arXiv:2302.04779v1 [math.FA] 9 Feb 2023

Korovkin 定理的非线性算子扩展中的收敛定量估计

SORIN G. GAL 和 CONSTANTIN P. NICULESCU

Abstract. 本文旨在针对定义在连续实值函数空间上的弱非线性单调算子序列，证明 Korovkin 定理非线性版本中收敛的定量估计（以连续模表示）。文中还给出了若干例子来阐释该理论。

1. Introduction

Korovkin 定理的原始形式 [11], [12] 为一列将 $C([0,1])$映射到自身的正线性算子$(L_n)_n$ 收敛到恒等算子提供了一种非常简单的检验方法：只需考察该序列对函数 1、 x和 x^2的收敛情况。换言之，事实是

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \quad \text{uniformly on } [0,1]$$

对每个 $f \in C([0,1])$，问题都归结为上述三个函数的情形。由于这一结果简单而实用，它引起了广泛关注，并由此产生了众多推广。其中一部分收录于 Altomare 和 Campiti 的权威专著 [3] 以及 Altomare 的优秀综述 [2]中。

在自2020年起发表的一系列论文中，我们将 Korovkin 定理推广到了作用于函数空间的弱非线性算子和单调算子框架。参见 [5], [8], [9] 和 [10]。为方便读者，现回顾如下：算子 $T: E \to F$ 称为弱非线性算子，当其满足以下两个条件时：

(SL)（次线性） T 是次可加的且正齐次的，即

$$T(f+g) \le T(f) + T(g) \quad \text{and} \quad T(\alpha f) = \alpha T(f)$$

对所有 f、g 属于 E 和 $\alpha \ge 0$;

(TR)（可平移性） $T(f+\alpha\cdot 1) = T(f) + \alpha T(1)$，对所有函数 $f \in E$和所有数 $\alpha \ge 0$.

在 T为幺元的情况下（即 $T(1) = 1$），可平移性条件可写为

$$T(f+\alpha\cdot 1) = T(f) + \alpha 1,$$

对于所有 $f \in E$ 和 $\alpha \ge 0$.

Date: 2022年10月19日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 41A35、41A36、41A63。*Key words and phrases.* Korovkin 型定理、单调算子、次线性算子、弱非线性算子、连续性模、定量估计。

比可平移性更强的条件是

（TR*）（强可平移性） $T(f+\alpha\cdot 1)=T(f)+\alpha T(1)$，对所有函数 $f\in E$和所有数值 $\alpha\in\mathbb{R}$.

最后一个条件自然出现在 Choquet 积分的背景下，它是所谓共单调可加性这一性质的推论，即，

（CA） $T(f+g)=T(f)+T(g)$，只要函数 $f,g\in E$按照以下意义共单调：

$$(f(s)-f(t))\cdot(g(s)-g(t))\geq 0 \quad \text{for all } s,t\in X.$$

参见 [7] 和 [6], ，以及其中的参考文献。

本文尤其关注保持序关系的弱非线性算子，也就是说，满足以下条件的算子：

(M)（单调性） $f\leq g$in E蕴含 $T(f)\leq T(g)$，对所有 f、 $g$in E.

基于 Choquet 积分理论的弱非线性和单调算子的示例可见于 [7], [6] 和 [8]。遍历理论和调和分析还提供了许多其他非线性算子的例子，这些算子是次线性的、单调的且强平移不变。下面给出一个例子。

设 E 是一个包含单位元的函数向量格，且 $U:E\to E$ 是一个次线性、（强）可平移、单调且幺元的算子。则每个 Yosida-Kakutani 算子

$$YK_n:E\to E,\quad YK_n(f)=\sup\left\{f,\frac{1}{2}(f+Uf),...,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U^kf\right\}\quad(n\in\mathbb{N})$$

都满足同样的一组性质。在 $E=L^p(\mu)$的情形下（其中 μ 为概率测度且 $1\leq p<\infty$），并且 U 还满足条件

$$\int|U(f)|^p\,d\mu\leq C\int|f|^p\,d\mu\quad\text{for all } f,$$

于是算子 YK_n 表现为算子

$$YK:E\to E,\quad YK(f)=\sup\left\{f,\frac{1}{2}(f+Uf),...,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U^kf,...\right\},$$

的截断，该算子同样是次线性的、（强）可平移的、单调的且幺元的。算子YK_n 和 YK 源自 Yosida 和 Kakutani 的极大遍历定理[15]。

沿用 Popa 的一个思路 [13], ，我们在 [10] 中证明了以下关于弱非线性单调算子序列的 Korovkin型定理，该序列收敛到一个可能不同于恒等算子的算子：

定理1. 假设 K 是欧几里得正交象限 $\mathbb{R}^N_+$的紧子集，X 是紧Hausdorff空间，且 T_n ($n\in\mathbb{N}$)和 A 是从 $E=C(K)$到 $C(X)$的弱非线性单调算子，使得

$$A(1)\ \textit{is a strictly positive element} \tag{1.1}$$

and

$$A(1)A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k)^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(-\mathrm{pr}_k))^2. \tag{1.2}$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - A(f)\| = 0 \quad \textit{for all } f \in C(K)$$

当且仅当对每个函数都具有这种收敛性质时

$$1, -\mathrm{pr}_1, ..., -\mathrm{pr}_N \ \textit{ and } \ \sum\nolimits_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2 \,. \tag{1.3}$$

这里，pr_k 表示在第 k个坐标上的典范投影。

定理 3 中给出了一个更一般的结果，适用于欧几里得空间$\mathbb{R}^N$ 的所有紧子集。

在一篇影响深远的论文中，Shisha 和 Mond [14] 将 Korovkin 的经典定理作了定量化，依据 $L_n(1)$收敛到 1、 $L_n(x)$收敛到 x以及 $L_n(x^2)$收敛到 x^2的收敛速度，来表达 $L_n(f)$收敛到 f的收敛速度。本文旨在证明一个类似的结果，以涵盖定理 1 的非线性框架。参见第 3 节的定理 2，它给出了定理 1 的定量形式。如前文所述，定理 1 还有若干三角变体，适用于定义在单位圆 S^1 （或二维球面 S^2、二维环面 $S^1\times S^1$ 等）上的连续函数。其定量形式只需对下文定理 2 的论证稍作修改，具体细节留作练习。

应用将在第 4 节中介绍。为方便读者，我们在第 2 节总结了有关连续次线性算子范数的一些事实。

2. Background on weakly nonlinear operators

设 E 和 F 是两个有序巴拿赫空间，且 $T\colon E \to F$ 是一个算子（不一定是线性或连续的）。

如果 T 是正齐次的，那么

$$T(0) = 0.$$

因此，

$$-T(-f) \le T(f) \quad \text{for all } f \in E$$

并且每个正齐次且单调的算子 T都将正元素映射为正元素，也就是说，

$$Tf \ge 0 \quad \text{for all } f \ge 0. \tag{2.1}$$

因此，对于线性算子，性质 (2.1) 等价于单调性。

连续次线性算子 $T\colon E \to F$ 的范数可通过以下公式定义

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{\lambda > 0 : \|T(f)\| \le \lambda \|f\| \text{ for all } f \in E\} \\ &= \sup\{\|T(f)\| : f \in E,\ \|f\| \le 1\}. \end{aligned}$$

次线性算子可能不连续，但如果它连续，则它是 Lipschitz连续的。更准确地说，若 $T\colon E \to F$ 是连续次线性算子，则

$$\|T(f) - T(g)\| \le 2\|T\|\,\|f - g\| \quad \text{for all } f \in E.$$

值得注意的是，所有次线性且单调的算子都是 Lipschitz连续的：

引理 1. 每个次线性且单调的算子 $T: E \to F$ 都满足以下不等式

$$|T(f)-T(g)| \leq T(|f-g|) \quad for\ all\ f,g \in E$$

因此它是 Lipschitz连续的，利普希茨常数等于 $\|T\|$，即:

$$\|T(f)-T(g)\| \leq \|T\|\,\|f-g\| \quad for\ all\ f,g \in E.$$

详见 [9] 。引理 1 是 M. G. Krein 关于正线性泛函连续性的经典结果的推广。历史回顾请见 [1] 。

3. The main results

在陈述主要结果之前，我们需要回顾 Shisha 和 Mond [14], 第 1197 页中关于连续模的一个基本不等式,

$$\omega(f,\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in K,\ \|x-y\| \leq \delta\}, \quad \delta>0,$$

对于定义在 $\mathbb{R}^N$. 的紧子集 K 上的实值连续函数 f 。为方便起见，我们采用如下约定: $\omega(f,0)=0$.

引理 2. 对所有 x、 $y \in K$ 和 $\delta>0$,

$$|f(x)-f(y)| \leq (1+\|x-y\|^2\delta^{-2})\omega(f,\delta).$$

证明。事实上，若 $\|x-y\| \leq \delta$，则

$$|f(x)-f(y)| \leq \omega(f,\|x-y\|) \leq \omega(f,\delta) \leq (1+\|x-y\|^2\delta^{-2})\omega(f,\delta),$$

而若 $\|x-y>\delta$，则需考虑连续模的以下众所周知的性质,

$$\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta) \quad \text{for } \lambda,\delta>0,$$

由此可得

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq \omega(f,\|x-y\|)=\omega\left(f,\delta\cdot\frac{\|x-y\|}{\delta}\right)\\ &\leq (1+\delta^{-1}\|x-y\|)\omega(f,\delta) \leq (1+\|x-y\|^2\delta^{-2})\omega(f,\delta).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

现在可以陈述本文的主要结果:

定理 2. 设 K 是欧几里得正交象限 $\mathbb{R}^N_+$ 的紧子集，X 是紧Hausdorff空间，且 T_n $(n \in \mathbb{N})$ 和 A 是从 $E=C(K)$ 到 $C(X)$ 的弱非线性单调算子，其中 $A(1)$ 是严格正元素。令

$$M=1/\inf_{x\in X}(A(1)(x))$$

and

$$\mu_n=\left\|T_n\left(\sum_{k=1}^N \mathrm{pr}_k^2\right)A(1)-2\sum_{k=1}^N A(-\mathrm{pr}_k)\,T_n(-\mathrm{pr}_k)+A\left(\sum_{k=1}^N \mathrm{pr}_k^2\right)T_n(1)\right\|^{1/2}.$$

Then

(3.1)

$$\|T_n(f)-A(f)\| \leq M\left\{\|T_n(1)-A(1)\|\cdot\|A(f)\|+(\|T_n(1)A(1)\|+1)\omega(f,\mu_n)\right\},$$

对所有 $f \in C(K)$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$。

在 $T_n(1) = A(1) = 1$ 的特殊情况下，上述估计简化为

$$\|T_n(f) - A(f)\| \le 2\omega(f, \mu_n).$$

证明。由于 $A(1)(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集，并且对于所有 $x \in X$， $A(1)(x) > 0$，因此可得 $\inf_{x\in X} A(1)(x) > 0$. 。于是对于所有 $f \in C(X)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\|T_n(f) - A(f)\| &= \inf_{x\in X} A(1)(x) \cdot \sup_{x\in X} |T_n(f)(x) - A(f)(x)| \\ &\le \sup_{x\in X} |(T_n(f)(x) - A(f)(x))\, A(1)(x)| \\ &= \|(T_n(f) - A(f))A(1)\|,\end{aligned} \tag{3.2}$$

这将不等式的证明归结为证明以下不等式

$$\|(T_n(f) - A(f))A(1)\| \le \{\|T_n(1) - A(1)\| \cdot \|A(f)\| + (\|T_n(1)A(1)\| + 1)\omega(f, \mu_n)\}. \tag{3.3}$$

对于这一点，根据引理 2,

$$|f(x) - f(y)| \le (1 + \|x - y\|^2\delta^{-2})\omega(f, \delta),$$

对于所有 x、 $y \in K$ 和 $\delta > 0$，将 y 视为参数即可得到不等式

$$|f - f(y)| \le \left[1 + \delta^{-2}\left(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k(y)\,\mathrm{pr}_k + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2(y) \cdot 1\right)\right]\omega(f, \delta).$$

暂且假设 $f \ge 0$。那么，考虑到引理 1,

$$\begin{aligned}|T_n(f) - f(y)T_n(1)| &\le T_n(|f - f(y) \cdot 1|) \\ &\le \left[T_n(1) + \delta^{-2}\left(T_n(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k)^2) + 2\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y))\, T_n(-\mathrm{pr}_k)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y))^2\, T_n(1)\right)\right]\omega(f, \delta),\end{aligned}$$

从而对于每个 $x \in X$，在 $C(X)$ 中得到以下不等式:

$$\begin{aligned}&|(T_n(f))(x) - T_n(1)(x) \cdot f| \\ &\quad \le \left[T_n(1)(x) + \delta^{-2}\left(T_n(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2)(x) + 2\sum_{k=1}^{N} T_n(-\mathrm{pr}_k)(x)\ \mathrm{pr}_k\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{k=1}^{N} T_n(1)(x)\,\mathrm{pr}_k^2\right)\right]\omega(f, \delta).\end{aligned}$$

将弱非线性单调算子 A 作用于上述不等式两边，并注意到 $-2T_n(-\mathrm{pr}_k) \ge 0$，我们得到

$$\begin{aligned}&|(T_n(f))(x)A(1) - (T_n(1))(x)A(f)| \le A(|(T_n(f))(x) - (T_n(1))(x) \cdot f|) \\ &\le \left[T_n(1)(x)A(1) + \delta^{-2}\left(T_n(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2)(x)A(1) - 2\sum_{k=1}^{N} A(-\mathrm{pr}_k)\, T_n(-\mathrm{pr}_k)(x)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + A(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2)T_n(1)(x)\right)\right]\omega(f, \delta),\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\left|\left(T_n(f)\right)(x)A(1)(x)-\left(T_n(1)\right)(x)A(f)(x)\right|\\&\qquad\leq\left[T_n(1)(x)A(1)(x)+\delta^{-2}\left(T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)(x)A(1)(x)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-2\sum_{k=1}^{N}A\left(-\mathrm{pr}_k\right)(x)T_n(-\mathrm{pr}_k)(x)\ +A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)(x)T_n(1)(x)\right)\right]\omega(f,\delta),\end{aligned}$$

对所有 $x\in X.$，现在对 $x\in K$ 取上确界，得到

$$\left\|\left(T_n(f)\right)A(1)-\left(T_n(1)\right)A(f)\right\| \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}&\leq\left[\left\|T_n(1)A(1)\right\|+\delta^{-2}\left(\left\|T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)A(1)-2\sum_{k=1}^{N}A\left(-\mathrm{pr}_k\right)T_n\left(-\mathrm{pr}_k\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\ A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)T_n(1)\right\|\right)\right]\omega(f,\delta).\end{aligned}$$

当 $f\in C(X)$ 是有符号函数时，可通过将 f 替换为 $f+\|f\|_\infty$. 将其归约为前一种情况。事实上，利用算子 L_n 和 A 的弱非线性性质，我们有

$$\begin{aligned}&T_n(f+\|f\|_\infty)A(1)-A(f+\|f\|_\infty)T_n(1)\\&=\left(T_n(f)+\|f\|_\infty T_n(1)\right)A(1)-\left(A(f)+\|f\|_\infty A(1)\right)T_n(1)\\&=T_n(f)A(1)-A(f)T_n(1),\end{aligned}$$

这使得不等式 (3.4) 对所有函数 $f\in C(X)$ 都成立。

假设 $\mu_n\neq 0$，由不等式 (3.4) 应用于

$$\delta=\mu_n=\left\|T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)A(1)-2\sum_{k=1}^{N}A\left(-\mathrm{pr}_k\right)T_n\left(-\mathrm{pr}_k\right)+A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)T_n(1)\right\|^{1/2},$$

关系

$$\left\|\left(T_n(f)\right)A(1)-\left(T_n(1)\right)A(f)\right\|\leq\left(\left\|T_n(1)A(1)\right\|+1\right)\omega(f,\mu_n).$$

Then

$$\begin{aligned}\left\|T_n(f)A(1)-A(1)A(f)\right\|&\leq\left\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\right\|+\left\|T_n(1)A(f)-A(1)A(f)\right\|\\&\leq\left(\left\|T_n(1)A(1)\right\|+1\right)\omega(f,\mu_n)+\left\|A(f)\right\|\cdot\left\|T_n(1)-A(1)\right\|\end{aligned}$$

不等式 (3.3) 的证明至此完成。

接下来考虑 $\mu_n=0$ 的情形。在这种情况下，不等式 (3.4) 化为

$$\left\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\right\|=0.$$

Then

$$\begin{aligned}\left\|T_n(f)A(1)-A(1)A(f)\right\|&\leq\left\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\right\|+\left\|T_n(1)A(f)-A(1)A(f)\right\|\\&\leq\left\|A(f)\right\|\cdot\left\|T_n(1)-A(1)\right\|,\end{aligned}$$

这与 $\mu_n=0.$ 时不等式 (3.1) 的结论一致

证明完成。 □

注记1。定理 2 蕴含定理1。为证明这一点，我们需要注意到

$$T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)A(1) - 2\sum_{k=1}^{N}A\left(-\mathrm{pr}_k\right)T_n\left(-\mathrm{pr}_k\right) + A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)T_n(1)$$
$$= [T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2) - A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)]A(1)$$
$$- 2\sum_{k=1}^{N}A(-\mathrm{pr}_k)[T_n(-\mathrm{pr}_k) - A(-\mathrm{pr}_k)]$$
$$+ [T_n(1) - A(1)]A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2) + 2\Delta,$$

其中 $\Delta = A(1)A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2) - (\sum_{k=1}^{N}A(-\mathrm{pr}_k))^2$。因此，如果 $\Delta = 0$ （这是定理1的假设之一），则可知，当.....时 $\mu_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(-pr_k) = A(-pr_k) \quad for\ k = 1, ..., N$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\sum_{k=1}^{N}pr_k) = A(\sum_{k=1}^{N}(pr_k)^2)$$

并且 $\lim_{n\to\infty} T_n(1) = A(1)$ 在 X上一致成立。根据定理 2,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = A(f)$$

在 X 上一致成立，证毕。

对于函数 $f \in C[0,1]$的情形，定理 2 可表述如下。

推论1。记 $e_k(x) = x^k$ for $k \in \{0,1,2\}$，并设 $A: C([0,1]) \to C([0,1])$ 是满足 $A(1)(x) > 0$ for all $x \in [0,1]$ 的弱非线性单调算子。如果 $T_n: C([0,1]) \to C([0,1])$ 是弱非线性单调算子序列，那么对于每个 $f \in C([0,1])$ 和 $n = 1$、2、.....，我们有

$$\|T_n(f) - A(f)\| \le M\{\|T_n(1) - A(1)\| \cdot \|A(f)\| + (\|T_n(1)A(1)\| + 1)\omega(f, \mu_n)\},$$

其中 $M = [\inf_{x\in[0,1]} A(1)(x))^{-1}]$ 且

$$\mu_n = \|T_n(e_2)A(1) - 2T_n(-e_1)A(-e_1) + T_n(1)A(e_2)\|^{1/2}.$$

此外，如果 $T_n(1) = A(1)$，那么结论变为

$$\|T_n(f) - A(f)\| \le M(\|A(1)^2\| + 1)\omega(f, \mu_n).$$

推论1将 Shisha 和 Mond 的定理1推广到了 [14] （该定理对应于所有算子 T_n 均为线性、连续且正，且A 是 $C([0,1])$的恒等算子的特殊情形）。

4. Applications

本节中，我们将推论1应用于一些具体例子。We will need the following family of polynomials 关于二项式

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n,$$

这些例子与伯恩斯坦的魏尔斯特拉斯逼近定理证明有关。众所周知，它们验证了若干组合恒等式，例如

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1 \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x+nx) \tag{4.3}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}.$，参见例如 [4], 定理 8.8.1，第 256 页。

例 1. 设 $\varphi:\ [0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数。与之相伴的是伯恩斯坦型算子序列 $B_n:\ C([0,1])\to C([0,1])$，其定义公式如下:

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(\varphi(x))f(k/n)$$

以及算子

$$A:C([0,1])\to C([0,1]),\quad A(f)=f\circ\varphi.$$

显然，这些算子是线性、正且幺元的。此外，算子 A 满足条件

$$A(1)A(x^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(x))^2.$$

算子 $T_n:\ C([0,1])\to C([0,1])$ 定义如下:

$$T_n(f)=\max\{B_n(f),B_{n+1}(f)\}$$

是次线性、单调且强平移不变的。简单计算（基于恒等式 (4.1)-(4.3)）表明

$$B_n(1)=1,$$
$$B_n(-x)=-\varphi(x)$$

and

$$B_n(x^2)=(\varphi(x))^2+\frac{\varphi(x)(1-\varphi(x))}{n}.$$

我们得到 $T_n(1)=1$, $T_n(-x)=-\varphi(x)$ and $T_n(x^2)=\max\{B_n(x^2)\ B_{n+1}(x^2)\}=(\varphi(x))^2+\frac{\varphi(x)(1-\varphi(x))}{n}$，由推论1可知

$$\mu_n^2=\left\|\frac{\varphi(1-\varphi)}{n}\right\|\le\frac{1}{4n}$$

因此

$$\|T_n(f)-A(f)\|\le 2\omega\left(f,\frac{1}{2\sqrt{n}}\right).$$

例 2. 给定连续函数 $\varphi:\ [0,1]\to[0,1]$，可将非线性算子序列 $T_n:\ C([0,1])\to C([0,1])$ 与之关联，该序列由以下公式定义

$$T_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(\varphi(x))\sup_{[k/(n+1)\le t\le,(k+1)/(n+1)]}f(t).$$

此外，定义线性、正且幺的算子

$$A : C\left([0,1]\right) \to C\left([0,1]\right), \quad A(f) = f \circ \varphi.$$

由于

$$B_n(1) = 1,$$
$$B_n(-x) = -\varphi(x)$$

and

$$B_n(x^2) = \varphi(x)^2 + \frac{\varphi(x)(1-\varphi(x))}{n},$$

我们得到 $T_n(1) = 1$,

$$T_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x)) \cdot (-k/(n+1)) = -\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x))\frac{k}{n} = -\frac{n}{n+1}\varphi(x),$$

$$T_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x)) \cdot \frac{(k+1)^2}{(n+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x)) \cdot \frac{k^2+2k+1}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x))\frac{k^2}{n^2} + 2\frac{n}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x))\frac{k}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left((\varphi(x))^2 + \frac{\varphi(x)(1-\varphi(x))}{n}\right) + \frac{2n}{(n+1)^2}\varphi(x) + \frac{1}{(n+1)^2},$$

由推论1可知

$$\mu_n^2 = \left\| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\varphi^2 + \frac{\varphi(1-\varphi)}{n}\right) + \frac{2n\varphi}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2n\varphi^2}{n+1} + \varphi^2 \right\|$$

$$= \left\| \frac{3n\varphi + 1 - \varphi^2(n-1)}{(n+1)^2} \right\| \leq \left\| \frac{3n+1+(n-1)}{(n+1)^2} \right\| \leq \frac{4}{n}.$$

and the proof is complete.

$$\|T_n(f) - A(f)\| \leq 2\omega\left(f, \frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

资金支持 作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金、资助或其他支持。

利益冲突 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[1] Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D.：《正算子》。载于《Banach空间几何手册》第一卷，第85–122页。North-Holland，阿姆斯特丹（2001年） [2] Altomare, F.：Korovkin型定理与正算子。《逼近理论综述》6，92–164（2010年） [3] Altomare, F., Campiti, M.：《Korovkin型逼近理论及其应用》。德格鲁伊特数学研究丛书，第17卷，柏林（1994年，2011年再版） [4] Choudary, A.D.R., Niculescu, C.P.：《区间上的实分析》。施普林格，新德里（2014年） [5] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：Korovkin定理的非线性推广。《地中海数学杂志》17，文章编号145（2020年） [6] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：与向量容量相关的Choquet算子。《数学分析与应用杂志》500(2)，125–153（2021年） [7] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：关于Choquet型算子的一则注记。《Aequationes Mathematicae》95，433–447（2021年）

[8] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：Korovkin抽象定理的非线性版本。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报 A辑：数学》116(2)，1–17（2022年）[9] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：弱非线性单调算子的Korovkin型定理。即将在《地中海数学杂志》发表。在线版本见 arXiv:2206.14102[10] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：Korovkin 定理的非线性算子扩展。已投稿。[11] Korovkin, P.P.：关于连续函数空间中线性正算子的收敛。（俄语）。《苏联科学院通报》（新系列）90，961–964（1953年）。[12] Korovkin, P.P.：《线性算子与逼近理论》。Fitzmatgiz，莫斯科（1959年）（俄语）[1960] 英文译本，Hindustan [13] 出版公司，德里（ ） Popa, D.：Korovkin定理的算子版本。《数学分析与应用杂志》515，第1期，论文编号126375（2022年）[14] Shisha, O., Mond, B.：线性正算子序列的收敛阶。《美国国家科学院院刊》60，1196–1200（1968年）[15] Yosida, K., Kakutani, S.：Birkhoff 遍历定理与极大遍历定理。《东京帝国学士院纪要》15，165–168（1939年）

Department of Mathematics and Computer Science, University of Oradea, Romania and Academy of Romanian Scientists, Bucharest, Romania*Email address*: galso@uoradea.ro, galsorin23@gmail.com

Department of Mathematics, University of Craiova, Romania
Email address: constantin.p.niculescu@gmail.com