Chiara. 利用相干性获得量子热力学优势。arXiv:2202.07515 [quant-ph](2022)。30. J. Jaramillo, M. Beau, and A. del Campo. 多粒子热机的量子优越性。《新物理学杂志》18，075019（2016）。31. Rossnagel, J.; Dawkins, S. T; Tollazi, K. N.; Abah, O.; Lutz, E.; Schmidt-Kaler, F.; Singer, K. 单原子热机。《科学》2016，352，6283。32. Koch, J., Menon, K., Cuestas, E., Barbosa, S., Lutz, E., Fogarty, T., Busch, T., and Widera. 让统计学发挥作用：BEC-BCS交叉区中的量子热机。arXiv预印本2022，arXiv: 2209.14202。33. Staring, A. A. M., Molenkamp, L. W., Alphenaar, B. W., Van Houten, H., Buyk, O. J. A., Mabesoone, M. A. A., ...and Foxon, C. T. 量子点热电势中的库仑阻塞振荡。EPL 1993，22(1)，57。34. Svilans, A., Leijnse, M. and Linke, H. 量子点热电性质的实验。《物理学报告》2016，17(10)，1096-1108。35. Esposito, M.; Kawai, R.; Lindenberg, K.; Van den Broeck, C. 最大功率下的量子点卡诺热机。《物理评论E》2010，81，041106。36. Sothmann, B.; Müttiker, M. 磁振子驱动的量子点热机。EPL 2012，99，27001。37. Peña, F. J.; Negrete, O.; Barrios, G. A.; Zambrano, D.; González, A.; Nunez, A. S.; Orellana, P. A.; Vargas, P. 量子点中电子的磁奥托热机：经典与量子方法。Entropy 2019，21，512。38. Muñoz, E.; Peña, F. J. 磁驱动量子热机。《物理评论E》2014，89，052107。39. Jacak, L.; Hawrylak, P. and Wójs. 量子点。Springer-Verlag，1998。40. Chen, H. Y., Apalkov, V. and Chakraborty, T. 石墨烯基人工原子中的狄拉克电子福克-达尔文态。《物理评论快报》2007，98(18)，186803。41. McEuen, P. L., Foxman, E. B., Meirav, U., Kastner, M. A., Meir, Y., Wingreen, N. S. and Wind, S. J. 量子霍尔状态下库仑岛的输运光谱学。《物理评论快报》1991，66(14)，1926。42. Weis, J., Haug, R. J., Klitzing, K. V., and Ploog, K. 栅极尖端下受限电子系统的输运光谱学。《物理评论B》2009，46(19)，12837。43. Tarucha, S., Austing, D. G., Honda, T., Van der Hage, R. J. and Kouwenhoven, L. P. 少电子量子点中的壳层填充与自旋效应。《物理评论快报》1996，77(17)，3613。44. Hoffmann, K. H. 端可逆热力学导论，《连续介质热理论：综述与发展》，2005。45. Andresen, B., Berry, R. S., Nitzan, A., and Salamon, P. 有限时间热力学。I. 阶梯式卡诺循环。《物理评论A》1977，15(5)，2086。46. Rubin, M. H. 一类不可逆热机的最优构型。I。《物理评论A》1979，19(3)，1272。47. Rubin, M. H. 一类不可逆热机的最优构型。II。《物理评论A》1979，19(3)，1277。48. Hoffmann H., Burzler, J. M. and Schubert, S. 端可逆热力学。《非平衡热力学杂志》1997，22(4):311–355。49. Brown, G. R., Snow, S., Andresen, B. and Salamon, P. 多孔塞的有限时间热力学。《物理评论A》1986，34(5)，4370。

50. Jordan, A. N., Sothmann, B., Sánchez, R. 和 Büttiker. 利用共振隧穿量子点实现强大且高效的能量收集器。《物理评论*B*》**2013**, 87(7), 075312.51. Benenti, G., Casati, G., Saito, K. 和 Whitney, R. S. 纳米尺度稳态热功转换的基本方面。《物理报告》 **2013**,694,1-124.52. Muñoz, E.; Barticevic, Z. 和 Pacheco, M. 霍尔构型下电场和磁场作用时二维量子点阵列的电子谱。*P*《物理评论B》 **2005***71*, 165301.53. Kumar, J.; Sreeram P. A. 和 Dattagupta, S. 耗散抗磁性背景下的低温热力学。《物理评论*E*》 **2009**,79,021130.54. Mani, R.G.; Smet, J.H.; von Klitzing, K.; Narayanamurti, V.; Johnson, W.B.; Umansky,V. GaAs/AlGaAs异质结构中由电磁波激发诱导的零电阻态。*N*ature**2002**, 420, 646-650.