arXiv:2302.04767v1 [math.OA] 9 Feb 2023

次齐次算子系统与由 Λ-交换酉算子生成的算子系统分类

RAN KIRI

Abstract. 一个单位的 C^*-代数称为 N-次齐性的，如果它的不可约表示都是有限维的，且维数至多为 N。我们将这一概念推广到算子系统，以边界表示取代不可约表示。具体而言，我们考察与算子系统相关联的矩阵态空间，并将边界表示认定为绝对矩阵极端点。我们证明，两个 N-次齐次算子系统完全序等价，当且仅当它们N-序等价。此外，我们证明，映入有限维 N- N-正算子系统的单位的正映射是完全正的。我们运用这些工具，对成对的 q-交换酉元按 $*$-同构进行分类。对于与高维非交换环面相关的算子系统，也可得到类似结果。

1. Introduction and preliminaries

1.1. 引言。设 q、q' 是模为 1 的两个复数，并设 (u, v)、(u', v') 分别是两对 q-交换酉算子和 q'-交换酉算子。若 $\phi : C^*(u, v) \to C^*(u', v')$ 是一个 $*$-同态，且 $\phi(u) = u'$、$\phi(v) = v'$，则可得 $q = q'$。因此，除非 $q = q'$，否则不存在能将一对 q-交换酉算子映射为一对 q'-交换酉算子的 $*$-同态。

现在，考虑由这类酉元生成的算子系统 $\mathcal{S}(u, v)$ 和 $\mathcal{S}(u', v')$。可以证明（见下文定理 4.9），从 $\mathcal{S}(u, v)$ 到 $\mathcal{S}(u', v')$ 的含幺完全正映射，若同时将 $u \mapsto u'$,$v \mapsto v'$ 映射为 $*$，则可延拓为从 $C^*(u, v)$ 到 $C^*(u', v')$ 的 $*$-同态。因此，只要存在这样的映射，就有 $q = q'$。

这就引出了一个自然的问题。保单位正映射 $u \mapsto u' \, v \mapsto v'$ 的存在是否已经意味着 $q = q'$? 或者，仅仅是正映射可能还不够，但 n-正映射是否可以做到? 更一般地说，我们要问： n-序结构何时能够编码算子系统完全序结构的全部信息。

对于算子系统作用于有限维空间的情形，我们知道这个问题的答案。当 $\mathcal{S}$ 作用于一个 $N_{\mathcal{S}}$ 维空间上时，Choi 证明了（见定理 1.3 ），任意从 $N_{\mathcal{S}}$ 到 $\mathcal{S}$ 的 $N_{\mathcal{S}}$- 正映射都是完全正的。特别地，如果 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{R}$分别作用于维数为 $N_{\mathcal{S}}$ 和 $N_{\mathcal{R}}$ 的有限维空间上，那么我们得到，一个极大$\{N_{\mathcal{S}}, N_{\mathcal{R}}\}$-序同构是完全序同构。然而，也存在无法忠实表示在有限维空间上的算子系统。

本文表明，上述问题的答案与次齐性 C^*-代数的概念，以及这一概念向算子系统的推广有关。回顾一下，若一个单位的 C^*-代数的不可约表示

2010年数学主题分类。47A13，46L07。关键词和短语。矩阵态空间、矩阵值域、非交换环面。

均为有限维且维数至多为 n，则称其为 n-次齐性的；若它对某个 $n \in \mathbb{N}$ 都是 n-次齐性的，则称其为次齐性的。我们将在定理 3.1 中证明，若一个 C^*-代数所对应的矩阵态空间 UCP($\mathcal{S}$) 的矩阵极端点都处于不超过 n 的层级，则该代数是次齐性的。受这一结果启发，我们定义了 n-次齐性算子系统，将不可约表示替换为有限维边界表示。

利用这一框架，我们在定理 4.2 中证明，n-序同构在 $N_{\mathcal{S}}$ 次齐性和 $N_{\mathcal{R}}$ 次齐性的算子系统之间（满足 $N_{\mathcal{S}}$、$N_{\mathcal{R}} \leq n$）是完全序同构，从而证明，对于具有 $N \leq n$ 的 N 次齐性算子系统，n-序结构确实编码了完全序结构。此外，我们证明，映入有限维 n 次齐性算子的一个单位的 n-正映射是完全正的，从而将 Choi 定理推广了出去。

随后，我们考察由酉元生成的有限维算子系统。我们将在定理 4.11 中证明，生成具有 $N_{\mathbf{s}}$、$N_{\mathbf{r}} \leq n$ 的 $N_{\mathbf{s}}$ 次齐性和$N_{\mathbf{r}}$ 次齐性算子系统的两个 d-酉元组是 n-序等价的，当且仅当它们生成同构的 C^*-代数。

在第 5 节中，我们回到关于 q-交换酉元的动机性问题。对于$\mathcal{S} = \mathcal{S}(u, v)$，我们根据 $\mathcal{S}$ 的边界表示，给出了 UCP ($\mathcal{S}$) 中矩阵极端点的刻画，并证明当 q 具有如下形式：对于 $(k, n) = 1$，$e^{2\pi i \frac{k}{n}}$，$\mathcal{S}$ 是n 次齐性的；而当 $q = e^{2\pi i\theta}$ 满足 $\theta \in [0, 1] \notin \mathbb{Q}$ 时，UCP ($\mathcal{S}$) 不是次齐性的（见定理 5.3 和 5.5）。

因此，我们得出：若 (u, v) 是一对 q-交换酉算子，且 (u', v') 是一对 $q' = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$-交换酉算子，那么，如果存在一个单位的 n-正映射将 (u, v) 映至 (u', v')，则可推出 $q = q'$，并且该映射实际上是完全正的（这就是定理 5.6）。定理 5.9 和定理 5.10 中还给出了关于高维非交换环面的类似结果。

我们得到的结果表明，在某些情况下，存在 n-序同构就意味着存在完全序同构。自然会产生这样的问题：n 最低可以取到多少？在第 6 节中，我们探讨存在单位等距映射（它尤其是一种序同构）是否意味着存在完全序等价。我们给出了一族 $q = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$-交换酉算子的例子，它们与一对 $q = e^{2\pi i \frac{n-k}{n}}$ -交换酉算子等距同构（尽管它们并非 n-序同构）。

1.2. 正映射与序同构。给定一个含单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$，我们称$\mathcal{S}$ 为算子系统，若它包含单位元且在 $*$-运算下封闭。给定 $\mathcal{A}$中的元素元组 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$，我们用 $\mathcal{S}(\mathbf{s})$ 表示由 $\mathbf{s}$ 生成的算子系统。$\mathcal{S}$上有一种自然的偏序：当且仅当 $s - s'$ 在 $\mathcal{A}$中为正时，$s \geq s'$；我们将其称为 $\mathcal{S}$上的序结构或 1-序结构。将 $\mathcal{A}$ 视为某个 $\mathcal{H}$下 $B(\mathcal{H})$ 的子代数，我们可以在 $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$上赋予来自$\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H}^n)$的序结构，其中 $\mathcal{H}^n$ 是 $\mathcal{H}$ 的 n重直和。这使我们能够定义 $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$中元素的正性，因而也能定义 $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$中元素的正性。我们将赋予 $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$的偏序称为 $\mathcal{S}$的 n-序结构。我们将 $\mathcal{S}$ 上的所有 n-序结构统称为完全序结构。

对于两个算子系统 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 以及一个线性映射 $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$，我们可以通过逐项作用定义 $\phi_n : \mathbb{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{R})$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立；也就是说，对所有 $(s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathcal{S})$，有 $\phi_n(s_{ij}) = (\phi(s_{ij}))$。

如果只要 $\phi(s)$ 在 $\mathcal{R}$ 中为正（每当 s 在 $\mathcal{S}$ 中为正时），我们就称 ϕ 为正的。我们还称 ϕ 为 n-正的，如果 ϕ_n 是正映射；如果 ϕ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都是 n-正的，则称其为完全正。注意， n-正映射恰好是保持 $\mathcal{S}$ 的 n-序结构的映射。

完全正映射通过其生成的C^*代数，自然地出现在算子系统的研究中。例如，给定包含于某个C^*代数 $\mathcal{A}$中的算子系统 $\mathcal{S}$，以及一个到某个 C^*代数 $\mathcal{B}$的 $*$同态 $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，我们知道其限制 $\pi|_{\mathcal{S}}$ 是一个完全正映射。若假设 $\mathcal{S} \subset B(\mathcal{H})$ $\mathcal{R} \subset B(\mathcal{K})$，其中 $\mathcal{H}$、$\mathcal{K}$是希尔伯特空间，那么任意算子 $V: \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ 都会诱导一个完全正映射$\phi_V: \mathcal{S} \to B(\mathcal{K})$，其定义为 $\phi(s) = V^* s V$。事实上，对于算子系统 $\mathcal{S}$，应用 [1,定理 1.2.3] 和 [20, 定理 1] 可知，任意完全正映射 $\phi: \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$都具有如下形式： $\phi = V^* \pi|_{\mathcal{S}}(\cdot)V$，其中 $\pi: C^*(\mathcal{S}) \to B(\mathcal{H}')$ 是一个 $*$同态，希尔伯特空间为 $\mathcal{H}'$，且 $V: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ 是一个有界算子。

对于不是完全正的 n-正映射，我们没有这样的刻画，而且这些映射似乎“遗漏”了 $\mathcal{S}$ about $C^*(\mathcal{S})$ 中编码的某些 C^*-代数结构。

定义 1.1. 设 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 是两个算子系统，且 $\phi: \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ 是一个单位的线性映射。我们称:

如果 ϕ 是双射，且 ϕ、ϕ^{-1} 都是正映射，则称 $\bullet$ ϕ 是序同构。
如果 ϕ 是双射，且 ϕ、ϕ^{-1} 都是 n-正映射，则称 $\bullet$ ϕ 是 n-序同构。
如果对于所有 n，$\bullet$ ϕ 都是 n-序同构，则称 $\bullet$ ϕ 是完全序同构。

如果存在它们之间的序同构/n-序同构/完全序同构，则称 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 序同构/n-序同构/完全序同构。

定义 1.2. 设 s, r 是 d-元组，分别生成算子系统 $\mathcal{S}, \mathcal{R}$。我们称:

- s, r 是序/n-序/完全序等价的，当且仅当存在 $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ 之间的序/n-序/完全序同构 s_i，使得对所有 i，s_i 将 s_i 映射到 r_i。
- s, r 是 $*$-同构的，当且仅当存在 $C^*(\mathcal{S})$ $C^*(\mathcal{R})$的 $*$-同构 s_i，使得对所有 i， s_i将 s_i映射到r_i。

众所周知，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在不是完全正的 n-正映射。事实上，若 $N > n$，映射 $\phi^{(n)}: \mathbb{M}_N \to \mathbb{M}_N$ 由 $\phi^{(n)}(A) = n\mathrm{tr}(A) I_N - A$ 给出，它是一个 n-正映射，但不是完全正的（证明见 [21]）。

注意，若 $\pi: C^*(\mathcal{S}) \to \mathcal{A}$ 是一个 $*$-同态，则 $\pi|_{\mathcal{S}}$ 是一个完全正映射。这意味着可以将 $\pi|_{\mathcal{S}}$ 延拓到它生成的代数上，得到一个同时也是乘法的完全正映射。尽管任何完全正映射都可以从一个算子系统延拓到它所生成的 C^*-代数上，但这种延拓未必是乘法的。

本文研究 n 序结构在多大程度上决定完全序结构（以及可能的 C^* 代数结构）。下述定理展示了一个 n 序结构确实决定完全序结构的情形。

定理 1.3（定理 5, [4]）。设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位的 C^*-代数，且 $\phi: \mathcal{A} \to \mathbb{M}_n$ 是n-正的。那么， ϕ 是完全正的。

仔细考察证明可知，如果将 $\mathcal{A}$ 替换为算子系统 $\mathcal{S}$，这一结论仍然成立。因此，如果 $\mathcal{S} \subset \mathbb{M}_n$ 和 $\mathcal{R} \subset \mathbb{M}_m$ 是作用在有限维空间上的两个算子系统，那么满足 begin max $\{n, m\}$-序同构等价于完全序同构。这是这样一种情形：某个（可能很大的） N所对应的 N-序结构编码了完全序结构。在第 3 节中，我们将给出这一现象的一般化。

1.3. 矩阵凸集和矩阵极端点。

定义 1.4. 设 V 为一个向量空间。 V 上的矩阵凸集是由$K = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 个子集 $K_n \subset \mathbb{M}_n(V)$组成的集合，满足：

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* v_i \gamma_i \in K_n \tag{1}$$

对于所有 $v_i \in K_{n_i}$和 $\gamma_i \in \mathbb{M}_{n_i,\ n}$对于 $i = 1$、.....、 k，均满足 $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \gamma_i = \mathbb{1}_n$。

(1)中的和称为矩阵凸组合。当对于所有 i γ_i 都是满射时（特别地， $n_i \leq n$），我们称该矩阵凸组合是适当的。

当 V是一个局部凸向量空间时，如果每个 K_n 在积拓扑下的 $\mathbb{M}_n(V)$ 中都是紧的，我们也称 $K =(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为紧矩阵凸集。

以下是紧矩阵凸集的两个主要例子：第一个与一个算子系统相关，第二个与一个 d-算子元组相关。

定义 1.5. 设 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统。 $\mathcal{S}$ 的矩阵态空间是 UCP $(\mathcal{S})$ $=$(UCP $(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的集合，其中：

$$\mathrm{UCP}\,(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n) = \{\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{M}_n | \phi \text{ is UCP}\}.$$

注意，UCP($\mathcal{S}$) 是 $\mathcal{S}^*$ 上的矩阵凸集，并且是紧的（参见 [1] 中引理 1.2.4 的证明）。

定义 1.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个单位的 C^*-代数，并设 s $= (s_1, \ldots, s_d) \in \mathcal{A}^d$ 是一个 d-元组。s 的矩阵值域是 $\mathcal{W}$ (s) $= (\mathcal{W}_n(\mathrm{s}))_{n\in\mathbb{N}}$ 的集合，其中：

$$\mathcal{W}_n\,(\mathrm{s}) = \{(\phi(s_1), \ldots, \phi(s_d)) | \phi \in \mathrm{UCP}\,(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n)\}$$

这是 $\mathbb{C}^d$ 上的一个矩阵凸集。矩阵值域是 $\mathbb{C}$ 上紧矩阵凸集的典型形式（见 [16, 命题 31]）。以下定理表明，矩阵值域与 n-序以及 d-元组的完全序等价有关。由于本定理将在本文中被广泛使用，我们也在此给出。

定理 1.7（定理 5.1, [5]）。设 s $\in B(\mathcal{H})^d$、r $\in B(\mathcal{H})^d$ 是 d-元算子元组。

(1) 给定 $n \in \mathbb{N}$，如果存在一个单位的 n-正映射 $\phi : \mathcal{S}$(s) $\to \mathcal{S}$(r)，将 s 映射为 r，那么 $\mathcal{W}_n$(r) $\subset \mathcal{W}_n$(s)。(2) 存在酉完全正映射 ϕ: $\mathcal{S}$(s) $\to \mathcal{S}$(r)，将 s 映射为 r，当且仅当 $\mathcal{W}$ (r) $\subset \mathcal{W}$(s)。如果 s 是两两对易的正规算子元组，则此包含关系等价于 σ(r) $\subset \mathcal{W}_1$(s)，而这也等价于 $\mathcal{W}_1$ (r) $\subset \mathcal{W}_1$ (s)。(3) 存在一个单位且完全等距的映射 ϕ: $\mathcal{S}$(s) $\to \mathcal{S}$(r)，将 s 映射为 r，当且仅当 $\mathcal{W}$(s) $= \mathcal{W}$(r)。

定义 1.8。设 $K=(K_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $L=(L_n)_{n=1}^{\infty}$ 是分别定义在向量空间 V 和 W 上的两个矩阵凸集。一个从 K 到 L 的矩阵仿射映射是由一族 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ 映射 $\theta_n: K_n \to L_n$ 组成，满足：

$$\theta_n\left(\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^* v_i \gamma_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^*\theta_{n_i}(v_i)\gamma_i$$

对所有 $v_i \in K_{n_i}$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{M}_{n_i,\ n}$ 对于满足 $\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^*\gamma_i=\mathbb{1}_n$ 的 $i=1,\ldots,k$。当 V, W 都是拓扑向量空间时，如果对所有 $n\in\mathbb{N}$，θ_n 都是连续的，我们就称 $\boldsymbol{\theta}$ 是连续的。若每个 θ_n 都是同胚，则称这样的映射为矩阵仿射同胚。

例 1.9. 设 s 是一个 d元组，并令 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathrm{s})$ 为它们生成的算子系统。映射 $\theta_n: \mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_n) \to \mathcal{W}_n(\mathrm{s})$ 构成的集合 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$，由 $\theta_n(\phi)=(\phi(s_1)\ldots,\phi(s_d))$ 定义，是一个矩阵仿射同胚。事实上，根据 $\mathcal{W}(\mathrm{s})$ 的定义，它是满射；又由于正映射是自伴的，因此它是单射，这意味着任意$\phi\in\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_n)$ 都由 $\phi(s_i)$ 对所有 i的取值唯一确定。最后，θ_n 是连续的，因为 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_n)$ 上诱导的拓扑是弱*拓扑，这意味着 ϕ_m收敛到 ϕ 当且仅当 $\phi_m(s)$ 在 $\mathbb{M}_n$ 中收敛到 $\phi(s)$，对所有 $s\in\mathcal{S}$均如此；这尤其意味着，对于所有 i，$\phi_m(s_i)$ 收敛到 $\phi(s_i)$（因此 $\theta_n(\phi_m)$ 收敛到 $\theta_n(\phi)$）。θ_n 是从紧空间到豪斯多夫空间的连续双射，因此 θ_n^{-1}也是连续的。

这表明，在研究由算子元组 d 生成的算子系统时，我们可以在这两种视角之间切换。

给定一个紧矩阵凸集 $K=(K_n)_{n=1}^{\infty}$，$A(K)$ 表示所有函数 $F=(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 的集合，其中 $F_n: \mathbb{M}_n(K) \to \mathbb{M}_n$，且 F_1 连续，F 矩阵仿射，具体而言：

$$F_n\left(\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^* v_i \gamma_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^* F_{n_i}(v_i)\gamma_i,$$

对每个 $v_i\in K_{n_i}$、$\gamma_i\in\mathbb{M}_{n_i,\ n}$，使得 $\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^*\gamma_i=\mathbb{1}_n$。在引出命题 3.5], 的讨论中，已证明 $A(K)$ 可以赋予抽象算子系统的结构。下面的命题揭示了算子系统的矩阵态空间与其完全序结构之间的深刻联系。

命题 1.10（命题 3.5, [22]）。(1) 若 $\mathcal{R}$ 是算子系统，则酉完全正 $(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}^*$ 中一个带有弱*拓扑的自伴紧矩阵凸集，并且 A(酉完全正 $(\mathcal{R})$) 与 $\mathcal{R}$ 作为算子系统同构。(2) 若 $K=(K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是局部凸空间 V 中的一个紧矩阵凸集，则 $A(K)$ 是一个算子系统，并且 K 与酉完全正 $(A(K))$ 作为算子系统矩阵仿射同胚。

我们还将使用命题中出现的特定同构。集合 $A(K)$ 带有一个正锥，其中 F 是正的，当且仅当对于所有 $n\in\mathbb{N}$、$v\in K_n$，$F_n(v)$ 都是正的。对于 $A(\mathrm{UCP}(\mathcal{S}))$ 和 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 与 $A(\mathrm{UCP}(\mathcal{S}))$ 之间的完全序同构由映射 $s\mapsto\delta_{\mathcal{S}}=((\delta_{\mathcal{S}})_n)_{n=1}^{\infty}$ 实现，其中：

$$(\delta_{\mathcal{S}})_n(\phi)=\phi(s)$$

对所有 $\phi\in\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_n)$ 均成立。这为我们通过其矩阵态空间研究 $\mathcal{S}$ 提供了一种具体方法。

当我们将视角从一个算子系统转向其矩阵态空间时，可以利用矩阵凸集理论对其进行研究。特别是在第2节中，我们利用 UCP $(\mathcal{S})$ 中的特殊点——矩阵极端点——来研究 UCP $(\mathcal{S})$ 的结构。

定义 1.11. 设 $K =(K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个矩阵凸集，并设 $v \in K_n$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。若每当 v 是 K 中的矩阵凸组合且为真矩阵凸组合时：

$$v = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* v_i \gamma_i$$

则对于所有 i、$n_i = n$ 和 $v = u_i^* v_i u_i$，存在某个酉算子 $u_i \in \mathbb{M}_n$。

我们记作 $\partial K = (\partial K_n)_{n=1}^{\infty}$，表示 K_n 中所有 $n \in$ 的矩阵极端点集合 $\mathbb{N}$.

Webster 和 Winkler 在 [22, 定理 4.3] 中证明了 Krein-Milman 定理的一个类似结果，适用于紧矩阵凸集中的矩阵极端点：任何紧矩阵凸集都是其矩阵极端点的闭矩阵凸包。从这个意义上说，矩阵极端点类似于局部凸向量空间中的极端点。 [8], 中还引入了一种更强的矩阵极端点概念，称为绝对矩阵极端点。

定义1.12. 设 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是矩阵凸的，并且对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $v \in K_n$。如果 v 是一个矩阵凸组合（不一定是正规的）：那么我们称 v 是 K 中的一个绝对矩阵极端点。

$$v = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* v_i \gamma_i$$

使得 γ_i 都非零，那么对于所有 i：

- 如果 $n_i \leq n$，那么对于某个酉 $u_i \in \mathbb{M}_n$，有 $n_i = n$ 和 $v = u_i^* v_i u_i$。
- 如果 $n_i > n$，那么存在某个 $w_i \in K_{n_i - n}$，使得对于某个酉 $u_i \in K_{n_i}$，有 $v_i = u_i^*(v \oplus w_i)$ u_i。

K 中绝对矩阵极端点的集合记作 Abex(K)。

换言之，矩阵极端点是指不能通过下方的矩阵组合（除平凡方式外）表示的点，而绝对矩阵极端点是指不能通过上方或下方的矩阵组合（除平凡方式外）表示的点。显然，绝对矩阵极端点必然是矩阵极端点。

与矩阵极端点不同，对于任意紧矩阵凸集，绝对矩阵极端点都无法很好地推广克莱因–米尔曼定理。事实上，存在不含任何绝对矩阵极端点的紧矩阵凸集（见 [15,例6.30], 以及定理5.5）。但正如我们将在第2节看到的，考虑某个算子系统 $\mathcal{S}$上的酉完全正映射（ UCP）（$\mathcal{S}$）时，矩阵极端点就是纯酉完全正映射，而绝对矩阵极端点则是 $\mathcal{S}$的边界表示的限制，因此更容易识别。

2. Matrix extreme points in compact matrix convex sets

本节证明以下定理：

定理 2.1. 设 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统，且 $\mathcal{A} = C^*(\mathcal{S})$。点 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n)$ 是 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 的绝对矩阵极端点，当且仅当它可以扩张为 $\mathcal{A}$ 上的一个边界表示。

文献中已有若干针对该结果特例的证明。[15, Corollary 6.28], 给出了由自伴矩阵生成的算子系统对应定理的证明；[14, Theorem 4.2], 则给出了适用于一般紧矩阵凸集的该定理的一个版本，K 其中 $A(K)$ 作用于有限维空间。另一个矩阵版本见 [8,Theorem 3. 10]。

在进入证明之前，我们需要先介绍一些术语。回顾一下，若一个酉完全正映射$\phi\colon \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ 满足：每当 ψ 是一个完全正映射，且 $\phi - \psi$ 是完全正映射时，就有 $\psi = t\phi$，其中 $t \in [0,1]$，则称其为纯映射。给定某个 $s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H}$，若对任意 $\phi(\cdot) = V^*\psi(\cdot)V$，只要 $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 是等距算子，且 $\psi \in$ 是酉完全正 $(\mathcal{S}, B(\mathcal{K}))$，便有 $\|\phi(s)h\| = \|\psi(s)Vh\|$，则称酉完全正映射 $\phi\colon \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ 在 (s,h) 处是极大的。在每个 $(s,h) \in \mathcal{S} \times \mathcal{H}$处都极大的酉完全正映射称为极大映射。注意，当且仅当对某个等距算子 $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$，只要 $\phi(\cdot) = V^*\psi(\cdot)V$，就存在某个酉完全正 $\rho\colon \mathcal{S} \to B((V\mathcal{H})^\perp)$，使得 $\psi(\cdot) = V\phi(\cdot)V^* \oplus \rho(\cdot)$ 时，ϕ 才是极大的。

若一个酉完全正映射 $\phi : \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ 存在唯一的酉完全正延拓到某个 $\Phi : C^*(\mathcal{S}) \to B(\mathcal{H})$，且 Φ 是乘法的，则称其具有唯一扩张性质。最后，我们称一个 $*$-表示 $\pi : C^*(\mathcal{S}) \to B(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{S}$ 的边界表示，如果它是不可约的，且 $\pi|_{\mathcal{S}}$ 具有唯一扩张性质。

现在我们将陈述一些已知结果，这些结果将在我们的证明中用到。

定理 2.2（定理 B，[9]）。设 $\mathcal{S}$ 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$中的一个算子系统。则：

(1) 矩阵态 ϕ 在 $\mathcal{S}$ 上是 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 的矩阵极端点，当且仅当 ϕ 是纯的。(2) 每个纯酉完全正映射 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 都可延拓为纯映射 $\Phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A})$。

以下命题归功于 Farenick 和 Tessier，它表明边界表示的限制始终是纯的，因而是矩阵极端的：

命题 2.3（命题 2.12, [10]）。设 $\mathcal{A}$ 是由算子系统 $\mathcal{S}$ 生成的单位的 C^*-代数，且 $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ 是 $\mathcal{S}$的边界表示。那么，$\pi|_{\mathcal{S}}$ 是纯的。

下一步是证明边界表示的限制是极大的。Dritschel 和 McCullough 在[7, 定理 1.1] 中，在算子代数的背景下提出了这一观察（他们继承了 Muhly 和 Solel 的工作，见 [17, 定理 1.2]）。在算子系统的背景下，以下改述归功于 Arveson。

命题 2.4（命题 2.4, [2]）。设 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统，且 $\mathcal{A} = C^*(\mathcal{S})$。那么，映射 $\phi\colon \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ 是极大的，当且仅当它具有唯一扩张性质。

现在我们可以开始证明本节的主要定理。

定理 2.1 的证明。假设 ϕ 可扩展为 $\mathcal{A}$ 的边界表示，并且假设

$$\phi = \sum_i \gamma_i^* \phi_i \gamma_i$$

是一个矩阵凸组合，其中对所有 i，γ_i 均非零。对于每个 i，我们得到 $\phi - \gamma_i^*\phi_i\gamma_i$ 是完全正的。根据命题 2.3，ϕ 是纯的，这意味着存在某个

$t \in (0,1]$ 使得 $\gamma_i^* \phi_i \gamma_i = t\phi$，由此可得

$$\left(t^{-\frac{1}{2}}\gamma_i\right)^* \phi_i \left(t^{-\frac{1}{2}}\gamma_i\right) = \phi.$$

ϕ和 ϕ_i均为酉完全正映射，因此 $\left(t^{-\frac{1}{2}}\gamma_i\right)^* \left(t^{-\frac{1}{2}}\gamma_i\right) = \mathbb{1}_n$；于是每当 $n_i \leq n$时，我们便有 $n_i = n$ ，且该矩阵是酉矩阵。当 $n_i > n$时，我们得到 ϕ_i 是 ϕ的膨胀；又由于 ϕ 具有唯一扩张性质（因为它是边界表示），命题 2.4 蕴含 ϕ_i与某个 $\rho_i \in$酉完全正映射 $(\mathcal{S}, \mathbb{M}_{n_i - n})$ $\phi \oplus \rho_i$酉等价。因此， ϕ是一个绝对矩阵极端点。

至于反向，注意到若 ϕ 是一个绝对矩阵极端点，则由定理 2.2 可知它是纯的。根据 [6, 引理 2.1], ，只需证明 ϕ是极大的，即可完成证明。假设它不是极大的，我们应用 [6, 引理 2.3], ，得到某个纯酉完全正映射 $\psi \in$酉完全正映射 $(\mathcal{S}, \mathbb{M}_{n+1})$，使得 $\phi = V^* \psi V$。由于这是一个矩阵凸组合，且 ϕ是一个绝对矩阵极端点，因此对于某个酉矩阵 U和某个态 $\rho \in$酉完全正映射 $(\mathcal{S}, \mathbb{C})$，有 $\psi = U^*(\phi \oplus \rho)U$。然而，现在定义：

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,n+1}, \quad \gamma_2 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{M}_{1,n+1},$$

我们得到：

$$\psi = U^*(\gamma_1^* \phi \gamma_1 + \gamma_2^* \rho \gamma_2)U = (\gamma_1 U)^* \phi (\gamma_1 U) + (\gamma_2 U)^* \rho (\gamma_2 U)$$

这是一个非平凡的真矩阵凸组合，表明 ψ 不是矩阵极端点（因此根据定理 2.2，也不是纯的）。这证明了 ϕ是极大的。最后，由此可得 ϕ 是纯的且极大的，因此可扩张为 $\mathcal{S}$的一个边界表示。□

由定理 2.1 可知，有限维边界表示在 $\mathcal{S}$ 上的限制恰好是 UCP $(\mathcal{S})$ 的绝对矩阵极端点。我们还想了解 UCP $(\mathcal{S})$ 是否包含关于无限维边界表示的信息，并刻画非绝对的矩阵极端点。第一部分由 Davidson 和 Kennedy 给出了答案：

定理 2.5（定理 2.4, [6]）。设 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统，且 $\phi : \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ 是一个纯酉完全正映射。那么， ϕ 可膨胀为 $C^*(\mathcal{S})$ 的一个边界表示。

这意味着，任何非绝对的矩阵极端点（也就是说，它并非某个边界表示的限制）都具有如下形式： $V^* \pi|_{\mathcal{S}} V$，其中 π是某个边界表示。在第 5 节中，我们将看到一个算子系统的例子，其中 UCP $(\mathcal{S})$ 有一个这种形式的矩阵极端点，且 π 是无限维的。

关于第二部分，我们发现，非绝对的矩阵极端点会膨胀到酉完全正映射的下一个层级中的另一个矩阵极端点 $\mathcal{S}$。这给出了这些点的扩张理论刻画：矩阵极端点要么是边界表示的限制，要么非平凡地膨胀到下一个层级中的另一个矩阵极端点。在后一种情况下，它们也是边界表示的限制的压缩。

以上结论是针对矩阵态空间陈述的，但根据 1.10，对于一般的紧矩阵凸集，我们有以下推论：

推论 2.6. 设 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是局部凸向量空间 V 上的紧矩阵凸集。那么， $v \in \partial K_n$ 是一个非绝对的矩阵极端点，当且仅当它具有 $\gamma^* \tilde{v} \gamma$ 的形式，其中 $\tilde{v} \in \partial K_{n+1}$。

3. Subhomogeneous matrix convex sets

本节我们引入次齐性矩阵凸集的概念。回顾一下，若存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{A}$ 的每个不可约表示的维数都小于或等于 N，则称单位的 $\mathcal{A}$ -代数 C^* 为次齐性的。若 N 是满足此条件的最小整数，则称 $\mathcal{A}$ 是 N-次齐性的。

命题 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个单位的 C^*-代数。以下条件等价:

- $\mathcal{A}$ 是 N-次齐性的。
- ∂酉完全正（$\mathcal{A}$）$\subset \bigcup_{n=1}^{N}$ 酉完全正（$\mathcal{A}, \mathbb{M}_n$）。

证明。假设 $\mathcal{A}$ 是 N-次齐性的，并设对于某个 m， $\varphi \in \partial \mathrm{UCP}(\mathcal{A}, \mathbb{M}_m)$。我们的目标是证明 $m \leq N$。根据 [1, Corollary 1.4.3], ，我们知道，对于某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 上的不可约表示 π，有 $\varphi(x) = V^* \pi(x) V$，且 $V: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 是一个等距算子。由于 π 是不可约表示，其必为有限维，且维数小于或等于 N。于是， φ 是 π 的压缩，这意味着 $m \leq N$，证毕。

反过来，假设 $\partial \mathrm{UCP}(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{UCP}(\mathcal{A}, \mathbb{M}_n)$，并令 π 为 $\mathcal{A}$的不可约表示。若 π 是有限维的，它就是一个矩阵极端点，这意味着它必定属于某个针对 $n \leq N$ 的 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}, \mathbb{M}_n)$，于是结论成立。否则，假设$\pi$： $\mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$，其中 $\mathcal{H}$ 是无限维的。选取一个 $N+1$ 维子空间 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$，并定义 V： $\mathcal{M} \to \mathcal{H}$，使得 $Vm = m$。于是，我们有 $\varphi(x) = V^* \pi(x) V$；根据 [1, 推论 1.4， 3] 是一个矩阵极端点，它属于 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}, \mathbb{M}_{N+1})$，这就产生了矛盾。这说明所有不可约表示都是有限维的，且维数小于或等于 N，因此 $\mathcal{A}$是 N-次齐性的。□

定义 3.2. 设 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是局部凸向量空间 V 上的一个紧矩阵凸集。若存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得$\partial K_n = \emptyset$ 对所有 $n > N$ 都成立，我们称 K 为次齐性的。若满足这些条件的最小整数为 N，则称K 为 N-次齐性。

命题 3.1 表明，若 $K = \mathrm{UCP}(\mathcal{A})$ 是某个单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$，则 K 是 N-次齐性的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是次齐性的。

我们利用这一关系将次齐性的概念推广到算子系统。

定义 3.3. 设 $\mathcal{S}$ 是一个算子系统。若 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 是次齐性的，我们称 $\mathcal{S}$ 为次齐性的；若 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 是 N- 次齐性的，则称其为 N- 次齐性。

根据定理 2.1，我们可知， $\mathcal{S}$ 是 N-次齐性的，当且仅当 $\mathcal{S}$ 的有限维边界表示的维数小于或等于 N。我们不知道次齐性算子系统是否可能存在无限维边界表示。不过请注意，无论这个问题的答案如何，次齐性算子系统都可以由其有限维边界表示完全赋范。

在本节余下部分，我们将证明，次齐性紧矩阵凸集可以由有限个层级恢复。

命题 3.4. 设 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是某个局部凸向量空间 V 上的 N-次齐性紧矩阵凸集。那么

$$K = \overline{\mathrm{co}}(K_N).$$

证明。设 v 是 ∂K_n 中某个 $n < N$ 的矩阵极端点。那么对于任意 $u \in K_{N-n}$，由矩阵凸性可得 $v \oplus u \in K_N$。因此，矩阵极端点的任意矩阵凸组合都可以写成由一些点构成的矩阵凸组合，而这些点全都属于 K_N。因此，应用 Webster-Winkler Krein-Milman 定理（[22, 定理 4.3]）：

$$K = \overline{\mathrm{co}}(\partial K) = \overline{\mathrm{co}}(K_N)$$

□

特别地，我们得到：若 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是满足其 N 级为 K_N 的最小紧矩阵凸集。对于某个 $d \in \mathbb{N}$ 上的矩阵凸集这一特殊情形，我们可以改进此结果。对于 $\mathbb{C}^d$ 中的紧矩阵凸集 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 以及某个 $N \in \mathbb{N}$，集合 $\mathcal{W}^N\text{-min}(K)$ 定义为在 N 级包含 K_N 的最小矩阵凸集。我们也可以用这些集合的矩阵极端点来描述它们。

命题 3.5. 设 $K = (K_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 中的紧矩阵凸集。那么，$K = \mathcal{W}^N\text{-min}(K)$ 当且仅当它对某个 $n \leq N$ 是 n-次齐性的。

证明. 首先假设 $K = \mathcal{W}^N\text{-min}(K) = \mathrm{co}(K_N)$。在这种情况下，任意 $m > N$ 的 $v \in K_m$ 都是来自第 N 层的点的真矩阵凸组合，这意味着它不是矩阵极端点。因此，包含矩阵极端点的最高层是 N 或更低，这就证明了结论。

反过来，根据 [13, 推论 2.5] 和命题 3.4，注意到：

$$K = \overline{\mathrm{co}}(K_n) = \mathrm{co}(K_n) \subset \mathrm{co}(K_N),$$

再由矩阵凸性可知，等式成立。最后注意到，$\mathrm{co}(K_N)$（按定义）是最小的矩阵凸集，且其第 N 层包含 K_N。□

4. Subhomogeneous operator systems

根据命题 1.10，$\mathcal{S}$ 与 $A(\mathrm{UCP}(\mathcal{S}))$ 完全序同构，该同构由映射 $\delta_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S} \to A(\mathrm{UCP}(\mathcal{S}))$ 给出，其中 $\delta_{\mathcal{S}}(s) = ((\delta_{\mathcal{S}}(s))_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义如下：

$$(\delta_{\mathcal{S}}(s))_n(\phi) = \phi(s)$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n)$。在本节中，我们将证明，该映射为将两个矩阵态空间之间的等价性提升为相关算子系统之间的等价性提供了一种方法。

命题 4.1。设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{R}$ 为两个算子系统，并假设 $T = (T_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 和 $\mathrm{UCP}(\mathcal{R})$ 之间的矩阵仿射同胚。那么，T 诱导出 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 之间的完全序同构。

证明。定义映射 $T_*\colon A(\mathrm{UCP}(\mathcal{R})) \to A(\mathrm{UCP}(\mathcal{S}))$，使得 $T_*F = (F_n \circ T_n)_{n=1}^{\infty}$。我们声称这是两个算子系统之间的完全序同构。为此，我们使用识别 $M_n(A(\mathrm{UCP}(\mathcal{R})))$ 与 $A(\mathrm{UCP}(\mathcal{R}) \ \mathbb{M}_n)$，并对 $\mathcal{S}$ 作类似处理。在这种情况下，对于所有 $F \in A(\mathrm{UCP}(\mathcal{R}) \ \mathbb{M}_n)$，可以将 $(T_*)_n F$ 写作映射 $(F_m \circ T_m)_{m=1}^{\infty}$。

根据定义，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和$\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_m)$， $F_m \circ T_m(\phi)$ 为正时，$(T_*)_n F$ 才是正的。但由于 T 是双射，我们得到，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\psi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{R}, \mathbb{M}_m)$，$F_m(\psi)$ 为正时，这一结论才成立；这等价于 F 为正。T_* 显然是单位的（单位元与参数无关），这意味着该映射确实是酉完全正。对 T^{-1} 作类似论证，可知该映射是完全序同构。最后，映射 $\delta_{\mathcal{S}}^{-1} \circ T_* \circ \delta_{\mathcal{R}}$ 是 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 的完全序同构，因为它是这类映射的复合。□

现在我们可以证明，对于足够大的某个 N， N-序结构编码了该算子系统的完全序结构。

定理 4.2. 设 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 分别是 $N_{\mathcal{S}}$-次齐性和 $N_{\mathcal{R}}$-次齐性算子系统，并令 $N = \max\{N_{\mathcal{S}}, N_{\mathcal{R}}\}$。那么， $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{R}$ 完全序同构，当且仅当它们是 N-序同构。

在证明此定理之前，我们需要以下两个命题。

命题 4.3. 设 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 是一个 N-序同构，且令 $k \leq N$。那么，对于所有 $k \leq N$，映射 ϕ_n^*: $L(\mathcal{R}, \mathbb{M}_n) \to L(\mathcal{S}, \mathbb{M}_n)$，由 $\phi_n^*(\psi) := \psi \circ \phi$ 给出，所构成的映射集合$\boldsymbol{\phi}^* = (\phi_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 将 $\mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_k)$ 限制为 $\mathrm{UCP}(\mathcal{R}, \mathbb{M}_k)$ 之间的双射。此外，当 $k \leq N$ 时，该限制是 $\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_k)$ 与 $\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{R}, \mathbb{M}_k)$ 之间的双射。

证明。首先注意， $\boldsymbol{\phi}^*$ 是矩阵仿射映射。事实上，根据定义可得:

$$\phi_n^*\left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \psi_i \gamma_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \psi_i \gamma_i\right) \circ \phi = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \psi_i \circ \phi \gamma_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \phi_{n_i}^*(\psi_i) \gamma_i$$

对于线性映射的任意矩阵凸组合。此外，注意若 $k \leq N$，那么对于任意 $\psi \in$ 酉完全正（$\mathcal{R}, \mathbb{M}_k$），映射 ϕ_k^*（ψ） $= \psi \circ \phi$ 是完全正映射的复合，因此将一个 k-正映射映为 $\mathbb{M}_k$，后者是完全正的（由定理 1.3 得出）。假设 $\psi \in$ 酉完全正（$\mathcal{R}, \mathbb{M}_k$）是酉完全正（$\mathcal{R}$）的矩阵极端点，并假设 $\phi_k^*\psi$是如下形式的真矩阵凸组合:

$$\phi^*\psi = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i^* \psi_i \gamma_i$$

对于 $\psi_i \in$ 酉完全正（$\mathcal{S}, \mathbb{M}_{k_i}$） $\gamma_i \in \mathbb{M}_{k_i,k}$，其中 $i = 1$，.....，ℓ 满足$\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i^* \gamma_i = \mathbb{1}_k$，且 $k_i \leq k$对所有 i均成立。由于 ϕ^{-1} 是一个 N 正映射，我们可得:

$$\psi = \left(\phi^{-1}\right)_k^* \phi_k^* \psi = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i \left(\phi^{-1}\right)_{k_i}^* \psi_i \gamma_i$$

是来自低于 k 层级的 $\mathrm{UCP}(\mathcal{R})$ 中的矩阵凸组合。 ψ 是矩阵极端点，这意味着，对于某个酉算子 u_i， $k_i = k$ 和 $\psi = u_i^*(\phi^{-1})_{k_i}^* \psi_i u_i$。但由此可得 $\phi_k^*\psi = u_i^*\psi_i u_i$，这证明了 $\phi_k^*\psi$ 是矩阵极端的。对$\boldsymbol{\phi}^{-1*}$ 作类似论证可知，该映射确实是双射。□

命题 4.4. 设 $\phi: \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ 是一个 N-序同构。那么， $\boldsymbol{\phi}^*$ 限制为 $\mathrm{co}\{\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{R}, \mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 与 $\mathrm{co}\{\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{S}, \mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 之间的矩阵仿射同胚。

证明。我们已经证明，$\boldsymbol{\phi}^*$ 在低于 N 的层级上限制于矩阵极端点时是一个双射。但由于 $\boldsymbol{\phi}$ 是矩阵仿射的，且 $\boldsymbol{\phi}^{-1^*}$ 是其逆映射，因此它也限制为 $\mathrm{co}\{\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{R},\mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 与 $\mathrm{co}\{\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 之间的矩阵仿射可逆映射。为了将此映射延拓到闭包，只需证明对所有 $k \leq N$，$\boldsymbol{\phi}_k^*$: $L(\mathcal{R},\mathbb{M}_k) \to L(\mathcal{S},\mathbb{M}_k)$ 是连续的。事实上，由于拓扑是弱*拓扑可知，ψ_n 在 $L(\mathcal{R},\mathbb{M}_k)$ 中收敛到 ψ，当且仅当对所有 $r \in \mathcal{R}$，$\psi_n(r)$ 收敛到 $\psi(r)$。但这意味着对所有 $s \in \mathcal{S}$，$\phi(s) \in \mathcal{R}$，因此 $\phi_k^*(\psi_n)(s) = \psi_n(\phi(s))$ 收敛到 $\psi(\phi(s)) = \phi_k^*(\psi)(s)$，从而 $\phi_k^*\psi_n$ 收敛到 $\phi_k^*\psi$，这意味着 ϕ_k^* 是连续的。最后可知，$\mathrm{co}\{\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{R},\mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 的极限点被映射为 $\mathrm{co}\{\partial\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathbb{M}_k)\}_{k=1}^N$ 的极限点，证明完毕。□

我们现在可以给出定理 4.2 的证明。

定理 4.2 的证明。完全序同构特别是一个 N-序同构，因此我们只需证明逆向结论。假设 ϕ 是一个 N-序同构，我们利用命题 4.4 证明 $\boldsymbol{\phi}^*: \mathrm{UCP}(\mathcal{R}) \to \mathrm{UCP}(\mathcal{S})$ 是一个矩阵仿射同胚（回顾一下，这两个集合都是由 $n \leq N$ 生成的 n）。因此，我们现在可以应用命题 4.1，得到 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{R}$ 之间由 $\delta_{\mathcal{R}}^{-1} \circ (\boldsymbol{\phi}^*)_* \circ \delta_{\mathcal{S}}$ 给出的完全序同构。这就完成了证明。□

值得注意的是，紧接证明最后一部分的直接计算表明：

$$((\boldsymbol{\phi}^*)_* \circ \delta_{\mathcal{S}}(s))_k(\psi) = (\delta_{\mathcal{S}}(s))_k \circ \phi_k^*(\psi) = (\delta_{\mathcal{S}}(s))_k(\psi \circ \phi) = \psi(\phi(s)) = (\delta_{\mathcal{R}}(\phi(s)))_k(\psi),$$

由此可得 $\delta_{\mathcal{R}}^{-1} \circ (\boldsymbol{\phi}^*)_* \circ \delta_{\mathcal{S}} = \phi$。因此，$N$-序同构 ϕ 就是完全序同构。

4.1. 次齐性矩阵值域。

定理 4.5. 设 s、r 是两个 d 算子元组，且 $\mathcal{S}$(s) 是 $N_{\mathcal{S}}$次齐性的，$\mathcal{S}$(r) 是 $N_{\mathcal{R}}$次齐性的。对于 $N = \max\{N_{\mathcal{S}}, N_{\mathcal{R}}\}$，以下条件等价：

(1) s 和 r 序等价于 N。(2) s 和 r 完全序等价。(3) $\mathcal{W}_N$(s) $= \mathcal{W}_N$(r)。(4) $\mathcal{W}$(s) $= \mathcal{W}$(r)。

证明. (1) $\iff$ (2) 是定理 4.2 的推论。(1) $\implies$ (3) 和 (4) $\iff$ (2) 由定理 1.7 得出，这意味着我们只需证明 (3) $\implies$(4)。但注意，根据命题 3.5，我们有：

$$\mathcal{W}(\mathbf{s}) = \mathcal{W}^{N\text{-}\min}(\mathcal{W}(\mathbf{s})) = \mathrm{co}(\mathcal{W}_N(\mathbf{s})) = \mathrm{co}(\mathcal{W}_N(\mathbf{r})) = \mathcal{W}^{N\text{-}\min}(\mathcal{W}(\mathbf{r})) = \mathcal{W}(\mathbf{r})$$

由此完成证明。□

一般而言，选择一个低于 $N\max\{N_{\mathcal{S}}, N_{\mathcal{R}}\}$ 的下界可能并不足够。在给出一个具体例子之前，我们需要以下引理。

引理 4.6。设 s、r 是任意两个 d-元组。那么，当且仅当这两个元组是 1 阶等价的时，$\mathcal{W}_1$(s) $= \mathcal{W}_1$(r)。

证明。根据 1.7，若这两个元组是 1 阶等价的，则有 $\mathcal{W}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{W}_1(\mathbf{r})$，因此我们只需证明逆向蕴含。我们假设等式成立，并证明映射 $s_i \mapsto r_i$ 可延拓为所生成算子系统之间定义良好的 1 阶序同构。定义 ϕ: $\mathcal{S}(\mathbf{s}) \to \mathcal{S}(\mathbf{r})$ 如下：

$$\phi\left(a_0\mathbb{1}_{\mathbf{s}} + \sum_i a_i s_i + b_i s_i^*\right) := a_0\mathbb{1}_{\mathbf{r}} + \sum_i a_i r_i + b_i r_i^*.$$

我们证明，只要左侧的自变量为正，右侧的像也为正。正映射是有界的，这也将证明此映射是从 $\operatorname{span}\{s_i\}$ 到 $\mathcal{S}(\mathbf{s})$ 的良定义延拓。假设右侧的自变量为正，我们将证明，对于任意态 $\psi : \mathcal{S}(\mathbf{r}) \to \mathbb{C}$:

$$\psi\left(a_0\mathbb{1}_{\mathbf{r}} + \sum_i a_i r_i + b_i r_i^*\right) = a_0 + \sum_i a_i\psi(r_i) + b_i\psi(r_i)^* \geq 0.$$

事实上，由于 $\psi : \mathcal{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{M}_1$ 是正的，它也是完全正的，这意味着：

$$(\psi(r_1), \ldots, \psi(r_d)) \in \mathcal{W}_1(\mathbf{r}) = \mathcal{W}_1(\mathbf{s}),$$

因此，$(\psi(r_1)\ldots,\psi(r_d))$ 可写成 $(\rho(s_1)\ldots,\rho(s_d))$ 的形式，其中 ρ: $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ 是某个完全正映射。现在可以得出：

$$a_0 + \sum_i a_i\psi(r_i) + b_i\psi(r_i)^* = a_0 + \sum_i a_i\rho(s_i) + b_i\rho(s_i)^* = \rho\left(a_0\mathbb{1}_{\mathbf{s}} + \sum_i a_i s_i + b_i s_i^*\right) \geq 0,$$

这正是我们要证明的结论。这说明 ϕ 是正的；根据与 ϕ 相同的论证，ϕ^{-1} 也是正的，这意味着 ϕ 是一个 1 阶序同构。□

下面给出一个 1-次齐性元组和一个 2-次齐性元组的例子：它们是 1 阶等价的，但并非 2-阶等价，从而证明一般而言，定理 4.5 不能通过选取 $N \leq \max\{N_{\mathcal{S}}, N_{\mathcal{R}}\}$ 加以改进。

例 4.7。令 $\mathcal{H} = L^2\left(\bar{\mathbb{B}}_2\right)$，使得 $\bar{\mathbb{B}}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭单位球，并令 M_{x_1}、M_{x_2} 为坐标函数 $M_{x_i} f(x_1、x_2) = x_i f(x_1、x_2)$ 的乘法算子，其中 $i = 1、2$。$(M_{x_1}、M_{x_2})$ 是一对自伴交换算子，这意味着根据 [5, 推论 4.4]（以及第 3 节的第一段），该集合的矩阵值域是以 $\sigma(M_{x_1}、M_{x_2})$ 为第一级的最小矩阵凸集：

$$\mathcal{W}(M_{x_1}, M_{x_2}) = \mathcal{W}^{\min}(\sigma(M_{x_1}, M_{x_2})).$$

此外，[5, 定理 2.7] 告诉我们，$\mathcal{W}_1(M_{x_1}、M_{x_2}) =$ 凸包 $(\sigma(M_{x_1}、M_{x_2})) = B_2$。然后，我们考虑另一对 $(F_1、F_2) \in B(\mathbb{C}^2)^2$ 矩阵，其形式如下：

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证，这是一对反交换酉算子。应用 [18, 推论 5.9], ，可知映射 $M_{x_i} \mapsto F_i$（其中 $i = 1$，2）可扩张为从 $\mathcal{S}(M_{x_1}, M_{x_2})$ 到 $\mathcal{S}(F_1, F_2)$ 的单位正映射，进而由定理 1.7 可得：

$$\mathcal{W}_1(F_1, F_2) \subset \mathcal{W}_1(M_{x_1}, M_{x_2}).$$

我们可以证明反向包含也成立。注意，对于每个满足 $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1$ 的 $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{C}^2$，我们有：

$$(\xi^*F_1\xi,\xi^*F_2\xi)\in\mathcal{W}_1(F_1,F_2).$$

因此，对于所有 $\theta\in[0,2\pi]$，我们都可以选择 $\xi=\left(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2}\right)$，使得：

$$r_1=\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}},\quad r_2=\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}},\quad \cos(\theta_1-\theta_2)=\operatorname{sgn}(\sin(\theta)),$$

并得到：

$$\|\xi\|=1,\quad (\xi^*F_1\xi,\xi^*F_2\xi)=(\cos(\theta),\sin(\theta)).$$

Th这证明了 $\mathcal{W}_1(F_1,F_2)$ 包含 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆，并且由凸性可得 :

$$\mathcal{W}_1(M_{x_1},M_{x_2})=\bar{B}_2\subset\mathcal{W}_1(F_1,F_2)$$

由此得到 这个等式。由引理 4.6 可知，这些有序对是 1 阶序等价的 t.

现在我们证明它们不可能是 2-阶等价的。事实上，由定理 5.3 可知，$\mathcal{W}(F_1,F_2)$ 是 2-次齐性的，而 $\mathcal{W}(M_{x_1},M_{x_2})$ 是 1-次齐性的（由极小性可知）。因此，根据命题 4.3，2 阶序同构将意味着 $\mathcal{W}_2(M_{x_1},M_{x_2})$ 中存在一个矩阵极端点，但这是不可能的。

N-次齐性算子系统对应于N-次齐性矩阵值域这一事实的另一推论，是下面对定理 1.3 在次齐性算子系统情形下的推广。

定理 4.8。设 s、r 为两个算子系统，且 $\mathcal{S}$(s) 是 N-次齐性。若映射 $r_i\mapsto s_i$ 定义了一个单位的 N-正映射 $\phi:\mathcal{S}(\mathrm{r})\to\mathcal{S}(\mathrm{s})$，则它是完全正的。

证明。由命题 3.5， $\mathcal{W}(\mathrm{s})=\mathcal{W}^N\text{-min}(\mathrm{s})$。对于任意酉完全正映射 $\psi:\mathcal{S}(\mathrm{s})\to\mathbb{M}_n$ (其中 $n\leq N$)，我们有 $\psi\circ\phi:\mathcal{S}(\mathrm{r})\to\mathbb{M}_n$ 是完全正的，这意味着：

$$\mathcal{W}_n(\mathbf{s})\subset\mathcal{W}_n(\mathbf{r}).$$

由此包含关系以及 $\mathcal{W}$(s) 的极小性：

$$\mathcal{W}(\mathbf{s})=\mathrm{co}(\mathcal{W}_N(\mathbf{s}))\subset\mathcal{W}(\mathbf{r}).$$

现在我们再次利用定理 1.7，得出映射 $r_i\mapsto s_i$ 可延拓为一个酉完全正映射，这正是我们要证明的。□

4.2. 由酉元生成的矩阵值域。当 $\mathcal{S}$、$\mathcal{R}$ 都由酉元的 d-元组 s、r 生成时，这一情形尤其值得关注。这是因为已知酉元相对于其所生成代数的代数结构具有某些“刚性”性质。

回顾一下，对于算子系统 $\mathcal{S}$ 和一个 C^*-代数 $\mathcal{B}=B(\mathcal{H})$，如果映射 $\phi\in\mathrm{UCP}(\mathcal{S},\mathcal{B})$ 具有唯一扩张性质，则意味着 ϕ 存在唯一的 UCP 延拓到某个 $\Phi\in\mathrm{UCP}(C^*(\mathcal{S}),\mathcal{B})$，且该映射是一个 $*$-同态。将酉 d-元组映射为酉 d-元组的 UCP 映射总是具有这一性质。

定理 4.9. 设 s,r 是由 d 个酉元组成的元组，并假设 $s_i\mapsto r_i$ 定义了一个酉完全正ϕ: $\mathcal{S}$(s) $\to\mathcal{S}$(r)。那么，此映射具有唯一扩张性质。

证明. 不失一般性，可假设 $C^*(\mathbf{s})$ 和 $C^*(\mathbf{r})$ 分别是希尔伯特空间 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ 上算子的具体子代数。在这种情况下，我们可以应用 Arveson 延拓定理（参见 [1, 推论 1.2.3]），得到一个酉完全正 $\Phi\colon\ C^*(\mathbf{s}) \to B(\mathcal{K})$，它扩张了$\phi$。然后，我们可以应用 Stinespring 膨胀定理（参见 [20, 定理 1]），得到一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}'$、一个 $*$-同态 $\pi\colon\ C^*(\mathbf{s}) \to B(\mathcal{K}')$，以及一个等距算子 $V\colon\ \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$，使得对所有 $s \in C^*(\mathbf{s})$:

$$\Phi(s) = V^*\pi(s)V.$$

由于 V 是等距算子，我们也可以将 $\mathcal{K}$ 视为闭子空间 $V\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$。这样，我们可以分解 $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$，并对所有 $a \in C^*(\mathbf{s})$ 写出:

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \Phi(a) & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

特别地，$\mathbf{f}$ 对于所有 i，s_i 和 $\phi(s_i) = \Phi(s_i)$ 都是酉元，这意味着 :

$$\begin{aligned}\pi(s_i)^*\pi(s_i) &= \begin{pmatrix} \phi(s_i)^*\phi(s_i) + \gamma_i^*\gamma_i & \phi(s_i)^*\beta_i + \gamma_i^*\delta_i \\ \beta_i^*\phi(s_i) + \delta_i^*\gamma_i & \beta_i^*\beta_i + \delta_i^*\delta_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} + \gamma_i^*\gamma_i & \phi(s_i)^*\beta_i + \gamma_i^*\delta_i \\ \beta_i^*\phi(s_i) + \delta_i^*\gamma_i & \beta_i^*\beta_i + \delta_i^*\delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{K}^\perp} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此我们可以得出 $\gamma_i^*\gamma_i = 0$（类似地，$\beta_i^*\beta_i = 0$），这意味着 $\gamma_i = \beta_i = 0$。所以:

$$\pi(s_i) = \begin{pmatrix} r_i & 0 \\ 0 & \delta_i \end{pmatrix}$$

对于所有 $i = 1, \ldots, d$，并且由于 s_i 生成 $C^*(\mathbf{s})$，我们得到 Φ 是乘法的，因此它是一个 $*$-同态。□

推论 4.10. 对于酉元的 d-元组 s、r，映射 $s_i \mapsto r_i$ 定义了 $\mathcal{S}(\mathbf{s})$ 与 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 之间的完全序同构，当且仅当它延拓为 $C^*(\mathbf{s})$ 与 $C^*(\mathbf{r})$ 之间的 $*$-同构。特别地，该 $*$-同构是该映射唯一的酉完全正延拓。

对于元组 s，若存在忠实的 $*$-表示 $\pi\colon C^*(\mathbf{s}) \to B(\mathcal{H})$ $\rho\colon C^*(\mathbf{r}) \to B(\mathcal{K})$，以及一个等距算子 $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$，使得:

$$\pi(s_i) = V^*\rho(r_i)V$$

对所有 $i = 1, \ldots, d$ 均成立。注意，将 $V\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}$ 视为 $\mathcal{K}$ 的闭子空间后，我们也可以将膨胀写为:

$$\pi(s_i) = P_{\mathcal{H}}\,\rho(r_i)|_{\mathcal{H}}\,,$$

注意，该膨胀会产生一个从 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 到 $\mathcal{S}(\mathbf{s})$ 的酉完全正映射，该映射将 r_i 映至 s_i。反过来亦成立，也就是说，利用 Arveson 延拓定理和 Stinespring 膨胀定理，这种酉完全正映射的存在性意味着存在一个膨胀。现在，我们可以针对酉元组给出定理 4.5 的重要改进。

定理 4.11. 设 s,r 是两个由 d 个酉元组成的元组，且 $\mathcal{W}(\mathbf{s})$ 和 $\mathcal{W}(\mathbf{r})$ 分别是 $N_{\mathbf{s}}$-次齐性和 $N_{\mathbf{r}}$-次齐性的。令 $N = \max\{N_{\mathbf{s}}, N_{\mathbf{r}}\}$，以下命题等价。

(1) s 和 r 是 N序等价的。(2) s 和 r 是完全序等价的。(3) s 膨胀到 r，且 r 膨胀到 s。

(4) $\mathcal{W}_N(\mathsf{s}) = \mathcal{W}_N(\mathsf{r})$。(5) $\mathcal{W}(\mathsf{s}) = \mathcal{W}(\mathsf{r})$。(6) s 和 r 是 $*$-同构的。

证明。我们已经有 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (4) $\iff$ (5)。注意，(2) $\implies$ (6) 由推论 4.10 得出，而前面的注释实质上就是 (3) $\iff$(6) 的证明。□

5. Operator systems related to the noncommutative tori

在本节中，我们将迄今为止建立的工具应用于 q-交换酉算子理论，以及更一般的 Λ-交换酉算子理论。给定一个自伴矩阵 $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,\,j=1}^{d}$ 满足 $|\lambda_{ij}| = 1$，如果一个 d-元组 u_1、……、u_d 酉元满足 $u_i u_j = \lambda_{ij} u_j u_i$，则称其为 Λ-交换的。当 $d = 2$ 时，Λ 由一个模为 1 的复数 q 唯一确定；在这种情况下，如果 $uv = qvu$，则称 u、v 为 q-交换的。

5.1. q-交换酉算子。当 q 具有 $q = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ 的形式，且 k、$n \in \mathbb{N}$ 互素时，为方便起见，我们将使用记号 $q_{n,\,k}$。以下命题是众所周知的结果，为求完整起见，我们给出证明。

命题 5.1. 设 u、v 是一对 $q_{k,\,n}$-交换酉算子，且 $\pi\colon C^*(u,v) \to B(\mathcal{H})$ 是一个不可约表示。那么 $\dim \mathcal{H} = n$，并且存在 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基，使得 $\pi(u)$ $\pi(v)$ 可写成如下形式：

$$\pi(u) = \lambda U, \quad \pi(v) = \eta V,$$

其中 U、V 定义如下：

$$U = \operatorname{diag}\big(1, q_{n,k}, \ldots, q_{n,k}^{n-1}\big), \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

这对 U、V 称为 $q_{n,\,k}$-交换酉算子的标准表示。

证明。假设 $\pi\colon C^*(u,v) \to B(\mathcal{H})$ 是一个不可约表示，并定义 $\tilde{u} = \pi(u)$ $\tilde{v} = \pi(v)$。对所有 k、$m \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\tilde{u}^n \pi\big(u^k v^m\big) = \pi\big(u^{n+k} v^m\big) = q_{k,n}^{nm} \big(u^k v^m u^n\big) = \pi\big(u^k v^m\big) \tilde{u}^n,$$

因为 $q_{k,\,n}^{n} = 1$。同样的计算对 $\tilde{v}^n$ 也成立，这表明 $\tilde{u}^n, \tilde{v}^n \in \pi(C^*(u,v))'$。因此，存在某些模为 1 的 ξ，ζ（因为 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 是酉元），使得 $\tilde{u}^n = \xi \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ 且 $\tilde{v}^n = \zeta \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$。给定某个非零向量 $h \in \mathcal{H}$，我们有

$$\mathcal{K} = \operatorname{span}\big\{ \tilde{u}^\ell \tilde{v}^m h \big| \ell, m \in \{-n+1, \ldots, n-1\} \big\} \subset \mathcal{H}$$

是 $\pi(C^*(u,v))$ 的不变子空间，根据不可约性，$\mathcal{K} = \mathcal{H}$，由此可知 $\mathcal{H}$ 是有限维的。现在，我们可以利用 $\tilde{u}$ 是酉的这一事实，找到 u 的一个特征向量 h，对应于某个模为 1 的特征值 λ，使得 $\tilde{u}h = \lambda h$。但是，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$：

$$\tilde{u} \tilde{v}^\ell \tilde{h} = q_{k,n}^{\ell} \tilde{v}^\ell \tilde{u} \tilde{h} = \lambda q_{k,n}^{\ell} \tilde{v}^\ell \tilde{h},$$

从而 $\left\{\tilde{h}, \tilde{v}\tilde{h}, \ldots, \tilde{v}^{n-1}\tilde{h}\right\}$ 是由 $\tilde{u}$ 的特征向量组成的基，对应于 n 个互异的特征值。但同样地，我们有它们的张成空间是 $\pi(C^*(u,v))$ 的不变子空间，这意味着 $\mathcal{H} =$ 张成$\left\{\tilde{h}, \ldots, \tilde{v}^{n-1}\tilde{h}\right\}$。最后，选取某个 η 使得 $\eta^n = \zeta^{-1}$。直接计算表明，相对于基 $\left\{\eta^{i-1}\tilde{v}^{i-1}\tilde{h}\right\}_{i=1}^{n}$，$\tilde{u}$ ， $\tilde{v}$ 具有所需的形式。 □

由于根据定义，任何边界表示都是不可约的，因此我们现在得到以下推论。

推论 5.2. 设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(u,v)$ 是由 $q_{k,n}$-交换酉算子生成的算子系统。那么，Abex(UCP ($\mathcal{S}$)) 非空，且包含于 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$) 中。

证明. 首先，根据定理 2.1，我们知道 Abex(UCP ($\mathcal{S}$)) 恰好是相对于 $\mathcal{S}(u,v)$ 的 $C^*(u,v)$ 的边界表示的限制。边界表示是不可约的，因此在我们的情形下，命题 5.1 表明这些边界表示是映射到 $\mathbb{M}_n$ 的映射，故 Abex(UCP ($\mathcal{S}$)) $\subset$ UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$)。根据 $[6, \text{定理 } 3.4]$, ，我们知道任何算子系统都存在边界表示，这也表明 Abex(UCP($\mathcal{S}$)) 非空。□

利用这一推论以及我们对矩阵极端点的认识，可以刻画由 $q_{k,\ n}$-交换酉元生成的算子系统的 UCP($\mathcal{S}$)。

定理 5.3. 设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(u,v)$ 是一个算子系统，其中 u, v 是 $q_{k,\ n}$-交换酉元。则：

(1) UCP($\mathcal{S}$) 是 n-次齐性。 (2) ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$) $=$绝对矩阵极端点集(UCP ($\mathcal{S}$))，且这是边界表示对 $\mathcal{S}$ 的所有限制的集合。 (3) 对所有 $1 \leq k < n$, ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_k$) 非空，且任意 $\varphi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_k$) 均可写成以下两种形式之一：

- $\varphi = \gamma^* \psi \gamma$ 对于 $\psi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_{k+1}$)。
- $\varphi = \gamma^* \psi \gamma$ 对于 $\psi \in$ 绝对矩阵极端点集(UCP ($\mathcal{S}$))。

证明。设 φ 是 UCP ($\mathcal{S}$) 中的一个矩阵极端点。由定理 2.2 可知， $\varphi \in$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_k$) 是一个纯酉完全正映射，因此由定理 2.5，它具有 $\varphi = \gamma^* \psi \gamma$ 的形式，其中 γ 是一个等距映射，$\psi = \pi|_{\mathcal{S}}$ 是一个边界表示的限制。由于 π 是一个边界表示，根据命题 5.1，其维数为 n，这意味着 $\psi \in$ UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$)。由此可得 $k \leq n$。命题 5.1 还表明，Abex(UCP ($\mathcal{S}$)) $\subset$ ∂UCP ($\mathcal{S}$, $\mathbb{M}_n$) 非空，这证明 UCP ($\mathcal{S}$) 是 n-次齐性的。最后，若 $\varphi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$)，它要么属于 abex(UCP ($\mathcal{S}$))，要么根据引理 2.3] 膨胀为某个矩阵极端点 $\psi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_{n+1}$)。由于 ∂ UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_{n+1}$) 为空， φ 必须属于 abex(UCP ($\mathcal{S}$))，至此定理的第一和第二部分得证。最后注意，UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{C}$) 是一个紧凸集，因此根据克莱因–米尔曼定理，它有一个经典极端点，而该点显然也是矩阵极端点。根据引理 2.3], ，它会膨胀为 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_2$) 中的一个矩阵极端点；除非 $n = 2$ ，否则它不是绝对矩阵极端点（此时结论已得）。当 $n > 2$ 时，我们可以使用同一引理，将此点膨胀为 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_k$) 中的其他矩阵极端点，对所有 $2 \leq k \leq n$ 均如此；而在第 n 层，该点将成为绝对矩阵极端点，且不会膨胀为更高层的另一个点。这证明了在 ∂UCP ($\mathcal{S}$) 中，直至第 n 层的所有层都非空，

并且第 n 层以下的所有点都是上一层矩阵极端点的压缩，至此证明完成。□

现在我们来考虑角度是 π 的无理数倍的情形，即$q = e^{2\pi i\theta}$，其中 $\theta \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$。

命题 5.4. 设 u, v 是一对 q-交换酉算子，其中 q 是无理数，并设$\pi : C^*(u,v) \to B(\mathcal{H})$ 是一个不可约表示。那么 $\mathcal{H}$ 是无限维的。

证明. 反设 $\mathcal{H}$ 是有限维的。在这种情况下，$\pi(u)$ 是作用于有限维向量空间上的酉算子，这意味着它有一个非零特征向量$h \in \mathcal{H}$，对应某个非零特征值 $\lambda \in \mathbb{T}$。于是，$\pi(v)^k h$ 是一个满足下式的非零向量：

$$\pi(u)\pi(v)^k h = q^k \pi(v)^k \pi(u) h = \lambda q^k \pi(v)^k h$$

这意味着 $\{\pi(v)^k h\}_{k=0}^{\infty}$ 是一组具有不同特征值的无限多个特征向量，因此它们线性无关，这与 $\mathcal{H}$ 是有限维的事实相矛盾。□

这为我们提供了足够的信息，以描述无理数情形下 UCP($\mathcal{S}$) 的矩阵态空间。

定理5.5. 设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(u,v)$ 是一个算子系统，且对于无理数 q，u, v 是 q-交换酉算子。则：

(1) UCP ($\mathcal{S}$) 不是有限生成的。(2) abex(UCP ($\mathcal{S}$)) $= \emptyset$。(3) 对所有 $k \in \mathbb{N}$，∂UCP ($\mathcal{S}$, $\mathbb{M}_k$) 非空，且任意 $\varphi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_k$) 都可以写成以下两种形式：

- $\varphi = \gamma^* \psi \gamma$ 其中 γ 是一个等距算子，且 $\psi \in \partial$UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_{k+1}$)。
- $\varphi = V^* \, \pi|_{\mathcal{S}} \, V$ 其中 V 是一个等距算子，且 π 是 $\mathcal{S}$ 的边界表示。

证明. UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{C}$) 是局部凸拓扑向量空间中的紧凸集。根据克莱因–米尔曼定理，该集合中存在一个经典极端点，而它必定是一个矩阵极端点，因此 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{C}$) 非空。对于这样的矩阵极端点 φ，由定理 2.2 可知它是一个纯点，但它不是极大的；否则，根据 [6, 引理 2.1]，它将是某个边界表示的限制，这与命题 5.4 矛盾。现在我们可以使用 [6, 引理 2.3],，将 φ 膨胀为第 2 级的矩阵极端点，使得 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_2$) $\neq \emptyset$。但我们可以继续重复这一过程，将 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_n$) 中的矩阵极端点膨胀为 ∂UCP ($\mathcal{S}, \mathbb{M}_{n+1}$) 中的矩阵极端点，因为这一过程经过有限步后会达到一个边界表示。这表明该集合在每一级都有矩阵极端点，从而证明了 (1) 以及 (3) 的第一部分。(2) 是命题 5.4 和定理 2.1 的直接推论。最后，(3) 的第二部分是 Davidson 和 Kennedy 的工作（见 [6,定理 2.4]）。□

通过运用这一刻画，我们证明可以通过有理数$q_{k,\ n}$-交换酉算子的 n 阶结构来识别它们。

定理 5.6. 设 u, v 是一对 $q_{k,n}$-交换酉算子，且 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 是一对 q-交换酉算子（q 可能是无理数）。假设映射 $\tilde{u} \mapsto u, \tilde{v} \mapsto v$ 定义

一个单位的且 n-正映射。那么，$q = q_{k,n}$，且此映射是完全正的。若此映射是 n-序同构，则它可扩张为 $C^*(u,v)$ 与 $C^*(\tilde{u},\tilde{v})$ 之间的 $*$-同构。

证明。首先注意到，根据定理 5.3，UCP ($\mathcal{S}(u,v)$) 是由 n 生成的。根据定理 4.8，将 $\mathcal{S}(\tilde{u},\tilde{v})$ 映射到 $\mathcal{S}(u,v)$、由 $\phi(\tilde{u}) = u, \phi(\tilde{v}) = v$ 定义的单位且 n-正映射是完全正的。因此，我们应用定理 4.9，得到 ϕ 具有唯一扩张性质，因而可扩张为一个从 $C^*(\tilde{u},\tilde{v})$ 到 $C^*(u,v)$ 的 $*$- 同态，记作 π。现在我们有 $uv = q_{k,\ n}vu$，但还有：

$$uv = \pi(\tilde{u}\tilde{v}) = q\pi(\tilde{v}\tilde{u}) = qvu,$$

由此可得 $q = q_{k,\ n}$。在 ϕ 定义相应算子系统之间的 n-序同构的情形下，我们还可以将 ϕ 扩张为所生成的 C^*-代数之间的 $*$-同构。□

5.2. Λ-交换的 d-元组。定理 5.3 对 q-交换酉算子的边界表示给出了完整描述。但该证明在一定程度上依赖于我们研究的是成对的 q-交换酉算子。要刻画更一般的 Λ-交换酉算子的边界表示，则困难得多。一般而言，甚至连这些表示的维数也尚不清楚（不过已有一些结果，例如 [12, 命题 B.1]）。

但当 $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^{d}$ 是一个满足 $|\lambda_{ij}| = 1$ 和 $\lambda_{ij} = e^{\frac{2\pi i}{n_{ij}}}$ 为有理数时，我们仍然可以给出不可约表示维数的一些上界。

命题 5.7。设 s 是由 Λ-交换酉元构成的一个 d-元组，其中 Λ 为有理数。令 $N = \operatorname{lcm}\{n_{ij}\}$。若 $\pi : C^*(\mathrm{s}) \to B(\mathcal{H})$ 不可约，则 $\mathcal{H}$ 是有限维的，且 $\dim \mathcal{H} \leq N^d$。

证明。与 q-交换的情形类似，我们令 $U_i = \pi(s_i)$，并注意，对于所有 $r_1, \ldots, r_d \in \mathbb{Z}$：

$$U_i^N \prod_{j=1}^{d} U_j^{r_j} = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \lambda_{ij}^{Nr_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{d} U_j^{r_j} \right) U_i^N = \left(\prod_{j=1}^{d} U_j^{r_j} \right) U_i^N$$

这意味着，对于 $i = 1, \ldots, d$，$U_i^N \in \pi(C^*(\mathrm{s}))'$。由不可约性可知，存在一些模为 1 的标量 $\eta_1, \ldots, \eta_d$，使得对于 $i = 1, \ldots, d$，$U_i^N = \eta_i \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$。取一个非零向量 $\xi \in \mathcal{H}$，我们有：

$$\mathcal{K} = \operatorname{span}\left\{ \prod_{j=1}^{d} U_j^{r_j} \xi \,\middle|\, r_j \in \{0, \ldots, N-1\}, j = 1, \ldots, d \right\},$$

由此，不可约性推出 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$，且 $\mathcal{H}$ 是有限维的。由于该空间至多由 N^d 个向量张成，我们也得到了维数上界。□

注意，[12, 命题 B.1] 中的例子展示了一个三元酉算子组，它们是Λ-交换的，其中 $\lambda_{i,i+1} = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$，但在一个 n维希尔伯特空间上不可约表示，其维数小于估计值 n^3。尽管我们并不确切知道这类元组的不可约表示的维数，但仍然可以给出一个上界。因此，我们可以证明它们全都是次齐性的。

命题 5.8。设 $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,\ j=1}^{d}$ 为有理数，并令 s^{Λ} 为 Λ-交换酉元的通用 d元组。那么，对于某个 $N(\Lambda) \leq N^d$，UCP $\left(\mathcal{S}\left(\mathsf{s}^{\Lambda}\right)\right)$ 是 $N(\Lambda)$-次齐性的；并且每当 r 是 Λ-交换酉元的 d元组时，对于某个 $n \leq N(\Lambda)$，UCP $(\mathcal{S}(\mathsf{r}))$ 是 n-次齐性的。

证明。首先注意到，根据命题 5.7，$\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})$ 的所有边界表示的维数都小于或等于 N^d。设 $N(\Lambda)$ 是存在于 $N(\Lambda)$ 维希尔伯特空间上的边界表示所对应的最大整数。结合定理 2.1、定理 2.2 以及 $[6,$ 定理 2.4$]$，，我们得到所有绝对矩阵极端点都属于 UCP $\left(\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})\ k\right)$，其中 $k \leq N(\Lambda)$；而任何其他矩阵极端点都是此类点的压缩，这意味着所有极端点都属于 UCP $\left(\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})\,\mathbb{M}_k\right)$，其中 $k \leq N(\Lambda)$。由于 UCP $\left(\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})\,\mathbb{M}_{N(\Lambda)}\right)$ 中存在一个绝对矩阵极端点，因此 UCP $\left(\mathcal{S}\left(\mathsf{s}^{\Lambda}\right)\right)$ 是 $N(\Lambda)$-生成的。接下来，设 r 是由 Λ 个 d-交换酉算子组成的元组。根据 $\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})$ 的泛性质，存在一个 $*$-同态 $\rho : C^*(\mathsf{s}^{\Lambda}) \to C^*(\mathsf{r})$，使得 $\rho(s_i^{\Lambda}) = r_i$。因此，如果 $\varphi \in \mathrm{abex}(\mathrm{UCP}\ (\mathcal{S}(\mathsf{r})))$，则它是边界表示 $\pi : C^*(\mathsf{r}) \to B(\mathcal{H})$ 的限制，这意味着 $\pi \circ \rho : C^*(\mathsf{s}^{\Lambda}) \to B(\mathcal{H})$ 是一个边界表示，从而是 UCP $\left(\mathcal{S}(\mathsf{s}^{\Lambda})\right)$ 中的绝对矩阵极端点。因此，$\dim \mathcal{H} \leq N(\Lambda)$。这意味着，对于 $\mathcal{S}(\mathsf{r})$ 存在边界表示的最大整数 n 必须满足 $n \leq N(\Lambda)$；于是我们得到，UCP $(\mathcal{S}(\mathsf{r}))$ 对某个 $n \leq N(\Lambda)$ 是 n-生成的。□

我们通过将定理 5.6 和定理 4.5 推广到 Λ-交换酉元的情形，完成这一部分。

定理 5.9. 设 Λ 为有理数，且 s 是由 Λ-交换酉元组成的 d-元组。若 $\tilde{\mathsf{r}}$ 是由 Λ-交换酉元组成的 d-元组。若映射 $r_i \mapsto s_i$ 可扩张为一个酉 $N(\Lambda)$-$\tilde{}$正映射 $\phi : \mathcal{S}(\mathsf{r}) \to \mathcal{S}(\mathsf{s})$，则 $\Lambda = \Lambda$。特别地，若该映射是一个 $N(\Lambda)$-序同构，则这两个元组完全序等价，且生成同构的 C^*-代数。

证明. 在上述假设下，对于某个 $n \leq N(\Lambda)$，UCP $(\mathcal{S}(\mathsf{s}))$ 由 n 生成。由定理 4.8 可知，将 r_i 映至 s_i（对 $i = 1, \ldots, d$）的酉 $N(\Lambda)$-正映射是完全正的。因此，我们应用定理 4.9 得出该映射具有唯一扩张性质，因而可扩张为所生成 C^*-代数之间的 $*$-同态。由于$\tilde{}$该映射是乘法的，我们采用与 $d = 2$ 情形类似的计算，得到 $\Lambda = \Lambda$。若该映射定义了一个 $N(\Lambda)$-序同构，那么现在存在一个逆映射，它是 $N(\Lambda)$-正的，并可得该映射可扩张为这些 C^*-代数之间的 $*$-同构。□

最后：

定理 5.10。设 Λ 为有理数，且 s 是由 Λ-交换酉算子组成的 d-元组。对于由 Λ-交换酉算子组成的 d-元组$\tilde{}$r，以下各项等价：

(1) s 和 r 是 $N(\Lambda)$-序等价的。(2) s 和 r 是完全序等价的。(3) s 膨胀到 r，且 r 膨胀到 s。(4) $\mathcal{W}_{N(\Lambda)}(\mathsf{s}) = \mathcal{W}_{N(\Lambda)}(\mathsf{r})$。(5) $\mathcal{W}(\mathsf{s}) = \mathcal{W}(\mathsf{r})$。(6) s 和 r 是 $*$-同构的。

证明。(1) $\iff$ (2) 由定理 5.9 得出。(2) $\iff$ (3) 由推论 4.10 后的讨论得出。(2) $\iff$ (5)。对于 (5) $\implies$ (4)，注意我们只需证明 (4) $\implies$ (5)。由于根据命题 5.8，$\mathcal{W}$(s) 是由某个 $n \leq N(\Lambda)$-生成的。因此，我们调用命题 3.5，并得出 $\mathcal{W}$(s) 是 $N(\Lambda)$-极小的，这意味着 $\mathcal{W}$(s) $\subset \mathcal{W}$(r)；根据定理 1.7，存在相应算子系统之间的酉完全正映射，将 r_i 映射到 s_i。根据定理 5.9，此映射可扩张为所生成 C^*-代数的 $*$-同态，~由此可得 $\Lambda = \Lambda$。现在，我们可以对 $\mathcal{W}$(r) 重复这些论证，并得到 (5)。最后，(2) $\iff$ (6) 也由定理 5.9 得出。□

6. Classification up to unital isometries

本节尝试探究定理 5.6 的条件是否严格。也就是说，是否存在一对$q_{k,\ n}$ 交换酉算子，使其与某个 q-交换对 m-阶序等价（对$m < n$而言），但这两对并非完全序等价?

更具体地说，我们转而考察含幺等距映射。由于含幺等距映射是正的，因此它们是 1 阶序同构的一个例子（见 $[19,$ 命题 2.11$]$）。下述定理给出了含幺等距映射的存在性与 q-交换酉算子的某些膨胀性质之间的关系。

定理 6.1. $[11,$ 定理 6.4$]$ 设 θ、$\theta' \in [0,1]$、$q = e^{2\pi i\theta}$、$q' = e^{2\pi i\theta'}$ 和 $\gamma = \theta - \theta'$。使得每一对 q-交换酉算子都能膨胀为$c_{\theta,\ \theta'}$倍的一对 q'-交换酉算子的最小常数$c_{\theta,\ \theta'}$ 为:

$$c_{\theta,\theta'} = c_\gamma = \frac{4}{\left\|u_\gamma + u_\gamma^* + v_\gamma + v_\gamma^*\right\|},$$

其中，u_γ, v_γ是 $e^{i\gamma}$-交换酉算子的泛对。

令 $c_\theta := c_{\theta,\ 0}$，由定理可知，$(u_\theta, v_\theta)$与$(u_{\theta'}, v_{\theta'})$之间存在单位等距映射（其中这两个对都是泛对）意味着 $c_\theta = c_{\theta'}$。我们不知道反命题一般是否成立，但可以推知，凡是不存在这种等距映射的情形，相应的膨胀常数必定不同。利用现有的一系列工具，以下推论很容易得出。

推论 6.2. 对于 $\theta \in [0,1]$, $c_\theta = 1$，当且仅当 $\theta = 0$ 或 $\theta = 1$。

证明. 若 $\theta = 0$ 或 $\theta = 1$，则无需证明，因为每一对交换酉算子都是其自身的膨胀。另一方面，若一对 q-交换酉算子膨胀为一对交换酉算子（其中 $q' = 1$），我们可以援引定理 5.6（因为膨胀意味着存在一个完全正映射，将这对交换酉算子映射为 q-交换酉算子），从而得到 $q' = q$，因此 $\theta = 0$ 或 $\theta = 1$。□

当 $\theta \neq 0$,1 时，仍然存在一些情况：两个不同的角对应同一个膨胀常数。例如，对于所有 $\theta \in [0,1]$，已知 $c_\theta = c_{1-\theta}$。在下面的命题中，我们为这一事实提供另一种证明，并给出一个由大量 q-交换对构成的例子，这些交换对是 1 阶同构的，但并非完全序同构。

命题 6.3. 设 $\theta \in [0, 2\pi]$。那么，映射 $\theta \mapsto u_{1-\theta}, v_\theta \mapsto v_{1-\theta}$ 可扩张为算子系统之间的单位等距映射。此外，$c_\theta = c_{1-\theta}$。

在给出证明之前，注意对所有 $n \in \mathbb{N}$，$q_{1,\ n}$-交换酉元的泛对与 $q_{(n-1),\ n}$-交换酉元的泛对是 1 阶等价的，但并非完全序等价。这为 n-次齐性算子系统提供了一族例子：它们是 1 阶同构的，但不是 n-序同构的（尤其不是完全序同构的）。现在我们来证明该命题。

证明。首先假设 $\theta = \frac{k}{n}$ 对于互素的 $k, n \in \mathbb{N}$，并令 $q = e^{2\pi i\theta}, q' = e^{2\pi i(1-\theta)}$。考虑 U, V，如式 (2) 中的标准表示，我们看到，若 $UV = qVU$，则：

$$U^t V^t = (VU)^t = \bar{q}(UV)^t = q' V^t U^t,$$

这意味着 U^t, V^t 是一对 q'-交换酉算子。此外，由 $\phi(a) = a^t$ 给出的映射 ϕ：$\mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ 是一个单位等距映射，这意味着它在$\mathcal{S}(U, V)$上的限制是一个单位等距映射。接下来，我们令 U_θ, V_θ 为一对 q-交换酉算子的泛对，其定义如下：

$$U_\theta = \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{T}} U_{\theta,\alpha,\beta}, \quad V_\theta = \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{T}} V_{\theta,\alpha,\beta}$$

其中 $U_{\theta,\ \alpha,\ \beta} = \alpha U$ 以及 $V_{\theta,\ \alpha,\ \beta} = \beta V$。在这种情况下，映射 $U_\theta \mapsto U_\theta$ 以及：

$$V_\theta \mapsto \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{T}} V^t_{\theta,\alpha,\beta}$$

是从 $\mathcal{S}(U_\theta, V_\theta)$ 到 $\mathcal{S}(U_\theta, V_\theta^t)$ 的单位等距映射。但 U_θ, V_θ^t是一对 $\bar{q} = q'$交换酉算子的泛对，这就完成了有理数情形的证明。

假设 θ 是无理数，我们考虑以下一对无限矩阵：

$$u = \left(q^n \delta_{n,m}\right)_{n,m\in\mathbb{Z}}, \quad v = \left(\delta_{n,m+1}\right)_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

它们作用于 $\ell_2(\mathbb{Z})$ 上。显然，它们是 q-交换酉算子，并构成一个泛对（根据 [3，定理 1.9 和 1.10]）。仿照有理数情形，我们有转置映射 $u \mapsto u^t = u$ 和 $v \mapsto v^t$ 定义了由此生成的算子系统之间的一个单位等距映射，其中第二个算子系统由 u、v^t 生成，它们构成一个 $q' = \bar{q}$-交换酉算子的泛对。至此证明完成。□

References

[1] William B. Arveson。《C*-代数的子代数》。Acta Mathematica，123：141–224，1969。[2] William B. Arveson。《非交换 Choquet 边界》。Journal of the American Mathematical Society，21(4)：1065–1084，2008。[3]Florin-Petre Boca。《旋转 C*-代数与几乎 Mathieu 算子》。The Theta Foundation，布加勒斯特，2001。[4] Man-Duen Choi。《C*-代数上的正线性映射》。Canadian Journal of Mathematics，24(3)：520–529，1972。[5] Kenneth R. Davidson、Adam Dor-On、Orr M. Shalit 和 Baruch Solel。《膨胀、矩阵凸集的包含关系与完全正映射》。International Mathematics Research Notices，2017(13)：4069–4130，2017。[6] Kenneth R. Davidson 和 Matthew Kennedy。《算子系统的 Choquet 边界》。Duke Mathematical Journal，164(15)：2989–3004，2015。[7] Michael A. Dritschel 和 Scott A. McCullough。《算子代数及其空间的表示族的边界表示》。Journal of Operator Theory，第159–167页，2005。[8] Eric Evert、J. William Helton、Igor Klep 和 Scott McCullough。《矩阵凸集、自由谱半代数集与扩张理论的极端点》。The Journal of Geometric Analysis，28(2)：1373–1408，2018。

[9] Douglas R. Farenick。《算子系统上的极端矩阵态》。伦敦数学学会杂志，61(3)：885–892，2000。[10] Douglas R. Farenick 和 Ryan Tessier。《算子系统嵌入 C*-包络与内射包络的纯性》。太平洋数学杂志，317(2)：317–338，2022。[11] Malte Gerhold 和 Orr M. Shalit。《q-交换酉算子的膨胀》。International Mathematics Re-search Notices，2022(1)：63–88，2022。[12] Malte Gerhold、Satish K. Pandey、Orr M. Shalit 和 Baruch Solel。《酉算子元组的膨胀》。伦敦数学学会杂志，104(5)：2053–2081，2021。[13] Michael Hartz 和 Martino Lupini。《有限维中的扩张理论与矩阵凸性》。以色列数学杂志，245(1)：39–73，2021。[14] Craig Kleski。《边界表示与纯完全正映射》。Journal of Operator Theory，第45–62页，2014。[15] Tom-Lukas Kriel。《矩阵凸集与自由谱半代数集导论》。《复分析与算子理论》，13(7)：3251–3335，2019。[16] Richard I. Loebl 和 Vern I. Paulsen。《关于 C*-凸性的一些评述》。Linear Algebra and its Applica-tions，35：63–78，1981。[17] Paul S. Muhly 和 Baruch Solel。《边界表示的代数刻画》。载于《非自伴算子代数、算子理论及相关主题》，第189–196页。施普林格，1998。[18] Benjamin Passer、Orr M. Shalit 和 Baruch Solel。《最小与最大矩阵凸集》。《泛函分析杂志》，274(11)：3197–3253，2018。[19] Vern Paulsen。《完全有界映射与算子代数》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2002。[20] W. Forrest Stinespring。《C*-代数上的正函数》。《美国数学会会刊》，6(2)：211–216，1955。[21] Jun Tomiyama。《矩阵代数中正映射的几何。ii 》。Linear algebra and its appli-cations，69：169–177，1985。[22] Corran Webster 和 Soren Winkler。《算子凸性中的克莱因–米尔曼定理》。《美国数学会汇刊》，351(1)：307–322，1999。