arXiv:2302.04786v1 [math.FA] 9 Feb 2023

Korovkin 定理的非线性算子扩展

SORIN G. GAL 和 CONSTANTIN P. NICULE SCU

Abstract. 本文将 Korovkin 定理推广到定义在某些巴拿赫函数空间上的弱非线性单调算子序列这一背景中。文中还给出了若干例子来说明该理论。

1. Introduction

Korovkin 定理 [20], [21] 为任意一列将 $C([0,1])$ 映射到自身的正线性算子 $(L_n)_n$ 是否收敛到恒等算子提供了一个非常简单的判别方法：只需考察它们对函数 1、 x 和 x^2的收敛性。换言之，事实是

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f \quad \text{uniformly on } [0,1]$$

对每个 $f \in C([0,1])$，问题都归结为上述三个函数的情形。由于这一结果简单而实用，它引起了广泛关注，并由此产生了大量推广。其中一部分收录于 Altomare 和 Campiti 的权威专著 [8] 以及 Altomare 的优秀综述 [4]中。关于一些近期成果，参见 [5], [6], [7] 和 [27] 。

Korovkin 定理（以及它的许多推广）的核心在于所涉及函数的良好性质，这让人联想到实分析中的绝对连续性。下文将其称为 Korovkin 绝对连续性。对于定义在欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 的子集 K 上的实值函数 f，该性质意味着以下先验估计：对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对所有 x、$y \in K$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \delta \|x - y\|^2 . \tag{1.1}$$

这样的函数必定一致连续。反之则不成立（例如，参见函数 $\sqrt{x}$ 在 $(0,\infty)$ 上的情形），但对所有一致连续且有界的函数 f，该性质都成立： $K \to \mathbb{R}$。在 $\mathbb{R}^N$ 上具有 Korovkin 绝对连续性这一性质的无界函数例子有 $\pm \mathrm{pr}_1,...,\pm \mathrm{pr}_N$ 和 $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2$，其中 pr_k 表示第 k 个坐标上的典范投影。更多详情见 [23]。

基于 Korovkin 绝对连续性的概念，作者将 Korovkin 定理推广到次线性和单调算子框架，这些算子作用于定义在适当子集 K of $\mathbb{R}^N$. 上的函数空间。参见 [12], [14], [15] 和 [16]。

Date:2022年10月19日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 41A35，41A36，41A63。
Key words and phrases. Korovkin 型定理，单调算子，次线性算子，弱非线性算子，有序巴拿赫空间，Choquet 积分。

本文旨在进一步将这些结果推广到如下情形：非线性单调算子序列逐点收敛到一个性质相同、但可能不同于恒等算子的算子。在线性情形下，Wang [29], 、Guessab 和 Schmeisser[18] 以及 Popa [27]（依次）已获得此类结果。根据 [27], 中的定理1，若 L_n $(n \in \mathbb{N})$ 和 L 是从 $C([0,1])$ 映入自身的正线性算子，且 $L(1)L(x^2) = (L(x))^2$，并且 $L(1)(t) > 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 均成立，则当且仅当 $L_n(f) \to L(f)$ 对所有 $f \in C([0,1])$ 一致收敛时，

$$L_n(1) \to L(1),\ L_n(x) \to L(x) \text{ and } L_n(x^2) \to L(x^2) \quad \text{uniformly on } [0,1].$$

我们的定理 3（第5节）将这一结果推广到一大类定义在空间 $C(K)$ 上的非线性算子，其中 K 是欧几里得空间$\mathbb{R}^N$. 的一个紧子集。将 $C(K)$ 替换为其他函数空间（例如勒贝格空间 $L^p(K)$，其中 $p \in [1,\infty)$ 的可能性，使定理 4（第5节）的表述更加 L。由于 L 的线性，Popa的定理1中的条件 $L(1)x^2(=)L(x(^2))\ x \to x + \alpha$ 在任意平移 C 下保持不变，这一事实使其结果适用于所有空间 $[a,b](C)$ （而不仅仅是 $[0,1](K)$ ）。在非线性情形下，这一观察不再适用；对于未包含在 $\mathbb{R}^N_+$ 中的紧子集 L，我们必须通过使用 $L(1)x + \alpha((^2) =)\ L(x + \alpha(^2.))$ 的类似形式来调整假设。

为方便读者，我们在第2节总结了一些关于有序巴拿赫空间的基本事实；大多数巴拿赫格教材通常会略去这些内容，但它们对于理解我们的方法至关重要。定理1也是如此，它说明了为什么本文只考虑取值于 $C(K)$ 空间的算子。

第3节全面介绍了构成本文主题的非线性算子类。这些算子是作用于函数有序巴拿赫空间上的次线性单调算子，并且满足相对于单位元倍数的平移性。它们是在 [15], 中引入的，缘于我们对 Choquet积分理论的兴趣；不过，本文也提到了该理论之外的许多其他例子。

第4节专门讨论 Popa [27], 提出的一个结果的非线性推广，该推广对于证明我们在第5节提出的新 Korovkin型结果至关重要。第6节给出了说明主要结果的例子。本文最后简要列出了一些开放问题。

2. Preliminaries on ordered Banach spaces

大多数作者（参见 Aliprantis 和 Tourky [3] 以及 Schaefer 和 Wolff [28]）将有序巴拿赫空间定义为配备序关系 $\leq$ 的实巴拿赫空间 E ，并要求满足以下三个条件：

$(OBS1)$ $x \leq y$ implies $x + z \leq y + z$ for all $x, y, z \in E$; and
$(OBS2)$ $x \leq y$ implies $\lambda x \leq \lambda y$ for $x, y \in E$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.
$(OBS3)$ $0 \leq x \leq y$ in E implies $\|x\| \leq \|y\|$.

通常， $x \leq y$ 也记作 $y \geq x$ ，而 $x < y$ （等价地， $y > x$）表示 $y \geq x$ 且 $x \neq y$.

为方便起见，本文仅讨论正锥在范数拓扑下闭、正规（$-E_+ \cap E_+ = \{0\}$）且生成（$E = E_+ - E_+$）的有序巴拿赫空间 E。

若有序向量空间 E 中的任意两个元素 x, y 都存在上确界 $\sup\{x, y\}$ 和下确界，则称其为向量格。此时，对每个 $x \in E$，我们可以定义 $x^+ = \sup\{x, 0\}$（x的正部）、 $x^- = \sup\{-x, 0\}$（x的负部）以及 $|x| = \sup\{-x, x\}$（x的模）。我们有 $x = x^+ - x^-$和 $|x| = x^+ + x^-$. 。巴拿赫格是指同时为向量格并满足以下条件的任意实巴拿赫空间 E：

$$|x| \leq |y| \text{ implies } \|x\| \leq \|y\|.$$

大多数经典巴拿赫空间实际上都是巴拿赫格。欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 以及离散空间 c_0、c 和 ℓ^p（对 $1 \leq p \leq \infty$ 赋予逐坐标序）也都是如此。函数空间也具有同样的性质

$C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : $在紧豪斯多夫空间$K\}$上连续的 $fC_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : $在度量空间 $X\}$上连续且有界的 $f\mathcal{U}C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : $在度量空间 $X\}$上一致连续且有界的 $fC_0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : $在局部紧豪斯多夫空间 $X\}$上连续且在无穷远处趋于零的 f，

每个空间都赋予上确界范数 $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ 和逐点序。其他极其重要的巴拿赫格是勒贝格空间 $L^p(\mu)$ $(p \in [1, \infty])$，其范数为

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} & \text{if } p \in [1, \infty) \\ \operatorname*{esssup}_{x \in X} |f(x)| & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

以及模零测集意义下的逐点序。

众所周知， N维实向量空间 $\mathbb{R}^N$ 上的所有范数都等价。赋予上确界范数和逐坐标序后，$\mathbb{R}^N$ 可与巴拿赫格 $C(\{1, ..., N\})$在代数、等距和序的意义下等同，其中 $\{1, ..., N\}$ 带有离散拓扑。

突出有序巴拿赫空间性质的一种便捷方式，是采用 Davies 在 [11]中所描述的方法。Davies 将有序巴拿赫空间 E 称为正则有序，如果

$$\|x\| = \inf\{\|y\| : y \in E, \ -y \leq x \leq y\} \quad \text{for all } x \in E.$$

这类空间汇集了巴拿赫格以及一些并非向量格的其他空间，一个著名的例子是 $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$，即由实系数组成的所有 $n \times n$维对称矩阵构成的有序巴拿赫空间，其序定义为

$$A \leq B \text{ if and only if } \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

以及范数

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

详情请参见 [24], 第2节第5部分，第97–103页。

引理 1. 每个有序巴拿赫空间都可以通过等价范数重新赋范，使其成为正则序 Banach 空间。

详情请参阅 Namioka [22]。下面列出有序巴拿赫空间的一些其他有用性质。

引理 2. 假设 E 是一个正则序 Banach 空间。则：

(*a*) 存在一个常数 $C > 0$，使得每个元素 $x \in E$ 都可以分解为如下形式：$x = u - v$，其中 $u, v \in E_+$ 且 $\|u\|, \|v\| \leq C\|x\|$.

(*b*) E的对偶空间 E^*赋予对偶锥后

$$E_+^* = \{x^* \in E^* : x^*(x) \geq 0 \text{ for all } x \in E_+\}$$

是一个正则序 Banach 空间。

(*c*) $x \leq y$ 属于 E 等价于 $x^*(x) \leq x^*(y)$ 对所有 $x^* \in E_+^*$.(*d*)

$\|x\| = \sup\{x^*(x): \ x^* \in E_+^*, \ \|x^*\| \leq 1\}$ 对所有 $x \in E_+$.

证明。断言 (*a*) 由引理 1 立即得出。关于 (*b*)，参见 Davies[11], 引理 2.4。断言 (*c*) 是 Hahn-Banach 分离定理的一个简单推论；参见 [24], 定理 2.5.3，第 100 页。

断言（*d*）也可由 Hahn-Banach 分离定理推出；参见 [28], 定理 4.3，第 223 页。□

严格正函数的概念可以自然地推广到有序巴拿赫空间的框架中。具体而言，有序巴拿赫空间 E 中的一个正元素称为严格正元素，如果

$$x^*(x) > 0 \text{ for every nonzero functional } x^* \in E_+^*.$$

每个可分序 Banach 空间 E 都存在严格正元素。例如，取 E 中一个稠密于闭单位球的元素序列（x_n）$_n$，并考虑根据引理 2（a）对其作出的分解 $x_n = u_n - v_n$。那么$x = \sum 2^{-n}$（$u_n + v_n$）是一个严格正元素，因为任何在 x 处取值为零的泛函 $x^* \in E_+^*$，在所有元素 x_n. 处都取值为零。由稠密性可知，$x^* = 0$.。实际上有一个更强的结果：可分序 Banach 空间中所有严格正元素组成的集合在正锥中稠密。参见 [28], 定理 7.6，第 241 页。

空间 $C(K)$、$C_b(X)$ 和 $\mathcal{U}C_b(X)$（可分或不可分）都存在具有更强性质的严格正元素，称为序单位。回顾一下，有序巴拿赫空间 E 中的元素 $u > 0$称为序单位，如果对每个 $x \in E$，都存在实数 $\lambda > 0$，使得 $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$. 。序单位必然是严格正元素。除上述三个空间外，空间 Sym($n, \mathbb{R}$) 的情形也凸显了正则有序巴拿赫空间中具有序单位的重要性，其范数通过以下公式与该单位相关联

$$\|x\|_u = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda u\}, \quad x \in E.$$

向量格 $\mathbb{R}^N$ 的自然序单位是向量 u，其所有分量均等于 1。与该单位相关联的范数是上确界范数。

一个没有严格正元素的巴拿赫格示例是 $C_0(X)$，条件是 X 为不可分度量空间。

以下结果解释了为何本文只考虑取值于 $C(K)$ 空间的算子。

定理1. 每个有序巴拿赫空间 E 都可以通过保序线性连续映射 $\Phi: E \to C(K)$ 表示为紧豪斯多夫空间 K 上连续实值函数空间 $C(K)$ 的一个向量子空间。如果 E 具有严格正元素 e，则可以选择 K，使得 $\Phi(e) = 1$，即 $C(K)$ 的单位元。

证明. 根据 Alaoglu 定理，集合 $K = \left\{x^* \in E_+^* : \|x^*\| \leq 1\right\}$ 关于 w^* 拓扑是紧的。考虑到引理 2 的断言 (c) 和 (d)，可以很容易地得出，E 通过正线性等距映射嵌入 $C(K)$

$$\Phi : E \to C(K), \quad (\Phi(x))(x^*) = x^*(x).$$

对于定理1的第二部分，注意到 $\Phi(e)$ 是 $C(K)$ 的强序单位。于是，根据 Kadison [19], 的经典结果即可得出结论：每个具有强序单位的有序实向量空间，都可以通过一个将序单位映射为常函数 1 的保序映射，表示为紧豪斯多夫空间上连续实值函数空间的一个向量子空间。□

3. Weakly nonlinear operators acting on ordered Banach spaces

我们的下一个目标是描述一类非线性算子，为 Korovkin 定理的推广提供一个便利的框架。

给定一个度量空间 X，我们为其配备向量格 $\mathcal{F}(X)$，即定义在 X 上的所有实值函数构成的空间，并赋予其度量 d 和逐点序。

设 X 和 Y 是两个度量空间，E 和 F 分别是 $\mathcal{F}(X)$ 和 $\mathcal{F}(Y)$ 的有序向量子空间（或正锥的子锥），且 $\mathcal{F}(X)$ 包含单位元。若算子 $T : E \to F$ 满足以下两个条件，则称其为弱非线性算子：

(SL)（次线性） T 是次可加且正齐次的，也就是说，

$$T(f+g) \leq T(f) + T(g) \quad \text{and} \quad T(\alpha f) = \alpha T(f)$$

对所有 f、$g \in E$ 以及 $\alpha \geq 0$;

(TR)（平移性） $T(f + \alpha \cdot 1) = T(f) + \alpha T(1)$，对所有函数 $f \in E$ 及所有数 $\alpha \geq 0$.

当 T 保单位时（即 $T(1) = 1$），平移性条件可写为

$$T(f + \alpha \cdot 1) = T(f) + \alpha 1,$$

对所有 $f \in E$ 和 $\alpha \geq 0$.

比平移性更强的条件是

(TR*) (*Strong translatability*) $T(f + \alpha \cdot 1) = T(f) + \alpha T(1)$ for all functions $f \in E$ and all numbers $\alpha \in \mathbb{R}$.

最后一个条件自然地出现在 Choquet 积分的语境中，它是所谓共单调可加性这一性质的推论，即，

(CA) $T(f+g) = T(f) + T(g)$，只要函数 f、$g \in E$ 是同序的，其含义是

$$(f(s) - f(t)) \cdot (g(s) - g(t)) \geq 0 \quad \text{for all } s, t \in X.$$

参见 [14] 和 [13], ，以及其中的参考文献。

本文尤其关注那些保持序关系的弱非线性算子，也就是说，满足以下条件的算子：

(M)（单调性） $f \leq g$属于 E蕴含 T（f） $\leq T$（g），对所有 f、g属于 E.成立

注1. 若 T 是一个弱非线性单调算子，则

$$T(\alpha \cdot 1) = \alpha \cdot T(1) \quad for\ all\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

事实上，对于 $\alpha \geq 0$ ，该性质可由正齐次性得出。现在假设 $\alpha < 0$. 。由于 $T(0) = 0$ 且 $-\alpha > 0$，根据平移性可得 $0 = T(0) = T(\alpha \cdot 1 + (-\alpha \cdot 1)) = T(\alpha \cdot 1) + (-\alpha)T(1)$，这意味着 $T(\alpha) = \alpha T(1)$。

弱非线性且单调的算子例子可见 [14], [13]和 [15]。

假设 E 和 F 是两个有序巴拿赫空间，且 $T: E \to F$ 是一个算子（不一定是线性或连续的）。

如果 T 是正齐次的，那么

$$T(0) = 0.$$

因此，

$$-T(-f) \leq T(f) \quad \text{for all } f \in E$$

并且每个正齐次单调算子 T都将正元素映射为正元素，也就是说，

$$Tf \geq 0 \quad \text{for all } f \geq 0. \tag{3.1}$$

因此，对于线性算子，性质 (3.1) 等价于单调性。

每个次线性算子都是凸的，而凸算子是次线性的，当且仅当它是正齐次的。

连续次线性算子 T 的范数 $E \to F$ 可通过以下公式定义

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{\lambda > 0 : \|T(f)\| \leq \lambda \|f\| \text{ for all } f \in E\} \\ &= \sup\{\|T(f)\| : f \in E,\ \|f\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

次线性算子可能不连续，但若它连续，则它是 Lipschitz连续的。更确切地说，若 $T: E \to F$ 是连续次线性算子，则

$$\|T(f) - T(g)\| \leq 2\|T\|\|f - g\| \quad \text{for all } f \in E.$$

值得注意的是，所有次线性单调算子都是 Lipschitz连续的：

定理 2. 每个次线性单调算子 $T: E \to F$ 均满足不等式

$$|T(f) - T(g)| \leq T(|f - g|) \quad for\ all\ f, g \in E$$

因此，它是 Lipschitz连续的，Lipschitz常数等于 $\|T\|$，即，

$$\|T(f) - T(g)\| \leq \|T\|\|f - g\| \quad for\ all\ f, g \in E.$$

详情见 [16] 。定理 2 推广了 M. G. Krein 关于正线性泛函连续性的经典结果。参见 [1]。

4. An a priori estimate

我们的主要结果的证明依赖于以下先验估计。Popa [27] 此前在线性正算子定义于巴拿赫格 $C([a, b])$ 的背景下注意到了这一估计。

在下文中

$$u = (1, ..., 1)$$

表示向量格 $\mathbb{R}^N$. 的自然序单位。欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 中的每个紧子集 K 都可以通过形如 T_a 的平移移入正锥 $\mathbb{R}^N_+$： $x \to x + \alpha u$，该平移对应于一个数 $\alpha \geq 0.$。实现这一目的的最小 α 记作 $\alpha(K,u)$，并称其为 K 沿方向 $u.$ 的正性亏量。我们有

$$\alpha(K,u) = \inf\left\{\alpha \geq 0 : K + \alpha u \subset \mathbb{R}^N_+\right\}$$

以及 $\alpha(K,u) = 0$ 如果 $K \subset \mathbb{R}^N_+.$

引理3. 假设 K 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$的紧子集， X是紧豪斯多夫空间，并且 V 和 A 是从 $C(K)$ 到 $C(X)$的弱非线性单调算子。那么，对于每个函数 $f \in C(K)$ 以及每个$\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$\begin{aligned}
&|T(f)A(1) - T(1)A(f)| \\
&\quad \leq \varepsilon T(1)A(1) + \delta \left\{ A(1)[T(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2) - A(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2)] \right. \\
&\qquad + A(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2)[T(1) - A(1)] \\
&\quad + 2[A(1)A(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2) - \sum_{k=1}^{N} (A(-\mathrm{pr}_k - \alpha))^2] \\
&\qquad \left. + 2\sum_{k=1}^{N} A(-\mathrm{pr}_k - \alpha)[A(-\mathrm{pr}_k - \alpha) - T(-\mathrm{pr}_k - \alpha)] \right\},
\end{aligned}$$

每当 $\alpha \geq \alpha(K,u)$时。

证明。令 $f \in C(K)$ 且 $\varepsilon > 0.$。由于 f 是 Korovkin 绝对连续的，因此存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $x, y \in K$，有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \varepsilon + \delta \left\| x - y \right\|^2 \\
&= \varepsilon + \delta \left\| x + \alpha u - (y + \alpha u) \right\|^2.
\end{aligned}$$

将 y 视为参数，最后一个不等式可改写为

$$|f - f(y)| \leq \varepsilon + \delta \left[\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2 - 2\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y) + \alpha)(\mathrm{pr}_k + \alpha) + \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y) + \alpha)^2 \right].$$

选择 α 使得 $\mathrm{pr}_k + \alpha \geq 0$，这使我们能够利用算子 T.的正齐次性和平移性

暂且假设 f 是非负的。那么，根据定理 2,

$$\begin{aligned}
&|T(f) - f(y)T(1)| \leq T(|f - f(y) \cdot 1|) \\
&\quad \leq \varepsilon T(1) + \delta \left[T(\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2) + 2\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y) + \alpha) T(-\mathrm{pr}_k - \alpha) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k(y) + \alpha)^2 T(1) \right],
\end{aligned}$$

这便得出，对于每个 $t \in X$，都有以下关于 $C(X)$ 的不等式:

$$\begin{aligned}
&|\left(T(f)\right)(t) - T(1)(t)\cdot f| \\
&\quad \leq \varepsilon\left(T(1)\right)(t) + \delta\left[T(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t) + 2\sum_{k=1}^{N}\left(T\left(-\mathrm{pr}_k-\alpha\right)\right)(t)\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(T(1)\right)(t)\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2\right]
\end{aligned}$$

将弱非线性且单调的算子 A 作用于最后一个不等式的两边，并考虑到 $-2T(-\mathrm{pr}_k-\alpha) \geq 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&|\left(T(f)\right)(t)A(1) - \left(T(1)\right)(t)A(f)| \leq A\left(|\left(T(f)\right)(t) - \left(T(1)\right)(t)\cdot f|\right) \\
&\qquad \leq \varepsilon\left(T(1)\right)(t)A(1) + \delta\left[T(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t)A(1)\right. \\
&\qquad \left. - 2\sum_{k=1}^{N}T\left(-\mathrm{pr}_k-\alpha\right)(t)A(-\mathrm{pr}_k-\alpha) + \left(T(1)\right)(t)A(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)\right],
\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}
&|\left(T(f)\right)(t)A(1)(t) - \left(T(1)\right)(t)A(f)(t)| \\
&\leq \varepsilon\left(T(1)\right)(t)A(1)(t) + \delta\left\{[(T(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t) - A(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t)]A(1)(t)\right. \\
&\qquad + (A(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t))\left[T(1)(t) - A(1)(t)\right] \\
&\quad + 2[A(1)(t)A(\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k+\alpha\right)^2)(t) - \sum_{k=1}^{N}\left(A(-\mathrm{pr}_k-\alpha)\right)^2(t)] \\
&\qquad \left. + 2\sum_{k=1}^{N}A(-\mathrm{pr}_k-\alpha)(t)\left[A(-\mathrm{pr}_k-\alpha)(t) - T\left(-\mathrm{pr}_k-\alpha\right)(t)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

由于 $t \in T$ 是任意选取的，这就完成了非负函数情形下的证明。

当 f 是符号函数时，可通过将 f替换为 $f + \|f\|_\infty$. 将其化归为这种情况。事实上，利用算子 T和 A 的弱非线性性质，我们有

$$\begin{aligned}
&T(f+\|f\|_\infty)A(1) - A(f+\|f\|_\infty)T(1) \\
&= \left(T(f) + \|f\|_\infty T(1)\right)A(1) - \left(A(f) + \|f\|_\infty A(1)\right)T(1) \\
&= T(f)A(1) - A(f)T(1).
\end{aligned}$$

□

推论1. 在引理3的假设下，以下不等式成立

$$\begin{aligned}&\|T(f)A(1)-T(1)A(f)\|\\&\quad\le\varepsilon\|T(1)\|\cdot\|A(1)\|+\delta\left\{[\|A(1)\|\cdot\|T(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)-A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)\|\right.\\&+\|A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)\|\cdot\|T(1)-A(1)\|+2\|A(1)A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)-\sum_{k=1}^{N}(A(-\mathrm{pr}_k-\alpha))^2\|\\&\left.\quad+2\sum_{k=1}^{N}\|A(-\mathrm{pr}_k-\alpha)\|\cdot\|T(-\mathrm{pr}_k-\alpha)-A(-\mathrm{pr}_k-\alpha)\|\right\}.\end{aligned}$$

5. The main results

现在我们可以处理一致收敛的情形了。

定理 3. 设 K 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 的紧子集， X 是紧豪斯多夫空间，且 T_n ($n\in\mathbb{N}$) 和 A 是从 $E=C(K)$ 到 $C(X)$ 的弱非线性单调算子，使得

$$A(1)\ \textit{is a strictly positive element} \tag{5.1}$$

and

$$A(1)A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(-\mathrm{pr}_k-\alpha))^2 \tag{5.2}$$

对于某个适当的 $\alpha\ge\alpha(K,u)$。

Then

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f)-A(f)\|=0\quad \textit{for all } f\in C(K)$$

当且仅当这一性质对函数

$$1,-(\mathrm{pr}_1+\alpha),...,-(\mathrm{pr}_N+\alpha)\ \textit{and}\ \sum\nolimits_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2. \tag{5.3}$$

此外，若 $K\subset\mathbb{R}_+^N$，则定理 3 对 $\alpha=0.$ 成立

证明。必要性显然。为证明充分性，首先注意到，我们可以通过在必要时进行形如 $y=x+\alpha u.$ 的变量替换，将问题限制在 $K\subset\mathbb{R}_+^N$ 的情形。这使我们可以继续证明 $\alpha=0.$

根据推论1，对于所有 $f\in C(K)$ 和 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ ，我们有

$$\begin{aligned}&\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\|\\&\quad\le\varepsilon\|T_n(1)\|\cdot\|A(1)\|+\delta\left\{[\|A(1)\|\cdot\|T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)-A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)\|\right.\\&+\|A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)\|\cdot\|T_n(1)-A(1)\|+2\|A(1)A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)-\sum_{k=1}^{N}[A(-\mathrm{pr}_k)]^2\|\\&\left.\quad+2\sum_{k=1}^{N}\|A(-\mathrm{pr}_k)\|\cdot\|T_n(-\mathrm{pr}_k)-A(-\mathrm{pr}_k)\|\right\},\end{aligned}$$

因此，利用假设 (5.2)，我们推得

$$\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\|$$
$$\leq \varepsilon\|T_n(1)\|\cdot\|A(1)\|+\eta_\varepsilon\left\{[\|A(1)\|\cdot\|T_n(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)-A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)\|\right.$$
$$\left.+\|A(\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2)\|\cdot\|T_n(1)-A(1)\\|+2\sum_{k=1}^{N}\|A(-\mathrm{pr}_k)\|\cdot\|T_n(-\mathrm{pr}_k)-A(-\mathrm{pr}_k)\|\right\}.$$

由于对于 $f\in\left\{1,-\mathrm{pr}_1,...,-\mathrm{pr}_N,\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2\right\}$，$\lim_{n\to\infty}T_n(f)=A(f)$，最后一个不等式意味着

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\|=0.$$

将这一事实与不等式

$$\|T_n(f)A(1)-A(1)A(f)\|\leq\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\|$$
$$+||T_n(1)A(f)-A(1)A(f)\|$$
$$\leq\|T_n(f)A(1)-T_n(1)A(f)\|+\|A(f)\|\cdot\|T_n(1)-A(1)\|,$$

我们推知

$$\lim_{n\to\infty}\|[T_n(f)-A(f)]A(1)\|=0.$$

根据我们的假设，函数 $A(1)$ 严格正，因此 $\inf_{t\in X}A(1)(t)>0$。由于

$$[\inf_{t\in X}A(1)(t)]\cdot\|T_n(f)-A(f)\|\leq\|[T_n(f)-A(f)]A(1)\|,$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f)-A(f)\|=0$$

证明至此完成。 □

注 2. 在特殊情形下，若 $E=F=C(K)$ 且 A 是保持单位元的代数同态（特别是，若 $A=I$），则条件 (5.2) 和 (5.1) 自动满足，且定理 3 可由我们在 [12] 中先前的结果推出。

定理 3 中的条件 $\lim_{n\to\infty}\|T_n(1)-A(1)\|=0$ 意味着算子 T_n 是等度连续的，因为对所有 $n.$，$\|T_n\|=T_n(1)$

定理 3 的结果可作如下更一般的表述：

定理 4. 设 K 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 的一个紧子集，E 是一个有序巴拿赫空间，它以这样的方式包含 $C(K)$：典范嵌入 $i_K:C(K)\to E$ 是一个具有稠密像的正线性算子；并且 X 是一个紧豪斯多夫空间。若 $T_n\,(n\in\mathbb{N})$ 和 A 是从 E 到 $C(X)$ 的弱非线性单调算子，使得

$$A(1)\ \textit{is a strictly positive element,} \tag{5.4}$$

$$A(1)A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(-\mathrm{pr}_k-\alpha))^2\ \textit{for some}\ \alpha\geq d(K,u), \tag{5.5}$$

and

$$\sup_n\|T_n\|<\infty,$$

那么对所有 $f \in E$，$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - A(f)\| = 0$ 当且仅当对以下函数集也具有这一收敛性质：

$$1, -(\mathrm{pr}_1 + \alpha), ..., -(\mathrm{pr}_N + \alpha) \text{ and } \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{pr}_k + \alpha)^2 . \tag{5.6}$$

特别地，对于巴拿赫格 $E = L^p(\mu)$，定理 4 成立，其中 μ是定义在 K. 上的正性博雷尔测度。关于 $L^p(\mu)$ 包含 $C(K)$ 作为稠密子空间这一事实，可参见许多资料，例如 [9], 推论 4.2.2，第 252 页。

证明。与定理 3 的情形一样，对于充分性部分，我们可以假设$\alpha = 0$ 和 $K \subset \mathbb{R}^N_+$.

设 $f \in E$ 和 $\varepsilon > 0$. 。由于向量格 $C(K)$ 在 E 中稠密，因此存在$g \in C(K)$，使得

$$\|f - g\| < \varepsilon. \tag{5.7}$$

必然地， g 是 Korovkin 绝对连续的，因此存在一个数 $\delta > 0$，使得

$$|g(y) - g(x)| \le \varepsilon + \delta \cdot \|y - x\|^2$$

对所有 x 以及属于 $\mathbb{R}^N$ 的 y，都有。

根据推论1，将其应用于 $T_n \circ i_K$ 和 $A \circ i_K$ （其中 $\alpha = 0$），可得

$$\begin{aligned}
&\|T_n(g)A(1) - T_n(1)A(g)\| \\
&\qquad \le \varepsilon \|T_n(1)A(1)\| + \delta \left\{ \left\| A(1)[T_n(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2) - A(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2) \right\| \right. \\
&\quad + \left\| A(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2)[T_n(1) - A(1)] \right\| + 2 \left\| A(1)A\left(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2\right) - \sum_{k=1}^{N} (A(-\mathrm{pr}_k))^2 \right\| \\
&\qquad \left. + 2\sum_{k=1}^{N} \|A(-\mathrm{pr}_k)[A(-\mathrm{pr}_k) - T_n(-\mathrm{pr}_k)]\| \right\},
\end{aligned}$$

因此，记作 $M = \sup \|T_n(1\|$ ，并考虑到假设 (5.5)，我们得到不等式

$$\begin{aligned}
&\|T_n(g)A(1) - T_n(1)A(g)\| \\
&\qquad \le \varepsilon M \|A(1)\| + \delta \left\{ \left\| A(1)[T_n(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2) - A(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2) \right\| \right. \\
&\qquad + \left\| A(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{pr}_k^2)[T_n(1) - A(1)] \right\| \\
&\qquad \left. + 2\sum_{k=1}^{N} \|A(-\mathrm{pr}_k)[A(-\mathrm{pr}_k) - T_n(-\mathrm{pr}_k)]\| \right\}.
\end{aligned}$$

因此，在满足条件 (5.6) 的情况下，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(g)A(1) - T_n(1)A(g)\| = 0.$$

由于

$$\begin{aligned}\|[T_n(g)-A(g)]A(1)\| &\le \|T_n(g)A(1)-T_n(1)A(g)+T_n(1)A(g)-A(1)A(g)\| \\ &\le \|T_n(g)A(1)-T_n(1)A(g)\|+\|A(g)\|\|T_n(1)-A(1)\|,\end{aligned}$$

这得出

$$\lim_{n\to\infty}\|[T_n(g)-A(g)]A(1)\|=0.$$

仿照定理 3 的证明，我们推得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(g)-A(g)\|=0$$

对所有 $g\in C(K)$。由于不等式，此性质可转移到 f

$$\begin{aligned}\|T_n(f)-A(f)\| &\le \|T_n(f)-T_n(g)\|+\|T_n(g)-A(g)\|+\|A(g)-A(f)\| \\ &\le^{\text{上确界}}_{n} \|T_n\|\cdot\|f-g\|+\|T_n(g)-A(g)\|+\|A\|\cdot\|f-g\| \\ &\le 2(\sup_n \|T_n\|+\|A\|)\varepsilon+\|T_n(g)-A(g)\|.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f)-A(f)\|=0,$$

对所有 $f\in E$，证明即告完成。 □

注 3. 在定理 3 和定理 4 中，将平移性替换为强平移性后，测试函数集可简化如下：

$$1,-\mathrm{pr}_1,\ldots,-\mathrm{pr}_N \ \textit{and}\ \sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{pr}_k^2+2\alpha\,\mathrm{pr}_k\right).$$

正如 Korovkin [20], [21], 所指出的，引言中提到的他的定理在将单位区间替换为单位圆时同样成立

$$S^1=\{(\cos\theta,\sin\theta):\theta\in[0,2\pi)\}\subset\mathbb{R}^2.$$

注意到在这种情况下，余弦函数表示 pr_1 在 S^1 上的限制，而正弦函数表示 pr_2 在 S^1 上的限制，我们可以很容易地从定理 3 推导出以下结果：

定理 5. 假设 T_n $(n\in\mathbb{N})$ 和 A 是从 $E=C_{2\pi}(\mathbb{R})$ 到其自身的弱非线性单调算子，且 $A(1)=1$，并且

$$A(3+2\cos+2\sin)=(A(-1-\cos))^2+(A(-1-\sin))^2 \tag{5.8}$$

Then

$$T_n(f)\to A(f)\quad \textit{uniformly for all } f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

当且仅当以下每个测试函数都具有此性质时，

$$1,\ -1-\cos,\ -1-\sin\ \textit{and}\ 3+2\cos+2\sin.$$

这里，$C_{2\pi}(\mathbb{R})$ 表示由所有连续函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 构成的巴拿赫格，这些函数是周期的，周期为 2π，并赋予上确界范数。

注 4. 请注意，当 A是保持单位元的代数同态时（特别是，当 $A=I$时），假设 (5.8) 自动成立。当平移性这一性质加强为强平移性时，定理 5 中的测试函数集可以替换为

$$1,\ -\cos,\ -\sin\ \textit{and}\ 2\cos+2\sin.$$

其他一些值得关注情形下定理 5 的类似结果，例如二维环面 $S^1 \times S^1$ 和二维球面 S^2，留待读者完成。

定理 5（以及其后的注释）同样适用于 Ces`aro 收敛的情形，也就是形如以下形式的收敛

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) \to A.$$

下一节将给出说明上述结果的具体例子。

最后但同样重要的是，可以按照 [15] 中定理 2 的模式扩展我们的结果：不再使用 $\mathbb{R}^N$ 上的经典测试函数族，而是使用分离函数，从而将形如（1.1）的先验估计替换为适用于一般度量空间背景的不等式。有关这些函数的详细信息，请参见 [23]。

6. Examples

下面我们将需要以下多项式族

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n,$$

它们与魏尔斯特拉斯逼近定理的伯恩斯坦的证明有关。众所周知，它们满足若干组合恒等式，例如

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \tag{6.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx) \tag{6.3}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}.$，参见 [10], 定理 8.8.1，第 256 页）。

例1. 给定连续函数 $\varphi\colon\ [0,1] \to [0,1]$，可将其关联到非线性算子序列 $T_n\colon\ C([0,1]) \to C([0,1])$，其定义公式如下

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(\varphi(x)) \sup_{[k/(n+1) \le t \le ,(k+1)/(n+1)]} f(t).$$

显然，这些算子是次线性、强平移不变、单调且保单位的（最后这一性质由公式 (6.1) 得出）。我们将使用定理 3 证明，序列 $(T_n)_n$ 逐点收敛到线性、正且保单位的算子

$$A : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad A(f) = f \circ \varphi.$$

条件 (5.1) 是显然的，因为 A是保单位的。条件 (5.2) 的成立源于这样一个事实：A 是保持单位元的代数同态；见注 2。利用恒等式 (6.1)-(6.3)，可以证明，对于函数 1、$-x$ 和 x^2 中的每一个，$T_n(f) \to A(f)$ 一致地成立；由于 $[0,1] \subset \mathbb{R}_+.$，这一组测试函数已足够。因此，算子 T_n 和 A 满足定理 3 的假设，由此可得，对于所有 $f \in C([0,1])$，$T_n(f) \to A(f)$ 一致地成立。

例 2. 如上所述，$\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数。与之相伴的是 Kantorovich算子序列 $K_n:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$，其定义如下：

$$(K_nf)(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(\varphi(x))\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)}f(t)\mathrm{d}t$$

以及算子

$$A:L^1([0,1])\to L^1([0,1]),\quad A(f)=f\circ\varphi.$$

显然，这些算子是线性、正性且保单位的。此外，

$$\|K_nf\|_1\le\int_0^1|f(t)|\,dt\quad for\ all\ f\in L^1([0,1])\ and\ n\in\mathbb{N},$$

且算子 A 对于 $\alpha=0$ 满足技术条件 (5.5)，也就是说，

$$A(1)A(x^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(x))^2.$$

算子 $T_n:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$ 定义如下：

$$T_n(f)=\sup\{K_n(f),K_{n+1}(f)\}$$

它们是次线性、单调且强平移不变的。简单计算（基于恒等式 (6.1)-(6.3)）表明，

$$K_n(1)=1,$$
$$K_n(-x)=\frac{-1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)p_{n,k}(\varphi(x))=-\frac{n\varphi(x)}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)}$$

and

$$K_n(x^2)=\frac{n(n-1)\varphi^2(x)}{(n+1)^2}+\frac{2n\varphi(x)}{(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^2},$$

这意味着，对于每个函数 $f\in\{1,\ -x,\ x^2\}$，$T_n(f)\to A(f)$ 都一致地收敛（因此在 L^1-范数下收敛）。根据定理 4，对于所有函数 $f\in L^1([0,1])$，这种收敛性质都成立。

例 3. 设 φ 和 A 与前一个例子中的相同，并考虑由下列公式定义的 Choquet-Kantorovich算子序列 $T_n:L^1([0,1])\to L^1([0,1])$

$$T_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(\varphi(x))\cdot\frac{(C)\int_{k/(m+1)}^{(k+1)/(n+1)}f(t)\mathrm{d}\mu(t)}{\mu([k/(n+1),(k+1)/(n+1)])},$$

积分号前的字母 C 表示我们所处理的是 Choquet 积分；在我们的例子中，就是关于容量 μ 的积分，该容量通过公式 $\mu(A)=g(m(A))$ 表示对 Lebesgue 测度 m 的扭曲，其中 $g:[0,1]\to[0,1]$ 是严格递增、可微且凹的函数，满足 $g(0)=0$ 且 $g(1)=1$。Gal和Trifa [17] 发展的理论保证了定理 4 的适用性，从而得出对于所有函数 $f\in L^1([0,1])$，$T_n(f)\to A(f)$。

涉及多个变量函数的例子可以通过算子的张量积来展示。例如，在例1中，使用张量积方法可得

$$T_n(f)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}p_{n,k}(\varphi(x))p_{n,j}(\varphi(y))$$
$$\cdot\sup\{f(t,s);t\in[k/(n+1),(k+1)/(n+1)],v\in[j/(n+1),(j+1)/(n+1)]\},$$

对于任意 $f\in C([0,1]\times[0,1])$ 和 $A(f)(x,y),\ =f(\varphi(x)\ \varphi(y))$ 满足 $T_n(f)\ \to A(f)$，当 $n\to\infty$ 时，在 $[0,1]\times[0,1]$ 上一致地成立。

7. Open problems

本文最后提及几个可能引起读者兴趣的开放问题。第一个问题涉及我们在定理3—5中提出的一个技术性假设：

问题1. 函数方程的解集有多大?

$$A(1)A(\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{pr}_k+\alpha)^2)=\sum_{k=1}^{N}(A(-\mathrm{pr}_k-\alpha))^2,$$

在所有弱非线性单调算子 A 中： $C(K)\ \to C(X)$?

我们已经注意到，任何保持单位元的代数同态（特别是 $A=I$）都是一个解。反过来是否也成立? 通常的函数方程著作（包括 Acz´el 和 Dhombres [2] 所著的书）似乎对此未作讨论。

这并不完全令人意外：通过研究其他类的极限算子，可以证明与本文结果类似的结论。以下结果由第二位署名作者在第四届罗马尼亚数学分析及其应用巡回研讨会（布拉索夫，2022年5月19日至20日）的一次报告中提出：

定理 6. 设 K 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 中的连通紧子集， $A:\ C(K)\ \to\mathbb{R}$ 是一个（可能为非线性的）单调泛函，使得 $A(1)=1$ ，且 $(T_n)_n$ 是从 $C(K)$ 到 $C(K)$ 的一列次线性单调算子，使得

$$T_n(f)(x)\to A(f)\cdot 1\quad in\ the\ sup\text{-}norm$$

对于测试函数 1、 $\pm\mathrm{pr}_1$、...、 $\pm\mathrm{pr}_N$ 以及 $\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2$ 中的每一个函数，均成立。于是，这一收敛性质可推广到 $C(K)$ 中的所有非负函数 f 。

只要算子 T_n 是弱非线性且单调的，该结论便对 $C(K)$ 中的所有函数成立。

此外，在这两种情况下，测试函数族都可以缩减为 $1,\ -\mathrm{pr}_1,\ldots,-\mathrm{pr}_N$ 以及 $\sum_{k=1}^{N}\mathrm{pr}_k^2$，前提是 K 包含在 $\mathbb{R}^N$的正锥中。

定理 6 是韦伊遍历定理的非线性推广。该定理的本质是无理旋转的唯一遍历性

$$R_\alpha(x)=(x+\alpha)\mod 2\pi\quad(\alpha/\pi\notin\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}),$$

断言任意$f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$的遍历平均$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\circ(R_\alpha)^k$ 都一致收敛于常函数 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\mathrm{d}\mu$. 参见 Oxtoby [25] 和 Parry [26]

详情请参阅。韦伊遍历定理是定理 6 在 $C(K) = C_{2\pi}(\mathbb{R})$时的特殊情形，

$$T_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ (R_\alpha)^k \text{ and } A(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \mathrm{d}\mu\right) \cdot 1.$$

.

韦伊遍历定理的经典证明包括先验证其对指数函数 e^{inx} 成立，然后应用魏尔斯特拉斯逼近定理的三角形式。定理 (6) 将测试函数集缩减为三元组 1、cos 和 sin！

请注意，定理5在此情形下不适用，因为技术假设 (5.8) 不成立。

问题 2。寻找技术条件 5.2 的其他替代条件，以避免在值域中出现乘法运算。

另一个尚未解决的问题如下 o ne:

问题 3。将定理 4 扩展到定义在与有限测度 μ 在 $\mathbb{R}^N$. 上相关联的勒贝格空间 $L^p(\mu)$ 上的算子情形。特别值得关注的是高斯测度 ^{1} $(\sqrt{2\pi})_N e^{-\|x\|^2/2}\mathrm{d}x$ 的情形。

References

[1] Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D.：《正算子》。载于《巴拿赫空间几何手册》I，页码 85–122。North-Holland，阿姆斯特丹（2001）[2] Acz´el, J., Dhombres, J.：《多变量函数方程及其在数学、信息论以及自然科学与社会科学中的应用》。剑桥大学出版社，剑桥–纽约–新罗谢尔–墨尔本–悉尼（1989）。[3] Aliprantis, C.D., Tourky R.：《锥与对偶》。数学研究生教程第 84 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2007）。[4] Altomare, F.：Korovkin 型定理与正算子。《逼近理论综述》6，92–164（2010）[5] Altomare, F.：关于与广义平均相关的正线性泛函和算子。《数学分析及其应用杂志》502，论文编号 125278（2021）[6] Altomare, F.：有界函数空间上正线性算子与泛函序列的收敛性。《美国数学会会刊》149，3837–3848（2021）[7] Altomare F.：Korovkin 型定理与局部逼近问题。《数学探索》（2022），doi: https://doi.org/10.1016/j.exmath.2022.06.001。[8] Altomare, F., Campiti, M.：《Korovkin 型逼近理论及其应用》。德格鲁伊特数学研究丛书第 17 卷，柏林（1994，2011 年再版）。[9] Bogachev, V.：《测度论》第一卷。施普林格科学与商业媒体（2007）[10] Choudary A.D.R., Niculescu, C.P.：《区间上的实分析》。施普林格出版社，新德里（2014）[11] E. B. Davies，《巴拿赫格预对偶的结构与理想理论》，《美国数学会汇刊》131，544–555（1968）[12] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：Korovkin 定理的非线性扩展。《地中海数学杂志》17，文章编号 145（2020）。[13] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：与向量容量相关的 Choquet 算子。《数学分析及其应用杂志》500，文章编号 125153（2021）[14] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：关于 Choquet 型算子的注记。《数学方程》95，433 447 2021–（ ）[15] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：Korovkin 抽象定理的非线性版本。《罗马尼亚精确科学与自然科学院学报 A 辑：数学》116，文章编号 68（2022）[16] Gal, S.G., Niculescu, C.P.：弱非线性单调算子的 Korovkin 型定理。预印本见 arXiv:2206.14102

[17] Gal, S.G. Trifa, S.：关于相对于扭曲勒贝格测度的 L^p-逼近的定量估计：Bernstein-Kantorovich-Choquet 多项式。《构造性数学分析》2，第 1 期，15–21（2019）[18] Guessab, A., Schmeisser, G.：多元逼近中的两个 Korovkin 型定理。《巴拿赫数学分析杂志》2(2)，121–128（2008）[19] Kadison, R.V.：交换拓扑代数的表示理论。《美国数学会回忆录》第 7 号，1951。[20] Korovkin, P.P.：连续函数空间中线性正算子的收敛性（俄文）。《苏联科学院通报》（新系列）90，961–964（1953）。[21] Korovkin, P.P.：《线性算子与逼近理论》。Fitzmatgiz，莫斯科（1959）（俄文）[1960] 英文译本，Hindustan 出版公司，德里（）[22] Namioka I.：偏序线性拓扑空间。《美国数学会回忆录》第 24 号（1957）。[23] Niculescu, C.P.：绝对连续性及其应用综述。《国际数值数学丛刊》157，201–214。Birkh¨auser，巴塞尔（2009）[24] Niculescu, C.P., Persson, L.-E.：《凸函数及其应用：一种当代方法》，第二版，CMS 数学丛书第 23 卷，施普林格出版社，纽约（2018）[25] J.C. Oxtoby：遍历集。《美国数学会通报》58，116–136（1952）[26] Parry, W.：《遍历理论专题》。剑桥数学专著丛书第 75 卷。剑桥大学出版社（1981）[27] Popa, D.：Korovkin 定理的算子版本。《数学分析及其应用杂志》515(1)，论文编号 126375（2022）[28] Schaefer, H.H., Wolff, M.P.：《拓扑向量空间》，《数学研究生教材》第 3 卷，第二版，施普林格科学与商业媒体，纽约（1999）[29] Wang, H.：Korovkin 型定理及其应用。《逼近理论杂志》132，258–264（2005）

Department of Mathematics and Computer Science, University of Oradea, University Street No. 1, Oradea, 410087, Romania, and Academy of Romanian Scientists, Splaiul Independentei nr. 54, 050094, Bucharest, Romania

Email address: galso@uoradea.ro, galsorin23@gmail.com

Department of Mathematics, University of Craiova, Craiova 200585, Romania and The Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania*Email address*: constantin.p.niculescu@gmail.com