arXiv:2302.04748v2 [math.OC] 7 Apr 2024

全局自由飞行轨迹优化的牛顿法

Ralf Bornd¨orfer（Orcid：https://orcid.org/0000-0001-7223-9174）[1†]，Fabian Danecker（Orcid：https://orcid.org/0000-0002-8953-808X）[1, 2*†] 和 Martin Weiser（Orcid：https://orcid.org/0000-0002-1071-0044）[2†]

[1] 网络优化，柏林祖泽研究所，Takustr. 7, 14195，德国柏林。[2] 复杂过程建模与仿真，柏林祖泽研究所，Takustr. 7, 14195，德国柏林。

*通讯作者。电子邮箱：danecker@zib.de；其他作者：borndoerfer@zib.de；weiser@zib.de；
†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

结合离散优化与连续优化，可以实现全局最优自由飞行轨迹优化。一个关键要求是，牛顿法用于连续优化时，必须在极小点周围足够大的邻域内收敛。本文表明，在某些假设下，这一要求确实能够满足。

关键词：最短路径、飞行规划、自由飞行、最优控制、离散优化、全局优化、牛顿法

数学学科分类：49M15，49M37，65L10，65L70，90C26

1 引言

世界各国正在实施自由飞行空域，允许航空器自行选择航线，而不必受限于预先确定的三维网络。影响成本的主要因素

时间和燃油消耗，这两者密切相关 [1]。根据这些因素的相对权重（参见成本指数），可以确定最佳空速，而空速通常基本保持不变 [2–4]。此外，通常可以利用航空器性能数据预先确定垂直飞行路径 [5]。因此，可以采用 Zermelo 提出的方法对该问题进行很好的近似 1931 [6], : 对于以恒定空速飞行的航空器，在给定的二维风场中，寻找从 A 点到 B 点的最高效轨迹。

自由飞行轨迹优化问题通常采用最优控制中的直接法或间接法求解[5, 7–11]。这些方法效率很高，但存在一个关键缺陷：它们只能收敛到局部解，因此依赖足够好的初始点。单独使用此类方法，无法满足航空公司对航线全局最优性的高要求。

在 [12–14] 中，提出了一种确定性的两阶段算法，将离散优化与连续优化相结合，以求得自由飞行轨迹优化问题的全局最优解。该方法绕开了其他基于分支定界的算法所具有的指数级复杂度。

第一阶段的主要目标是以系统化的方式获得一个能够充分覆盖搜索空间的有限样本。这种确定性方法消除了运行时间可能无限延长的风险；使用粒子群优化、模拟退火或单调盆地跳跃等随机全局优化算法时，就可能出现这种情况 [15–18]。
一种方法是创建局部稠密的有向图，其特定密度由节点间距 h 和连通长度 ℓ 决定，从而隐式定义样本。随后，可应用 Yen算法 [19] 计算 k^{th} 条最短路径，并按质量顺序选取实例。
有希望的路径可作为后续细化阶段的初始猜测，在该阶段中，将以所需精度计算问题的连续解。

解析证据和数值实验表明，新型混合算法的时间复杂度为 $\mathcal{O}(\ell^{-1})$，优于传统的纯离散方法，后者的时间复杂度为 $\mathcal{O}(\ell^{-6})$ [12]。在此语境下，ℓ 指图中的最大弧长，以及连续优化场景中的离散化长度。因此，ℓ^{-1}可作为衡量解精度的可比指标。

本文关注第二阶段。生成连续解的一种方法是将牛顿法应用于一阶必要条件（KKT条件）——这种方法通常称为 Newton-KKT 或序列二次规划（SQP）（例如参见 [20]）。现已证明，存在一个围绕全局最优解的可量化范围，只要初始点位于其中，Newton-KKT 就会收敛。

由于第一阶段图搜索的计算开销完全取决于问题实例，即风况，因此该算法

渐近继承了牛顿-KKT 方法的超快收敛速度。

本文结构安排如下。在第2节中，我们先定义问题，并引入一种便于进行解析讨论的形式化表述；随后在第3节中，正式给出充要条件以及 Newton-KKT 方法。第4节给出收敛性证明，最后总结并强调其对既有工作和未来研究的影响。

2 自由飞行轨迹优化问题

2.1 符号说明

本文中，小写下标（例如 x_t 或 ξ_τ）表示偏导数，而全导数则用撇号表示，例如 T' 或 f'。局部最优量和全局最优量分别用单星号和双星号上标表示，例如 $\xi^\star$ 或 $\xi^{\star\star}$。除非另有说明，我们假设 $\|\cdot\|$ 表示 l^2-范数。因此，我们采用以下定量定义，以 l^2-范数表示 L^∞-范数。

定义 1. 设 $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$。则定义

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C \geq 0 : \|f(x)\|_2 \leq C \text{ for a.a. } x \in \Omega\}. \tag{1}$$

2.2 问题陈述

忽略任何交通流限制，我们考虑连接起点 $\xi(0) = x_O$ 和目的地 $\xi(1) = x_D$ 的利普希茨连续飞行路径 $\xi \in C^{0,1}((0,1),\mathbb{R}^2)$。根据拉德马赫定理，此类路径几乎处处可微，而且属于索伯列夫空间 $W^{1,\infty}((0,1),\mathbb{R}^2)$。

简单计算可知，航空器以恒定空速 $\overline{v}$ 沿此类路径 ξ 飞行，穿过幅值有界 $\|w(x)\| < \overline{v}$ 的三次连续可微风场 $w \in C^3(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ 后，将在飞行时长

$$T(\xi) = \int_0^1 f\big(\xi(\tau),\xi_\tau(\tau)\big)\,d\tau \tag{2}$$

其中 ξ_τ 表示 ξ 的时间导数，且

$$f(\xi,\xi_\tau) := t_\tau = \frac{-\xi_\tau^T w + \sqrt{(\xi_\tau^T w)^2 + (\overline{v}^2 - w^T w)(\xi_\tau^T \xi_\tau)}}{\overline{v}^2 - w^T w}, \tag{3}$$

参见 [12–14]。

在这些路径中 ξ，我们需要找出飞行时长最短的一条 $T(\xi)$，因为这与燃油消耗 [1] 基本成正比。这是经典的

4 全局自由飞行轨迹优化的牛顿法

最优控制中的这一问题称为 Zermelo 导航问题 [6]。很容易证明，在风速有界的情况下，最优轨迹不可能比起点与目的地之间的直线路径长得任意多。因此，每个全局极小值点都包含在一个椭圆 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内，其焦点为 x_O 和 x_D。

式（2）中定义的飞行时长 T 基于从实际飞行时间 $t \in [0,T]$ 到伪时间 $\tau \in [0,1]$ 的时间重参数化，该重参数化依据实际飞行轨迹 $x(t) = \xi(\tau(t))$，使得 $\|x_t(t) - w(x(t))\| = \overline{v}$，其中$x_t$ 表示所谓的地速，即位置 x 相对于未缩放时间 t的导数。因此，ξ 关于伪时间 τ 的实际参数化与 T的取值无关。若存在利普希茨连续双射 $r : (0,1) \to (0,1)$~，使得 $\xi(r(\tau)) = \xi(\tau)$，则称两条路径ξ、ξ等价；据此，我们可以将优化限制在等价类上。此外，每个等价类都包含一个代表元，其地速 $\|\xi_\tau(\tau)\| = L$几乎处处为常数，可以由任何满足 $\|\xi_\tau(\tau)\| \neq 0\ \forall\tau$的~ ~$\xi$得到：

$$\xi(\tau) := L\int_0^\tau \frac{\tilde{\xi}_\tau(t)}{\|\tilde{\xi}_\tau(t)\|}dt, \quad L := \int_0^1 \|\tilde{\xi}_\tau(\tau)\|d\tau. \tag{4}$$

因此，我们引入 $z := (L,\xi) \in Z := \mathbb{R} \times X$ 以及有效轨迹的仿射空间

$$X := \{\xi \in W^{1,\infty}((0,1),\mathbb{R}^2) \mid \xi(0) = x_O,\ \xi(1) = x_D\}. \tag{5}$$

随后考虑等价的约束极小化问题

$$\min_{z\in Z} T(\xi), \quad \text{s.t.} \quad h(z) = 0 \quad \text{for a.a. } \tau \in (0,1) \tag{6}$$

其中 $h(z) = 0$ 表示恒定地速要求，即

$$h : Z \to \Lambda := L^2((0,1),\mathbb{R}), \quad z \mapsto \xi_\tau^T\xi_\tau - L^2. \tag{7}$$

对于 $L \leq L_{max}$，其在 $L > L_{max}$ 上任意延拓，并且关于$\|\xi_\tau\|$是线性的。如果满足该约束，L 也表示路径长度，因为

$$\int_0^1 \|\xi_\tau\|d\tau = L. \tag{8}$$

注意，$T\colon X \to \mathbb{R}$ 关于相应的线性空间是 Fr´echet 可微的

$$\delta X := W_0^{1,\infty}((0,1),\mathbb{R}^2) \tag{9}$$

具有零边界值的方向 $\delta\xi$，因此不会改变起点和目的地。该空间配备的范数为

$$\|\delta\xi\|_{X^\infty} = \|\delta\xi\|_{L^\infty(0,1)} + \|\delta\xi_\tau\|_{L^\infty(0,1)}. \tag{10}$$

此外，我们定义线性空间

$$\delta Z := \mathbb{R} \times \delta X \tag{11}$$

并为 Z 和 δZ 这些空间赋予范数

$$\|z\|_{Z^\infty} = |L| + \|\xi\|_{L^\infty(0,1)} + \|\xi_\tau\|_{L^\infty(0,1)} \quad \text{and} \tag{12a}$$
$$\|z\|_{Z^2} = |L| + \|\xi\|_{L^2(0,1)} + \|\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}. \tag{12b}$$

3 连续优化：Newton-KKT

为了求得自由飞行优化问题（6）的连续解，我们对一阶必要条件（KKT 条件）应用牛顿法，这种方法也称为序列二次规划（SQP）。在正式介绍牛顿法之前，我们先讨论最优性的充要条件，这些条件也定义了本文所述算法的目标。

3.1 最优性条件

3.1.1 必要条件

本文的目标是找到（$\xi^{\star\star}$6）的一个孤立全局最优解 T，满足$\xi^{\star\star}$） $\leq T$（ξ） $\forall \xi \in X$；与之相反，局部优化解 $\xi^\star$ 仅优于某个邻域内的轨迹， T（$\xi^\star$） $\leq T$（ξ） $\forall \xi \in \mathcal{N}$（$\xi^\star$） $\subseteq X$。孤立全局极小点满足必要的 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）最优性条件 [21]，前提是它是一个正则点；如下述定理所证，这一点总是成立。

定理 1. 设 $z = (L, \xi) \in Z$ 满足 $L > 0$，并假设存在方向 $u \in \mathbb{R}^2$ 和 $c > 0$，使得 $\xi_\tau^T u \geq c$ 几乎处处成立。那么， $h'(z) : \delta Z \to L^\infty(0,1)$ 是满射，即 z 是正则的。

Proof 给定几乎处处，并令 $f \in L^\infty(0,1)$ 和 $b := \xi_\tau^T u \geq c$。我们设

$$\delta L = -\frac{\int_0^1 b^{-1} f/2 \, d\tau}{L \int_0^1 b^{-1} \, d\tau}$$

and

$$g = b^{-1}\left(f/2 + L\delta L\right), \quad \delta\xi_\tau = gu.$$

由于 $b \geq c$ 几乎处处， b^{-1} 有界，因此 $g, \xi_\tau \in L^\infty(0,1)$。根据构造， $\int_0^1 \delta\xi_\tau \, d\tau = 0$ 成立，因此 $\delta z = (\delta L, \delta\xi) \in \delta Z$。现在我们得到

$$\begin{aligned} h'(z)[\delta z] &= 2\xi_\tau^T \delta\xi_\tau - 2L\delta L \\ &= 2bg - 2L\delta L \\ &= 2(f/2 + L\delta L) - 2L\delta L \\ &= f, \end{aligned}$$

因此得出这一论断。 □

6 全局自由飞行轨迹优化的牛顿法

对于 $\lambda \in \Lambda^* = L^2((0,\ 1)\ \mathbb{R})$，拉格朗日函数定义为

$$\mathcal{L}(z,\lambda) := T(\xi) + \langle \lambda, h(z) \rangle. \tag{13}$$

KKT条件保证对于正则极小值点 $z^{\star\star}$ 存在一个拉格朗日乘子 $\lambda^{\star\star} \in L^2(0,\ 1)$，使得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_z(z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})[\delta z] \qquad \forall\ \delta z \in \delta Z, \\ 0 &= \langle \delta\lambda, h(z^{\star\star}) \rangle \qquad \forall\ \delta\lambda \in L^2(0,1) \end{aligned}$$

hold，其中 $\delta z := (\delta L,\ \delta\xi) \in \delta Z$。在我们的情形下，这些必要条件为

$$0 = \underbrace{T'(\xi^{\star\star})[\delta\xi]}_{=0\ (16)} + 2\int_0^1 \lambda^{\star\star} \left(\delta\xi_\tau^T \xi_\tau^{\star\star} - \delta L\, L^{\star\star} \right) d\tau \qquad \forall\ \delta z \in \delta Z, \tag{14a}$$

$$0 = \int_0^1 \delta\lambda \left((\xi_\tau^{\star\star})^T \xi_\tau^{\star\star} - (L^{\star\star})^2 \right)\ d\tau \qquad \forall\ \delta\lambda \in L^2(0,1). \tag{14b}$$

让我们暂时考虑与（6）类似的无约束问题，

$$\min_{\xi \in X} T. \tag{15}$$

~任何（15）的全局极小值点 $\xi^{\star\star}$ 显然都不是孤立的，这是由于可能存在时间重参数化。令 $\xi^{\star\star}$ 表示具有恒定地速的等价轨迹，即对于几乎所有 τ，$\|\xi_\tau^{\star\star}(\tau)\| = L^{\star\star}$。两种解 $\xi^{\star\star}$，$\xi^{\star\star}$ 都满足一阶必要条件

$$0 = T'(\xi^{\star\star})[\delta\xi] \quad \forall \delta\xi \in \delta X. \tag{16}$$

此外，$\xi^{\star\star}$ ——与（8）中的 $L^{\star\star}$ 一起——是约束问题的全局极小值点，这表明地速约束（7）仅处于弱激活状态。我们通过证明相应的拉格朗日乘子 $\lambda^{\star\star}$ 为零来确认这一点。

引理 2。设 $z^{\star\star} = (\xi^{\star\star}, L^{\star\star})$ 是 (6)的一个全局极小值点。那么，该解连同

$$\lambda^{\star\star} = 0 \tag{17}$$

满足必要条件 (14)。

Proof 由于 $\xi^{\star\star}$ 也是无约束问题的全局极小值点，因此必要条件（16）表明 $T'(\xi^{\star\star})\ \delta\xi = 0$。对于 $\lambda^{\star\star} = 0$，条件（14a）中的项$\int_0^1 \lambda^{\star\star} \left(\delta\xi_\tau^T \xi_\tau^{\star\star} - \delta L\, L^{\star\star} \right) d\tau$消失。（14b）得到满足，因为对于几乎所有 $\tau \in \in(0,1)$，$\|\xi_\tau^{\star\star}\| = L^{\star\star}$。□

3.1.2 充分条件

现在我们转向最优性的二阶充分条件。一般而言，驻点（$z^\star, \lambda^\star$）是严格极小点，只要除上述必要条件外，还满足著名的 Ladyzhenskaya–Babu˘ska–Brezzi（LBB）条件（例如，[22]），该条件包括：a) 所谓的 *inf-sup* 条件，以及 b) 要求关于 z、$\mathcal{L}_{zz}$ 的拉格朗日函数的海森矩阵在 h'的核上必须是正定的。

对于极小点 $z^\star$，*inf-sup* 条件表明存在一个 $\kappa > 0$，使得

$$\inf_{\delta\lambda \neq 0 \in L^2(0,1)} \sup_{\delta z \in \delta Z^2} \frac{\langle \delta\lambda, h'(z^\star)[\delta z] \rangle}{\|\delta\lambda\|_{L^2(0,1)} \|\delta z\|_{Z^2}} \geq \kappa. \tag{18}$$

形式上，LBB 条件的第二部分要求存在一个 $\underline{\mathcal{B}} > 0$，使得

$$\mathcal{L}_{zz}(z^\star)[\delta z]^2 \geq \underline{\mathcal{B}} \, \|\delta z\|_{Z^2}^2$$

对于满足以下条件的任意 $\delta z \in \delta Z$

$$\langle \delta\lambda, h'(z^\star)[\delta z] \rangle = 0 \quad \forall \, \delta\lambda \in L^2(0,1).$$

在当前情况下，这表示为

$$T''(\xi^\star)[\delta\xi]^2 + 2\int_0^1 \lambda^\star(\delta\xi_\tau^T \delta\xi_\tau - \delta L^2) d\tau \geq \underline{\mathcal{B}} \|\delta z\|_{Z^2}^2 \tag{19}$$

对于任意满足以下条件的 $\delta z \in \delta Z$

$$\int_0^1 \delta\lambda \left(\delta\xi_\tau^T \xi_\tau^\star - \delta L \, L^\star \right) d\tau = 0 \quad \forall \, \delta\lambda \in L^2(0,1).$$

对于全局极小值点 $z^{\star\star} = (\xi^{\star\star}, L^{\star\star})$，利用引理 2 中的$\lambda^{\star\star} = 0$，可将其简化。此外，该约束等价于要求 $\delta\xi_\tau^T \xi_\tau^{\star\star} = \delta L \, L^{\star\star}$ 几乎处处成立。由此可得，对于满足 *inf-sup* 条件的（6）的任意孤立全局极小值点 $z^{\star\star}$，存在一个 $\underline{\mathcal{B}} > 0$，使得

$$T''(\xi^{\star\star})[\delta\xi, \delta\xi_\tau]^2 \geq \underline{\mathcal{B}} \|\delta z\|_{Z^2}^2 \tag{20}$$

对于任意几乎处处满足 $\delta\xi_\tau^T \xi_\tau^{\star\star} = \delta L \, L^{\star\star}$ 的 $\delta z \in \delta Z$。

需要注意的是，二阶充分条件是在 L^2 设置下表述的，而可微性仅在 L^∞ 中成立。这被称为双范数差异 [23]。

3.2 牛顿法

为使符号表示更加紧凑，在此上下文中我们使用 $\chi = (z, \lambda) \in Z \times L^2(0,1) =: Y$，并将 F 定义为拉格朗日函数的全导数，

$$F : Z \times L^2(0,1) \to \delta Z^* \times \Lambda =: Y^*, \qquad F(\chi) := \mathcal{L}'(z, \lambda). \tag{21}$$

在 Y 上，我们定义以下范数，

$$\|\chi\|_{Y^\infty} = \|z\|_{Z^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty(0,1)} \quad \text{and} \tag{22a}$$
$$\|\chi\|_{Y^2} = \|z\|_{Z^2} + \|\lambda\|_{L^2(0,1)}. \tag{22b}$$

现在的问题是求出一个 $\chi^{\star\star}$，使得满足式（14）中所述的最优性一阶必要条件，换言之

$$F(\chi^{\star\star}) = 0. \tag{23}$$

应用牛顿法，我们迭代求解

$$F'(\chi^k)[\Delta\chi^k] = -F(\chi^k) \tag{24}$$

对于 $\Delta\chi^k$，并从某个初始值χ^0开始进行 $\chi^{k+1} \leftarrow \chi^k + \Delta\chi^k$。换言之，在每次迭代中，我们都需要求得 $(\Delta z^k, \Delta\lambda^k)$，使得

$$\begin{aligned} T''(\xi^k)[\delta\xi][\Delta\xi^k] + \langle\lambda^k, h''(z^k)[\delta z][\Delta z^k]\rangle + \langle\Delta\lambda^k, h'(z^k)[\delta z]\rangle & \\ = -T'(\xi^k)[\delta\xi] - \langle\lambda^k, h'(z^k)[\delta z]\rangle \quad \forall \delta z \in \delta Z, & \qquad (25a) \\ \langle\delta\lambda, h'(z^k)[\Delta z^k]\rangle = -\langle\delta\lambda, h(z^k)\rangle \quad \forall \delta\lambda \in L^2(0,1). & \qquad (25b) \end{aligned}$$

4 收敛性证明

为了证明存在一个非空域 $\mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$，使得如第3.2 节所定义的牛顿法在初始点位于该邻域内时收敛到相应的全局极小值点 $\chi^{\star\star}$，我们首先证明 KKT算子 F' 可逆，且牛顿步 $\Delta\chi^k$ 始终有良好定义。本质上，只要满足式（18）和（20）中给出的 LBB 条件即可。因此，我们将证明存在一个 $R > 0$，使得下确界-上确界 条件成立，并且对于任意$\chi \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$，拉格朗日函数在约束核上正定。此外，我们还将证明仿射协变利普希茨条件成立，这最终有助于完成证明。

在继续之前，我们先回顾 [13, 引理 7]，它给出了全局极小值点路径长度的一个上界。

引理 3. 设 $z^{\star\star} = (L^{\star\star}, \xi^{\star\star})$ 是 (6) 的全局极小值点，令 $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0$，并定义 $L = \|x_D - x_O\|$。则有

$$\tilde{L} \leq L^{\star\star} \leq \frac{\overline{v} + \overline{c}_0}{\overline{v} - \overline{c}_0} \tilde{L}. \tag{26}$$

由于后续的大多数结果在极小点的 L^∞-邻域内成立，我们引入以下符号说明。

定义 2. 我们将点 $z \in Z$ 或 $\chi \in Y$ 的 L^∞-邻域分别称为 ,

$$\mathcal{B}(z, R) := \{\tilde{z} \in Z : \|\tilde{z} - z\|_{Z^\infty} \leq R\} \quad or \tag{27a}$$
$$\mathcal{B}(\chi, R) := \{\tilde{\chi} \in Y : \|\tilde{\chi} - \chi\|_{Y^\infty} \leq R\}, \tag{27b}$$

。

此外，我们给出三个简单但实用的界，这些界在极小点的此类 L^∞-邻域内成立。

引理 4. 设 $\chi^{\star\star} = (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 为 (6) 的一个全局极小值点，且对应的拉格朗日乘子为 $\chi \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$，则对任意.....均有

$$L^{\star\star} - R \leq L \leq L^{\star\star} + R, \tag{28a}$$
$$L^{\star\star} - R \leq \|\xi_\tau\|_{L^\infty(0,1)} \leq L^{\star\star} + R, \tag{28b}$$
$$0 \leq \|\lambda\|_{L^\infty(0,1)} \leq R. \tag{28c}$$

Proof 前两个不等式显然成立，因为全局极小值点满足式（6）中的约束。最后一个不等式直接由引理 2 得出。□

4.1 inf-sup 条件

现在我们证明，*inf-sup* 条件（在（18）中引入）在全局极小值点周围的某个邻域内成立。不过，我们首先指出，相对于一条轨迹的偏差 $\delta\xi$ 和 $\delta\xi_\tau$ 本质上相互关联，而且前者总是受后者所界定。

定理 5 （Wirtinger 不等式）。设 $\delta\xi \in H_0^1(0、1)$。则

$$\|\delta\xi\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi} \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} \tag{29}$$

成立。

定理 6. 设 $z^{\star\star}$ 是 （6） 的全局极小值点。此外，设存在常数 $c > 0$ 和某个方向 $u \in \mathbb{R}^2$，满足 $\|u\| = 1$，使得 $u^T \xi_\tau^{\star\star} \geq c$

10 全局自由飞行轨迹优化的牛顿法

对几乎所有的 $\tau \in (0,1)$，于是对于任意 $z = (L, \xi) \in \mathcal{B}(z^{\star\star}, R)$，若满足 $R < c$，则存在某个 $\kappa > 0$，使得

$$\inf_{\lambda \neq 0 \in L^2(0,1)} \sup_{\delta z \in \delta Z} \frac{\langle \lambda, h'(z)[\delta z] \rangle}{\|\lambda\|_{L^2(0,1)} \|\delta z\|_{Z^2}} \geq \kappa$$

with

$$\kappa(R) = (c - R) \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\pi} \right) + 2 \left(\frac{\overline{v} + \overline{c}_0}{\overline{v} - \overline{c}_0} + \frac{R}{\tilde{L}} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Proof 对于 $f \in L^2(0,1)$，我们定义

$$\overline{f} := \int_0^1 f \, d\tau \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \tilde{f} = f - \overline{f},$$

$\tilde{}$分别满足 $(\overline{f}, \tilde{f})_{L^2(0,1)} = 0$，并且

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)} = \|\tilde{f} + \overline{f}\|^2_{L^2(0,1)} = \|\tilde{f}\|^2_{L^2(0,1)} + \overline{f}^2.$$

With

$$\frac{\overline{v} + \overline{c}_0}{\overline{v} - \overline{c}_0} \tilde{L} + R \underset{(26)}{\geq} L^{\star\star} + R \geq b := \xi_\tau^T u \geq c - R \tag{30}$$

我们取 $\delta\xi_\tau = \frac{1}{2}\tilde{\lambda} u$ 和 $\delta L = \frac{1}{2L}\left(\tilde{b\lambda} - (c - R)\overline{\lambda}\right)$。注意，$\delta\xi \in \delta X$ 成立。对于这一选择，当 $\delta z = (\delta L, \delta\xi)$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, h'(z)[\delta z] \rangle &= \int_0^1 (2\xi_\tau^T \delta\xi_\tau \lambda - 2L\delta L \lambda) \, d\tau \\
&= \int_0^1 b\tilde{\lambda}\lambda \, d\tau - 2L\delta L \overline{\lambda} \\
&= \int_0^1 (b\tilde{\lambda}^2 + b\tilde{\lambda}\overline{\lambda}) \, d\tau - 2L\delta L \overline{\lambda} \\
&\underset{(30)}{\geq} (c - R) \|\tilde{\lambda}\|^2_{L^2(0,1)} + \left(\int_0^1 b\tilde{\lambda} \, d\tau - 2L\delta L \right) \overline{\lambda} \\
&= (c - R) \|\tilde{\lambda}\|^2_{L^2(0,1)} + \left(\int_0^1 b\tilde{\lambda} \, d\tau - \overline{b\tilde{\lambda}} + (c - R)\overline{\lambda} \right) \overline{\lambda} \\
&= (c - R) \left(\|\tilde{\lambda}\|^2_{L^2(0,1)} + \overline{\lambda}^2 \right) \\
&= (c - R) \|\lambda\|^2_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\|\delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}$$

并且，由于显然 $c \leq L^{\star\star}$，

$$\begin{aligned}
|\delta L| &\leq \frac{1}{2L} \left(\|b\|_{L^2(0,1)} \|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)} + (c - R)|\overline{\lambda}| \right) \\
&\underset{(30)}{\leq} \frac{1}{\tilde{L}} \left((L^{\star\star} + R) \|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)} + (c - R)|\overline{\lambda}| \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)\left(\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}+|\overline{\lambda}|\right),$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\|\delta z\|_{Z^2}^2 &\underset{(12b)}{=} \|\delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \delta L \\
&\underset{(29)}{\leq} \left(1+\frac{1}{\pi}\right)\|\delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 + \delta L^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}^2 + \left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\left(\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}+\overline{\lambda}\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\overline{\lambda}^2 \\
&\leq \left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)+2\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\right]\left(\|\tilde{\lambda}\|_{L^2(0,1)}^2+\overline{\lambda}^2\right) \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)+2\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\right]\|\lambda\|_{L^2(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

因此,

$$\langle\lambda, h'(z)[\delta z]\rangle \geq (c-R)\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)+2\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}+\frac{R}{\tilde{L}}\right)^2\right]^{-1/2}\|\lambda\|_{L^2(0,1)}\|\delta z\|_{Z^2}$$

即可得出该结论。 □

4.2 拉格朗日函数的正定性

证明 KKT 算子可逆性的下一步 $F'(\chi)$, (24)，是证明拉格朗日函数 $\mathcal{L}(\chi)$, (13) 关于状态 z 的二阶偏导数在线性化约束的核上正定。在此过程中，我们还将推导出目标函数 $T(\xi)$, (2) 的一个类似结果；为此，我们首先推导其三阶导数的上界。

引理7. 设 $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0 \leq \overline{v}/\sqrt{5}$, $\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_1$, $\|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_2$, and $\|w_{xxx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_3$ 并定义 $\underline{v}^2 := \overline{v}^2 - \overline{c}_0^2$. 那么，对于任意 $\xi \in X$， f 的三阶方向导数（如 (3) 所示）有如下界

$$\begin{aligned}
&|f'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \\
&\quad\leq \left(\overline{\gamma}_0\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|^2 + \overline{\gamma}_2\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_4}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi\| \\
&\quad\quad + \left(\overline{\gamma}_1\|\delta\xi\|^2 + \frac{\overline{\gamma}_3}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_5}{\|\xi_\tau\|^2}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi_\tau\| \qquad (31)
\end{aligned}$$

其中 $\overline{\gamma}_i \geq 0$、 $i \in 0$、.....、5，给定为

$$\overline{\gamma}_0 = \frac{2}{\underline{v}^4}\left(37\overline{c}_1^3 + 21\overline{c}_1\overline{c}_2\underline{v} + 2\overline{c}_3\underline{v}^2\right), \qquad \overline{\gamma}_3 = 40\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2},$$

$$\overline{\gamma}_1 = \frac{1}{\underline{v}^3}\left(29\overline{c}_1^2 + 7\underline{v}\overline{c}_2\right), \qquad \overline{\gamma}_4 = 20\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2},$$
$$\overline{\gamma}_2 = \frac{1}{\underline{v}^3}(57\overline{c}_1^2 + 13\underline{v}\overline{c}_2), \qquad \overline{\gamma}_5 = 18\frac{1}{\underline{v}}. \tag{32}$$

证明同样可见附录。借助这一结果，我们可以推导出 T 的三阶方向导数的一个界。

~定理 8. 设 $(L^{\star\star}, \xi^{\star\star})$ 是 (6) 的一个全局极小值点，并定义 $L := \|x_D - x_O\|$ 和 $\Delta\xi := \xi - \xi^{\star\star}$。此外，设对于每个 $p \in \Omega$，都有 $\|w(p)\| \le \overline{c}_0 \le \overline{v}/\sqrt{5}$、$\|w_x(p)\| \le \overline{c}_1$、$\|w_{xx}(p)\| \le \overline{c}_2$ 和 $\|w_{xxx}(p)\| \le \overline{c}_3$。那么，对于任意满足 $\|\Delta\xi\|_{X^\infty} \le R < L$ 的 $\xi \in X$~，有

$$|T'''(\xi)[\delta\xi]^2[\Delta\xi]| \le \overline{\Gamma}\left(\|\delta\xi\|^2_{L^2(0,1)} + \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)}\right)\|\Delta\xi\|_{C^{0,1}(0,1)}. \tag{33}$$

其中 $\|\Delta\xi\|_{C^{0,1}(0,1)} = \|\Delta\xi\|_{L^\infty(0,1)} + \|\Delta\xi_\tau\|_{L^\infty(0,1)}$ 以及

$$\overline{\Gamma} := \max\left\{\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}\tilde{L} + R\right)\overline{\gamma}_0 + \frac{\overline{\gamma}_2}{2}, \quad \frac{\overline{\gamma}_4}{\tilde{L}-R} + \frac{\overline{\gamma}_2}{2}, \right.$$
$$\left. \overline{\gamma}_1 + \frac{\overline{\gamma}_3}{2(\tilde{L}-R)}, \quad \frac{\overline{\gamma}_3}{2(\tilde{L}-R)} + \frac{\overline{\gamma}_5}{(\tilde{L}-R)^2}\right\} \tag{34}$$

以及 $\overline{\gamma}_0$，……，$\overline{\gamma}_5$ 如上文引理 7所述。

Proof 根据 T 在（2）中的定义，我们知道

$$T'''(\xi)[\delta\xi]^2[\Delta\xi] = \int_0^1 f'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]d\tau.$$

代入引理4 和7 中的上界，并使用杨氏不等式，可得T''' δ ^{2} Δ

$$\begin{aligned}
&| \quad (\xi)[\ \xi]\ [\ \ \xi]| \\
&\le \int_0^1 \left(\overline{\gamma}_0\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|^2 + \overline{\gamma}_2\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_4}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi\| \\
&\quad + \left(\overline{\gamma}_1\|\delta\xi\|^2 + \frac{\overline{\gamma}_3}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_5}{\|\xi_\tau\|^2}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi_\tau\|\,d\tau. \\
&\le \|\Delta\xi\|_{L^\sim}\int_0^1 \overline{\gamma}_0\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|^2 + \overline{\gamma}_2\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_4}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi_\tau\|^2 d\tau \\
&\quad + \|\Delta\xi_\tau\|_{L^\sim}\int_0^1 \overline{\gamma}_1\|\delta\xi\|^2 + \frac{\overline{\gamma}_3}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_5}{\|\xi_\tau\|^2}\|\delta\xi_\tau\|^2 d\tau \\
&\underset{(28)}{\le} \|\Delta\xi\|_{L^\sim}\int_0^1 \left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}\tilde{L} + R\right)\overline{\gamma}_0\|\delta\xi\|^2 + \overline{\gamma}_2\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_4}{\tilde{L}-R}\|\delta\xi_\tau\|^2 d\tau \\
&\quad + \|\Delta\xi_\tau\|_{L^\sim}\int_0^1 \overline{\gamma}_1\|\delta\xi\|^2 + \frac{\overline{\gamma}_3}{\tilde{L}-R}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\gamma}_5}{(\tilde{L}-R)^2}\|\delta\xi_\tau\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(Y)}{\leq} \|\Delta\xi\|_{L^\infty}\left[\left(\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0}\tilde{L}+R\right)\overline{\gamma}_0+\frac{\overline{\gamma}_2}{2}\right)\|\delta\xi\|_{L^2}^2+\left(\frac{\overline{\gamma}_4}{\tilde{L}-R}+\frac{\overline{\gamma}_2}{2}\right)\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}^2\right]\\
&\quad+\|\Delta\xi_\tau\|_{L^\infty}\left[\left(\overline{\gamma}_1+\frac{\overline{\gamma}_3}{2(\tilde{L}-R)}\right)\|\delta\xi\|_{L^2}^2+\left(\frac{\overline{\gamma}_3}{2(\tilde{L}-R)}+\frac{\overline{\gamma}_5}{(\tilde{L}-R)^2}\right)\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}^2\right]\\
&\underset{(34)}{\leq}\overline{\Gamma}\left(\|\delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2+\|\delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2\right)\|\Delta\xi\|_{C^{0,1}(0,1)}.
\end{aligned}
$$

□

对 T 的三阶导数进行界定后，我们可以估计 T'' 的潜在衰减，进而推导出该邻域大小的下界。同样，我们可以对 h'' 进行界定，从而得到 $\mathcal{L}_{zz}$。

定理 9. 设$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0 < \overline{v}/\sqrt{5}$, $\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_1$,$\|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_2$,˜以及$\|w_{xxx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_3$，并定义 $L := \|x_D - x_O\|$。此外，设 $\chi^{\star\star} := (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 是问题 (6) 的一个全局最优解，它满足必要条件和充分条件 (14)、(18) 及 (20)，其中 $\underline{\mathcal{B}} > 0$。那么，存在一个 $0 < R < \min\left\{\frac{\underline{\mathcal{B}}}{2\overline{\Gamma}}, \frac{\underline{\mathcal{B}}}{40}, \frac{\tilde{L}}{2}\right\}$，其 $\overline{\Gamma}$ 来自定理 8，使得

$$
\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2 \geq \frac{\underline{\mathcal{B}}}{4}\|\delta z\|_{Z^2}^2 \tag{35}
$$

对于任意 $\chi \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$ 以及任意满足 $\xi_\tau^T\delta\xi_\tau = L\delta L$ 几乎处处成立的 $\delta z \in \delta Z$，该式均成立。

Proof 令 $\Delta\xi := \xi - \xi^{\star\star}$，并注意到$\|\Delta\xi\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|\Delta z\|_{Z^\infty} \leq R < \frac{\underline{\mathcal{B}}}{2\overline{\Gamma}}$。于是我们得到

$$
\begin{aligned}
T''(\xi)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2 &= T''(\xi^{\star\star})[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2+\int_0^1 T'''(\xi+\nu\Delta\xi)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\,d\nu\\
&\underset{(20)}{\geq}\underline{\mathcal{B}}\|\delta z\|_{Z^2}^2+\int_0^1 T'''(\xi+\nu\Delta\xi)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\,d\nu\\
&\underset{(33)}{\geq}\underline{\mathcal{B}}\|\delta z\|_{Z^2}^2-\overline{\Gamma}(\|\delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2+\|\delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2)\,\|\Delta z\|_{Z^\infty}\\
&\underset{(12b)}{\geq}\underline{\mathcal{B}}\|\delta z\|_{Z^2}^2-\overline{\Gamma}\|\delta z\|_{Z^2}^2\,\|\Delta z\|_{Z^\infty},\\
&\geq\frac{\underline{\mathcal{B}}}{2}\|\delta z\|_{Z^2}^2.
\end{aligned}
$$

此外，我们指出

$$
R \leq \frac{\tilde{L}}{2} \leq \frac{L^{\star\star}}{2}, \tag{36}
$$

结合引理4 可得

$$
\langle\lambda, h''(z)[\delta z]^2\rangle = \int_0^1 \lambda\left(\delta\xi_\tau^T\delta\xi_\tau - \delta L^2\right)d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \lambda \left(\|\delta\xi_\tau\|^2 - \left(\frac{\xi_\tau^T \delta\xi_\tau}{L} \right)^2 \right) d\tau \\
&\geq -\|\lambda\|_{L^\sim(0,1)} \left(\|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 \frac{\|\xi_\tau\|^2 \|\delta\xi_\tau\|^2}{L^2}\, d\tau \right) \\
&\geq -\|\lambda\|_{L^\sim(0,1)} \left(\|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{\|\xi_\tau\|^2_{L^\sim(0,1)}}{L^2} \int_0^1 \|\delta\xi_\tau\|^2\, d\tau \right) \\
&\underset{(28)}{\geq} -R \left(\|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{(L^{\star\star}+R)^2}{(L^{\star\star}-R)^2} \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} \right) \\
&\geq -R \left(1 + \frac{(L^{\star\star}+R)^2}{(L^{\star\star}-R)^2} \right) \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\underset{(36)}{\geq} -10R \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\geq -\frac{\mathcal{B}}{4} \|\delta\xi_\tau\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\underset{(12b)}{\geq} -\frac{\mathcal{B}}{4} \|\delta z\|^2_{Z^2}.
\end{aligned}
$$

综合这些界，我们得到如下结论：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2 &= T''(\xi)[\delta\xi]^2 + \langle \lambda, h''(z)[\delta z]^2 \rangle \\
&\geq \frac{\mathcal{B}}{2} \|\delta z\|^2_{Z^2} - \frac{\mathcal{B}}{4} \|\delta z\|^2_{Z^2} \\
&\geq \frac{\mathcal{B}}{4} \|\delta z\|^2_{Z^2}.
\end{aligned}
$$

□

4.3 拉格朗日函数的上界

作为前一个引理的对应结果，我们还推导出L_{zz} 在极小点附近的一个上界。同样，我们从底层函数 f 入手，以界定目标函数 T中的误差。

引理10。设$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0 \leq \overline{v}/\sqrt{5}$, $\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_1$ 和 $\|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_2$。此外，设 $\underline{v}^2 := \overline{v}^2 - \overline{c}_0^2$。那么，对于任意 $\xi \in X$， f 的二阶方向导数（如 (3) 所示）有界于

$$
\begin{aligned}
|f''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq\ & \overline{\beta}_0 \|\xi_\tau\| \|\delta\xi\| \|\Delta\xi\| \\
& + \overline{\beta}_1 \left(\|\delta\xi\| \|\Delta\xi_\tau\| + \|\delta\xi_\tau\| \|\Delta\xi\| \right) \\
& + \overline{\beta}_2 \|\xi_\tau\|^{-1} \|\delta\xi_\tau\| \|\Delta\xi_\tau\|
\end{aligned} \tag{37}
$$

with

$$
\overline{\beta}_0 = 14 \frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3} + 4 \frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}, \qquad \overline{\beta}_1 = 7 \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}, \ \textit{and} \qquad \overline{\beta}_2 = \frac{4}{\underline{v}}. \tag{38}
$$

证明可见附录。

定理 11. 设 $z^{\star\star} = (L^{\star\star}, \xi^{\star\star})$ 是 (6) 的全局极小值点，且 $\Delta z := z - z^{\star\star}$。此外，设 $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0 \leq \overline{v}/\sqrt{5}$, $\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_1$, 以及 $\|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_2$。另定义 $\mathrm{v}^2 := \overline{v}^2 - \overline{c}_0^2$ 和 $\tilde{L} := \|x_D - x_O\|$。那么，对于任意 $z \in \mathcal{B}(z^{\star\star}, R)$, T 的二阶方向导数（定义见 (2)）有如下界

$$|T''(\xi)[\Delta\xi]^2| \leq \overline{\mathcal{B}} \|\Delta z\|_{Z^2}^2 \tag{39}$$

其中 $\overline{\mathcal{B}} := \overline{\beta}_1 + \text{最大值} \left\{ \left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0} \tilde{L} + R \right) \overline{\beta}_0, \frac{\overline{\beta}_2}{\tilde{L}-R} \right\}$ 以及 $\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2$ 的定义见引理 *10*。

Proof 根据 T (2) 中的定义，我们知道

$$T''(\xi)[\Delta\xi, \Delta\xi_\tau]^2 = \int_0^1 f''[\Delta\xi, \Delta\xi_\tau]^2 d\tau,$$

结合引理4 和10 的界以及杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
|T''(\xi)[\Delta\xi, \Delta\xi_\tau]^2| \leq & \int_0^1 \left(\overline{\beta}_0 \|\xi_\tau\| \|\Delta\xi\|^2 + 2\overline{\beta}_1 \|\Delta\xi\| \|\Delta\xi_\tau\| + \frac{\overline{\beta}_2}{\|\xi_\tau\|} \|\Delta\xi_\tau\|^2 \right) d\tau \\
\underset{(28)}{\leq} & \overline{\beta}_0 (L^{\star\star} + R) \int_0^1 \|\Delta\xi\|^2 d\tau \\
& + 2\overline{\beta}_1 \int_0^1 \|\Delta\xi\| \|\Delta\xi_\tau\| d\tau \\
& + \frac{\overline{\beta}_2}{L^{\star\star} - R} \int_0^1 \|\Delta\xi_\tau\|^2 d\tau \\
\underset{(\mathrm{Y})}{\leq} & \left((L^{\star\star} + R)\overline{\beta}_0 + \overline{\beta}_1 \right) \|\Delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& + \left(\overline{\beta}_1 + \frac{\overline{\beta}_2}{L^{\star\star} - R} \right) \|\Delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 \\
\underset{(26)}{\leq} & \left(\left(\frac{\overline{v}+\overline{c}_0}{\overline{v}-\overline{c}_0} \tilde{L} + R \right) \overline{\beta}_0 + \overline{\beta}_1 \right) \|\Delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& + \left(\overline{\beta}_1 + \frac{\overline{\beta}_2}{\tilde{L} - R} \right) \|\Delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 \\
\leq & \overline{\mathcal{B}} \left(\|\Delta\xi\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\Delta\xi_\tau\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
\underset{(12b)}{\leq} & \overline{\mathcal{B}} \|\Delta z\|_{Z^2}^2.
\end{aligned}$$

□

定理 12. 设 $\chi^{\star\star} = (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 是 (6) 的一个全局极小值点及其对应的拉格朗日乘子。那么，对于每个 $\chi \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$ 以及每个

$\delta z \in \delta Z$ 成立

$$|\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2| \leq \left(\overline{\mathcal{B}} + R\right) \|\delta z\|_{Z^2}^2 \tag{40}$$

其中 $\overline{\mathcal{B}}(R)$ 由定理 *11*得出。

Proof 利用定理 11 给出的界以及杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2| = & \ |T''(\xi)[\delta\xi]^2 + \langle \lambda, h''(z)[\delta z]^2 \rangle| \\
\underset{(39)}{\leq} & \ \overline{\mathcal{B}} \|dz\|_{Z^z}^2 + \int_0^1 |\lambda \left(\delta\xi_\tau^T \delta\xi_\tau - \delta L^2\right)| \, d\tau \\
\leq & \ \overline{\mathcal{B}} \|dz\|_{Z^z}^2 + \|\lambda\|_{L^\infty(0,1)} \left(\|\delta\xi_\tau\|_{L^z(0,1)}^2 + \delta L^2\right) \\
\underset{(28)}{\leq} & \ \overline{\mathcal{B}} \|dz\|_{Z^z}^2 + R \left(\|\delta\xi_\tau\|_{L^z(0,1)}^2 + \delta L^2\right) \\
\underset{(12b)}{\leq} & \ \left(\overline{\mathcal{B}} + R\right) \|dz\|_{Z^z}^2.
\end{aligned}$$

□

4.4 KKT 算子可逆性

利用前面三个结果，我们已经证明了极小点附近存在一个邻域，使得其中满足 LBB 条件。现在可以证明 KKT算子 F' 可逆。

引理 13. 设 $\chi^{\star\star} = (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 是 (6) 的一个全局极小值点，满足最优性一阶和二阶条件，且对应于某个 $\underline{\mathcal{B}} > 0$及相应的拉格朗日乘子。此外，设存在一个 u ，使得 $\|u\| = 1$，且对几乎所有 $\tau \in (0,1)$，都有 $u^T \xi_\tau^{\star\star} \geq c > 0$。那么，对于(21)中给出的 F，有

$$\|F'(\chi)^{-1}\|_{(Y^2)^* \to Y^2} \leq \omega_1 \tag{41}$$

对于每个 $\chi = (z、\lambda) \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}、R)$ 以及

$$\omega_1 = \sqrt{2} \max\left\{\frac{4}{\underline{\mathcal{B}}}, \frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right), \frac{\overline{\mathcal{B}} + R}{\kappa^2}\right\} \tag{42}$$

以及$\overline{\mathcal{B}}(R)$ 和 $\kappa(R)$，分别如定理*11* 和定理*6*所述。

Proof 证明建立在前文已确立的一些先决条件之上，现将其简要总结如下。

i) 在定理 6 中已证明 *inf-sup* 满足条件：

$$\inf_{\lambda \in L^z(0,1)} \sup_{\delta z \in \delta Z} \frac{\langle \lambda, h'(z)[\delta z] \rangle}{\|\delta z\|_{Z^z} \|\lambda\|_{L^z(0,1)}} \geq \kappa > 0.$$

ii) 在定理 9 中已证明 $\mathcal{L}_{zz}$ 在约束核上是正定的，即:

$$\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2 = T''(\xi)[\delta\xi]^2 + \langle \lambda, h''(z)[\delta z]^2\rangle \geq \frac{\underline{\mathcal{B}}}{4}\|\delta z\|_{Z^2}^2$$

对于所有满足 $h'(z)[\delta z] = 0$ 的 $\delta z \in \delta Z$ 。

iii) 定理 12 已证明 $\mathcal{L}_{zz}$ 有上界

$$|\mathcal{L}_{zz}(\chi)[\delta z]^2| = |T''(\xi)[\delta\xi]^2 + \langle \lambda, h''(z)[\delta z]^2\rangle| \leq (\overline{\mathcal{B}} + R)\|\delta z\|_{Z^2}^2.$$

在这些条件下，由 *Brezzi's Splitting Theorem* [22, 定理 4.3] 可知， $F'(x)$ 是同构的。此外，可以证明，对于鞍点问题（24）的每个右端项$F(x)$，恰有一个解 $(\Delta z,\ \Delta\lambda)$ 满足

$$\begin{aligned}
\|\Delta z\|_{Z^2} &\leq \frac{4}{\underline{\mathcal{B}}}\,\|T'(\xi) + \langle \lambda, h'(z)\rangle\|_{Z^2} \\
&\quad + \frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right)\|h(z)\|_{L^2(0,1)}, \\
\|\Delta\lambda\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right)\|T'(\xi) + \langle \lambda, h'(z)\rangle\|_{Z^2} \\
&\quad + \frac{\overline{\mathcal{B}} + R}{\kappa^2}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right)\|h(z)\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

由 $\|F(\chi)\|_{(Y^2)^*} = \|T'(\xi) + \langle \lambda,\ h'(z)\rangle\|_{Z^2}^2 + \|h(z)\|_{L^2(0,\ 1)}^2$ 可得

$$\begin{aligned}
\|\Delta z\|_{Z^2} &\leq \sqrt{2}\max\left\{\frac{4}{\underline{\mathcal{B}}},\ \frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right)\right\}\|F(\chi)\|, \\
\|\Delta\lambda\|_{L^2(0,1)} &\leq \sqrt{2}\max\left\{\frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}} + R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right),\ \frac{\overline{\mathcal{B}} + R}{\kappa^2}\right\}\|F(\chi)\|,
\end{aligned}$$

由此直接得到

$$\|\Delta\chi\|_{Y^2}^2 \underset{(22b)}{=} \|\Delta z\|_{Z^2}^2 + \|\Delta\lambda\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \omega_1^2\|F(\chi)\|$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{2}\max\left\{\frac{4}{\underline{\mathcal{B}}}, \frac{1}{\kappa}\left(1 + \frac{4(\overline{\mathcal{B}}+R)}{\underline{\mathcal{B}}}\right), \frac{\overline{\mathcal{B}}+R}{\kappa^2}\right\}$。至此证明完成，因为

$$\|F'(\chi)^{-1}\|_{(Y^2)^*\to Y^2} = \sup_{\|F(\chi)\|_{(Y^2)^*}} \frac{\|\Delta\chi\|_{Y^2}}{\|F(\chi)\|_{(Y^2)^*}} \leq \omega_1.$$

□

4.5 Lipschitz 常数

我们即将给出自由飞行问题的 Lipschitz 常数。为此，我们通过一个 $\mathcal{B}$引理引入额外的界。该界包含常数 $\mathcal{B}$，其推导见附录（引理16）。它用于定义 f 在方程（3）中所定义的二阶导数上界。其取值取决于风场的整体特性。

引理14. 设 $\chi^{\star\star}=(z^{\star\star},\lambda^{\star\star})$ 为 (6) 的全局极小值点，且为相应的拉格朗日乘子。对于任意 $\chi_{i\in\{1,2\}}\in\mathcal{B}(\chi^{\star\star},R)$，存在一个 $\mathcal{B}$，使得

$$\|(F'(\chi_2)-F'(\chi_1))[\chi_2-\chi_1]\|_{(Y^2)^*}\leq\omega_2\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2} \tag{43}$$

with

$$\omega_2=(8+\hat{\mathcal{B}})R. \tag{44}$$

Proof 由引理 4 可直接得出

$$|L_2-L_1|\leq 2R, \tag{45a}$$
$$\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^\infty(0,1)}\leq 2R, \tag{45b}$$
$$\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^\infty(0,1)}\leq R. \tag{45c}$$

利用这些界以及柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，我们证明对于任意满足条件的 $\delta\chi\in\delta Z\times L^2(0,\ 1)$，都有

$$\begin{aligned}
&|\langle\lambda_2,h''(z_2)[z_2-z_1,\delta z]\rangle-\langle\lambda_1,h''(z_1)[z_2-z_1,\delta z]\rangle|\\
&\quad=\ |\int_0^1\lambda_2(\delta\xi_\tau^T(\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})-\delta L(L_2-L_1))\\
&\qquad-\lambda_1(\delta\xi_\tau^T(\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})-\delta L(L_2-L_1))d\tau|\\
&\quad=\ |\int_0^1(\lambda_2-\lambda_1)(\delta\xi_\tau^T(\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})-\delta L(L_2-L_1))d\tau|\\
&\quad\leq\ \int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|\|\delta\xi_\tau\|\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|d\tau\\
&\qquad+|\delta L||L_2-L_1|\int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|d\tau\\
&\quad\underset{(\mathrm{CS})}{\leq}\left[\int_0^1\|\delta\xi_\tau\|^2d\tau\right]^{1/2}\left[\int_0^1(\lambda_2-\lambda_1)^2\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2d\tau\right]^{1/2}\\
&\qquad+|\delta L|\ |L_2-L_1|\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^1}\\
&\quad\underset{(45)}{\leq}\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}\left[2R^2\int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|d\tau\right]^{1/2}\\
&\qquad+R\ |\delta L|\ |L_2-L_1|\\
&\quad\underset{(\mathrm{CS})}{\leq}\sqrt{2}R\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}^{1/2}\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^{1/2}\\
&\qquad+R\ |\delta L|\ |L_2-L_1|\\
&\quad\underset{(\mathrm{Y})}{\leq}\frac{\sqrt{2}}{2}R\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}\right]\\
&\qquad+R\ |\delta L|\ |L_2-L_1|\\
&\quad\underset{(22b)}{\leq}R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}+|L_2-L_1|\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}^2+\|\xi_2-\xi_1\|_{L^2}^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^2+|L_2-L_1|^2\right]^{1/2}\\
&\underset{(22b)}{=} 2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&|\langle\lambda_2-\lambda_1,(h'(z_2)-h'(z_1))[\delta z]\rangle|\\
&= \left|\int_0^1(\lambda_2-\lambda_1)\left((\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})^T\delta\xi_\tau-(L_2-L_1)\delta L\right)d\tau\right|\\
&\leq \int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|\|\delta\xi_\tau\|d\tau\\
&\quad+|L_2-L_1||\delta L|\int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|d\tau\\
&\underset{(CS)}{\leq}\left[\int_0^1\|\delta\xi_\tau\|^2d\tau\right]^{1/2}\left[\int_0^1(\lambda_2-\lambda_1)^2\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2d\tau\right]^{1/2}\\
&\quad+|L_2-L_1||\delta L|\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^1}\\
&\underset{(45)}{\leq}\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}\left[2R^2\int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|\,\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|d\tau\right]^{1/2}\\
&\quad+R|L_2-L_1||\delta L|\\
&\underset{(22b)}{\leq}\sqrt{2}R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\int_0^1|\lambda_2-\lambda_1|\,\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|d\tau\right]^{1/2}\\
&\quad+R\|\delta\chi\|_{Y^2}|L_2-L_1|\\
&\underset{(CS)}{\leq}\sqrt{2}R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}^{1/2}\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^{1/2}\\
&\quad+R\|\delta\chi\|_{Y^2}|L_2-L_1|\\
&\underset{(Y)}{\leq}\frac{\sqrt{2}}{2}R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}\right]\\
&\quad+R\|\delta\chi\|_{Y^2}|L_2-L_1|\\
&\leq R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}+\|\xi_2-\xi_1\|_{L^2}+|L_2-L_1|\right]\\
&\leq 2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^2+\|\xi_2-\xi_1\|_{L^2}^2+|L_2-L_1|^2\right]^{1/2}\\
&\underset{(22b)}{=} 2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&|\langle\delta\lambda,(h'(z_2)-h'(z_1))[z_2-z_1]\rangle|\\
&= \left|\int_0^1\delta\lambda((\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})^T(\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1})-(L_2-L_1)^2)d\tau\right|\\
&\leq \int_0^1|\delta\lambda|\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2d\tau+(L_2-L_1)^2\int_0^1|\delta\lambda|d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(45)}{\leq} 2R\int_0^1 |\delta\lambda|\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|d\tau + 2R|L_2-L_1|\|\delta\lambda\|_{L^1}\\
&\underset{(\mathrm{CS})}{\leq} 2R\left[\int_0^1 \delta\lambda^2 d\tau\right]^{1/2}\left[\int_0^1 \|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2 d\tau\right]^{1/2}\\
&\qquad + 2R|L_2-L_1|\ \|\delta\lambda\|_{L^1}\\
&\leq 2R\|\delta\lambda\|_{L^2}\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}\\
&\qquad + 2R|L_2-L_1|\ \|\delta\lambda\|_{L^1}\\
&\underset{(22b)}{\leq} 2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\left[\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}+|L_2-L_1|\right]\\
&\leq 4R\|\delta\chi\|_{Y^2}\Big[\|\lambda_2-\lambda_1\|_{L^2}^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^2\\
&\qquad\qquad + \|\xi_2-\xi_1\|_{L^2}^2+|L_2-L_1|^2\Big]^{1/2}\\
&\underset{(22b)}{=} 4R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}.
\end{aligned}
$$

ˆ 如附录中的引理 16 所示，存在一个 $\mathcal{B}<\infty$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(f''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f''(\xi_1,\xi_{\tau,1})\right)[\xi_2-\xi_1,\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}][\delta\xi,\delta\xi_\tau]\right|\\
&\qquad\qquad \leq \hat{\mathcal{B}}R\sqrt{\|\xi_2-\xi_1\|^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2}\sqrt{\|\delta\xi\|^2+\|\delta\xi_\tau\|^2},
\end{aligned}
$$

由此可得以下界限，因为

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(T''(\xi_2)-T''(\xi_1)\right)[\xi_2-\xi_1,\delta\xi]\right|\\
&\quad= \left|\int_0^1 \left(f''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f''(\xi_1,\xi_{\tau,1})\right)[\xi_2-\xi_1,\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}][\delta\xi,\delta\xi_\tau]d\tau\right|\\
&\quad\leq \hat{\mathcal{B}}R\int_0^1 \left[\|\xi_2-\xi_1\|^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2\right]^{1/2}\left[\|\delta\xi\|^2+\|\delta\xi_\tau\|^2\right]^{1/2}d\tau\\
&\quad\underset{(\mathrm{CS})}{\leq} \hat{\mathcal{B}}R\left[\int_0^1 \|\xi_2-\xi_1\|^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|^2 d\tau\right]^{1/2}\left[\int_0^1 \|\delta\xi\|^2+\|\delta\xi_\tau\|^2 d\tau\right]^{1/2}\\
&\quad\leq \hat{\mathcal{B}}R\left[\|\xi_2-\xi_1\|_{L^2}^2+\|\xi_{\tau,2}-\xi_{\tau,1}\|_{L^2}^2\right]^{1/2}\left[\|\delta\xi\|_{L^2}^2+\|\delta\xi_\tau\|_{L^2}^2\right]^{1/2}\\
&\quad\underset{(22b)}{\leq} \hat{\mathcal{B}}R\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}\|\delta\chi\|_{Y^2}.
\end{aligned}
$$

F最后，我们利用上面推导出的界，证明对于任意 $\delta\chi$ ，都有

$$
\begin{aligned}
|(F'(\chi_2)-F'(\chi_1))[\chi_2-\chi_1,\delta\chi]| = &\left|\left(T''(\xi_2)-T''(\xi_1)\right)[\xi_2-\xi_1,\delta\xi]\right.\\
&+\langle\lambda_2,h''(z_2)[z_2-z_1,\delta z]\rangle\\
&-\langle\lambda_1,h''(z_1)[z_2-z_1,\delta z]\rangle\\
&+\langle\lambda_2-\lambda_1,(h'(z_2)-h'(z_1))[\delta z]\rangle\\
&\left.+\langle\delta\lambda,(h'(z_2)-h'(z_1))[z_2-z_1]\rangle\right|\\
\leq\ &\hat{\mathcal{B}}R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}\\
&+2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}\\
&+2R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2-\chi_1\|_{Y^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 4R\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2 - \chi_1\|_{Y^2} \\
&= \omega_2\|\delta\chi\|_{Y^2}\|\chi_2 - \chi_1\|_{Y^2}
\end{aligned}
$$

with

$$\omega_2(R) = (8 + \hat{\mathcal{B}})R.$$

由此可直接得出结论，因为

$$
\begin{aligned}
\|(F'(\chi_2) - F'(\chi_1))[\chi_2 - \chi_1]\|_{(Y^2)^\cdot} &= \sup_{\|\delta\chi\|_{Y^2}=1} |(F'(\chi_2) - F'(\chi_1))[\chi_2 - \chi_1, \delta\chi]| \\
&\leq \omega_2\|\chi_2 - \chi_1\|_{Y^2}. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

□

4.6 牛顿法的收敛性

现在，我们已准备好将上述结果联系起来，证明应用于自由飞行优化问题（6）的牛顿-KKT 方法会收敛到第 3.1 节所述的全局极小值点，前提是存在一个 $u \in \mathbb{R}^2$，使得 $\|u\| = 1$ 满足 $u^T\xi_\tau^{\star\star} \geq c$。粗略地说，最优航线需要朝目的地飞行，并优于任何朝相反方向飞行的航线。直观上，即使风况相当强劲，这一条件也依然成立。

定理 15. 设 $\chi^{\star\star} = (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 是 (6) 的一个全局解，并满足最优性一阶和二阶条件，其中 $\underline{\mathcal{B}} > 0$。此外，设存在一个 $c > 0$ 和一个 $u \in \mathbb{R}^2$，使得 $\|u\| = 1$ 满足 $u^T\xi_\tau^{\star\star} \geq c$ 对几乎所有 $\tau \in (0,1)$都成立。最后，设 $\omega := \omega_1\omega_2$，如引理 *13* 和 *14*所述。

那么存在 $R_C > 0$，使得第 *3.2* 节中定义的常规牛顿迭代 $\chi^{\star\star}$ 以估计的速率收敛

$$\|\chi^{k+1} - \chi^{\star\star}\|_{Y^2} \leq \frac{\omega}{2}\|\chi^k - \chi^{\star\star}\|_{Y^2}, \qquad (47)$$

若以 $\chi^0 \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R_C)$ 为初始值，且迭代点 χ^k 始终位于$\mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R_C)$内，则结论成立。此外，$\chi^{\star\star}$ 在 $\mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R_C)$内是唯一的。

Proof 在定理 6、9 和 12 中，我们证明了 *inf-sup* 条件得到满足，即对于所有 $x \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R_C)$，$\mathcal{L}_{zz}(\chi)$ 在约束核上正定，且有上界。因此，$F'(\chi)$ 可逆，且

$$\|F'(\chi)^{-1}\|_{(Y^2)^\cdot \to Y^2} \leq \omega_1 \qquad \forall\, \chi \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R_C),$$

正如引理 13所证。此外，由引理 13 和 14可得

$$
\begin{aligned}
&\|F'(\chi_1)^{-1}(F'(\chi_2) - F'(\chi))[\chi_2 - \chi_1]\|_{Y^2} \\
&\qquad \leq \|F'(\chi_1)^{-1}\|_{(Y^2)^\cdot \to Y^2}\|(F'(\chi_2) - F'(\chi_1))[\chi_2 - \chi_1]\|_{(Y^2)^\cdot} \\
&\qquad \leq \omega_1\omega_2\|\chi_2 - \chi_1\|_{Y^2} \\
&\qquad \leq \omega\|\chi_2 - \chi_1\|_{Y^2}
\end{aligned}
$$

对于 $\chi_1,\ \chi_2 \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star},\ R_C)$。显然，由于 ω_1 有界且 $\omega_2 = (8 + \hat{\mathcal{B}})R$，存在一个 $R_C > 0$ 使得 $\omega := \omega_1\omega_2 < 2$。现在我们定义 $e_k := \chi^k - \chi^{\star\star}$，并对 $\mu \in (0,\ 1)$按如下方式进行:

$$
\begin{aligned}
&\|\chi^k + \mu\Delta\chi^k - \chi^{\star\star}\|_{Y^2} \\
&\quad = \|e_k - \mu F'(\chi^k)^{-1}F(\chi^k)\|_{Y^2} \\
&\quad = \|e_k - \mu F'(\chi^k)^{-1}(F(\chi^k) - \underbrace{F(\chi^{\star\star})}_{=0})\|_{Y^2} \\
&\quad = \|(1-\mu)e_k - \mu F'(\chi^k)^{-1}\int_{s=0}^{1}\left(F'(\chi^k - se_k) - F'(\chi^k)\right)e_k\,ds\,\|_{Y^2} \\
&\quad \le (1-\mu)\,\|e_k\|_{Y^2} + \frac{\mu}{2}\omega\,\|e_k\|_{Y^2},
\end{aligned}
$$

由此可得结论，其中 $\mu = 1$ 为

$$\|e_{k+1}\|_{Y^2} \le \frac{\omega}{2}\|e_k\|_{Y^2}.$$

为了证明 $\mathcal{B}\ \chi^{\star\star}\ R_C$ $\chi^\star \neq$（，）中的 $\chi^{\star\star}$ $F\ \chi^\star\ = 0$ $\chi^\star \in \mathcal{B}\ \chi^{\star\star}\ R_C$ $\chi^0\ = \chi^\star$ 唯一性，假设存在第二个解，满足（）和（，）。以 初始化：显然有 $\chi^1 = \chi^\star$。然而，由（47）可得

$$\|\chi^1 - \chi^{\star\star}\|_{Y^2} \le \frac{\omega}{2}\|\chi^0 - \chi^{\star\star}\|_{Y^2} < \|\chi^0 - \chi^{\star\star}\|_{Y^2},$$

由于 $\omega < 2$，这就产生了矛盾。 □

5 结论

研究已证明，在特定条件下，牛顿-KKT 方法可用于求解自由飞行轨迹优化问题。这些条件包括：i）要求迭代点始终位于解的 L^∞ 邻域内；ii）初始点必须足够接近解。通过计算特定图[13]上的最短路径，可以高效地找到合适的初始点。因此，现已建立一种重要工具，可用于对自由飞行问题进行高效的确定性全局优化。

声明

资助

本研究由 DFG 卓越研究中心 MATH$^+$–柏林数学研究中心 TrU-4 项目资助。

利益冲突

作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

伦理审批

不适用。

参与同意

不适用。

数据可用性

本文不适用数据共享，因为在本研究期间未生成或分析任何数据集。

发表同意

我们确认，所有作者均同意将此稿件提交至公共交通优化：从理论到实践。

作者贡献

概念化，R.B 和 M.W.；方法论，F.D. 和 M.W.；验证，F.D.；形式分析，F.D. 和 M.W.；调查，F.D. 和 M.W.；资源，R.B.、F.D. 和 M.W.；撰写初稿，F.D. 和 M.W.；撰写审阅与编辑，R.B.；监督，R.B.；项目管理，R.B. 和 M.W.；经费获取，R.B. 和 M.W.；所有作者均已阅读并同意稿件的发表版本。

参考文献

[1] Wells, C.A., Williams, P.D., Nichols, N.K., Kalise, D., Poll, I.: 通过燃油优化航路规划减少跨大西洋飞行排放。《环境研究快报》**16**(2), 025002（2021年）。https://doi.org/10.1088/1748-9326/abce82[2] Karisch, S.E., Altus, S.S., Stojkovi´c, G., Stojkovi´c, M.：载于：Barnhart, C., Smith, B.（编），《运营》，第283–383页。施普林格，波士顿，马萨诸塞州（2012年）。https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1608-1 6[3] Alizadeh, A., Uzun, M., Koyuncu, E., Inalhan, G.：基于风况信息的最佳航路轨迹规划。IFAC-PapersOnLine**51**(9), 180–185（2018年）。https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.030。第15届IFAC交通系统控制研讨会（CTS 2018）[4] Rumler, W., G¨unther, T., Weißhaar, U., Fricke, H.：基于成本指数的飞行规划广泛应用所导致的飞行剖面变化。载于：第4届国际航空运输研究会议，布达佩斯（2010年）[5] Ng, H.K., Sridhar, B., Grabbe, S.：有风条件下采用多个巡航高度优化飞机轨迹。《航空航天信息系统期刊》**11**(1), 35–47（2014年）。https://doi.org/10.2514/1.I010084

.[6] Zermelo, E.：静止或变化风场分布下的导航问题。ZAMM 11(2), 114–124 (1931年). https://doi.org/10. 1002/zamm.19310110205[7] Betts, J.T.：使用非线性规划进行最优控制与估计的实用方法（第二版）。Siam（工业与应用数学学会），费城（2011）。https://doi.org/10.1137/1.9780898718577[8] Dreves, A., Gerdts, M., Sama, M., D'Ariano, A.：冲突情境下的自由飞行轨迹优化与广义纳什均衡。预印本（2017）[9] Geiger, B., Horn, J., DeLullo, A., Niessner, A., Long, L.：使用非线性规划直接配点法进行无人机最优路径规划，（2006）。https://doi.org/10.2514/6.2006-6199[10] Girardet, B., Lapasset, L., Delahaye, D., Rabut, C., Brenier, Y.：考虑天气条件生成最优飞机轨迹。载于：ISIATM 2013，第二届创新空中交通管理跨学科科学国际会议，法国图卢兹（2013）。https:// hal-enac.archives-ouvertes.fr/hal-00867818[11] Girardet, B., Lapasset, L., Delahaye, D., Rabut, C.：风场最优路径规划：在飞机轨迹中的应用。载于：2014年第13届控制、自动化、机器人与视觉国际会议（ICARCV），第1403–1408页（2014）[12] Bornd¨orfer, R., Danecker, F., Weiser, M.：自由飞行规划的离散-连续算法。Algorithms 14(1), 4（2021年）。https://doi. org/10.3390/a14010004[13] Bornd¨orfer, R., Danecker, F., Weiser, M.：全局最优自由飞行轨迹优化的离散-连续算法。载于：D'Emidio, M., Lindner, N.（编）《第22届交通建模、优化与系统算法方法研讨会》（ATMOS 2022）。信息学开放获取系列（OASIcs），第106卷，第2–1213页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，德国 Dagstuhl（2022年）。https://doi.org/10.4230/OASIcs.ATMOS. 2022.2. https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/17106[14]Bornd¨orfer, R., Danecker, F., Weiser, M.：离散-连续最短路径问题的误差界及其在自由飞行轨迹优化中的应用。arXiv（2022年）。https://doi.org/10.48550/ARXIV. 2204.05853. https://arxiv.org/abs/2204.05853

[15] Locatelli, M.：《连续全局优化的模拟退火算法》

优化。在：《全局优化手册》，第 179–229 页。施普林格，波士顿，马萨诸塞州（2002）。https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5362- 2 6[16] Cassiōli, A., Izzo, D., Di Lorenzo, D., Locatelli, M., Schoen, F.：5。载于：Fasano, G., Pint´er, J.D.（编）《最优轨迹规划的全局优化方法》，第 111–140 页。施普林格，纽约，纽约州（2013）。https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5 5. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5 5[17] Addis, B., Cassioli, A., Locatelli, M., Schoen, F.：一种用于空间轨迹设计的全局优化方法。《计算优化与应用》48，635–652（2011）。https://doi.org/10.1007/s10589- 009-9261-6[18] Bonyadi, M.R., Michalewicz, Z.：单目标连续空间问题的粒子群优化：综述。《进化计算》25(1)，1–54（2017）。https://doi.org/10.1162/EVCO r 00180[19] Yen, J.Y.：在网络中寻找 k 条最短无环路径。《管理科学》17(11)，712–716（1971）https://doi.org/10.1287/mnsc.17. 11.712. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712[20] Nocedal, J., Wright, S.J.：《数值优化》。施普林格，纽约，纽约州（2006）。https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5[21]Maurer, H., Zowe, J.：无限维规划问题的一阶和二阶必要及充分最优性条件。《数学规划》16，98–110（1979）。https://doi.org/10.1007/ BF01582096[22]Braess, D.：《有限元》，第 5 版。施普林格，海德堡（2013）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-34797-9[23]Casas, E., Tr¨oltzsch, F.：二阶最优性条件及其在偏微分方程控制中的作用。《德国数学家协会年报》117(1)，3–44（2015）。https://doi.org/10.1365/s13291-014- 0109-3

A 补充材料

A.1 全局界

导数 $f = t_\tau$ （如式（3）所定义）的参数化时间由两项组成，其中一项是顺风项

$$f_1 = -\frac{\xi_\tau^T w}{g}, \tag{48}$$

$$g = \overline{v}^2 - w^T w, \tag{49}$$

以及长度项

$$f_2 = g^{-1}\left((\xi_\tau^T w)^2 + g(\xi_\tau^T \xi_\tau)\right)^{1/2}. \tag{50}$$

在每个时刻 τ，我们得到

$$\underline{v}^2 := \overline{v}^2 - \overline{c}_0^2 \le g \le \overline{v}^2. \tag{51}$$

g 沿 $\delta\xi$ 和 $\Delta\xi \in \delta X$ 方向的方向导数为

$$g'\delta\xi = -2w^T w_x \delta\xi \tag{52}$$

$$\Rightarrow \quad \|g'\| \le 2\overline{c}_0\overline{c}_1 \tag{53}$$

$$\delta\xi^T g''\delta\xi = -2\delta\xi^T w_x^T w_x \delta\xi - 2w_{xx}[w, \delta\xi, \delta\xi] \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad \|g''\| \le 2(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2). \tag{55}$$

$$g'''[\delta\xi, \delta\xi, \Delta\xi] = -6w_{xx}[w_x\delta\xi, \delta\xi, \Delta\xi] - 2w_{xxx}[w, \delta\xi, \delta\xi, \Delta\xi]) \tag{56}$$

$$\Rightarrow \quad \|g'''\| \le 2(3\overline{c}_1\overline{c}_2 + \overline{c}_0\overline{c}_3). \tag{57}$$

对于顺风项，我们考虑

$$f_1'(\xi, \xi_\tau)[\delta\xi, \delta\xi_\tau] = g^{-2}(\xi_\tau^T w)(g'\delta\xi) - g^{-1}\xi_\tau^T w_x \delta\xi - g^{-1}w^T\delta\xi_\tau, \tag{58}$$

其上界为

$$|f_1'(\xi, \xi_\tau)[\delta\xi, \delta\xi_\tau]| \le \left(2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right)\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\| + \frac{\overline{c}_0}{\underline{v}^2}\|\delta\xi_\tau\|. \tag{59}$$

二阶方向导数为

$$\begin{aligned} f_1''(\xi, \xi_\tau)[\delta\xi, \delta\xi_\tau][\Delta\xi, \Delta\xi_\tau] = {} & -2g^{-3}(g'\Delta\xi)(\xi_\tau^T w)(g'\delta\xi) && + g^{-2}(\Delta\xi_\tau^T w)(g'\delta\xi) \\ & + g^{-2}(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)(g'\delta\xi) && + g^{-2}(\xi_\tau^T w)(\delta\xi^T g''\Delta\xi) \\ & + g^{-2}(g'\Delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && - g^{-1}(\Delta\xi_\tau w_x\delta\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- g^{-1}w_{xx}[\xi_\tau, \delta\xi, \Delta\xi] && + g^{-2}(g'\Delta\xi)(w^T\delta\xi_\tau) \\ &- g^{-1}(\delta\xi_\tau^T w_x \Delta\xi) && \end{aligned} \tag{60}$$

尤其是

$$\begin{aligned} f_1''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2 = &-2g^{-3}(g'\delta\xi)^2(\xi_\tau^T w) && + 2g^{-2}(g'\delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) \\ &+ g^{-2}(\delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T w) && - g^{-1}w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] \\ &- 2g^{-1}(\delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && + 2g^{-2}(\delta\xi_\tau^T w)(g'\delta\xi), \end{aligned} \tag{61}$$

由此得到

$$\begin{aligned} |f_1''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \le &\left[8\frac{\overline{c}_0^3\overline{c}_1^2}{\underline{v}^6} + 6\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1^2}{\underline{v}^4} + 2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_2}{\underline{v}^4} + \frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\right]\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| \\ &+ \left[2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right]\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\| \\ &+ \left[2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right]\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\| \end{aligned} \tag{62}$$

and

$$\begin{aligned} |f_1''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2| \le &\left[8\frac{\overline{c}_0^3\overline{c}_1^2}{\underline{v}^6} + 6\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1^2}{\underline{v}^4} + 2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_2}{\underline{v}^4} + \frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\right]\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|^2 \\ &+ \left[4\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + 2\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|, \end{aligned} \tag{63}$$

分别。最后，三阶方向导数为

$$\begin{aligned} &f_1'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] \\ &\quad= \ 6g^{-4}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)^2(\xi_\tau^T w) && - 4g^{-3}(g'\delta\xi)(\Delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T w) \\ &\quad - 2g^{-3}(g'\Delta\xi)(\delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T w) && + g^{-2}g'''[\delta\xi,\delta\xi,\Delta\xi](\xi_\tau^T w) \\ &\quad - 2g^{-3}(g'\delta\xi)^2(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi) && + g^{-2}(\delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi) \\ &\quad - 4g^{-3}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && + 2g^{-2}(\Delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) \\ &\quad + 2g^{-2}(g'\delta\xi)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi] && + g^{-2}(g'\Delta\xi)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] \\ &\quad - g^{-1}w_{xxx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi,\Delta\xi] && \\ &\quad - 2g^{-3}(g'\delta\xi)^2(\Delta\xi_\tau^T w) && + g^{-2}(\delta\xi^T g''\delta\xi)(\Delta\xi_\tau^T w) \\ &\quad + 2g^{-2}(g'\delta\xi)(\Delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && - g^{-1}w_{xx}[\Delta\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] \\ &\quad - 4g^{-3}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w) && + 2g^{-2}(\Delta\xi^T g''\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w) \\ &\quad + 2g^{-2}(g'\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w_x\Delta\xi) && + 2g^{-2}(g'\Delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) \\ &\quad - 2g^{-1}w_{xx}[\delta\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi], && \end{aligned} \tag{64}$$

其上界为

$$
\begin{aligned}
&|f_1'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \\
&\quad\le \frac{\|\xi_\tau\|}{\underline{v}}\left[\frac{\overline{c}_1^3}{\underline{v}^3}\left(48\frac{\overline{c}_0^4}{\underline{v}^4}+48\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+6\right)\right. \\
&\qquad\qquad +\frac{\overline{c}_1\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(24\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+18\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}\right) \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{\overline{c}_3}{\underline{v}}\left(2\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+1\right)\right]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\| \\
&\qquad +\left[\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3}\left(8\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+6\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}\right)+\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(2\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+1\right)\right]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\| \\
&\qquad +\left[\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3}\left(16\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+12\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}\right)+\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(4\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+2\right)\right]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|. \qquad (65)
\end{aligned}
$$

在讨论长度项 f_2 之前，我们先考虑该项

$$F := (\xi_\tau^T w)^2 + g(\xi_\tau^T\xi_\tau) \qquad (66)$$

with

$$\underline{v}^2\|\xi_\tau\|^2 \le F \le \|\xi_\tau\|^2\overline{\overline{v}}^2.$$

我们还注意到

$$\frac{g}{F} \le \frac{1}{\|\xi_\tau\|^2}.$$

Then

$$
\begin{aligned}
F'(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau] =& 2(\xi_\tau^T w)((\delta\xi_\tau^T w)+(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)) \\
&+(g'\delta\xi)(\xi_\tau^T\xi_\tau)+2g(\xi_\tau^T\delta\xi_\tau), \qquad (67)
\end{aligned}
$$

其上界为

$$|F'(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]| \le 2\overline{\overline{v}}^2\|\xi_\tau\|\|\delta\xi_\tau\|+4\overline{c}_0\overline{c}_1\|\xi_\tau\|^2\|\delta\xi\|, \qquad (68)$$

二阶导数为

$$
\begin{aligned}
&F''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] \\
&\quad= 2(\xi_\tau^T w)(\delta\xi_\tau^T w_x\Delta\xi) && +2(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w) \\
&\quad\quad +2(\Delta\xi_\tau^T w)(\delta\xi_\tau^T w) && +2(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) \\
&\quad\quad +2(\xi_\tau^T w)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi] && +2(\Delta\xi_\tau^T w)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi) \\
&\quad\quad +2(\xi_\tau^T w)(\Delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && +(\Delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T\xi_\tau) \\
&\quad\quad +2(g'\delta\xi)(\Delta\xi_\tau^T\xi_\tau) && +2(g'\Delta\xi)(\xi_\tau^T\delta\xi_\tau) \\
&\quad\quad +2g(\Delta\xi_\tau^T\delta\xi_\tau) && \qquad (69)
\end{aligned}
$$

尤其是

$$\begin{aligned}F''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2 = {} & 4(\xi_\tau^T w)(\delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && + 4(\delta\xi_\tau^T w)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)\\ & + 2(\delta\xi_\tau^T w)^2 && + 2(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)^2\\ & + 2(\xi_\tau^T w)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] && + (\delta\xi^T g''\delta\xi)(\xi_\tau^T\xi_\tau)\\ & + 4(g'\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T\xi_\tau) && + 2g(\delta\xi_\tau^T\delta\xi_\tau),\end{aligned} \tag{70}$$

其结果为

$$\begin{aligned}|F''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \le {} & \left(4\overline{c}_1^2 + 4\overline{c}_0\overline{c}_2\right)\|\xi_\tau\|^2\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\|\\ & + 8\overline{c}_0\overline{c}_1\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\|\\ & + 8\overline{c}_0\overline{c}_1\|\xi_\tau\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\ & + 2\overline{\overline{v}}^2\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\begin{aligned}|F''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2| \le {} & \left(4\overline{c}_1^2 + 4\overline{c}_0\overline{c}_2\right)\|\xi_\tau\|^2\|\delta\xi\|^2\\ & + 16\overline{c}_0\overline{c}_1\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\\ & + 2\overline{\overline{v}}^2\|\delta\xi_\tau\|^2,\end{aligned} \tag{72}$$

分别为。三阶导数为

$$\begin{aligned}& F'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\ = {} & 4(\Delta\xi_\tau^T w)(\delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && + 4(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)(\delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi)\\ & + 4(\xi_\tau^T w)w_{xx}[\delta\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi] && + 4(\delta\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)\\ & + 4(\delta\xi_\tau^T w)(\Delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi) && + 4(\delta\xi_\tau^T w)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi]\\ & + 4(\delta\xi_\tau^T w)(\delta\xi_\tau^T w_x\Delta\xi) && + 4(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)(\Delta\xi_\tau^T w_x\delta\xi)\\ & + 4(\xi_\tau^T w_x\delta\xi)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\Delta\xi] && + 2(\Delta\xi_\tau^T w)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi]\\ & + 2(\xi_\tau^T w_x\Delta\xi)w_{xx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] && + 2(\xi_\tau^T w)w_{xxx}[\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi,\Delta\xi]\\ & + 2(\xi_\tau^T w)w_{xx}[\Delta\xi_\tau,\delta\xi,\delta\xi] && + g'''[\delta\xi,\delta\xi,\Delta\xi](\xi_\tau^T\xi_\tau)\\ & + 2(\delta\xi^T g''\delta\xi)(\Delta\xi_\tau^T\xi_\tau) && + 4(\Delta\xi^T g''\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T\xi_\tau)\\ & + 4(g'\delta\xi)(\delta\xi_\tau^T\Delta\xi_\tau) && + 2(g'\Delta\xi)(\delta\xi_\tau^T\delta\xi_\tau),\end{aligned} \tag{73}$$

其上界为

$$\begin{aligned}|F'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \le {} & 4\|\xi_\tau\|^2(\overline{c}_0\overline{c}_3 + 3\overline{c}_1\overline{c}_2)\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\|\\ & + 8\|\xi_\tau\|(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2)\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\|\\ & + 16\|\xi_\tau\|(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2)\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\ & + 16\overline{c}_0\overline{c}_1\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\end{aligned}$$

$$+ 8\overline{c}_0\overline{c}_1\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\|. \tag{74}$$

因此，对于长度项 $f_2 = g^{-1}\sqrt{F}$，我们得到

$$f_2'(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau] = -g^{-2}(g'\delta\xi)F^{1/2} + \frac{1}{2}g^{-1}F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau], \tag{75}$$

其上界为

$$|f_2'(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]| \le \left(2\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^4} + 4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3}\right)\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\| + 2\underline{v}^{-3}\overline{\overline{v}}^2\|\delta\xi_\tau\|. \tag{76}$$

二阶导数为

$$\begin{aligned} f_2''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] = \quad & 2g^{-3}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)F^{1/2} \\ & - g^{-2}(\delta\xi^T g''\Delta\xi)F^{1/2} \\ & - \frac{1}{2}g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-1/2}F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] \\ & - \frac{1}{2}g^{-2}(g'\Delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau] \\ & + \frac{1}{2}g^{-1}F^{-1/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] \\ & - \frac{1}{4}g^{-1}F^{-3/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] \end{aligned} \tag{77}$$

尤其是

$$\begin{aligned} f_2''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2 = \quad & 2g^{-3}(g'\delta\xi)^2F^{1/2} \\ & - g^{-2}(\delta\xi^T g''\delta\xi)F^{1/2} \\ & - g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau] \\ & + \frac{1}{2}g^{-1}F^{-1/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2 \\ & - \frac{1}{4}g^{-1}F^{-3/2}(F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau])^2, \end{aligned} \tag{78}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &|f_2''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \\ &\quad \le \left[8\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^6} + 12\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2}{\underline{v}^5} + 2\frac{(\overline{c}_1^2+\overline{c}_0\overline{c}_2)\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^4} + 2\frac{\overline{c}_1^2+\overline{c}_0\overline{c}_2}{\underline{v}^3}\right]\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| \\ &\qquad + \left[4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^5} + 4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3}\right]\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\| \end{aligned}$$

$$+\left[4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^5}+4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3}\right]\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|$$
$$+\left[\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^5}+\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^3}\right]\|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\| \tag{79}$$

and

$$\begin{aligned}
&|f_2''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2|\\
&\quad\le\left[8\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^6}+12\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2}{\underline{v}^5}+2\frac{(\overline{c}_1^2+\overline{c}_0\overline{c}_2)\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^4}+2\frac{\overline{c}_1^2+\overline{c}_0\overline{c}_2}{\underline{v}^3}\right]\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|^2\\
&\qquad+\left[8\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^5}+8\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3}\right]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\\
&\qquad+\left[\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^5}+\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^3}\right]\|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|^2
\end{aligned} \tag{80}$$

三阶导数为

$$\begin{aligned}
f_2'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau] =& -6g^{-4}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)^2F^{1/2}\\
&+4g^{-3}(g'\delta\xi)(\Delta\xi^Tg''\delta\xi)F^{1/2}\\
&+g^{-3}(g'\delta\xi)^2F^{-1/2}F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+2g^{-3}(g'\Delta\xi)(\delta\xi^Tg''\delta\xi)F^{1/2}\\
&-g^{-2}g'''[\delta\xi,\delta\xi,\Delta\xi]F^{1/2}\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(\delta\xi^Tg''\delta\xi)F^{-1/2}F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+g^{-3}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(\Delta\xi^Tg''\delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{4}g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-3/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-1/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+g^{-3}(g'\Delta\xi)(g'\delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(\Delta\xi g''\delta\xi)F^{-1/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{4}g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-3/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(g'\delta\xi)F^{-1/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{4}g^{-2}(g'\Delta\xi)F^{-3/2}(F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau])^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3}{8}g^{-1}F^{-5/2}(F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau])^2F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-1}F^{-3/2}F'[\delta\xi,\delta\xi_\tau]F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g^{-2}(g'\Delta\xi)F^{-1/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2\\
&-\frac{1}{4}g^{-1}F^{-3/2}F''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2F'[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{2}g^{-1}F^{-1/2}F'''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau],
\end{aligned}
\tag{81}
$$

其上界为

$$
\begin{aligned}
&|f_2'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]|\\
&\quad\le\frac{2\|\xi_\tau\|}{\underline{v}}\Bigg[\frac{\overline{c}_3}{\underline{v}}\left(\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0}{\underline{v}^2}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{3\overline{c}_1\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(1+\frac{\overline{\overline{v}}}{\underline{v}}+6\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+4\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0^2}{\underline{v}^3}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{6\overline{c}_1^3}{\underline{v}^3}\left(3\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0}{\underline{v}^2}+8\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+4\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0^3}{\underline{v}^4}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\|\\
&\qquad+\frac{4}{\underline{v}}\Bigg[\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}\left(1+\frac{\overline{v}^2}{\underline{v}^2}+9\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+7\frac{\overline{c}_0^2\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^4}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\left(\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+\frac{\overline{v}^2\overline{c}_0}{\underline{v}^3}+\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\|\\
&\qquad+\frac{8}{\underline{v}}\Bigg[\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}\left(1+\frac{\overline{v}^2}{\underline{v}^2}+9\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+7\frac{\overline{c}_0^2\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^4}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\left(\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+\frac{\overline{v}^2\overline{c}_0}{\underline{v}^3}+\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\
&\qquad+\frac{8\overline{c}_0\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^3}\left(1+3\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}+2\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^4}\right)\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\\
&\qquad+\frac{4\overline{c}_0\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^3}\left(1+3\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}+2\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^4}\right)\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\|\\
&\qquad+\frac{3\overline{\overline{v}}^4}{\|\xi_\tau\|^2\underline{v}^5}\left(1+\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}\right)\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

引理7. 设对每个 $p\in\Omega$，$\|w(p)\|\le\overline{c}_0\le\overline{v}/\sqrt{5}$、$\|w_x(p)\|\le\overline{c}_1$、$\|w_{xx}(p)\|\le\overline{c}_2$ 和 $\|w_{xxx}(p)\|\le\overline{c}_3$。此外，设 $\underline{v}^2:=\overline{v}^2-\overline{c}_0^2$ 且 $\overline{\overline{v}}^2:=\overline{v}^2+\overline{c}_0^2$。那么，对任意 $\xi\in X$，由式 (3) 给出的 f 的三阶方向导数

有界于

$$
\begin{aligned}
&|f'''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \\
&\qquad\leq \left(\|\xi_\tau\|\overline{\gamma}_0\|\delta\xi\|^2+\overline{\gamma}_2\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|+\frac{\overline{\gamma}_4}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi\| \\
&\qquad+\left(\overline{\gamma}_1\|\delta\xi\|^2+\frac{\overline{\gamma}_3}{\|\xi_\tau\|}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|+\frac{\overline{\gamma}_5}{\|\xi_\tau\|^2}\|\delta\xi_\tau\|^2\right)\|\Delta\xi_\tau\|
\end{aligned}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma}_0&=\frac{2}{\underline{v}^4}\left(37\overline{c}_1^3+21\overline{c}_1\overline{c}_2\underline{v}+2\overline{c}_3\underline{v}^2\right), & \overline{\gamma}_3&=40\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2\|\xi_\tau\|},\\
\overline{\gamma}_1&=\frac{1}{\underline{v}^3}\left(29\overline{c}_1^2+7\underline{v}\overline{c}_2\right), & \overline{\gamma}_4&=20\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2\|\xi_\tau\|},\\
\overline{\gamma}_2&=\frac{1}{\underline{v}^3}(57\overline{c}_1^2+13\underline{v}\overline{c}_2), & \overline{\gamma}_5&=18\frac{1}{\underline{v}\|\xi_\tau\|^2}.
\end{aligned}
$$

Proof 我们通过相加得到 f 和 f_1 以及 f_2。因此，可以利用（65）、（82）和三角不等式，对 f 的三阶导数进行界定。

$$
\begin{aligned}
&|f'''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \\
\leq\ &\frac{\|\xi_\tau\|}{\underline{v}}\Bigg[\frac{\overline{c}_3}{\underline{v}}\left(1+2\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0}{\underline{v}^2}+2\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}\right)\\
&\quad+6\frac{\overline{c}_1\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(1+1\frac{\overline{\overline{v}}}{\underline{v}}+3\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+6\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+4\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0^2}{\underline{v}^3}+4\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}\right)\\
&\quad+6\frac{\overline{c}_1^3}{\underline{v}^3}\left(1+6\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+4\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0}{\underline{v}^2}+8\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+16\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+8\frac{\overline{\overline{v}}\overline{c}_0^3}{\underline{v}^4}+8\frac{\overline{c}_0^4}{\underline{v}^4}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\Bigg[2\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}\left(2+3\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{v}^2}{\underline{v}^2}+18\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+4\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+14\frac{\overline{c}_0^2\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^4}\right)\\
&\quad+\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\left(1+4\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+4\frac{\overline{v}^2\overline{c}_0}{\underline{v}^3}+4\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\Bigg[4\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}\left(2+4\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}+3\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{v}^2}{\underline{v}^2}+18\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+14\frac{\overline{c}_0^2\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^4}\right)\\
&\quad+2\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\left(1+4\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}}+2\frac{\overline{c}_0^2}{\underline{v}^2}+4\frac{\overline{v}^2\overline{c}_0}{\underline{v}^3}+4\frac{\overline{c}_0^3}{\underline{v}^3}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{8\overline{c}_0\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^3}\left(1+3\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}+2\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^4}\right)\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+\frac{4\overline{c}_0\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^3}\left(1+3\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}+2\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^4}\right)\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{3\overline{\overline{v}}^4}{\|\xi_\tau\|^2\underline{v}^5}\left(1+\frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^2}\right)\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}
$$

利用 $\frac{\overline{c}_v}{\overline{v}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$，我们注意到

$$\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}} \leq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\overline{v}}{\underline{v}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{and} \qquad \frac{\overline{v}}{\underline{v}} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

并得到

$$\begin{aligned}
|f'''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq \frac{\|\xi_\tau\|}{\underline{v}}\Bigg[&\frac{\overline{c}_3}{\underline{v}}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\\
&+6\frac{\overline{c}_1\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\left(\frac{9}{2}+2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\\
&+6\frac{\overline{c}_1^3}{\underline{v}^3}\left(\frac{17}{2}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\Bigg]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\left[\frac{57}{2}\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}+\frac{13}{2}\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\right]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\left[57\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}+13\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\right]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\
&+40\frac{\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^2}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+20\frac{\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^2}\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{135}{8\|\xi_\tau\|^2\underline{v}}\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi_\tau\|,
\end{aligned}$$

将数值向上取整后，得到如下界

$$\begin{aligned}
|f'''[\delta\xi,\delta\xi_\tau]^2[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq \frac{\|\xi_\tau\|}{\underline{v}}&\left[4\frac{\overline{c}_3}{\underline{v}}+42\frac{\overline{c}_1\overline{c}_2}{\underline{v}^2}+74\frac{\overline{c}_1^3}{\underline{v}^3}\right]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\left[29\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}+7\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\right]\|\delta\xi\|^2\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+\frac{1}{\underline{v}}\left[57\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^2}+13\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}}\right]\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\|\\
&+40\frac{\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^2}\|\delta\xi\|\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+20\frac{\overline{c}_1}{\|\xi_\tau\|\underline{v}^2}\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\|\\
&+18\frac{1}{\|\xi_\tau\|^2\underline{v}}\|\delta\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}$$

□

引理10。 设 $\|w(p)\| \leq \overline{c}_0 \leq \overline{v}/\sqrt{5}$， $\|w_x(p)\| \leq \overline{c}_1$，且 $\|w_{xx}(p)\| \leq \overline{c}_2$ 对每个 $p \in \Omega$均成立。此外，设 $\underline{v}^2 := \overline{v}^2 - \overline{c}_0^2$ 且 $\overline{\overline{v}}^2 := \overline{v}^2 + \overline{c}_0^2$。那么，对于任意$\xi \in X$，由 (3) 给出的 f 的二阶方向导数有如下界

$$\begin{aligned}
|f''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq&\overline{\beta}_0\|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| + \overline{\beta}_1\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\|\\
&+\overline{\beta}_1\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\| + \overline{\beta}_2\|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|
\end{aligned}$$

with

$$\overline{\beta}_0 = 14\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3} + 4\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}, \qquad \overline{\beta}_1 = 7\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}, \qquad \overline{\beta}_2 = \frac{4}{\underline{v}}.$$

Proof 将 f_1 与 f_2相加即可得到 f。因此，可利用式（62）、（79）以及三角不等式，给出 f 的二阶导数上界。

$$\begin{aligned}
|f''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq \Bigg[& 8\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2\frac{\overline{c}_0+\overline{\overline{v}}}{\underline{v}^6} + 12\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1^2}{\underline{v}^5} \\
& + 2\frac{\overline{c}_1^2\overline{\overline{v}} + \overline{c}_0\overline{c}_2\overline{\overline{v}} + 3\overline{c}_0\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0^2\overline{c}_2}{\underline{v}^4} \\
& + 2\frac{\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2}{\underline{v}^3} + \frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\Bigg] \|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| \\
& + \left[4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^5} + 2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + 4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3} + \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right] \|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\| \\
& + \left[4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^5} + 2\frac{\overline{c}_0^2\overline{c}_1}{\underline{v}^4} + 4\frac{\overline{c}_0\overline{c}_1}{\underline{v}^3} + \frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\right] \|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\| \\
& + \left[\frac{\overline{\overline{v}}^4}{\underline{v}^5} + \frac{\overline{\overline{v}}^2}{\underline{v}^3}\right] \|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}$$

利用 $\frac{\overline{c}_0}{\overline{\overline{v}}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$，我们注意到

$$\frac{\overline{c}_0}{\underline{v}} \leq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\overline{\overline{v}}}{\underline{v}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{and} \qquad \frac{\overline{v}}{\underline{v}} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

并得到

$$\begin{aligned}
|f''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq & \left[\left(9+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3} + 4\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\right] \|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| \\
& + \frac{13\overline{c}_1}{2\underline{v}^2}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\| \\
& + \frac{13\overline{c}_1}{2\underline{v}^2}\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\| \\
& + \frac{15}{4\underline{v}}\|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}$$

将数值向上取整可得界

$$\begin{aligned}
|f''(\xi,\xi_\tau)[\delta\xi,\delta\xi_\tau][\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| \leq & \left[14\frac{\overline{c}_1^2}{\underline{v}^3} + 4\frac{\overline{c}_2}{\underline{v}^2}\right] \|\xi_\tau\|\|\delta\xi\|\|\Delta\xi\| \\
& + 7\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi\| \\
& + 7\frac{\overline{c}_1}{\underline{v}^2}\|\delta\xi\|\|\Delta\xi_\tau\| \\
& + \frac{4}{\underline{v}}\|\xi_\tau\|^{-1}\|\delta\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\|.
\end{aligned}$$

□

A.2 极小值点邻域中的界

下面我们推导在全局极小点的 L^∞-邻域内成立的界。设 $\chi^{\star\star} = (z^{\star\star}, \lambda^{\star\star})$ 为（6）的全局极小值点及其对应的拉格朗日乘子。此外，设 $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{B}(\chi^{\star\star}, R)$，并定义 $\Delta\chi := \chi_2 - \chi_1$。于是有 $\|\Delta\chi\|_{Y^\infty} \leq 2R$，因此

$$\|\Delta\xi\|_{L^\infty(0,1)} \underset{(22a)}{\leq} 2R, \tag{83}$$

$$\|\Delta\xi_\tau\|_{L^\infty(0,1)} \underset{(22a)}{\leq} 2R. \tag{84}$$

设$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_0$，$\|w_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_1$，$\|w_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_2$，且$\|w_{xxx}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{c}_3$，则有以下界，

$$\|w(\xi_2) - w(\xi_1)\| = |\int_0^1 w_x(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi]d\mu\ | \ \leq \overline{c}_1\|\Delta\xi\| \leq 2R\overline{c}_1, \tag{85}$$

$$\|w_x(\xi_2) - w_{x,}(\xi_1)\| = |\int_0^1 w_{xx}(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi]d\mu\ | \leq \overline{c}_2\|\Delta\xi\| \leq 2R\overline{c}_2, \tag{86}$$

$$\|w_{xx}(\xi_2) - w_{xx}(\xi_1)\| = |\int_0^1 w_{xxx}(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi]d\mu\ | \leq \overline{c}_3\|\Delta\xi\| \leq 2R\overline{c}_3. \tag{87}$$

此外，我们还证明

$$\begin{aligned} |g(\xi_2) - g(\xi_1)| &= |\overline{v}^2 - w(\xi_2)^T w(\xi_2) - \overline{v}^2 + w(\xi_1)^T w(\xi_1)| \\ &= |w(\xi_2)^T w(\xi_2) - w(\xi_1)^T w(\xi_1)| \\ &\leq 2\overline{c}_0\overline{c}_1\|\Delta\xi\| \\ &\leq 4R\overline{c}_0\overline{c}_1 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} |g(\xi_2)^2 - g(\xi_1)^2| &= |(g(\xi_2) - g(\xi_1))(g(\xi_2) + g(\xi_1))| \\ &\leq (2\overline{c}_0\overline{c}_1\|\Delta\xi\|)(2\overline{v}^2) \\ &\leq 4\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^2\|\Delta\xi\| \\ &\leq 8R\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^2 \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned} |g(\xi_2)^3 - g(\xi_1)^3| &= |g(\xi_2) - g(\xi_1)|\ |g(\xi_1)^2 + 2g(\xi_1)g(\xi_2) + g(\xi_2)^2| \\ &\leq (2\overline{c}_0\overline{c}_1\|\Delta\xi\|)(4\overline{v}^4) \\ &\leq 8\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^4\|\Delta\xi\| \\ &\leq 16R\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^4 \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} |g'(\xi_2) - g'(\xi_1)| &= |\int_0^1 g''(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi]d\mu| \\ &\leq 2(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2)\|\Delta\xi\| \end{aligned}$$

$$\leq 4R(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_0\overline{c}_2) \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\|g''(\xi_2) - g''(\xi_1)\| &= |\int_0^1 g'''(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi]d\mu| \\ &\leq 2(3\overline{c}_1\overline{c}_2 + \overline{c}_0\overline{c}_3)\|\Delta\xi\| \\ &\leq 2R(3\overline{c}_1\overline{c}_2 + \overline{c}_0\overline{c}_3)\end{aligned} \tag{92}$$

此外，根据式 F （66）和式（28），我们得到

$$\underline{v}^2(L^{\star\star} - R)^2 \leq \underline{v}^2\|\xi_\tau\|^2 \leq F \leq \|\xi_\tau\|^2\overline{\overline{v}}^2 \leq (L^{\star\star} + R)^2\overline{\overline{v}}^2$$

and

$$\begin{aligned}|F'(\xi,\xi_\tau)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]| &\leq 2\overline{\overline{v}}^2\|\xi_\tau\|\|\Delta\xi_\tau\| + 4\overline{c}_0\overline{c}_1\|\xi_\tau\|^2\|\Delta\xi\| \\ &\leq 2\overline{\overline{v}}^2(L^{\star\star} + R)\|\Delta\xi_\tau\| + 4\overline{c}_0\overline{c}_1(L^{\star\star} + R)^2\|\Delta\xi\|.\end{aligned} \tag{93}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&|F(\xi_2,\xi_{\tau,2})^{1/2} - F(\xi_1,\xi_{\tau,1})^{1/2}| \\ &\qquad\leq \frac{1}{2}|\int_0^1 F(\xi_1 + \mu\Delta\xi)^{-1/2}F'(\xi_1 + \mu\Delta\xi)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]d\mu| \\ &\qquad\leq \frac{\overline{\overline{v}}^2(L^{\star\star} + R)}{\underline{v}(L^{\star\star} - R)}\|\Delta\xi_\tau\| + \frac{2\overline{c}_0\overline{c}_1(L^{\star\star} + R)^2}{\underline{v}(L^{\star\star} - R)}\|\Delta\xi\|\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}&|F(\xi_2,\xi_{\tau,2})^{-1/2} - F(\xi_1,\xi_{\tau,1})^{-1/2}| \\ &\qquad\leq \frac{1}{2}|\int_0^1 F(\xi_1 + \mu\Delta\xi)^{-3/2}F'(\xi_1 + \mu\Delta\xi)d\mu \\ &\qquad\leq \frac{\overline{\overline{v}}^2(L^{\star\star} + R)}{\underline{v}^3(L^{\star\star} - R)^3}\|\Delta\xi_\tau\| + \frac{2\overline{c}_0\overline{c}_1(L^{\star\star} + R)^2}{\underline{v}^3(L^{\star\star} - R)^3}\|\Delta\xi\|\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}&|F(\xi_2,\xi_{\tau,2})^{-3/2} - F(\xi_1,\xi_{\tau,1})^{-3/2}| \\ &\qquad\leq \frac{3}{2}|\int_0^1 F(\xi_1 + \mu\Delta\xi)^{-5/2}F'(\xi_1 + \mu\Delta\xi)d\mu| \\ &\qquad\leq \frac{\overline{\overline{v}}^2(L^{\star\star} + R)}{\underline{v}^5(L^{\star\star} - R)^5}\|\Delta\xi_\tau\| + \frac{2\overline{c}_0\overline{c}_1(L^{\star\star} + R)^2}{\underline{v}^5(L^{\star\star} - R)^5}\|\Delta\xi\|\end{aligned} \tag{96}$$

对于 f_1 如式（48）所定义，我们得到

$$\begin{aligned}&(f_1''(\xi_2,\xi_{\tau,2}) - f_1''(\xi_1,\xi_{\tau,1})))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau] \\ &\quad= -2g(\xi_2)^{-3}(g'(\xi_2)\delta\xi)(\xi_{\tau,2}^T w(\xi_2))(g'(\xi_2)\Delta\xi) \\ &\qquad+ 2g(\xi_1)^{-3}(g'(\xi_1)\delta\xi)(\xi_{\tau,1}^T w(\xi_1))(g'(\xi_1)\Delta\xi)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ g(\xi_2)^{-3} g(\xi_2)(\delta\xi_\tau^T w(\xi_2))(g'(\xi_2)\Delta\xi) \\
&- g(\xi_1)^{-3}(\delta\xi_\tau^T w(\xi_1))(g'(\xi_1)\Delta\xi) \\
&+ g(\xi_2)^{-3}(\xi_{\tau,2}^T w_x(\xi_2)\delta\xi)(g'(\xi_2)\Delta\xi) \\
&- g(\xi_1)^{-3}(\xi_{\tau,1}^T w_x(\xi_1)\delta\xi)(g'(\xi_1)\Delta\xi) \\
&+ g(\xi_2)^{-3}(\xi_{\tau,2}^T w(\xi_2))(\Delta\xi^T g''(\xi_2)\delta\xi) \\
&- g(\xi_1)^{-3}(\xi_{\tau,1}^T w(\xi_1))(\Delta\xi^T g''(\xi_1)\delta\xi) \\
&+ g(\xi_2)^{-3}(g'(\xi_2)\delta\xi)(\xi_{\tau,2}^T w_x(\xi_2)\Delta\xi) \\
&- g(\xi_1)^{-3}(g'(\xi_1)\delta\xi)(\xi_{\tau,1}^T w_x(\xi_1)\Delta\xi) \\
&- g(\xi_2)^{-3}(\delta\xi_\tau w_x(\xi_2)\Delta\xi) \\
&+ g(\xi_1)^{-3}(\delta\xi_\tau w_x(\xi_1)\Delta\xi) \\
&- g(\xi_2)^{-3} w_{xx}(\xi_2)[\xi_{\tau,2}, \Delta\xi, \delta\xi] \\
&+ g(\xi_1)^{-3} w_{xx}(\xi_1)[\xi_{\tau,1}, \Delta\xi, \delta\xi] \\
&+ g(\xi_2)^{-3}(g'(\xi_2)\delta\xi)(w(\xi_2)^T\Delta\xi_\tau) \\
&- g(\xi_1)^{-3}(g'(\xi_1)\delta\xi)(w(\xi_1)^T\Delta\xi_\tau) \\
&- g(\xi_2)^{-3}(\Delta\xi_\tau^T w_x(\xi_2)\delta\xi) \\
&+ g(\xi_1)^{-3}(\Delta\xi_\tau^T w_x(\xi_1)\delta\xi)
\end{aligned}
$$

利用上述界，我们最终得到

$$
\begin{aligned}
&\left| \left(f_1''(\xi_2, \xi_{\tau,2}) - f_1''(\xi_1, \xi_{\tau,1})\right)[\Delta\xi, \Delta\xi_\tau][\delta\xi, \delta\xi_\tau] \right| \\
&\qquad \leq \hat{\beta}_1 R \sqrt{\|\Delta\xi\|^2 + \|\Delta\xi_\tau\|^2} \sqrt{\|\delta\xi\|^2 + \|\delta\xi_\tau\|^2} \qquad (97)
\end{aligned}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 = \frac{4}{\underline{v}^{12}} \big(&5 + 80\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^4 + 8\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^2 + 12\overline{c}_0\overline{c}_1 + 16\overline{c}_0\overline{c}_2 + 4\overline{c}_0\overline{c}_3 \\
&+ 16\overline{c}_1^2 + 12\overline{c}_1\overline{c}_2 + 4\overline{c}_1 + 4\overline{c}_2 + 2\overline{c}_3\big). \qquad (98)
\end{aligned}
$$

对于 f_2，根据式（50）的定义，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(f_2''(\xi_2, \xi_{\tau,2}) - f_2''(\xi_1, \xi_{\tau,1}))[\Delta\xi, \Delta\xi_\tau][\delta\xi, \delta\xi_\tau] \\
&\quad = 2g(\xi_2)^{-3}(g'(\xi_2)\delta\xi)(g'(\xi_2)\Delta\xi)F(\xi_2)^{1/2} \\
&\qquad - 2g(\xi_1)^{-3}(g'(\xi_1)\delta\xi)(g'(\xi_1)\Delta\xi)F(\xi_1)^{1/2} \\
&\qquad - g(\xi_2)^{-2}(\Delta\xi^T g''(\xi_2)\delta\xi)F(\xi_2)^{1/2} \\
&\qquad + g(\xi_1)^{-2}(\Delta\xi^T g''(\xi_1)\delta\xi)F(\xi_1)^{1/2} \\
&\qquad - \frac{1}{2} g(\xi_2)^{-2}(g(\xi_2)'\Delta\xi)F(\xi_2)^{-1/2}F'(\xi_2)[\delta\xi, \delta\xi_\tau]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}g(\xi_1)^{-2}(g(\xi_1)'\Delta\xi)F(\xi_1)^{-1/2}F'(\xi_1)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g(\xi_2)^{-2}(g'(\xi_2)\delta\xi)F(\xi_2)^{-1/2}F'(\xi_2)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{2}g(\xi_1)^{-2}(g'(\xi_1)\delta\xi)F(\xi_1)^{-1/2}F'(\xi_1)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{2}g(\xi_2)^{-1}F(\xi_2)^{-1/2}F''(\xi_2)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{2}g(\xi_1)^{-1}F(\xi_1)^{-1/2}F''(\xi_1)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&-\frac{1}{4}g(\xi_2)^{-1}F(\xi_2)^{-3/2}F'(\xi_2)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]F'(\xi_2)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]\\
&+\frac{1}{4}g(\xi_1)^{-1}F(\xi_1)^{-3/2}F'(\xi_1)[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau]F'(\xi_1)[\delta\xi,\delta\xi_\tau]
\end{aligned}
$$

利用上述界限，可得

$$
\begin{aligned}
&|(f_2''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f_2''(\xi_1,\xi_{\tau,1}))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]|\\
&\qquad\le\hat{\beta}_2R\sqrt{\|\Delta\xi\|^2+\|\Delta\xi_\tau\|^2}\sqrt{\|\delta\xi\|^2+\|\delta\xi_\tau\|^2}
\end{aligned}\tag{99}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_2\le\frac{4}{\underline{v}^{12}}\Bigg[&20+10\overline{c}_1+7\overline{c}_2+\overline{c}_3+10\overline{c}_0\overline{c}_1+36\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^2+88\overline{c}_0\overline{c}_1\overline{v}^4\\
&+20\overline{c}_0\overline{c}_2+8\overline{c}_0\overline{c}_3+20\overline{c}_1^2+24\overline{c}_1\overline{c}_2\\
&+\left(\frac{3}{\underline{v}(L^{\star\star}-R)}+\frac{6}{\underline{v}^3(L^{\star\star}-R)^3}+\frac{6}{\underline{v}^5(L^{\star\star}-R)^5}\right)\\
&\left(\overline{\overline{v}}^2(L^{\star\star}+R)+2\overline{c}_0\overline{c}_1(L^{\star\star}+R)^2\right)\Bigg].
\end{aligned}\tag{100}
$$

引理16。设 $\xi^{\star\star}$，$L^{\star\star}$ 是(6)的全局极小值点。此外，设 ξ_1,ξ_2 满足 $\|\xi_i-\xi^{\star\star}\|_{C^{0,1}(0,\ 1)}\le R$，并定义 $\Delta\xi:=\xi_1-\xi_2$。那么存在一个 $\mathcal{B}<\infty$，使得

$$
\begin{aligned}
&|(f''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f''(\xi_1,\xi_{\tau,1}))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]|\\
&\qquad\le\hat{\mathcal{B}}R\sqrt{\|\Delta\xi\|^2+\|\Delta\xi_\tau\|^2}\sqrt{\|\delta\xi\|^2+\|\delta\xi_\tau\|^2}.
\end{aligned}\tag{101}
$$

Proof 结合（97）和（99），我们得到

$$
\begin{aligned}
&|(f''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f''(\xi_1,\xi_{\tau,1}))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]|\\
&\qquad\le|(f_1''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f_1''(\xi_1,\xi_{\tau,1}))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]|\\
&\qquad\quad+|(f_2''(\xi_2,\xi_{\tau,2})-f_2''(\xi_1,\xi_{\tau,1}))[\Delta\xi,\Delta\xi_\tau][\delta\xi,\delta\xi_\tau]|
\end{aligned}
$$

40 用于全局自由飞行轨迹优化的牛顿法 n

$$\leq \hat{\mathcal{B}} R \sqrt{\|\Delta\xi\|^2 + \|\Delta\xi_\tau\|^2} \sqrt{\|\delta\xi\|^2 + \|\delta\xi_\tau\|^2}$$

其中 $\hat{}_{\mathcal{B}} = \hat{}_{\beta_1} + \hat{}_{\beta_2}$。 □

此图“orcid.png”可从以下位置获取“png”格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.04748v2