arXiv:2302.04776v1 [math.AG] 9 Feb 2023

使用任意次数膨胀法隔离解析系统的零点簇

MICHAEL BURR、KISUN LEE 和 ANTON LEYKIN

Abstract. 给定一个解析函数系统以及对某个零点簇的近似，我们希望构造两个区域，使其包含该簇且不包含系统的其他零点。较小的区域紧密包含该簇，而较大的区域则将其与系统的其他零点隔开。我们通过膨胀法实现这一目标。令人意外的是，该方法将问题与另一个更适合我们处理的系统联系起来，不过该系统对应的零点簇更大。

1. Introduction

设 $\mathcal{F}$ 是一个由 m 个解析函数组成的系统，其定义在 n 个未知数上，其中 $m \geq n$，且 $z^* \in \mathbb{C}^n$ 是 $\mathcal{F}$附近若干孤立零点中的一点，即 z^* 近似于 一个零点簇，该簇属于 $\mathcal{F}$。零点簇隔离问题是要计算两个闭区域 R_- 和 R_+ 以及一个正整数 c，使得

(1) $z^* \in R_- \subseteq {R_+}^\circ$，其中 ${R_+}^\circ$ 是 R_+ 的内部；(2) $\mathcal{F}$ 的零点数在 R_- 和 R_+ 中相同，且等于 c。

换句话说， R_- 围住了 $\mathcal{F}$ 的一簇 c 零点，而这簇零点通过 $R_+ \setminus R_-$ 与 $\mathcal{F}$ 的其他零点隔离开来。我们还考虑一种放宽情形： c 是 R_- 和 R_+ 中零点数的上界。

我们提出一种膨胀方法，该方法适用于方阵系统情形（$m = n$），并在成功时给出精确计数 c。当膨胀失败以及在超定情形下，我们提供一种可得出零点簇大小上界的方法。

概括而言，我们采用以下步骤：

(1) 根据给定的系统 $\mathcal{F}$，找到一个邻近的系统 $\mathcal{G}$，使其在 z^* 处有一个奇点；(2) 计算 $\mathcal{G}$ 在 z^* 处的奇点结构；(3) 利用 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 之间的关系，根据 $\mathcal{G}$ 在 z^* 处的奇点结构，推断 $\mathcal{F}$ 在 z^* 附近零点的位置和数量。

“附近”一词仅应在口语和鼓励性的意义上使用，因为我们并未提供用于判定邻近程度的度量。我们考虑对 $\mathcal{F}$ 进行数值和符号扰动，以生成$\mathcal{G}$，但要求最终计算必须经过认证。换言之，在计算过程中，我们的算法不仅会生成整数 c 以及区域 R_- 和 R_+，还会提供正确性证明，说明 R_-、 R_+和 c 具有所需的性质。

由于我们的所有构造和计算都针对某一点的一个小邻域，并且能够容忍该邻域内函数的微小扰动，因此只要有有效的方法估计其与原函数的差异，就可以用多项式替代解析函数。因此，在本文余下部分中，我们始终聚焦于多项式情形。

1.1. 研究动机与贡献。许多数值和符号算法在计算或近似奇异或成簇的多项式零维系统的零点时会遇到困难。然而，对于某些算法，提供有关这些簇的信息（例如其大小、位置以及与其他零点的距离）可以帮助恢复这些算法的效率 [7, 10]。此外，这些簇的相关数据也可用于推导更精确的算法复杂度估计，参见例如 [14, 3, 4, 1]。

我们的主要贡献在于将第一作者和第三作者在 [6]中提出的、被称为 膨胀 的技术加以推广。与直觉相反，膨胀过程会将一个具有重零点的方阵系统转换为另一个具有相同重零点、但具有更高重数的方阵系统。

在 [6], 中定义了阶数为 d的正则零点概念。本文定义了阶数为 d且宽度为 κ的正则零点，其中：

- 一个阶为 d 的正则零点对应于一个阶为 d 、宽度为 n 的正则零点，
- 一个正则零点（通常意义下）是一个阶为 1 的正则零点。

在这一新术语中， [6]的原始膨胀过程试图从一个阶为 2 且具有任意宽度的正则零点构造出一个阶为 2 的正则零点。这里我们提出任意阶膨胀，这是一种从阶为 d 的正则零点构造阶为 d 且具有任意宽度的正则零点的程序。这比 [6]中的方法要微妙且复杂得多。此外，对于无法直接应用膨胀的系统，我们开发了新的方法来隔离该簇，并给出该簇大小的上界。

隔离区域的形状由输入系统所接近的奇点类型决定。尽管这些区域可能继而很容易被欧几里得球所界定，但这将是不必要的放宽：我们构造的区域 R_- （例如，见图1）是自然的，并且比可内接它的球更紧密地包围该簇。

从数值应用的角度来看，针对 $\mathcal{G}$ 所执行的膨胀符号过程。具体而言，我们所用的变换应用于一个邻近的多项式系统 $\mathcal{F}$，该系统具有一个零点簇。最后，变换对 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 之差的影响必须足够小，才能应用多变量版本的*Rouch´e* 定理 [5, （定理 2）12]。我们注意到，我们的认证步骤与 [2], 中的认证类似，但两篇论文的目标不同，而利用膨胀使系统正则化是本文的一项创新贡献。

我们注意到，我们所采用的范式并不区分只有一个奇异零点的情形与多个简单零点或奇异零点紧密聚集的情形。我们的目标是生成引言中所述的隔离区域。需要指出的是，我们构造具有奇异零点的邻近系统的过程并非在所有情况下都有效。在更一般的情形下生成邻近的奇异系统，是 [12], 等工作的研究重点。此外，我们假设已知一个近似 z^* 。还有一些更有针对性的研究，例如研究如何在嵌入维数为一时近似一个簇 [9], 或通过降 deflation 恢复奇异解附近牛顿法的收敛性 [11], 。

对于我们的方法无法处理的情形，如何隔离聚簇，以及如何寻找新的算法来近似聚簇，值得进一步研究。

1.2. 概述。 在第 2 节中，我们考虑一个具有奇异零点的方阵系统。首先，我们引入必要的变换，将系统转化为具有宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点的预膨胀形态；随后进行膨胀，以隔离原来的奇异零点。在第 3 节中，我们证明，将相同的过程应用于一个邻近系统，可以成功隔离一个根的聚簇。在第 4 节中，我们考虑难以或无法转化为可膨胀形态的系统，并说明经过符号操作后，仍有可能隔离一个聚簇，且可以给出该聚簇大小的上界。第 5 节专门用于证明我们的结果。

2. Inflation

我们首先考虑的情形是：一个方阵系统在 z^* 处有奇点。这是第 3 节一般情形中的关键步骤，因为在那里我们会用一个邻近的奇异系统替换给定系统。为简单起见，在许多计算中，我们假设 z^* 是原点。由于点 z^* 已明确给出或计算为有理点，因此执行这一变换不需要繁复的符号技术。

2.1. 具有宽度的正则κ 阶系统 d。 考虑分次局部序 $>$在 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$上，也就是说，阶 $>$ 满足乘法性；若两个指数向量 α 和 β 满足 $|\alpha|>|\beta|$，则 $x^\alpha < x^\beta$。对于多项式，我们用首项表示按照阶 $>$选出的最大非零单项式，并用初始形式表示由多项式中总次数最小的项构成的齐次多项式。我们将多项式系统的宽度 κ 定义为其雅可比矩阵的零度。

对于理想 $I=\langle\mathcal{F}\rangle\subseteq\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$，其标准单项式是指那些不会作为多项式的首项出现的单项式，其中多项式属于 I。对于每个 i，我们定义在希尔伯特函数处取值的（局部） i，记为$h_\mathcal{F}(i)$，其值为总次数为 i 且作为标准单项式出现的单项式个数。相应的（局部）希尔伯特级数定义为 $HS_\mathcal{F}(t)=\sum_{i\geq 0}h_\mathcal{F}(i)t^i$。注意， $h_\mathcal{F}(1)=\kappa$。

定义 2.1。设 $\mathcal{P}=\{p_1,\ldots,p_n\}$ 是一个方形多项式系统 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$，使得原点是 $\mathcal{P}$ 的一个宽度为 κ的孤立零点。若原点是一个宽度为 κ 、阶为d的正则零点， $\langle\mathcal{P}\rangle$ 在原点处的希尔伯特级数为 $(1+t+\cdots+t^{d-1})^{\kappa}$。

我们注意到，当原点是系统 $\mathcal{P}$ 的宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点时，原点处零点的重数为 d^{κ}。

在本节余下部分，我们给出算法 3，该算法将任意方形多项式系统转换为一种称为预膨胀形式的标准化形式。

定义 2.2。设 $\mathcal{P}=\{p_1,\ldots,p_n\}$ 是 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 中的一个方形多项式系统，且原点是 $\mathcal{P}$ 的孤立零点。我们称 $\mathcal{P}$ 为一个 $(\kappa,\ k,\ \ell)$-预膨胀系统，如果

(1) $\mathcal{P}$的宽度为 κ，且雅可比矩阵的核为 $\langle e_1,\ldots,e_{\kappa}\rangle$，其中 e_i 表示第 i 个标准基向量；(2) p_1、……、p_{κ} 中涉及 $x_{\kappa+1}$、……、x_n 的唯一项的次数大于 k；(3) $p_{\kappa+1}$、……、p_n 中仅涉及 x_1、……、x_{κ} 的唯一项的次数大于 ℓ。

当我们的算法应用于具有宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点的方阵系统时，我们在第 5 节证明，所得系统具有特别良好的结构。具体而言，当预膨胀算法的参数为 $k=\ell=d$ 时，所得系统可由以下定理描述:

定理 2.1。设 $\mathcal{G}$ 是一个含有 n 个变量、且在 z^* 处有零点的方阵系统。假设 z^* 是一个宽度为 κ 、阶为 d 的零点。那么，存在一个局部可逆变换，使 z^* 成为多项式系统 $\mathcal{P}=\{p_1,\ldots,p_n\}$ 在原点处宽度为 κ、阶为 d 的正则零点，并且该系统是 $(\kappa,\ d,\ d)$-预膨胀的，满足

(1) 对于 $1\le i\le\kappa$，每个 p_i 的初始次数均等于 d；(2) p_1、……、p_{κ} 的初始形式在 x_1、……、x_{κ} 的单位球面上不为零；(3) 对于 $\kappa+1\le i\le n$， p_i 的初始形式为 x_i。

我们注意到，当第二个条件成立时， p_1，……， p_{κ}的初始形式构成一个正则序列。定理 2.1 中所述形式的系统非常适合应用膨胀。

膨胀算子的阶为 d ，宽度为 κ ，其定义为

$$S_{\kappa}^{d}(x_i)=\begin{cases}x_i & 1\le i\le\kappa\\ x_i^{d} & \kappa+1\le i\le n\end{cases}.$$

[6] 中的膨胀算子的阶为 2，宽度为 κ。

2.2. **构造正则零点**。假设给定系统 $\mathcal{G}$ 在原点处有一个宽度为 κ 的奇异零点。我们给出一系列变换，以构造一个等价系统，使其对于任意给定的 $k,\ \ell\in\mathbb{N}$ 都是（$\kappa,\ k,\ \ell$）-预膨胀的，见算法 1。

首先，由于 $\mathcal{G}$ 的宽度为 κ，存在一个线性变换 $A:\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ ，使得 $\mathcal{A}:=\mathcal{G}\circ A$的雅可比矩阵的核由 e_1，……，e_{κ} 张成，其中 e_i 表示第 i 个标准基向量。这意味着， $\mathcal{A}$中多项式的线性部分只涉及 $x_{\kappa+1}$，……， x_n。

其次，存在一个线性映射 B：$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^n\to\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^n$，使得 $\mathcal{B}:=B\circ\mathcal{A}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ 是一个方形多项式系统，其中 $b_1,\ldots,b_{\kappa}$ 不含任何线性项，而 b_i 的线性部分为x_i ，其中 $i>\kappa$。映射 B 可用于对 $\mathcal{A}$中多项式的线性部分进行行约化。

接下来，对于给定的 k，存在一个可逆线性映射 C_k：$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^n\to\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^n$，使得$\mathcal{C}_k:=C_k\circ\mathcal{B}=\{c_1,\ldots,c_n\}$ 是一个具有与 $\mathcal{B}$相同性质的方形多项式系统；此外，在 $c_1,\ldots,c_{\kappa}$中，含有 $x_{\kappa+1},\ldots,x_n$ 的项的最小总次数大于 k。这一变换可通过利用 $b_{\kappa+1},\ldots,b_n$ 的首项，消去含有 $x_{\kappa+1},\ldots,x_n$ 且次数较低的单项式来实现。

最后，对于给定的 ℓ，存在一个可逆变量变换，记作 D_{ℓ}，使得 $\mathcal{P}_{k,\ \ell}:=\mathcal{C}_k\circ D_{\ell}=\{p_1,\ldots,p_n\}$ 是一个具有与 $\mathcal{C}_k$ 相同性质的方形多项式系统，并且 $p_{\kappa+1},\ldots,p_n$ 中仅涉及 $x_1,\ldots,x_{\kappa}$ 的项的最小次数大于 ℓ。此变量变换可通过一系列形如 $x_i\mapsto x_i+q_i(x_1,\ldots,x_{\kappa})$ 的变换实现，其中 q_i 是某个多项式，其余变量保持不变。

算法 1预膨胀构造

输入：一个具有奇异零点 z^*、宽度为 κ 的方形多项式系统 $\mathcal{G}$，以及整数 d 和 ℓ。输出：一个 (κ, k, ℓ)-预膨胀系统，其在原点处的零点重数与 z^* 相同，适用于 $\mathcal{G}$。1：应用仿射变换 $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，使得 $A(0) = z^*$，且$\mathcal{A} = \mathcal{G} \circ A$的雅可比矩阵的核由标准基向量 e_1、…、e_κ 张成。2：应用线性映射 $B: \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^n \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^n$，构造系统 $\mathcal{B} = B \circ \mathcal{A} = \{b_1, \ldots, b_n\}$，使得对于 $i = 1, \ldots, \kappa$，b_i 不含任何线性项，且 b_i 的线性形式为 x_i，其中 $i > \kappa$。3：应用线性映射 $C_k: \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^n \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^n$，生成系统 $\mathcal{C}_k = C_k \circ \mathcal{B} = \{c_1, \ldots, c_n\}$，使得在 $c_1, \ldots, c_\kappa$ 中，含有 $x_{\kappa+1}, \ldots, x_n$ 的项的最小总次数大于 k。4：应用变量替换 D_ℓ，生成系统 $\mathcal{P}_k$、$_\ell = \mathcal{C}_k \circ D_\ell = \{p_1, \ldots, p_n\}$，使得在 $p_{\kappa+1}, \ldots, p_n$ 中，仅含有 $x_1, \ldots, x_\kappa$ 的项的最小总次数大于 ℓ。

这一系列变换所关注的性质是引理 5.1 的推论；该引理证明了所得系统是（κ，k，ℓ）-预膨胀的。下面的例子具体说明了这一构造：

例 2.3。 [13, 例 4.1]考虑多项式系统

$$\mathcal{G} = \begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_1^2 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_2^2 \end{Bmatrix}.$$

该系统在原点处有一个零点，其雅可比矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$，并且具有由 $\langle 1, -2 \rangle$ 张成的一维非平凡核。因此，该系统是宽度一的。我们由 $\mathcal{G}$ 构造一个（1，3，3）-预膨胀系统。

对于线性变换 A，我们使用矩阵 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$；该酉矩阵将第一个标准基向量映射到雅可比矩阵的核中的一个非零元素，并将第二个标准基向量映射到一个与该核垂直的向量。所得系统为

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} \circ A = \begin{Bmatrix} \sqrt{5}x_2 + \frac{x_1^2}{5} + \frac{4x_1x_2}{5} + \frac{4x_2^2}{5} \\ 4\sqrt{5}x_2 + \frac{4x_1^2}{5} - \frac{4x_1x_2}{5} + \frac{x_2^2}{5} \end{Bmatrix}.$$

接下来，对该系统的线性部分进行行约化，其矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，得到系统

$$\mathcal{B} = B \circ \mathcal{A} = \begin{Bmatrix} x_1x_2 + \frac{3x_2^2}{4} \\ x_2 + \frac{x_1^2}{5\sqrt{5}} - \frac{x_1x_2}{5\sqrt{5}} + \frac{x_2^2}{20\sqrt{5}} \end{Bmatrix}.$$

接下来，$k = 3$ 的变换是符号变换，它利用第二个多项式的初始 x_2，消去第一个方程中含有 x_2 的单项式。该变换由矩阵给出

$$C_3 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{5} & 5\sqrt{5}x_1 + \frac{15\sqrt{5}x_2}{4} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1x_2}{2} - \frac{3x_2^2}{16} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由此得到系统

$$\mathcal{C}_3 = C_3 \circ \mathcal{B} = \begin{Bmatrix} x_1^3 + \frac{x_1^4}{20\sqrt{5}} + \frac{x_1^3x_2}{20\sqrt{5}} - \frac{x_1^2x_2^2}{8\sqrt{5}} + \frac{x_1x_2^3}{16\sqrt{5}} - \frac{3x_2^4}{320\sqrt{5}} \\ x_2 + \frac{x_1^2}{5\sqrt{5}} - \frac{x_1x_2}{5\sqrt{5}} + \frac{x_2^2}{20\sqrt{5}} \end{Bmatrix}.$$

最后，对 $\ell = 3$ 进行变量替换，通过将 x_2 替换为 $x_2 - \frac{x_1^2}{5\sqrt{5}} - \frac{x_1^3}{125}$，把涉及 x_1 的无关项吸收到 x_2 中。由此得到的多项式相当长，但许多

系数的绝对值相当小。所得系统以以下内容开头

$$\mathcal{P}_{3,3} = \mathcal{H} \circ D_3 = \left\{ \begin{array}{c} x_1^3 + \frac{x_1^4}{20\sqrt{5}} + \frac{x_1^3 x_2}{20\sqrt{5}} - \frac{x_1^2 x_2^2}{8\sqrt{5}} + \frac{x_1 x_2^3}{16\sqrt{5}} - \frac{3x_2^4}{320\sqrt{5}} + \cdots \\ x_2 - \frac{x_1 x_2}{5\sqrt{5}} + \frac{x_2^2}{20\sqrt{5}} - \frac{x_1^2 x_2}{250} + \frac{x_1^4}{500\sqrt{5}} - \frac{x_1^3 x_2}{1250\sqrt{5}} + \cdots \end{array} \right\}$$

由于变换 B 和 C_k 对任意 k都可逆，因此我们注意到 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{C}_k$ 生成相同的理想。按照例 2.3 中的方法，由 $\mathcal{G}$构造 $\mathcal{P}_{k,\ \ell}$，作为一个预处理步骤，使得所得系统是预膨胀系统。

遗憾的是，并非所有预膨胀系统都能成功膨胀，从而使用我们的技术隔离其零点。只有当 (κ, d, d)-预膨胀系统具有宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点时，才能使用我们的技术对这些系统进行膨胀。

2.3. **应用膨胀**。 设 $\mathcal{P}$是一个 (κ, d, d)-预膨胀系统，其中原点是一个宽度为 κ 、阶为 d的正则零点。于是，系统 $\mathcal{P} \circ S_\kappa^d$ 是一个方阵系统，其初始形式的次数均为 d，且构成一个正则序列，参见第 5.2 节。因此，$\mathcal{P} \circ S_\kappa^d$ 在原点处有一个重数为 d^n 的零点。

令 $(\mathcal{P} \circ S_\kappa^d)_d$ 表示由 $\mathcal{P} \circ S_\kappa^d$ 的初始形式组成的 d 次方形齐次系统。由于该系统在单位球面上不为零，令 M 为 $\|(\mathcal{P} \circ S_\kappa^d)_d\|$ 在（Hermitian）单位球面上的一个正下界。

由于 $\mathcal{P} \circ S_\kappa^d - (\mathcal{P} \circ S_\kappa^d)_d$ 的所有项的次数都大于 d，存在常数 $C > 0$，使得对所有 $\|x\| \leq 1$， $\|\mathcal{P} \circ S_\kappa^d(x) - (\mathcal{P} \circ S_\kappa^d)_d(x)\| \leq C\|x\|^{d+1}$. 。然后，如引理 5.6 中一样应用 Rouch´e 定理，$(\mathcal{P} \circ S_\kappa^d)_d$ 和 $\mathcal{P} \circ S_\kappa^d$ 在半径为 ε的球内都有 d^n 个零点。

显然，原点是重数为 d^n 的 $\mathcal{P} \circ S_\kappa^d$的零点；不过这项计算的意义在于，半径为 ε的球内没有其他零点。所建立的过程总结于算法 2。

例 2.4. 接续例 2.3，多项式系统 $\mathcal{P}_{3,3}$ 是 (1,3,3)-预膨胀的，且原点是宽度为 1、阶为 3 的正则零点。膨胀步骤将 x_2 替换为 x_2^3。得到的系统为

$$\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3 = \left\{ \begin{array}{c} x_1^3 + \frac{x_1^4}{20\sqrt{5}} - \frac{x_1^5}{500} - \frac{7x_1^6}{5000\sqrt{5}} + \frac{x_1^3 x_2^3}{20\sqrt{5}} - \frac{x_1^7}{10000} + \cdots \\ x_2^3 + \frac{x_1^4}{500\sqrt{5}} - \frac{x_1 x_2^3}{5\sqrt{5}} + \frac{x_1^5}{31250} - \frac{x_1^2 x_2^3}{250} + \frac{x_1^6}{312500\sqrt{5}} + \cdots \end{array} \right\}.$$

在此例中，$(\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3)_3 = \{x_1^3, x_2^3\}$，且 $\|(\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3)_3(x)\| \geq \frac{1}{2}$，其中$x$的范数为 1。我们注意到，$\mathcal{P}_{3,3} \circ S_\kappa^3$ 的非初始系数绝对值之和为 $\frac{39599350003}{78125000000\sqrt{5}} + \frac{98831503}{3906250000} \approx 0.251981$。由于这小于 $\frac{1}{2}$，对于任意固定的 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和 $\|x\| = \varepsilon$，

$$\|(\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3)_3(x)\| > \|\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3(x) - (\mathcal{P}_{3,3} \circ S_1^3)_3(x)\|. \tag{1}$$

因此，Rouch´e 定理适用，$\mathcal{P}_{3,\ 3} \circ S_1^3$ 在半径为 ε 的球内有 3^2 个零点。

由于包含这 9 个零点的球由 $|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq \varepsilon$ 定义，我们可以应用变量变换 A, D_3, S_1^3 的逆变换，在原坐标中计算出以下区域，

$$\frac{1}{5}|x_1 - 2x_2|^2 + \frac{1}{5^{1/3}}\left|(2x_1 + x_2) + \frac{(x_1 - 2x_2)^2}{25} + \frac{(x_1 - 2x_2)^3}{625}\right|^{\frac{2}{3}} \leq \varepsilon^2,$$

其中包含 $\mathcal{F}$ 的三重零点。我们观察到，膨胀映射将 $\mathcal{P}_{3,\ 3} \circ S_1^3$ 的零点三对一地覆盖到 $\mathcal{P}_{3,\ 3}$ 的零点，从而确认了 $\mathcal{F}$ 的根计数。

定理 2.2。 假设 $\mathcal{G}$ 是一个方形多项式系统，其中 z^* 是 $\mathcal{G}$ 的宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点。算法 2 生成一个包含 z^* 且不含 $\mathcal{G}$ 其他零点的区域。此外， z^* 处零点的重数为 d^κ。

我们注意到，在考虑一个（精确的）奇异零点时，我们只会得到较大的区域 R_+，因为较小的区域 R_- 可以取为平凡区域，即 $R_- = \{z^*\}$。

算法 2用于隔离奇异零点的广义膨胀

输入：一个方形多项式系统 $\mathcal{G}$，其有一个宽度为 κ、阶为 d 的正则零点 z^*。**输出**：一个包含零点 z^* 且不包含 $\mathcal{G}$ 的其他零点的区域 R_+。1: 对 $\mathcal{G}$ 应用算法 1，构造一个（κ，d，d）-预膨胀系统 $\mathcal{P}_{d,\ d}$。2: 使用膨胀算子 S_κ^d 构造系统 $\mathcal{P}_{d,\ d}\circ S_\kappa^d$，并求出 ε，使得 $\mathcal{P}_{d,\ d}\circ S_\kappa^d$ 在半径为 ε 的球内有 d^n 个零点。3: 将 $A\circ D_\ell\circ S_\kappa^d$ 的逆变换应用于半径为 ε 的球，得到隔离区域 R_+。

3. Clusters of Zeros

在我们方法的预期应用中，我们并不期望给定一个具有重零点的系统，如第 2 节所探讨的那样。相反，我们期望给定一个具有零点簇的系统，其中每个零点的重数均为一。设 $\mathcal{F}$ 是一个方形多项式系统，且 z^* 逼近 $\mathcal{F}$ 的一个零点簇的中心。我们的方法是寻找一个邻近的奇异系统，并利用该系统来获取有关 $\mathcal{F}$ 的零点的信息。

3.1. 隔离簇。 设系统 $\mathcal{G}$ 在 z^* 处有一个（奇异）零点，其系数接近于 $\mathcal{F}$ 中的系数。还设存在可逆映射 $T\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 和 $U\colon \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^n\to\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^n$，使得原点是 $U\circ\mathcal{G}\circ T$ 的一个宽度为 κ、阶为 d 的正则零点。U 和 T 的一个候选形式见第 2.2 节。随后，我们将这些映射和膨胀应用于原系统，得到系统 $U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d$。令 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_d$ 表示该系统的次数为 d 的齐次部分。同样地，我们将 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{>d}$ 和 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{<d}$ 分别表示大于或小于 d 的项。

令 M 为（厄米）单位球面上 $\|(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_d\|$ 的一个正下界。由于 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{>d}$ 的所有项的次数都大于 d，因此存在常数 $M_1>0$，使得对所有 $\|x\|\le 1$，都有 $\|(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{>d}\|\le M_1\|x\|^{d+1}$。类似地，由于 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{<d}$ 的所有项的次数都小于 d，因此存在常数 $M_2>0$，使得对所有 $\|x\|\le 1$，都有 $\|(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_{<d}\|<M_2$。若 $\binom{2M_2}{M}^{1/d}<\frac{M}{2M_1}$，则对于介于 $\varepsilon_-=\binom{2M_2}{M}^{1/d}$ 和 $\varepsilon_+=\frac{M}{2M_1}$ 之间的任意 ε，$\|(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_d(x)\|$ 都占主导地位，高于 $U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d$ 的其他部分；根据 Rouch´e 定理（见引理 5.6），$U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d$ 和 $(U\circ\mathcal{F}\circ T\circ S_\kappa^d)_d$ 在半径为 ε 的球内具有相同数量的零点。较小的区域 R_- 对应于下界 ε_-，较大的区域 R_+ 对应于 ε 上的上界 ε_+。

例 3.1. 考虑多项式系统

$$\mathcal{F}=\begin{Bmatrix}2x_1+x_2+x_1^2+0.001\\ 8x_1+4x_2+x_2^2+0.001\end{Bmatrix}$$

其近似零点为 $z^*=(-0.0001,\ -0.0001)$。该系统是我们在例 2.3 中贯穿使用的示例的一个扰动。簇中的三个零点近似为 $(-0.043-0.082i,\ 0.091+0.158i)$、$(-0.043+0.082i,\ 0.091+0.158i)$ 和 $(0。086,\ -0.181)$，而 z^* 是它们的平均值的近似值。

首先，我们对系统 $\mathcal{F}$ 进行平移，使 z^* 位于原点。所得系统与例 2.3 中的系统 $\mathcal{G}$ 非常接近。应用例 2.3 和例 2.4 中相同的变换后，所得系统（四舍五入后）为

$$\begin{Bmatrix}-0.0084+0.0013x_1+0.000078x_1^2+x_1^3+0.0016x_2^3+\dots\\ -0.000022+0.00002x_1+0.00000089x_1^2+0.00000008x_1^3+x_2^3+\dots\end{Bmatrix}.$$

在这种情况下，系统的三次部分在单位圆上的下界为 0。4984。另一方面，次数小于 3 的系数之和大于 0。009757，可用于 M_2。最后，次数大于 3 的系数之和小于 0。2746，可用于 M_1。因此，我们可以选择 $\varepsilon_+=0.9075$ 和 $\varepsilon_-=0.3396$，如图1在原始域中所示。

该系统的另一个零点约为 $(4,\ 8)$，与图中所示的所有隔离区域都相距甚远。我们还注意到，这些区域并非凸区域，且其边界仅为分段光滑。

注释 3.2. 一种计算 M 的方法基于 [6] 中的平方和计算。对于界 M_1 和 M_2，一种求得这些界的方法是对相应系统中出现的系数的绝对值求和。

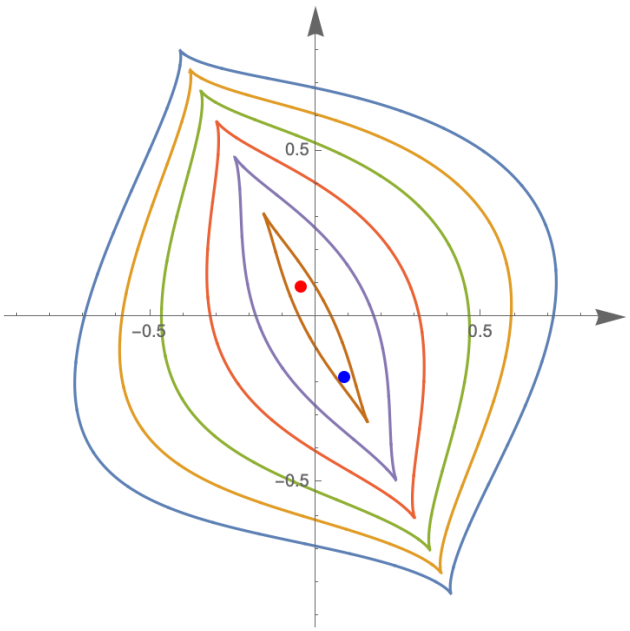


FIGURE 1. 零点簇的隔离区域等高线，$\mathcal{F}$。最内层和最外层等高线分别是 R_- 和 R_+的边界，它们是我们的方法生成的最小和最大隔离区域。第二象限中的（红色）点表示两个共轭非实零点的实部。

算法 3 用于隔离零点簇的广义膨胀 输入：方形多项式系统 $\mathcal{G}$，其在 z^* 附近有一个零点簇，且 $d \in \mathbb{N}$。输出：一对区域 R_+ 和 R_-，它们包含该零点簇，且不包含 $\mathcal{G}$ 的其他零点，并满足 $R_- \subseteq R_+^\circ$。1：构造一个接近给定系统的奇异系统 $\mathcal{G}$。2：对 $\mathcal{G}$ 应用带参数 $k = \ell = d$ 的算法 1，并收集作用于 $\mathcal{G}$ 的两个可逆映射 U 和 T，记为 $U \circ \mathcal{G} \circ T$。3：计算 $U \circ \mathcal{F} \circ T \circ S_\kappa^d$。4：计算 $(U \circ \mathcal{F} \circ T \circ S_\kappa^d)_d$ 在（厄米）单位球面上的下界 M。5：计算 $(U \circ \mathcal{F} \circ T \circ S_\kappa^d)_{>d}/\|x\|^{d+1}$ 在单位圆盘上的上界 M_1。6：计算 $(U \circ \mathcal{F} \circ T \circ S_\kappa^d)_{<d}$ 在单位圆盘上的上界 M_2。7：计算 $\varepsilon_- = \binom{2M_2}{M}^{1/d}$ 和 $\varepsilon_+ = \frac{M}{2M_1}$。8：如果 $\varepsilon_- < \varepsilon_+$，则 9：将半径为 ε_- 和 ε_+ 的球经 $T \circ S_\kappa^d$ 的逆变换，得到隔离区域 R_- 和 R_+。10：结束如果

定理3.1。设 $\mathcal{F}$ 是一个方形多项式系统，其中 z^* 近似于一个零点簇。如果算法 3 成功，则会生成一对区域 R_- 和 R_+，它们包含 z^* 和该零点簇，且满足 $R_- \subseteq R_+^\circ$。此外，该簇中的零点数为 d^κ。

3.2. **构造奇异系统**。为完成第 3.1 节中概述的步骤，我们需要能够构造适当的奇异系统 $\mathcal{G}$。一种构造此类系统的方法在 [6,第 2 节1] 中有所介绍，它通过对雅可比矩阵 $D\mathcal{F}(z^*)$进行奇异值分解来实现。该构造还提供了κ，作为雅可比矩阵小奇异值数量的计数。

对于任意 $d > 0$，我们都可以应用算法 2 对 $\mathcal{G}$进行处理，从而构造一个 (κ, d, d)-预膨胀系统。结果系统不太可能以原点为宽度 κ、阶数为 d 的正则零点。

尽管算法 2 得到的多项式系统本身可能不适合进行膨胀，但将构造出的变换应用于 $\mathcal{F}$（如第 3.1 节所述），或许能够成功隔离

$\mathcal{F}$。我们有实验依据表明，当 p_1、……、 p_κ 中的额外项系数较小时，应用这些变换将会成功。

注 3.3。 在构造预膨胀系统时， d 的值既可以预先给定，也可以通过计算猜测得到。具体而言，我们可以对许多不同的 d 值应用算法 2，直到所得系统的次数为d 的齐次部分包含足够多的项，且其系数大于某个容差，使该部分在单位球面上不消失。

4. Irregular systems

即使第 2 节中的方法对奇异系统不适用，我们仍会介绍隔离该簇并估计其大小的方法。第 2 节中的方法可能失效的三种情形是：原点是宽度为 κ、阶为 d的正则零点；(κ, d, d)-预膨胀系统的初始形式在单位球面上消失；以及初始系统不是方阵系统。

4.1. **不均匀膨胀**。 定理 2.1 中多项式系统的结构经过专门设计，使我们能够了解膨胀后系统的结构，见第 5.2 节。具体而言，构造预膨胀系统时的若干步骤旨在控制膨胀后系统的初始形式中会出现哪些项。

当多项式系统的初始形式在单位球面上不为零，但次数不合适时，我们可以应用一个膨胀算子，分别改变每个变量的次数。为说明这一点，请看下面这个启发性示例：

例 4.1. 考虑以下多项式系统族，其中 a 是一个参数：

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2^2 + a x_3^2 + x_3^4 \\ x_3^3 \end{array} \right\}.$$

一种初步尝试是通过将 x_1、 x_2 和 x_3 分别替换为 x_1^6、 x_2^3 和 x_3^2来进行膨胀。不幸的是，经过这一步膨胀后，得到的系统为

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1^6 \\ a x_3^4 + x_2^6 + x_3^8 \\ x_3^6 \end{array} \right\}.$$

除非 $a = 0$，否则我们无法应用所述方法；此时初始形式的次数均为 6，且在单位球面上不为零。

当 $a = 0$时，膨胀后的系统在原点处有一个重数为 $6^3 = 216$ 的零点，因此可以应用 Rouch´e 定理来隔离这些零点。此外，由于膨胀映射是 36 对 1 的，这个区域隔离了原系统的 6 个解。

当 $a \neq 0$ 时，不可能选择一个膨胀映射，使得所有初始形式的次数都相同。在这种情况下，膨胀方法行不通，我们必须考虑其他方法。

对于一般的奇异系统 $\mathcal{G}$，其中零点不是正则零点，假设可以将每个变量替换为某个幂，使得所得系统的所有首项次数都相同。在这种情况下，可以应用 Rouch´e 定理（见引理 5.6）来分离该簇。要使这种方法奏效，通常需要系统 $\mathcal{G}$ 的初始形式具有某种结构，并且与具体问题相关的高次项的系数为零。

4.2. **上界**。 可以尝试进行符号变换，从而得到一个适用 Rouch´e 定理的系统（见引理 5.6）。给定一个由 m 个函数构成、含有 n 个未知数的奇异系统 $\mathcal{G}$，其中 $m \geq n$ 在原点处有一个孤立零点，则存在一个 $n \times m$ 矩阵 T，使得其中多项式的初始形式在单位球面上不为零。在 $m = n$ 的情况下，也可以找到一个合适的 T，它在原点处的奇点邻域内可逆。因此，原点作为 $T\mathcal{G}$ 的零点的重数只是 $\mathcal{G}$ 重数的上界。

一种常用的“重写”方法是通过局部 Gr¨obner 基计算导出 T。具体而言，我们从 Gr¨obner 基中选取 n 个初始项为纯幂的元素。由于无论 $\mathcal{F}$ 中方程的数量如何，我们都只从 Gr¨obner 基中选取 n 个元素，因此该过程也适用于超定情形。以下示例展示了这种方法：

例 4.2. 考虑以下奇异多项式系统

$$\mathcal{G} = \begin{Bmatrix} x_1x_2 - x_3^3 \\ x_2x_3 - x_1^3 \\ x_1x_3 - x_2^3 \end{Bmatrix}.$$

初始形式在坐标方向上的单位球面上同时为零。通过局部 Gr¨obner 基计算，基中有三个元素的首项是纯幂：

$$\begin{Bmatrix} x_2^4 - x_3^4 \\ x_1^4 - x_2^4 \\ x_3^5 - x_1^3x_2^3 \end{Bmatrix}.$$

因此，我们可以在由 $\mathcal{G}$ 生成的理想中找到一个多项式系统，使其初始形式具有相同的次数。特别地，我们有以下元素：

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} x_2^5 - x_2x_3^4 \\ x_1^5 - x_1x_2^4 \\ x_3^5 - x_1^3x_2^3 \end{Bmatrix}.$$

该系统可通过将 $\mathcal{G}$ 的方程乘以下列矩阵得到，该矩阵由局部 Gr¨obner 基计算得出：

$$T = \begin{pmatrix} x_2x_3 & 0 & -x_2^2 \\ 0 & -x_1^2 & x_1x_2 \\ -x_3^2 & x_2^3 & x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

由于初始形式在单位球面上不为零，我们可以找到 $\|\mathcal{P}_5\|$ 在单位球面上的一个下界 M。然后，按照第 2 节的方法，我们找到一个区域 R_+，将原点处的奇点隔离开来。在这种情况下，该奇点的重数至多为 $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$，而实际重数为 11。

在簇情形下，即给定 $\mathcal{F}$ 且 z^* 逼近一个零点簇时，可以通过执行格罗布纳基计算的步骤，同时舍弃系数较小的项来构造 $\mathcal{G}$，从而找到合适的 T。只要 $T\mathcal{F} - \mathcal{G}$ 足够小，就可以使用鲁歇定理。

由于当 $\mathcal{F}$ 转换为 $\mathcal{G}$ 时，z^* 的重数可能增加，因此相应 $T\mathcal{F}$ 的零点簇大小也会增加。因此，该过程可能无法给出零点簇的确切大小，但可以给出其上界。

5. Proofs

我们为论文中陈述的若干事实提供证明。

5.1. **预膨胀形式**。我们证明，对于任意宽度为 κ 的方形多项式系统，第 2.2 节和算法 1 中所述的过程会生成一个 $(\kappa,\ k,\ \ell)$-预膨胀系统。

引理 5.1。设 $\mathcal{G}$ 是一个方形多项式系统，在 z^* 处具有宽度为 κ 的奇异零点。对 $\mathcal{G}$ 使用参数为 k 和 ℓ 的算法 1 所得到的结果，是一个 $(\kappa,\ k,\ \ell)$-预膨胀多项式系统；该系统在原点处有一个零点，其重数与 $\mathcal{G}$ 中 z^* 的重数相同。

证明。我们首先证明，输入系统和输出系统中原点与 z^* 的重数相同。算法的第一步是在定义域上进行可逆仿射变换，而这类变换不会改变零点的重数。第二步和第三步将系统替换为生成相同理想的新系统，因此重数不会改变。最后一步使用形式为 $x_i \mapsto x_i + q_i(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_\kappa)$ 的变换，这些变换保持理想中所有多项式的首项形式，因此也保持希尔伯特级数和重数。

现在，我们证明最终系统是 $(\kappa,\ k,\ \ell)$-预膨胀的。根据上述讨论，系统的宽度在算法 1 的各步骤中保持不变，因此最终系统具有正确的宽度。此外，第一步中的仿射变换会旋转定义域，使所得雅可比矩阵具有正确的核。第二步和第三步不会改变雅可比矩阵的核，而最后一步保留了首项，因此雅可比矩阵也得以保留。第一步和第二步准备了最后一个

多项式的项（通过标准线性代数），而这些初始项在最后两步中不会改变。

最后，第三步和第四步可以分解为一系列消去步骤，每一步都会去掉一个低次数项，并用次数更高的项取而代之。通过归纳，所有目标项的系数都变为零。因此，所得系统具有 (κ, k, ℓ)-预膨胀形式。□

这一构造直接得出以下推论，它证明了定理 2.1 中的一个条件。

推论 5.2。设 $\mathcal{G}$ 是一个含有 n 个变量、且在 z^*处有零点的方阵系统。假设 z^* 是一个宽度为 κ 、阶为 d的零点。将参数为 $k = \ell = d$ 的算法 1 应用于该系统，得到一个 (κ, d, d)-预膨胀系统，使得 p_i的初始形式对于 $\kappa + 1 \le i \le n$为 x_i。

5.2. **正则零点形式**。以下证明以算法方式证明定理 2.1 中剩余的两个条件。它给出一种解析变量变换的构造，可将具有宽度为 κ 、阶为 d 的正则零点的系统变换为所需形式之一。

在开始证明之前，我们先引入一些记号，并介绍一个关于希尔伯特级数的事实。对于级数$A(t) = \sum_{i\ge 0} a(i) t^i$ 和 $B(t) = \sum_{i\ge 0} b(i)t^i$，若对所有 i，都有 $a(i) \ge b(i)$，则记作 $A(t) \ge B(t)$。此外，证明还需要以下引理：

引理 5.3。 [8, 引理 1] 设 $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$和 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$，其中 $f_1, \dots, f_n$，$g_1, \dots, g_n$是齐次的，且 $g_1, \dots, g_n$ 是一般的。若 $\deg g_i = \deg f_i$，则 $HS_{\mathcal{G}}(t) \le HS_{\mathcal{F}}(t)$。

此外，次数为 d 的一般齐次形式构成一个正则序列，而正则序列的希尔伯特级数为 $\frac{(1-t^d)^n}{(1-t)^n}$。

引理 5.4。设 $\mathcal{G}$ 是一个由 n 个变量构成的方阵系统，且在 z^* 处有一个零点。假设 z^* 是一个宽度为 κ、阶为 d 的零点。对该系统应用参数为 $k = \ell = d$ 的算法 1，得到一个 (κ, d, d)-预膨胀系统，使得对 $1 \le i \le \kappa$，每个 p_i 的初始次数均等于 d。

证明。为证明此引理，我们先进行第 2.2 节中的变换，将原系统 $\mathcal{G}$ 变换为系统 $\mathcal{P}_{d,d} = \{p_1, \dots, p_n\}$，该系统是一个 (κ, d, d)-预膨胀系统。正如引理 5.1 的证明中所述，此变换不会改变希尔伯特级数。

根据预膨胀系统的定义，在 $\{p_1, \dots, p_k\}$中，$p_1, \dots, p_\kappa$中出现的次数不超过 d 的单项式只能涉及变量 $x_1, \dots, x_\kappa$。另一方面，由于 g_i关于 $i > \kappa$ 的首项是 x_i，因此，任何涉及 $x_{\kappa+1}, \dots, x_n$ 中任一变量的单项式都不可能作为标准单项式出现。此外，$\{1, \dots, t^{d-1}\}$的局部希尔伯特级数中的系数等于 κ 个变量中的单项式数。这意味着 $p_1, \dots, p_\kappa$中不可能有次数小于 d 的单项式。

现在证明 $p_1, \dots, p_\kappa$的初始次数必为 d。假设 $p \in \langle p_1, \dots, p_n\rangle$，使得 p的首项次数为 d，且只涉及 $x_1, \dots, x_\kappa$。简言之，记为 $p = \sum q_i p_i$。由于根据构造，$p_{\kappa+1}, \dots, p_n$ 中只涉及 $x_1, \dots, x_\kappa$ 的单项式次数必须大于 d，因此 p 的首项不会出现在任何 $q_i p_i$（其中 $i > \kappa$）中。另一方面，由于 $p_1, \dots, p_\kappa$的初始次数至少为 d，所以 p的首项必定是$\langle (p_1)_d, \dots, (p_\kappa)_d\rangle$中某个元素的首项，其中 $(p_i)_d$表示 p_i中次数为 d的齐次部分。

这一观察意味着，$\langle \mathcal{P}_{d,d}\rangle$ 的次数为 d 的标准单项式，与次数为 d且只涉及 x_1、……、x_κ的 $\langle (p_1)_d$、……、$(p_\kappa)_d\rangle$的标准单项式相同。假设对于 i的 ℓ个值，$(p_i)_d = 0$成立，其中 $1 \le i \le \kappa$。那么，根据引理 5.3，$\langle (p_1)_d$、……、$(p_\kappa)_d\rangle$的希尔伯特级数中 t^d的系数至少等于 $(1-t^d)^{\kappa-\ell}(1-t)^\kappa$ 中 t 的系数。如果 $\ell > 0$，那么该系数就严格大于 $(1 + \overline{t + \cdots} + t^{d-1})^\kappa$中相应的系数，这就产生了矛盾。因此，$\ell = 0$，并且 p_1、……、p_κ各自的初始次数都必须为 d。□

引理 5.5. 设 $\mathcal{G}$ 是一个含有 n 个变量、且在 z^* 处有一个零点的方阵系统。假设 z^* 是一个宽度为 κ、阶为 d 的零点。对该系统应用参数为 $k = \ell = d$ 的算法 1，得到一个 (κ, d, d)-预膨胀系统，使得 p_1、…、p_κ 的初始形式在 x_1、…、x_κ 中的单位球面上不为零。

证明。假设 $(p_1)_d, \dots, (p_\kappa)_d$不构成正则序列。设 r是最小的次数，使得存在 $1 < j \le \kappa$和次数为 $r - d$的齐次多项式 $m_1, \dots, m_j$满足 $\sum_{i=1}^{j} m_i (p_i)_d = 0$

以及 $m_j \notin \langle (p_1)_d, \ldots, (p_{j-1})_d \rangle$. 对于所有小于 i 且小于 $1 \le \ell \le \kappa$的次数 k，乘法映射

$$(k[x_1,\ldots,x_n]/\langle (p_1)_d,\ldots,(p_{\ell-1})_d\rangle)_{k-d} \xrightarrow{(p_{\ell-1})_d} (k[x_1,\ldots,x_n]/\langle (p_1)_d,\ldots,(p_\ell)_d\rangle)_k$$

是单射。因此， t^k 在 $\{(p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d\}$ 的希尔伯特级数中的系数，与正则序列对应的系数一致。在维数为 r 时，此映射并非总是单射，因此 t^r 在 $\{(p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d\}$ 的希尔伯特级数中的系数大于正则序列中 t^r 的系数。

现在我们证明，这也意味着维数为 r时 $\langle \mathcal{P}_{d,d} \rangle$ 的标准单项式数量与关于希尔伯特级数的假设相矛盾。设 $p \in \langle p_1, \ldots, p_\kappa \rangle$ 满足： p的初始次数为 r，且 p的初始形式不属于 $\langle (p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d \rangle$。由于 $p \in \langle p_1, \ldots, p_\kappa \rangle$，对于某些多项式有 $p = \sum q_i p_i$ q_i。假设已选取 q_i，使得 $q_i p_i$ 的最小初始次数最大化。令该初始次数为 m。此外，假设已选取 q_i，使得 $q_i p_i$ 的初始次数为 m 时的最大指标最小化。令该指标为 ℓ。

令 $(q_i)_{m-d}$ 表示 q_i 的 $m-d$ 次齐次部分。由于 $q_i p_i$ 的初始次数至少为 m，因此 $(q_i)_{m-d} = 0$ 或 $(q_i)_{m-d}$ 是 q_i 的初始形式。此外， $\sum_{i=1}^{\ell} (q_i)_{m-d}(p_i)_d = 0$ ，否则这将是 p 的初始形式，并且也会属于 $\langle (p_1)_d$、……、$(p_\kappa)_d \rangle$。而且，这个和不是由 0 相加得到的，因为 $(q_\ell)_{m-d} \neq 0$。因此， $m < r$，所以根据关于 r 的假设，$(q_\ell)_{m-d} \in \langle (p_1)_d$、……、$(p_{\ell-1})_d \rangle$。因此，存在齐次多项式 s_1、……、$s_{\ell-1}$，它们要么为 0，要么次数为 $m-2d$，使得 $(q_\ell)_{m-d} = \sum_{i=1}^{\ell-1} s_i (p_i)_d$。于是，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\kappa} q_i p_i &= \sum_{i=1}^{\ell-1} q_i p_i + q_\ell p_\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\kappa} q_i p_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} q_i p_i + ((q_\ell)_{m-d} + (q_\ell - (q_\ell)_{m-d}))p_\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\kappa} q_i p_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} q_i p_i + \sum_{i=1}^{\ell-1} s_i (p_i)_d p_\ell + (q_\ell - (q_\ell)_{m-d})p_\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\kappa} q_i p_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} q_i p_i + \sum_{i=1}^{\ell-1} s_i (p_i - (p_i - (p_i)_d))p_\ell + (q_\ell - (q_\ell)_{m-d})p_\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\kappa} q_i p_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} (q_i + s_i p_\ell)p_i + \left(\sum_{i=1}^{\ell-1} s_i ((p_i)_d - p_i) + (q_\ell - (q_\ell)_{m-d}) \right) p_\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\kappa} q_i p_i .
\end{aligned}$$

$(p_i)_d - p_i$ 的初始次数大于 d，而 $q_\ell - (q_\ell)_{m-d}$ 的初始次数也大于 $m-d$。我们看到，这违反了关于 m 和 ℓ 的假设。换言之，要么某个求和项的最小初始次数更大，要么达到次数 m 的项更少。因此，$(p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d$ 构成一个正则序列，并且在 κ 维仿射空间中只有有限多个公共零点。因此，它们不可能在单位球面 $x_1, \ldots, x_\kappa$ 上同时为零，因为根据齐次性，这将意味着它们在某条直线上为零。□

引理 5.5 的证明表明，如果 $p_1, \ldots, p_\kappa$ 的初始形式构成一个正则序列，那么 $\langle P_{d,d} \rangle$ 的初始形式与 $\langle (p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d \rangle$ 中的形式相同。此外，我们还可以得出，如果 $\langle (p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d \rangle$ 的希尔伯特级数为 $\frac{(1-t^d)^\kappa}{(1-t)^\kappa}$，那么 $(p_1)_d, \ldots, (p_\kappa)_d$ 构成一个正则序列。 ———

5.3. **Rouch´é 定理的应用**。最后，我们证明 Rouch´é 定理的推论，并用它来验证我们的算法。

引理 5.6。设 $\mathcal{P}$ 是一个方形多项式系统， $\mathcal{Q}$ 是一个次数为 d 的方形齐次多项式系统。令 $\mathbb{S}_\varepsilon$ 表示半径为 ε 的 n 维（Hermitian）单位球面。假设

(1) 存在正常数 M，使得 $\min\{\|Q(x)\| : x \in \mathbb{S}_1\} \ge M$；(2) 存在常数 M_1 和 M_2，以及一个分解 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}$，使得对所有 $\varepsilon \le 1$，(a) $\max\{\|\mathcal{P}_1(x)\| : x \in \mathbb{S}_\varepsilon\} \le M_1 \varepsilon^{d+1}$。(b) $\max\{\|\mathcal{P}_2(x)\| : \|x\| \le 1\} \le M_2$

如果 $\underline{\left(\frac{2M_2}{M}\right)^{1/d} \le \frac{M}{2M_1}}$，那么对于任意 $\varepsilon \in \underline{\left[\left(\frac{2M_2}{M}\right)^{1/d}, \frac{M}{2M_1}\right]}$， $\mathcal{P}$在半径为 ε 的球内有 d^n 个零点。

证明。第一个条件意味着 Q 在单位球面上没有零点，因此它的所有 d^n 个零点都在原点。对于满足给定条件的 x，

$$\|\mathcal{P}(x) - \mathcal{Q}(x)\| \leq \|\mathcal{P}_1(x)\| + \|\mathcal{P}_2(x)\| \leq M_1\varepsilon^{d+1} + M_2 \leq M\varepsilon^d \leq \|\mathcal{Q}(x)\|.$$

于是，根据多变量版本的 Rouch´e 定理 [5, 定理 2， $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathbb{S}_\varepsilon$中具有相同数目的零点。□

ACKNOWLEDGMENTS

Burr 获得了美国国家科学基金会 DMS-1913119 号资助，以及西蒙斯基金会 964285 号合作资助。Leykin 获得了美国国家科学基金会 DMS-2001267 号资助。

References

[1] Prashant Batra 和 Vikram Sharma。根聚类算法的复杂度。技术报告 arXiv:1912.02820，arXiv，2019 年。[2] Ruben Becker 和 Michael Sagraloff。局部且精确地计算多项式系统的解。技术报告 arXiv:1712.05487 [cs.SC],arXiv，2017 年。[3] Ruben Becker、Michael Sagraloff、Vikram Sharma、Juan Xu 和 Chee Yap。复多项式根聚类的复杂度分析。载于 *Proceedings of the ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*，ISSAC '16，第 71–78 页，2016 年。[4] Ruben Becker、Michael Sagraloff、Vikram Sharma 和 Chee Yap。基于佩莱检验和牛顿迭代的近最优复根隔离细分算法。 *Journal of Symbolic Computation*，86：51–96，2018 年。[5] Carlos A. Berenstein、Alekos Vidras、Roger Gay 和 Alain Yger。 *Residue Currents and Bezout Identities*。《数学进展》。Birkh¨auser Basel，1993 年。[6] Michael Burr 和 Anton Leykin。解析函数系统病态零点的膨胀。 *Arnold Mathematical Journal* 7 431 440, 2021 ，：–。

[7] Jean-Pierre Dedieu 和 Mike Shub。关于 n 变量解析函数的简单二重零点与病态零点。*Math. Comput.*，70(233)：319–327，2001 年。[8] Ralf Fr¨oberg。分次代数希尔伯特级数的一个不等式。 *Mathematica Scandinavica*，56(2)：117–144，1985 年。[9] Marc Giusti、Gr´egoire Lecerf、Bruno Salvy 和 Jean-Claude Yakoubsohn。零点簇的定位与近似：嵌入维数为一的情形。 *Foundations of Computational Mathematics*，6(3)：1–57，2006 年 7 月。[10] Zhiwei Hao、Wenrong Jiang、李楠和支丽红。多项式系统中简单多重零点与零点簇的隔离。 *Mathematics of Computation*，89(322)：879–909，2020 年。[11] Anton Leykin、Jan Verschelde 和 Ailing Zhao。利用降阶处理多项式系统的孤立奇点的牛顿法。 *Theoretical Computer Science*，359(1-3)：111–122，2006 年。[12] Angelos Mantzaflaris、Bernard Mourrain 和 Agnes Szanto。点状希尔伯特概形与经认证的近似奇点。载于 *ISSAC'20—Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*，第 336–343 页。美国计算机协会，纽约，2020 年。[13] Takeo Ojika。奇异问题求解的修正降阶算法。I. 非线性代数方程组。 *Journal of mathematical analysis and applications*，123(1)：199–221，1987 年。[14] Michael Sagraloff。当牛顿遇见笛卡尔：一种简单快速的多项式实根隔离算法。载于 *ISSAC 2012—Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*，第 297–304 页。美国计算机协会，纽约，2012 年。

School of Mathematical and Statistical Science, Clemson University, 220 Parkway Drive, Clemson, SC 29634
Email address: burr2@clemson.edu*URL*: https://cecas.clemson.edu/~burr2/

Department of Mathematics, University of California San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093
Email address: kil004@ucsd.edu*URL*: https://klee669.github.io

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 686 Cherry Street, Atlanta, GA 30308
Email address: leykin@math.gatech.edu*URL*: https://antonleykin.math.gatech.edu