通过部分重排矩检测任意维双部量子系统中的纠缠

Shruti Aggarwal[1], Satyabrata Adhikari[1], A. S. Majumdar[2,1], *[1]印度德里理工大学, *Shahbad Daulatpur, Main Bawana Road,* 德里*-110042*, [2]印度加尔各答*700098 Salt Lake* 第三区 *JD*区, *S. N.Bose* 基础科学国家中心

利用对量子态的部分了解来检测纠缠，在高效实施方面面临挑战。本文提出一种可分性判据，利用重排后密度矩阵的部分矩检测任意维量子态中的双体纠缠。我们的方法在统一框架下既能检测可蒸馏态，也能检测束缚纠缠态。我们通过属于上述两类的示例说明该方法的重要性；这些态无法通过其他依赖部分态信息的类似方案检测。本文提出的部分重排矩方法也被证明适用于双量子比特系统，只需对可分性判据稍作修改。

PACS编号:

arXiv:2302.04797v2 [quant-ph] 8 Mar 2024

I. 引言

纠缠 [1, 2]是量子系统的一种显著特征，在经典物理中没有对应物。它是实现量子隐形传态 [3], 、量子密码学 [4], 和量子密集编码 [5]等量子信息任务的关键物理资源。这为纠缠态的表征与分类提供了强有力的动机。尤其是，判断给定量子态是否纠缠的判据具有重要的理论和实际意义。尽管过去几年提出了许多纠缠判据，但目前仍不存在一种普遍适用的方法，能够判定给定量子态是否纠缠。从历史上看，贝尔型不等式是区分纠缠态与可分态的首个操作性判据 [6]。鉴于纠缠在量子信息处理中至关重要，人们一直在努力寻求更高效的方法来检测量子态中的纠缠 [7, 8]。

对于双体系统，存在两种著名的可分性判据：正部分转置（PPT）判据 [9]和矩阵重排判据 [11, 12]。前一种判据能够检测所有非正部分转置（NPT）态的纠缠，但无法检测任何PPT纠缠态。后一种判据对NPT态的检测能力弱于前一种；然而，它能够检测某些PPT纠缠态。除此之外，还有一些可在实践中检测纠缠的操作性工具。基于可观测量测量的纠缠见证提供了一种刻画纠缠的方法 [13, 14]。文献中存在多种构造见证算符的方案 [15–18], , 不过这些方案都依赖于关于量子态的某些先验信息。此外，还可以通过一种称为自测试的方法，以设备无关方式利用测量统计检测纠缠[19–22] , 但这种方法同样依赖于一些额外假设。

在实际情况下，关于量子态的完整信息未必总是可得，而基于密度矩阵部分信息的纠缠检测在实验中可能更容易实现 [23]。最近，Elben 等人 [24] 提出了一种通过估计部分转置密度矩阵的矩来检测双体纠缠的方法。Nevel 等人 [25] 提出了一组有序的实验可访问条件，用于检测混合态中的纠缠。与通过完整量子态层析重构量子态相比，矩的优势在于可以利用阴影层析以更高效的方式估计。此类工作 [24–27] 仅侧重于检测NPT纠缠态。利用矩检测束缚纠缠态仍需深入研究。本文针对任意维数双体系统中的量子态，提出了一种基于对其施加重排操作后所得厄米矩阵的矩的可分性判据。

我们这项工作的动机是构造可计算的纠缠判据，通过对密度矩阵的部分信息来检测 NPT纠缠态以及束缚纠缠态（BES）。近期，已有研究利用基于矩的判据检测束缚纠缠态 [28, 29]。我们的基于矩的判据更强，因为只需低阶重排矩就足以检测纠缠。重要的是，这种方法不仅在概念上合理，从实验角度来看也切实可行。经典阴影形式可通过随机单量子比特测量可靠地估计矩 [30, 31]。若制备多个由 $m \times m$ 密度矩阵 ρ表示的量子态副本，则可利用循环移位算符 [32, 33]测量矩$tr(\rho)^2$, ...、 $tr(\rho)^m$。研究表明，利用 m 个量子态副本和受控交换操作 [34–36], 在技术上可以测量部分矩。另有研究提出了一种基于机器学习的方法，可测量任意阶的矩 [37]。

本文基于对量子态ρ^R应用重排算子后得到的厄米矩阵（ρ^R）$^\dagger\rho^R$ 的矩，提出了一种适用于双体系统的新型纠缠判据

*电子邮箱: shruti˙phd2k19@dtu.ac.in, satyabrata@dtu.ac.in, archan@bose.res.in

，我们将其称为重排矩（或 R-矩）。首先，我们表明，该判据能够有效检测高维双粒子系统中的束缚纠缠态（BES）。此外，我们还表明，在某些情况下，对于高维系统中NPT纠缠态的检测，该判据优于其他基于部分矩的现有判据。 R-矩判据可表述为一个简单的不等式，双体系统中的可分态必须满足该不等式，因此，违反该不等式的量子态即表明其存在纠缠。我们通过考察一些示例，说明了 R-矩判据在检测NPT纠缠和束缚纠缠方面的重要性。最后，我们为双量子比特系统构造了另一种可分性判据，并考察了一些其他基于部分矩和重排的判据无法检测到的双量子比特NPT纠缠态示例。

本文结构如下。第二节简要回顾若干纠缠检测判据。第三节介绍利用重排矩（R-矩）进行纠缠检测的思路。第四节讨论用于检测高维双体纠缠态的 R-矩判据，并通过示例说明该判据能够有效检测负偏转置态和束缚纠缠态。第五节提出另一种基于 R-矩的 $2 \otimes 2$ 维系统判据。我们通过一些示例，并将R-矩判据与其他基于部分矩的纠缠检测判据进行比较，展示其效用。第六节提出一种测量重排矩阵之矩的方案。最后，第七节进行简要讨论。

II. 预备知识

设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A^m \otimes \mathcal{H}_B^n$ 表示维数为 mn的复合希尔伯特空间，其中子系统 A 的维数为 m，子系统 B 的维数为 n。若量子态 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$可表示为两个子系统的乘积态的凸组合，则称其为可分的，

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \ \sum p_i = 1, \ 0 \leq p_i \leq 1 \qquad (1)$$

否则，该量子态称为纠缠态。使用上述定义检测纠缠态在实践中并不可行，因为必须验证待研究的量子态是否能够针对复合希尔伯特空间中存在的每一个基写成形式（1）。因此，大量研究致力于发展能够检测纠缠态的不同判据。这里我们讨论其中一些可被认为是有效的判据。

A. PPT 判据

第一个纠缠检测准则由 Peres [9] 提出，随后被证明对于 $2 \otimes 2$ 和 $2 \otimes 3$ 维度系统 [38]而言是充要条件。这一准则通常称为 PPT 判据。它指出，对于任意双体可分态 ρ，相对于子系统 B 的部分转置（记作 ρ^{τ_B}，其元素为 $\rho^{\tau_B}_{ij,\ kl} = \rho_{il,\ kj}$）也是一个密度算符；也就是说，它的特征值均非负。满足 PPT 判据的量子态称为 PPT 态。在高维系统中，人们发现存在纠缠的 PPT 态。因此，对于高维系统而言，PPT 判据只是可分性的必要条件，而非充分条件。PPT 纠缠态也称为束缚纠缠态，因为它们无法蒸馏成任何最大纠缠纯单态 [39]。部分转置是正的，但不是完全正的，因此在实验中可能无法实现 [32]。Horodecki 等人 [32]提出了一种方法，用以修改部分转置操作，使其无需进行任何量子态估计即可在实验中实现。这种方法称为结构物理近似（SPA）。SPA 提供了一种系统的方法，利用量子信道近似那些为正但非完全正的非物理映射。

B. 重排判据

与部分转置类似，也可以对密度矩阵元素使用另一种排列方式。K. Chen 等人 [40]和 O. Rudolph [41] 采用其中一种密度矩阵元素的排列来研究纠缠检测问题。用于获得该排列的映射称为重排映射。该映射可用于获得双体系统的另一种可分性判据，即重排判据。该判据指出，对于任意双体可分态 ρ，具有元素 $\rho_{ij,\ kl} = \rho_{ik,\ jl}$ 的重排矩阵 ρ^R 的迹范数不大于 1，即 $||\rho^R||_1 \leq 1$，其中，算子 X 的迹范数定义为 $||X||_1 := Tr(\sqrt{X^\dagger X})$ [12, 42]。该判据仅为低维和高维系统提供必要条件。尽管如此，该判据仍被认为是一种强判据，因为它既能检测负偏转置纠缠态，也能检测束缚纠缠态。此外，还推导出了基于重排判据的任意维双体态并发度的解析下界 [40]。这使得估计束缚纠缠态中的纠缠量也成为可能。基于密度矩阵和约化密度矩阵重排的可分性判据已在 [43] 中提出。在 [44], 中，利用重排矩阵的秩获得了量子态的必要且充分的乘积判据。最近已有研究表明，可以利用结构物理近似在物理上实现重排判据 [45]。

C. 基于矩的纠缠检测判据

Elben 等人 [24] 提出了一种方法，通过估计部分转置密度矩阵的矩来检测多体混合态中的双体纠缠。由于部分转置操作是正映射，但并非完全正映射，因此它不具有物理性，可能无法在实验中实现——

尽管在实验中实现部分转置操作存在上述困难，但仍可以测量其矩 [24]。利用前三个部分转置矩，人们提出了一种称为 p_3-PPT 判据的纠缠检测条件。若 τ 表示部分转置操作，则 k^{th} 部分转置矩定义为

$$p_k(\rho^\tau) = Tr[(\rho^\tau)^k] \tag{2}$$

PT 矩的优势在于，可以通过阴影层析对其进行估计，且比必须先通过完整的量子态层析重构量子态 ρ 时更高效 [24]。 p_3-PPT 条件指出，任何 PPT 态 ρ 都满足以下不等式

$$L_1 \equiv (p_2(\rho^\tau))^2 - p_3(\rho^\tau)p_1(\rho^\tau) \leq 0 \tag{3}$$

任何 $d_1 \otimes d_2$ 维双体态 ρ 若违反上述不等式 (3)，就表明该量子态是 NPT纠缠态。

Neven 等人 [25] 提出了一组不等式，称为 $D_k^{(in)}$ 不等式，用于检测双体 NPT纠缠态。每个 $D_k^{(in)}$ 都涉及部分转置算子 ρ^τ的前 k 个矩。只要违反其中任意一个 $D_k^{(in)}$ 不等式，就意味着 ρ 是 NPT纠缠态。可以得到第一个非平凡条件，其形式为 $D_3^{(in)}$ 不等式，写作

$$L_2 \equiv \frac{3}{2}(p_1(\rho^\tau))(p_2(\rho^\tau)) - \frac{1}{2}(p_1(\rho^\tau))^3 - p_3(\rho^\tau) \leq 0 \tag{4}$$

所有 PPT 态都满足不等式 (4)，而违反该不等式则可证明存在 NPT纠缠态，其可表示为

$$L_2 > 0. \tag{5}$$

Neven 等人 [25] 指出，仅凭前三阶矩 $p_1(\rho^\tau)$、 $p_2(\rho^\tau)$ 和 $p_3(\rho^\tau)$，上述不等式在量子态 ρ^τ 的纯度大于或等于 $1/2$时，即当 $1/2 \leq p_2(\rho^\tau) \leq 1$时，能够检测出比 p_3-PPT 判据更多的纠缠态。在另一区域，即当 $0 \leq p_2(\rho^\tau) < 1/2$时， p_3-PPT 判据检测出的纠缠态多于$D_3^{(in)}$ 判据。

Yu 等人 [26] 提出了一种基于部分矩的最优纠缠检测判据，称为 p_3-OPPT 判据。该最优可分性判据可表述如下：如果ρ 可分，则以下不等式成立：

$$L_3 = \mu x^3 + (1-\mu x)^3 - p_3(\rho^\tau) \leq 0 \tag{6}$$

where $x = \frac{\mu + \sqrt{\mu[p_2(\rho^\tau)(\mu+1)-1]}}{\mu(\mu+1)}$ and $\mu = \lfloor \frac{1}{p_2(\rho^\tau)} \rfloor$.

Zhang 等人 [28]提出了另一种基于称为重排矩的量来构造的纠缠检测判据。为推导其纠缠检测准则，他们定义了 $d \otimes d$ 维双体量子态 ρ 的重排矩如下：

$$r_k(\rho^R) = Tr[\left(\rho^R(\rho^R)^\dagger\right)^{k/2}],\ k = 1, 2, ..., d^2 \tag{7}$$

其中， d^2 是矩阵 ρ^R的阶数。
基于重排矩的可分性判据 r_2和 r_3 表述如下：如果量子态 ρ 可分，则

$$L_4 \equiv (r_2(\rho^R))^2 - r_3(\rho^R) \leq 0 \tag{8}$$

不等式 (8) 被违反，即 $L_4 > 0$ 意味着量子态 ρ 是纠缠的。

文献 [28]推导出了一种基于 Hankel 矩阵、涉及高阶 r_k 的更强可分性判据。对于$r = (r_0,\ r_1,\ r_2,\ ...r_n)$，可将 Hankel 矩阵构造为 $[H_k(r)]_{ij} = r_{i+j}$ 和 $[B_l(r)]_{ij} = r_{i+j+1}$ ，其中 $i,\ j$ =0，1，2，.....，k。该判据可表述如下：若 ρ 可分，则对于 $k \equiv 1,\ 2,\ .....,\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 以及 $l = 1,\ 2,\ .....,\ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，有

$$\widehat{H}_k(r) = [r_{i+j}(\rho^R)] \geq 0 \tag{9}$$

$$\widehat{B}_l(r) = [r_{i+j+1}(\rho^R)] \geq 0 \tag{10}$$

其中 $r_1(\rho^R) = 1$。

III. 重排矩或 R–矩

在介绍基于重排矩的可分性判据之前，我们先在 $m \otimes n$维系统中定义重排矩或 R-矩的概念。为简化问题，先考虑一个由密度算符 σ_{12} 描述的 $2 \otimes 3$ 系统，该算符定义为

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \tag{11}$$

where $Z_{11} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12}^* & t_{22} & t_{23} \\ t_{13}^* & t_{23}^* & t_{33} \end{pmatrix}$, $Z_{12} = \begin{pmatrix} t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{34} & t_{35} & t_{36} \end{pmatrix}$, $Z_{21} = Z_{12}^\dagger$, $Z_{22} = \begin{pmatrix} t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{45}^* & t_{55} & t_{56} \\ t_{46}^* & t_{56}^* & t_{66} \end{pmatrix}$.
σ_{12} 的归一化条件由$\sum_{i=1}^{6} t_{ii} = 1$给出。 σ_{12} 的重排矩阵记为 σ_{12}^R，其定义为

$$\sigma_{12}^R = \begin{pmatrix} (vecZ_{11})^T \\ (vecZ_{12})^T \\ (vecZ_{21})^T \\ (vecZ_{22})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{12}^* & t_{22} & t_{23} & t_{13}^* & t_{23}^* & t_{33} \\ t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{24} & t_{25} & t_{26} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{14}^* & t_{24}^* & t_{34}^* & t_{15}^* & t_{25}^* & t_{35}^* & t_{16}^* & t_{26}^* & t_{36}^* \\ t_{44} & t_{45} & t_{46} & t_{45}^* & t_{55} & t_{56} & t_{46}^* & t_{56}^* & t_{66} \end{pmatrix} \tag{12}$$

其中，对于任意一个元素为 x_{ij}的 $n \times n$ 矩阵 X_{ij}， $vecX_{ij}$ 定义为

$$vecX_{ij} = [x_{11}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{n1}, ...x_{nn}]^T \tag{13}$$

注意，$(\sigma_{12}^R)^\dagger \sigma_{12}^R$ 是一个 9×9阶矩阵。此外， σ_{12}^R 的非零奇异值个数等于秩

σ_{12}^R 的秩，因此至多为四。现在我们可以将这一事实推广到 $m \otimes n$ 系统。设 ρ 是表示一个 $m \otimes n$ 维量子态的密度矩阵，它可以写成一个分块矩阵，每行和每列包含 m 个分块，每个分块都是一个 $n \times n$ 矩阵。对其应用重排操作后得到的重排矩阵 ρ^R 的维数为 $m^2 \times n^2$。要得到 R阶矩判据，第一步是求 $n^2 \times n^2$厄米算子$(\rho^R)^\dagger \rho^R$的特征方程。其形式为

$$
\begin{aligned}
& det(\rho^{R\dagger}\rho^R - \lambda I) = 0 \\
& \implies \prod_{i=1}^{n^2}(\lambda_i(\rho^{R\dagger}\rho^R) - \lambda) = 0 \\
& \implies \lambda^{n^2} + D_1\lambda^{n^2-1} + D_2\lambda^{n^2-2} + \ldots + D_{n^2} = 0
\end{aligned} \tag{14}
$$

其中，第二步中给出的 $\lambda_i((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 表示特征多项式 (14) 的根。利用牛顿多项式以及关于特征多项式和矩阵 [46–48], 的幂的迹的 Faddeev-LeVerrier 算法的已知结果，第三步中给出的系数 $\{D_i\}_{i=1}^{n^2}$ 可以用 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的矩来表示，即

$$
D_i = (-1)^i \frac{1}{i!}
\begin{vmatrix}
T_1 & T_2 & T_3 & . & . & . & ... & T_m \\
1 & T_1 & T_2 & T_3 & . & . & ... & T_{m-1} \\
0 & 2 & T_1 & T_2 & T_3 & . & ... & T_{m-2} \\
0 & 0 & 3 & T_1 & T_2 & T_3 & ... & T_{m-3} \\
. & . & . & . & . & . & ... & . \\
. & . & . & . & . & . & ... & . \\
 & & & & & & \ddots & \\
. & . & . & . & . & . & & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & T_1
\end{vmatrix} \tag{15}
$$

对于 $i = 1$ 到 n^2, 其中 $D_{n^2} = det((\rho^R)^\dagger \rho^R)$。$T_k = tr(((\rho^R)^\dagger \rho^R)^k)$ 表示 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的第 k^{th} 个重排矩。

将 ρ^R 的奇异值按降序排列，即 $\sigma_1(\rho^R) \geq \ldots \geq \sigma_r(\rho^R) \geq 0$, 其中 r 表示 ρ^R 的奇异值总数。因此，对于 $i = 1$ 到 r，有

$$
\lambda_i(\rho^{R\dagger}\rho^R) = \sigma_i^2(\rho^R)
$$

因此，系数 D_i 与奇异值 $\sigma_i(\rho^R)$之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2(\rho^R) &= -D_1 && (16)\\
\sum_{i<j} \sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R) &= D_2 && (17)\\
\sum_{i<j<k} \sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R)\sigma_k^2(\rho^R) &= -D_3 && (18)\\
.... & .... \\
.... & .... \\
.... & .... \\
\prod_{i=1}^{r} \sigma_i^2\ (\rho^R) &= D_r && (19)
\end{aligned}
$$

利用（15），系数 D_1, D_2 和 D_3 可用$\rho^{R\dagger}\rho^R$ 的一阶矩 T_1、二阶矩 T_2 和三阶矩 T_3 表示为

$$
\begin{aligned}
D_1 &= -T_1 && (20)\\
D_2 &= \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2) && (21)\\
D_3 &= -\frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3) && (22)
\end{aligned}
$$

一般而言，系数 D_{n^2} 可表示为 $D_{n^2} = det\ (\rho^{R\dagger}\rho^R)$ 。

IV. 基于 $m \otimes n$ 系统中R-矩的可分性判据

尽管基于部分矩的可分性判据涉及最高至 3rd 阶的矩 [24, 25], , 但它无法检测高维系统中的若干负偏转置纠缠态，也不适用于检测束缚纠缠态。这促使我们深入研究重排矩在高维系统纠缠检测中的应用。

A. 判据

我们现在可以给出基于重排矩的 $m \otimes n$ 维度系统的可分性判据。它以一个不等式的形式表述，其中涉及 k^{th}阶矩， k 是矩阵 ρ^R的秩。

定理1： 设 ρ 是 $m \otimes n$ 维空间中的任意双体态。考虑重排矩阵 ρ^R的 k 个非零奇异值，可记为 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k$，其中$1 \leq k \leq min\{m^2, n^2\}$。若 ρ 可分，则下列不等式成立:

$$
R_1 \equiv k(k-1){D_k}^{1/k} + T_1 - 1 \leq 0 \tag{23}
$$

其中 $D_k = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^2\ (\rho^R)$ 和 $T_1 = Tr[\ (\rho^R)\ ^\dagger \rho^R]$。

证明: 设 ρ 是 $m \otimes n$ 系统中的任意可分态，并假设 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的非零特征值个数为

k。也就是说，存在一个数 k ($1 \leq k \leq min\{m^2, n^2\}$)，它取决于 ρ^R 的非零奇异值个数，使得 $D_k = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\rho^R) \neq 0$。$(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的退化特征方程为

$$\lambda^k + \sum_{i=1}^{k} D_i \lambda^{k-i} = 0 \tag{24}$$

其中，D_i 在 (15) 中定义，适用于 $i = 1$ 至 k，而 $D_i = 0$ 适用于 $i > k$。

利用 (16) 和 (20)，第一个重排矩 T_1 可表示为 ρ^R 的奇异值的函数：

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\rho^R) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(\rho^R) \right)^2 - 2 \sum_{i<j} \sigma_i(\rho^R) \sigma_j(\rho^R) \end{aligned} \tag{25}$$

(25) 可重新表示为

$$\sum_{i<j} \sigma_i(\rho^R) \sigma_j(\rho^R) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(\rho^R) \right)^2 - T_1 \right) \tag{26}$$

显然，一组非负实数的算术平均数大于或等于其几何平均数。由于对于从 $i = 1$ 到 k 的 σ_i 均为非负实数，因此有

$$\sum_{i<j} \sigma_i(\rho^R) \sigma_j(\rho^R) \geq \frac{k(k-1)}{2} \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\rho^R) \right)^{2/k} \tag{27}$$

利用 (26) 和 (27)，可得

$$\frac{1}{2}(||\rho^R||_1^2 - T_1) \geq \frac{k(k-1)}{2} D_k^{1/k} \tag{28}$$

其中，$||\rho^R||_1 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(\rho^R)$ 且 $D_k = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\rho^R)$。因此，我们得到

$$||\rho^R||_1 \geq k(k-1) D_k^{1/k} + T_1 \tag{29}$$

由于 ρ 是任意可分态，利用上述不等式 (29) 中的重排判据，可得 $k(k-1)D_k^{1/k} + T_1 \leq 1$，这就证明了 (23)。

推论1： 设 ρ 是 $m \otimes n$ 维系统中的任意双体态。设 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k$ 是重排矩阵 ρ^R 的 $1 \leq k \leq min\{m^2, n^2\}$ 个非零奇异值。若任意量子态 ρ 违反 (23)，则它是纠缠态。

需要指出的是，我们在此提出的基于 R-矩的可分性判据，对于那些满足 $det((\rho^R)^\dagger \rho^R) = 0$ 的 $m \otimes n$ 系统中的密度矩阵 ρ 更为有效。因此，当 ρ^R 为非满秩态时，R-矩判据效果良好。为检验基于 R-矩的可分性判据，考虑非满秩态是有利的，因为这不需要所有的 R-矩，因此，即使我们没有关于量子态的完整信息，我们的判据仍然适用。在 $m \otimes n$ 系统中，当 (i) 矩阵 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的非零特征值个数小于 n^2，其中 $m \geq n$；或当 (ii) 矩阵 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的非零特征值个数小于 m^2，其中 $m \leq n$ 时，条件 $det((\rho^R)^\dagger \rho^R) = 0$ 成立。特别地，对于任意 $2 \otimes 2$ 系统，定理 1 给出的可分性判据可简化为

$$12 {D_4}^{1/4} + T_1 \leq 1 \tag{30}$$

任何双量子比特态违反不等式 (30)，都表明该量子态是纠缠态。

值得注意的是，并不存在一种能够胜过所有其他判据的通用纠缠检测判据。对于给定类别的量子态，某一选定的判据可能效果更好，反之亦然。现在我们讨论 $3 \otimes 3$ 和 $4 \otimes 4$ 系统中的 PPT 和 NPT 纠缠态示例：这些量子态可由我们的 R 矩判据检测到，但无法由文献中提及的某些其他判据检测到。

B. 示例

本节中，我们考察了双三能级系统、双四能级系统以及由 $2 \otimes n$ 构成的二参数量子系统的几个示例，以验证定理1中给出的判据。

1. 一族 *4* ⊗ *4* 负偏转置和束缚纠缠态

考虑一族 $4 \otimes 4$ 纠缠态 [49]，

$$\rho_{p,q} = p \sum_{i=1}^{4} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + q \sum_{i=5}^{6} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{31}$$

其中，p 和 q 是满足 $4p + 2q = 1$ 的非负实数。$\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{6}$ 定义如下。

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |23\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |32\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |22\rangle) \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |33\rangle) \\ |\psi_5\rangle &= \frac{1}{2}(|03\rangle + |12\rangle) + \frac{|21\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\psi_6\rangle &= \frac{1}{2}(-|03\rangle + |12\rangle) + \frac{|30\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

注意量子态 $\rho_{p,q}$ 的一些重要性质：

P1. 对于该量子态，$det(\rho_{p,q}^R{}^\dagger \rho_{p,q}^R) = 0$，这意味着

对$\rho_{p,\ q}$ 应用重排操作后得到的矩阵不是满秩的。

P2. 当 $p = \frac{q}{\sqrt{2}}$ 时，量子态 $\rho_{p,\ q}$ 在部分转置下保持不变，这意味着 $\rho_{p_0,\ q_0}$ 对于.....是一个正偏转置态 $q_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ and $p_0 = \frac{1-2q}{4}$.

P3. 值得注意的是，$\|\rho^R_{p_0,\ q_0}\|_1 = 1.08579$ 大于 1。因此，根据矩阵重排判据，可以断定 $\rho_{p_0,\ q_0}$ 是一个 PPT纠缠态。

此外，我们发现 $\rho^R_{p_0,\ q_0}$ 有 8 个非零奇异值。因此，我们有 $k = 8$。退化的特征方程为 $\lambda^8 + \sum_{i=1}^{8} D_i \lambda^{8-i} = 0$，其中 $D_i's$ 在式 (15) 中定义，且 $D_8 = \prod_{i=1}^{8} \sigma_i^2\ (\rho^R_{p_0,\ q_0})$。由此可知，在本例中，不等式 (23) 左侧为 $\mathcal{R}_1 \equiv 56 {D_8}^{1/8} + T_1 - 1 = 0.02082 > 0$。因此，不等式 (23) 不成立，推论 2 表明量子态 $\rho_{p_0,\ q_0}$ 是 PPT纠缠态。我们进一步发现，式 (8) 给出的判据 [28] 无法检测由密度算符 $\rho_{p_0,\ q_0}$ 描述、属于 $\rho_{p,\ q}$ 族的束缚纠缠态。

另一方面，当 $(p, q) \neq (p_0, q_0)$ 时，$\rho_{p,q}$ 表示一个 NPT纠缠态。使用我们的 R-矩判据，其检测范围由 ($0.00659601 < q < 0.153105$) 和 ($0.26477 < q \leq 1/2$) 给出，相比之下，这一范围更大；采用 $D_3^{(in)}$ 判据 (4) 检测到的范围为 ($0.425035 < q \leq 1/2$)。

2. $3 \otimes 3$ NPT纠缠态

接下来，考虑 $3 \otimes 3$维度系统中的一类 NPT纠缠态，其定义为 [50]

$$\rho_a = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - a & \frac{-11}{50} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11}{50} & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-11}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

其中 $\frac{1}{150}(25 - \sqrt{141}) \leq a \leq \frac{1}{100}(25 + \sqrt{141})$。由于 ρ_a^R构成一个秩为 5 的矩阵，因此我们有 $k = 5$。所以，要检测 ρ_a 是否纠缠，只需使用 $(\rho_a^R)^\dagger \rho_a^R$的 5 个矩。进一步注意到 $T_1 = \frac{867}{1250} - \frac{3a}{2} + \frac{5a^2}{2}$。计算全部五个矩后，我们发现不等式 (23) 在 a的整个范围内均被违反。因此，根据推论1，我们可以说 ρ_a 在$\frac{1}{150}(25 - \sqrt{141}) \leq a \leq \frac{1}{100}(25 + \sqrt{141})$ 时是纠缠的。图1展示了不等式 (23) 被违反的情况，即对于所有 $0.262513 \leq a \leq 0.368743$，$R_1 \equiv 20 {D_5}^{1/5} + T_1 - 1 > 0$。图2展示了 R-矩判据与 (3)、(4) 和 (6) 中定义的 p_3-PPT、$D_3^{(in)}$ 和 p_3-OPPT 判据的比较。由于$L_1 < 0$、$L_2 < 0$ 和 $L_3 < 0$，我们发现，对于给定范围内参数 a 的任何取值，上述基于部分矩的判据均无法检测到量子态 ρ_a。如图2所示。

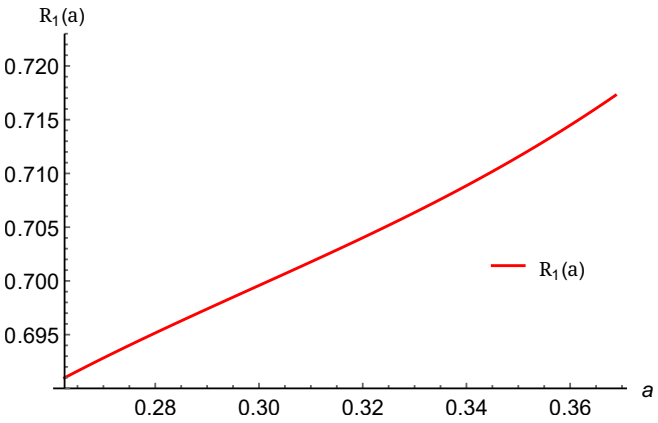

图 1：红色曲线表示由式 (32) 给出的量子态 ρ_a 的 R-矩判据。$R_1\ (a) > 0$ 可确认在 ρ_a 中检测到了纠缠。这里，x-轴表示态参数 a。

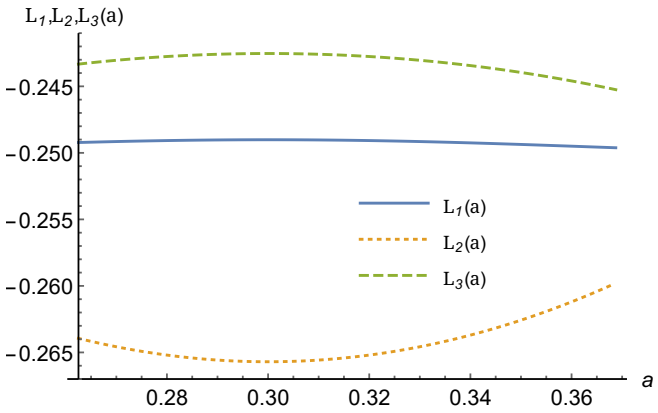

图 2：对于量子态 ρ_a (32)，蓝色（中间）曲线表示 p_3-PPT 判据 (3)，橙色点线（最下方）曲线表示 $D_3^{(in)}$ 判据 (4)，绿色虚线（最上方）曲线表示 p_3-OPPT 判据 (6)。图中以态参数 a 为横轴。L_1，L_2，$L_3 < 0$ 表明，在整个 a 范围内，p_3-PPT、$D_3^{(in)}$ 和 p_3-OPPT 判据都无法检测到该量子态。

3. 量子系统中的双参数量子态类

考虑 $2 \otimes n$量子系统 [51] 中定义的两参数量子态类:

$$\rho^{(n)}_{\alpha,\gamma} = \alpha \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=2}^{n-1} |ij\rangle\langle ij| + \beta(|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-| + |\psi^+\rangle\langle\psi^+|) + \gamma(|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) \tag{33}$$

其中 $|ij\rangle$；$i = 0$，1；$j = 0$，1，.....，$n-1$ 构成量子系统的标准正交基，

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle); \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \tag{34}$$

根据迹条件，参数 β 可以用 α 和 γ 表示为

$$\beta = \frac{1 - 2(n-2)\alpha - \gamma}{3} \tag{35}$$

其中 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2(n-1)}$ 和 $0 \leq \gamma \leq 1$。

现在，我们将 R-矩判据的检测能力与第 II C 节给出的基于矩的判据进行比较。我们考虑 Zhang 等人给出的基于重排矩的判据 [28]，如式 (8)、(9) 和 (10) 所述。由于在 $2 \otimes n$系统中，$rank(\rho_{\alpha}^{(n),\gamma}) \leq 4$，式 (8) 给出的判据等价于式 (9) 和 (10) 中基于 Hankel 矩阵的可分性判据。

在 $2 \otimes 3$ 系统中，当 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1-2\alpha}{2} \leq \gamma \leq 1 - 2\alpha$ 时，$\rho_{\alpha}^{(3),\gamma}$ 是纠缠的。式 (8) 中的不等式不成立，即对于落在图 3(i) 蓝色（深灰色）阴影区域内的 (α, γ)，$L_4(\alpha, \gamma) > 0$。因此，Zhang 判据能够检测出该区域内的纠缠。现在，对 $\rho_{\alpha}^{(3),\gamma}$应用 R-矩判据后，式 (23) 中的不等式对于落在蓝色（深灰色）以及黄色（浅灰色）阴影区域内的量子态均不成立。因此可见，对于这类系统，R-矩判据的表现更好。同样也可以证明（见图 3(ii)），对于 $n = 4$，与重排判据相比，R-矩判据能够检测出更多的量子态。

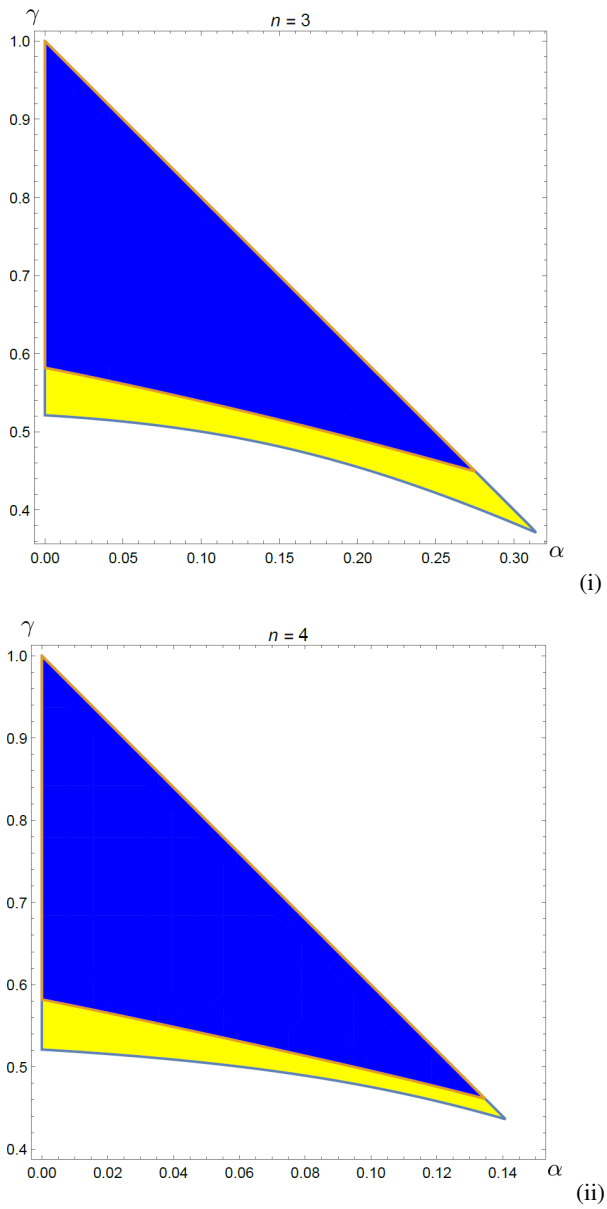

图 3：上方 (i) 和 (ii) 中给出的区域图分别展示了针对态 $\rho_{\alpha}^{(n),\gamma}$，在 $n = 3$ 和 $n = 4$ 时，通过 R-矩判据以及式 (8) 中给出的 Zhang 的重排矩判据得到的检测区域。蓝色（深灰色）区域表示上述两种判据均检测到的纠缠态。黄色（浅灰色）区域表示 R-矩判据检测到、但 Zhang 判据未检测到的量子态。其中，x-轴表示态参数 α，y-轴表示态参数 γ。

V. 基于重排矩（R-MOMENTS）的 $2 \otimes 2$ 系统可分性判据

对于 $2 \otimes 2$ 维度系统，Peres-Horodecki 正偏转置（PPT）判据 [9, 38]给出了纠缠的充要条件。不过需要指出的是，部分转置是正的，但并非完全正，因此难以在实验中直接实现 [32]。另一方面，人们提出了纠缠的定量度量，例如形成纠缠（EoF） [52, 53], ，它们在利用纠缠作为资源来执行量子隐形传态和密集编码等任务方面具有重要应用 [54]。此外，人们还提出了形成纠缠的界限 [55, 56], ，原则上这些界限可以测量，但形成纠缠的精确测量方案仍有待开发。还需注意的是，人们提出了一些用于检测双量子比特纠缠的其他巧妙测量方案，例如采用弱测量的方案 [23]。然而，基于弱测量方案的局域操作只能检测纯态。

基于上一节的分析，可以证明，对于所有 2 量子比特纠缠态，D_4 (30) 均非零（见附录 A）。因此，我们必须利用纠缠态的完整信息，才能证明不等式 (30) 被违背。这促使我们提出一种判据，在 $2 \otimes 2$系统中使用较少的矩来检测纠缠。本节中，我们针对 $2 \otimes 2$ 系统介绍一种基于 R-矩的不同可分性判据。该判据以不等式的形式表述，其中涉及最高至 3rd 阶的矩，用于检测 2 量子比特系统。一般而言，$2 \otimes 2$ 系统的任何可分性判据最多需要 4th 阶矩，只有少数可分性判据例外：它们最多只需要 3rd 阶矩 [24–27] 。

A. 预备知识

为了推导双量子比特系统的可分性判据，我们需要一些预备知识，以建立矩阵的矩与其奇异值或特征值之间的关系。

直接计算矩阵的特征值可能并非易事；因此，特征值界至关重要。此外，用矩表示的特征值界可能有助于实验人员在实验室中估计特征值。我们注意到，以下结果给出了复矩阵的最大特征值关于该矩阵前三阶矩的下界和上界。

结果 1： 设 A 为具有实特征值 λ_i 的复 $n \times n$ 矩阵，满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 . . . \geq \lambda_n$。若 T_k 表示 A 的 k^{th}阶矩，则有 [57]

$$\lambda_1 \geq f(T_1, T_2, T_3) := \frac{T_1}{n} + \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^3}}{2a} \tag{36}$$

其中

$$a = \frac{T_2}{n} - \left(\frac{T_1}{n}\right)^2$$

and

$$b = \frac{1}{n^3}(n^2 T_3 - 3nT_2T_1 + 2T_1^3)$$

.

结果 2： 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 . . . \geq \lambda_n$ 且满足 $T_k = Tr[A^k]$的半正定矩阵。A 的最大特征值的上界是以下三次方程 [58]的最大根：

$$T_1 x^3 - 2T_2 x^2 + T_3 x + T_2^2 - T_1 T_3 = 0 \tag{37}$$

即，

$$\lambda_1 \leq g(T_1, T_2, T_3) \tag{38}$$

其中，上界 $g(T_1, T_2, T_3)$ 表示式 (37) 的最大根。$g(T_1, T_2, T_3)$ 的显式形式为

$$g(T_1, T_2, T_3) := \frac{1}{6T_1}(4T_2 + \frac{2 \times 2^{1/3} r}{(p + \sqrt{q})^{1/3}} + 2^{2/3}(p + \sqrt{q})^{1/3}) \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned} p &= -27T_1^2T_2^2 + 16T_2^3 + 27T_1^3T_3 - 18T_1T_2T_3 \\ r &= 4T_2^2 - 3T_1T_3 \\ q &= p^2 - 4r^3 \end{aligned}$$

设 ρ 为表示 $2 \otimes 2$ 维量子态的密度矩阵，ρ^R 表示应用重排操作后得到的重排矩阵。设 $\sigma_{max}(\rho^R)$ 为 ρ^R 的最大奇异值，$\lambda_{max}((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 为 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的最大特征值。分别设 $\lambda_{max}^{lb}((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 和 $\lambda_{max}^{ub}((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 为 $\lambda_{max}((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 的下界和上界。为了构建我们的方法，我们使用结果 1 和结果 2 中讨论的下界和上界。

利用 (36) 和 (38)，并且由于 $\lambda_i((\rho^R)^\dagger \rho^R) = \sigma_i^2(\rho^R)$，我们有

$$\lambda_{max}^{lb}((\rho^R)^\dagger \rho^R) \leq \sigma_{max}^2(\rho^R) \leq \lambda_{max}^{ub}((\rho^R)^\dagger \rho^R) \tag{40}$$

其中，$\lambda_{max}^{lb}((\rho^R)^\dagger \rho^R) = f(T_1, T_2, T_3)$ 和 $\lambda_{max}^{ub}((\rho^R)^\dagger \rho^R) = g(T_1, T_2, T_3)$ 是矩阵 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的 T_1、T_2 T_3 的函数。

现在我们来考虑以下引理，其中推导了矩阵 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的矩与 ρ^R 的奇异值之间的一些关系。稍后我们将利用这些引理证明主要定理。

引理 1： 若 σ_i 表示重排矩阵 ρ^R 的奇异值，且按降序排列为 $\sigma_1(\rho^R) \geq \sigma_2(\rho^R) \geq \sigma_3(\rho^R) \geq \sigma_4(\rho^R)$，则有如下不等式：

$$\prod_{j=2}^{4}(\sigma_1(\rho^R) + \sigma_j(\rho^R)) \geq \lambda_{max}^{lb}||\rho^R||_1 + \sqrt{|D_3|} \tag{41}$$

其中，$\lambda_{max}^{lb} \equiv \lambda_{max}^{lb}((\rho^R)^\dagger \rho^R)$ 表示 $(\rho^R)^\dagger \rho^R$ 的最大特征值的下界。（证明见附录 B。）

引理 2： 若 ρ 表示一个 $2 \otimes 2$ 维量子态，且 ρ^R 表示 ρ 的重排矩阵，则有

$$||\rho^R||_1^2 \geq 2\sqrt{D_2} + T_1 \tag{42}$$

（证明见附录 C。）

引理 3： 若 σ_i 表示重排矩阵 ρ^R 的奇异值，且按降序排列为 $\sigma_1(\rho^R) \geq \sigma_2(\rho^R) \geq \sigma_3(\rho^R) \geq \sigma_4(\rho^R)$，并且 D_2 和 T_1 具有通常含义，则有如下等式：

$$\sum_{1<i<j} \sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R) = D_2 - \sigma_1^2(\rho^R)(T_1 - \sigma_1^2(\rho^R)) \tag{43}$$

where $\sigma_1^2(\rho^R) = \sigma_{max}^2(\rho^R)$. (See Appendix D for the proof.)

B. 判据

现在我们可以讨论基于 $2 \otimes 2$ 系统重排矩的可分性判据。

定理 2： 设 ρ 是作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_A^2 \otimes \mathcal{H}_B^2$上的正迹类线性算子。重排矩阵 ρ^R 的奇异值按以下顺序排列：$\sigma_1(\rho^R) \geq \sigma_2(\rho^R) \geq \sigma_3(\rho^R) \geq \sigma_4(\rho^R)$。若 ρ_s 表示一个可分态，则满足以下不等式：

$$\mathcal{R}_2 \equiv \sqrt{3X^{2/3} + 2Y - 2T_1} - 1 \leq 0 \tag{44}$$

其中 X 和 Y 是前三个重排矩的函数，定义为

$$X = \lambda_{max}^{lb}\sqrt{2\sqrt{D_2} + T_1} + \sqrt{|D_3|}$$

and

$$Y = T_1 - \lambda_{max}^{ub} + \sqrt{D_2 - \lambda_{max}^{ub} T_1 + (\lambda_{max}^{lb})^2}$$

证明：我们先从第一个重排矩 T_1 开始。利用（25），它可以表示为

$$T_1 = (\sum_{i=1}^{4} \sigma_i(\rho_s^R))^2 - 2\sum_{i<j} \sigma_i(\rho_s^R)\sigma_j(\rho_s^R) \quad (45)$$

(45) 的第二项可表示为

$$\begin{aligned} & 2\sum_{i<j} \sigma_i(\rho_s^R)\sigma_j(\rho_s^R) \\ = & \sum_{i<j} (\sigma_i(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 - \sum_{i<j} \sigma_i^2(\rho_s^R) + \sigma_j^2(\rho_s^R) \quad (46) \\ = & \sum_{i<j} (\sigma_i(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 - 3T_1 \quad (47) \\ = & \sum_{j=2}^{4} (\sigma_1(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 + \sum_{1<i<j} (\sigma_i(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 - 3T_1 \quad (48) \end{aligned}$$

由于，一组非负实数的算术平均数——数大于或等于它们的几何平均数，并且 σ_i 的 $i = 1$ 到 4 为非负实数，我们有

$$\sum_{j=2}^{4} (\sigma_1(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 \geq 3(\prod_{j=2}^{4} (\sigma_1(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R)))^{2/3} \quad (49)$$

利用引理 1，不等式 (49) 的右端可简化为

$$3(\prod_{j=2}^{4} (\sigma_1(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R)))^{2/3} \geq 3\left(\lambda_{max}^{lb} ||\rho_s^R||_1 + \sqrt{|D_3|}\right)^{2/3} \quad (50)$$

在（49）中使用（50）和引理 2，我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{4} (\sigma_1(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 \\ & \geq 3\left(\lambda_{max}^{lb} \sqrt{2\sqrt{D_2} + T_1} + \sqrt{|D_3|}\right)^{2/3} \quad (51) \\ & = 3X^{2/3} \quad (52) \end{aligned}$$

利用引理 3，可将（48）的第二项展开为

$$\begin{aligned} & \sum_{1<i<j} (\sigma_i(\rho_s^R) + \sigma_j(\rho_s^R))^2 \\ & = 2\sum_{i=2}^{4} \sigma_i^2(\rho_s^R) + 2\sum_{1<i<j} \sigma_i(\rho_s^R)\sigma_j(\rho_s^R) \quad (53) \\ & \geq 2(T_1 - \sigma_{max}^2(\rho_s^R)) + 2\sqrt{\sum_{1<i<j} \sigma_i^2(\rho_s^R)\sigma_j^2(\rho_s^R)} \quad (54) \\ & = 2(T_1 - \lambda_{max}^{ub}) + 2\sqrt{D_2 - \sigma_{max}^2(\rho_s^R)(T_1 - \sigma_{max}^2(\rho_s^R))} \quad (55) \\ & \geq 2(T_1 - \lambda_{max}^{ub}) + 2\sqrt{D_2 - \lambda_{max}^{ub} T_1 + (\lambda_{max}^{lb})^2} \quad (56) \\ & = 2Y \quad (57) \end{aligned}$$

Using (52) and (57) in (48), we get

$$||\rho_s^R||_1 \geq \sqrt{3X^{2/3} + 2Y - 2T_1} \quad (58)$$

现在我们将在 (58) 中使用 $||\rho_s^R||_1 \leq 1$，以得到所需结果，即，如果 ρ_s 是可分的，则

$$\sqrt{3X^{2/3} + 2Y - 2T_1} \leq 1 \quad (59)$$

证毕。

推论 2： 如果任意两量子比特态 ρ 违反不等式 (44)，即，如果 $\mathcal{R}_2 > 0$，则该量子态是纠缠的。

C. 示例

示例1. 双量子比特各向同性态定义为 [59]

$$\rho_f = \frac{1-f}{3} I_2 \otimes I_2 + \frac{4f-1}{3} |\psi^+\rangle\langle\psi^+|, 0 \leq f \leq 1 \quad (60)$$

其中 $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$，且 I_2 表示 2×2 单位矩阵。容易验证，对于 $\frac{1}{2} < f \leq 1$，各向同性态 ρ_f 是纠缠态，这可由正偏转置和矩阵重排判据得出；而式 (4) 中给出的 $D_3^{(in)}$ 判据则保证量子态 ρ_f 在范围 $0.625 < f \leq 1$ 内是纠缠态。为了将 R阶矩判据应用于 ρ_f，我们需要检验不等式 (44) 对 ρ_f是否成立。经过简单计算，可得

$$T_1 = Tr[(\rho_f^R)^\dagger \rho_f^R] = \frac{1}{3}(1 - 2f + 4f^2)$$

因此，对于各向同性态，不等式 (44) 可写为

$$R_2 \equiv \sqrt{3X_f^{2/3} + 2Y_f - 2T_1} - 1 \leq 0 \quad (61)$$

当 $0.608594 < f \leq 1$ 时，上述不等式被违反，这意味着量子态 ρ_f 在此范围内是纠缠态，其判定效果优于 $D_3^{(in)}$ 判据。

例 2. 考虑由密度矩阵 [41] 表示的双参数族 $2\otimes 2$ 量子态

$$\rho_{s,t}=\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{t}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(s-\frac{1}{4}) & 0\\ \frac{t}{2} & 0 & 0 & \frac{1-s}{2}\end{pmatrix}, t\neq 0, \frac{1}{4}<s\leq 1 \quad (62)$$

对于该量子态有定义的所有态参数 t 和 s 取值，该量子态的部分转置均非正。因此，根据 PPT 判据，当参数 t 和 $\frac{1}{4}<s\leq 1$ 均非零时，该量子态是纠缠态。

现在，我们将 R 矩判据用于检测由密度算符 $\rho_{s,\ t}$ 描述的态族中的纠缠态。厄米算子 $(\rho^R_{s,\ t})^\dagger\rho^R_{s,\ t}$ 的一阶矩可计算为 $T_1=Tr[(\rho^R_{s,\ t})^\dagger\rho^R_{s,\ t}]=\frac{1}{32}\left(21-20s+16(s^2+|t|^2)\right)$。类似地，计算 T_2 和 T_3 并将这些值代入式 (44)，可得量子态 $\rho_{s,\ t}$ 在态参数 s 和 t 的不同取值范围内满足不等式 $\mathcal{R}_2>0$，如图 4 所示。此外，为了展示 R 矩判据的重要性，我们将该判据与基于部分转置矩的判据进行比较，例如式 (3) 和式 (4) 中给出的 p_3-PPT 判据和 $D_3^{(in)}$ 判据。可以证明，在检测 $\rho_{s,\ t}$ 态族中的纠缠态时，$D_3^{(in)}$ 判据优于 p_3-PPT 判据。

$$L_2>0,\ \text{for}\ |t|>\sqrt{\frac{20s^2-25s+5}{16s-26}} \quad (63)$$

值得注意的是，R 矩判据能够检测出 $\rho_{s,\ t}$ 族中既未被检测到的纠缠态
部分转置矩判据检测到的纠缠态，例如 $D_3^{(in)}$ 也未被p_3-PPT 判据或重排判据检测到。当 $t\in[0.2,0.25]$ 时，图4展示了这一现象。类似地，我们可以得到相同的区域 $S=\{t\mid -0.25\leq t\leq -0.2\}$，其中的纠缠态可由 R 矩判据检测到，但无法由基于部分转置矩的判据检测到。

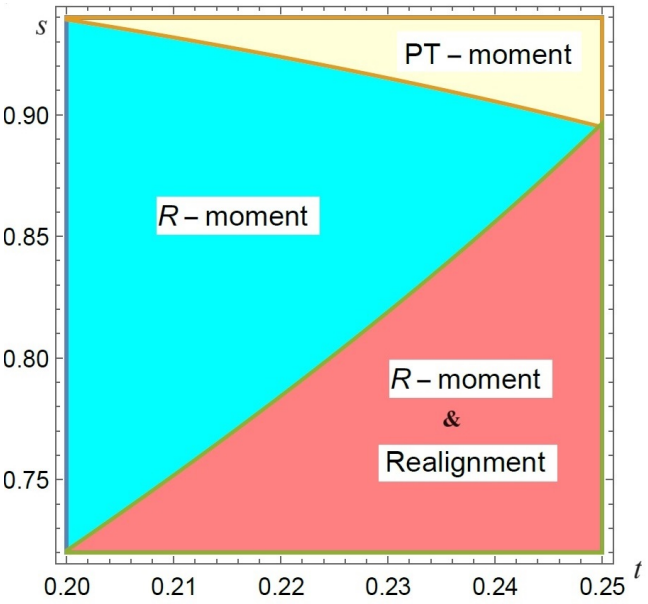

图4：该图展示了属于 $\rho_{s,\ t}$ 态族的纠缠态检测区域。这里，x 轴和 y轴分别表示态参数 t 和 s。蓝色（中灰色）区域内的量子态可由 R 矩判据检测到，但无法由部分转置矩判据或重排判据检测到。粉色（深灰色）区域内的量子态可由 R 矩判据以及重排判据检测到。黄色（浅灰色）区域表示可由 p_3-PPT 判据以及 $D_3^{(in)}$ 判据检测到的量子态。

VI. 重排矩的实现

在本节中，我们制定一个流程，说明如何在实验中实现重排矩阵的矩。最近已有研究表明，对部分转置密度矩阵的矩进行测量在实践中是可行的 [34–37]。在本文中，我们考虑重排矩阵的矩，以探讨其在实验中的可能实现。为实现这一目标，我们采用 [36, 37], 中提出的思想，其中已证明可以使用SWAP算子 [60] 在 k份量子态上测量 k阶部分矩。该技术的核心是将矩阵幂表示为置换算子的期望值。我们将这一方法应用于重排矩阵，以展示如何实现重排矩的测量。

对于一个 $d\otimes d$ 维量子态 ρ，k 份副本由$\otimes_{c=1}^k\rho_c$给出。令 m_k 表示重排矩阵的 k阶矩 ρ^R，即

$$m_k=Tr[(\rho^R)^k] \quad (64)$$

k阶矩的 ρ^R 可表示为置换算子的期望值:

$$m_k=Tr[(\otimes_{c=1}^k\rho_c^R)P^k] \quad (65)$$

其中，P 是定义为$P=\frac{1}{d}\sum_{i,j=0}^{d-1}|ij\rangle\langle ji|$ [61]的归一化置换算子。它也称为 SWAP 算子。

由于定理1和定理2中提出的可分性判据基于重排矩阵的矩，因此我们需要估计矩阵 $(\rho^R)^\dagger\rho^R$的矩。具体而言，我们在此展示如何求出 $(\rho^R)^\dagger\rho^R$的一阶矩和二阶矩，分别记为 T_1和 T_2。考虑以下不等式，它给出了重排矩阵ρ^R [62]的迹范数与 Frobenius范数之间的关系，二者分别记为 $||.||_1$ 和 $||.||_F$：

$$||\rho^R||_1\leq\sqrt{k}||\rho^R||_F \quad (66)$$

其中 k 是 ρ^R的秩。重排矩阵的一阶矩为

$$m_1=Tr[\rho^R] \quad (67)$$

应用结果 $Tr[\rho^R] \leq ||\rho^R||_1$ 并使用上述不等式 (66)，我们得到

$$m_1 = Tr[\rho^R] \leq \sqrt{k}||\rho^R||_F = \sqrt{k\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2(\rho^R)} = \sqrt{kT_1} \tag{68}$$

因此，我们有

$$T_1 \geq \frac{m_1^2}{k} \tag{69}$$

由于所导出的可分性判据依赖于重排矩阵的奇异值，我们还需要估计 ρ^R的奇异值。这里我们使用结果 [63]

$$\sigma_j(\rho^R) \leq \frac{m_1}{d^2} + \sqrt{\frac{d^2-j}{j}\left(T_1 - \frac{m_1^2}{d^2}\right)} \tag{70}$$

其中 $1 \leq j \leq k$。上述不等式（70）在以下条件下成立

$$T_1 \leq \frac{m_1^2}{j} \tag{71}$$

现在，结合（69）和（71），（ρ^R)$^\dagger\rho^R$的一阶矩的上界和下界为

$$\frac{m_1^2}{k} \leq T_1 \leq \frac{m_1^2}{j},\ 1 \leq j \leq k \tag{72}$$

可以看到，通过将 $j = k$ 代入（72），可得到 T_1 的最优值，其结果为

$$T_1^{opt} = \frac{m_1^2}{k} \tag{73}$$

接下来，我们估计 T_2，为此应用以下结果。对于 M_n(ℂ)中的任意两个半正定矩阵 A和 B，以下矩阵不等式成立 [64],

$$(Tr[AB]^q) \leq (Tr[A])^q(Tr[B])^q \tag{74}$$

其中，q 为正整数。现在将 $A = B$ =(ρ^R)†(ρ^R)和 $q = 1$ 代入上述不等式，式（74）可化简为

$$T_2 = Tr[\left((\rho^R)^\dagger(\rho^R)\right)^2] \leq \left(Tr[(\rho^R)^\dagger(\rho^R)]\right)^2 = (T_1)^2 \tag{75}$$

另一方面，下界为 [63]

$$T_2 \geq \frac{T_1^2}{d^2} \tag{76}$$

结合（75）和（76），T_2 的界限可用 m_1表示为

$$\frac{m_1^4}{d^2k^2} \leq T_2 \leq \frac{(m_1)^4}{j^2},\ \ 1 \leq j \leq k \tag{77}$$

令 $j = k$，即可得到 T_2 的最优范围，其表达式为

$$\frac{m_1^4}{d^2k^2} \leq T_2^{opt} \leq \frac{(m_1)^4}{k^2} \tag{78}$$

因此，可以通过测量 ρ^R的一阶矩 m_1，在实验上确定 T_1^{opt} 和 T_2^{opt}。

由于 ρ^R 在物理上不可实现，我们需要先用一个物理上可实现的算符来表示它，该算符通过一个称为结构物理近似（SPA） [32]的~近似映射 R 得到。SPA映射对重排矩阵 ρ^R 的作用可定义为 [45]

$$\widetilde{\rho^R} = \frac{p}{d^2}I_{d\otimes d} + \frac{(1-p)}{Tr[\rho^R]}\rho^R \ \text{ where } \ 0 \leq p \leq 1 \tag{79}$$

~当 [45]时，近似映射 ρ^R 是正的，且为完全正

$$p \geq \frac{d^2 l}{m_1 + d^2 l} \tag{80}$$

其中，$l = max[0, -\lambda_{min}^{lb}[\rho^R]]$ 和 $\lambda_{min}^{lb}[\rho^R]$ 可表示为

$$\lambda_{min}^{lb}[\rho^R] = \frac{m_1}{d^2} - \sqrt{(d^2-1)\left(\frac{m_2}{d^2} - \left(\frac{m_1}{d^2}\right)^2\right)} \tag{81}$$

由（79）可知，由密度算符 ρ^R 描述的重排矩阵与其最优正逼近（SPA）算符 ρ^R成正比，即即，

$$\rho^R \propto \widetilde{\rho^R} - \frac{p}{d^2}I_{d\otimes d} \tag{82}$$

因此，ρ^R 的 k 阶矩可估算为

$$m_k \simeq Tr\left[\left(\otimes_{c=1}^{k}\left(\widetilde{\rho_c^R} - \frac{p}{d^2}I_{d\otimes d}\right)\right)P^k\right] \tag{83}$$

$$= Tr\left[\left(\otimes_{c=1}^{k}\widetilde{\rho_c^R}\right)P^m - \frac{p}{d^2}P^k\right] \tag{84}$$

$$= Tr\left[\left(\otimes_{c=1}^{k}\widetilde{\rho_c^R}\right)P^k\right] - \frac{p}{d^2}Tr[P^k] \tag{85}$$

其中 $p \in [\frac{d^2 l}{m_1 + d^2 T}, 1]$。由于 $\widetilde{\rho_c^R}$是一个厄米、半正定且具有单位迹的算符，因此 s_k:=$Tr\left[\left(\otimes_{c=1}^{k}\widetilde{\rho_c^R}\right)P^k\right]$ 可以通过受控交换操作 [32, 60]进行测量。

特别地，我们在附录 E 中展示了如何确定一阶矩 m_1。ρ^R 的一阶矩 m_1 可利用附录 E 中给出的关系式 (107) 和 (108)，根据 s_1 进行估计。由于这些关系式是用~ $s_1 = Tr[\ (\rho^R)\ P]$表示的，因此可以通过实验估计重排矩阵 ρ^R 的一阶矩。同样可以证明，重排矩阵的二阶矩也能够以类似方式估计。因此，可利用式 (85) 测量第 k阶重排矩。由此，该方案同样可以推广到高维系统。因此，实际上测量重排矩阵的矩 m_k 是可行的。

VII. 结论

在这项工作中，我们基于密度矩阵的部分信息，通过采用重排矩，提出了一种用于检测任意维双体量子态纠缠的可分性判据。我们提出的方法在同一框架下，利用重排矩阵的低阶矩，能够检测 PPT 和 NPT纠缠态。与近期提出的利用部分转置矩 [24–26]的纠缠检测方案相比，本文所建立的形式体系更具优势，因为后者无法检测束缚纠缠态。

我们通过若干高维量子态示例，展示了所提出的可分性判据的重要性。我们将该判据的有效性与其他基于部分转置矩的判据进行了比较。对于 $m \otimes n$ 系统，我们的R-矩判据尤为重要，因为它能够检测出某些基于部分转置矩的判据无法检测到的NPT纠缠态。此外，我们的可分性判据还能够检测出另一项近期提出的、基于重排矩的判据 [28] 无法检测到的某些束缚纠缠态。

此外，对于双量子比特系统，我们证明，只需稍作修改，我们的方法便可得到另一种可分性判据，能够在无需掌握量子态完整信息的情况下，检测 $2 \otimes 2$ 系统中的纠缠。有趣的是，我们发现，基于重排矩的判据能够检测出一些既无法通过基于部分矩的判据 [24, 25], 检测，也无法通过矩阵重排判据 [11, 12] 检测的两量子比特纠缠态。在 [65], , 作者提出了一种基于置换矩的方法，用于检测多体纠缠态。他们证明，该判据在特定情况下可化为部分转置判据和重排判据。在他们的判据中，奇数阶矩无法获取，且计算 n 阶矩需要 $2n$ 份纠缠态。另一方面，我们的判据可获取奇数阶矩和偶数阶矩，且计算 n 阶矩只需 n 份量子态。

最后，为了在实践中实现我们的纠缠检测判据，我们提出了一种测量重排矩阵各阶矩的方案。最后需要指出的是，我们提出的纠缠检测方法有望通过结合用于重排的结构物理近似 [32, 45], 与用于测量密度矩阵矩的 SWAP 操作 [36, 37]，在实验中得以实现。

致谢： Shruti Aggarwal 谨此感谢印度科学与工业研究委员会（CSIR）和印度政府提供的经费支持（文件编号: 08/133(0043)/2019-EMR-1）。ASM 感谢印度政府科学与技术部项目 No. DST/ICPS/QuEST/2018/98 的支持。

[1] A. Einstein、B. Podolsky、N. Rosen, 《物理评论》**47**, 777（1935年）。[2] E. Schr¨odinger, 《剑桥哲学学会数学学报》**31**, 555（1935年）。[3] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Crepeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters, 《物理评论快报》**70**, 1895（1993年）。[4] P. Horodecki、R. Augusiak, 《量子信息处理》**199**, 19（2006年）。[5] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang, 《量子计算与量子信息》（剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，2000年）。[6] J. S. Bell, 《Phys. Phys. Fiz.》**1**, 195（1964年）。[7] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki 和 K. Horodecki, 《现代物理评论》**81**, 865–942（2009年）。[8] O. Guhne 和 G. Toth, 《物理学报告》**474**, 1（2009年）。[9] A. Peres, 《物理评论快报》**77**, 1413（1996年）。[10] P. Horodecki、M. Horodecki 和 R. Horodecki, 《物理评论快报》**82**, 1056（1999）。[11] O. Rudolph, 《量子信息处理》**4**, 219（2005年）[12] K. Chen 和 L. A. Wu, 《量子信息与计算》**3**, 193（2003年）。[13] O. Guhne、P. Hyllus、D. Bruß、A. Ekert、M. Lewenstein、C. Macchiavello 和 A. Sanpera, 《现代光学杂志》**50**, 1079（2003年）。[14] B. M. Terhal, 《物理学快报A辑》**271**, 319（2000年）。[15] M. Lewenstein、B. Krauss、J. I. Cirac、P. Horodecki, 《物理评论A》**62**, 052310（2000年）。[16] N. Ganguly、S. Adhikari、A. S. Majumdar, 《量子信息处理》**12**, 425（2013年）。[17] S. Aggarwal 和 S. Adhikari, 《量子信息处理》, **20**, 83（2021年）。[18] S. Aggarwal 和 S. Adhikari, 《物理学年鉴》, **444**, 169043（2022年）。[19] D. Mayers 和 A. Yao, 《量子信息与计算》**4**, 273（2004年）。[20] I. Supic 和 J. Bowles, 《Quantum》**4**, 337（2020）。[21] S. Goswami、B. Bhattacharya、D. Das、S. Sasmal、C. Jebarat-nam、A. S. Majumdar, 《物理评论A》**98**, 022311（2018）。[22] Z. Bian、A. S. Majumdar、C. Jebaratnam、K. Wang、L. Xiao、X. Zhan、Y. Zhang、P. Xue, 《物理评论A》**101**, 020301（R）（2020）。[23] S. Goswami、S. Chakraborty、S. Ghosh、A. S. Majumdar, 《物理评论A》**99**, 012327（2019）。[24] Elben 等人, 《物理评论快报》**125**, 200501（2020）。[25] Neven 等人, npj量子信息 **7**, 152（2021）。[26] X-D Yu、S. Imai、O. Guhne, 《物理评论快报》**127**, 060504（2021）。[27] L. Zhang、M-J Zhao、L. Chen、H. Xiang 和 Y. Shen, 《物理年鉴》**534**, 2200289（2022）。[28] T. Zhang、N Jing、S-M Fei, 《量子信息处理》**21**, 276（2022）。[29] 2212 13463 1 K-K Wang、Z-W Wei、S-M Fei, arXiv: 。[30] v C. Hadfield、S. Bravyi、R. Raymond、A. Mezzacapo, 《数学物理通讯》**391**, 951–967（2022）。[31] A. Ketterer、S. Imai、N. Wyderka、O Guhne, 《物理评论A》**106**, L010402（2022）[32] P. Horodecki 和 A. Ekert, 《物理评论快报》**89**, 127902（2002）。[33] M. Keyl 和 R. F. Werner, 《物理评论A》**64**, 052311（2001）。[34] H. A. Carteret, 《物理评论快报》**94**, 040502（2005）。[35] J. Cai 和 W. Song, 《物理评论快报》**101**, 190503（2008）。[36] K. Bartkiewicz、P. Horodecki、K. Lemr、A. Miranowicz 和 K. ˙Zyczkowski, 《物理评论A》**91**, 032315（2015）。[37] J. Gray、L. Banchi、A. Bayatt、S. Bose, 《物理评论快报》**121**, 150503 2018（）。[38] M. Horodecki、P. Horodecki 和 R. Horodecki, 《物理学快报A辑》**223**, 1（1996）。

[39] P. Horodecki, 《物理学快报A辑》232，333（1997）。[40] K. Chen、S. Albeverio 和 S-M Fei, 《物理评论快报》95，040504 2005（）。[41] O. Rudolph., 《物理评论A》67，032312（2003）[42] C-K Li 等人，物理学杂志 A：数学与理论 44，315304（2011）。[43] S. Q. Shen、M. Y. Wang、M. Li、S. M. Fei, 《物理评论A》92，042332 2015（）。[44] X. Qi、T Gao、F. Yan，国际理论物理学杂志 56，3642（2017）。[45] S. Aggarwal、A. Kumari、S. Adhikari, 《物理评论A》108，012422 2023（）。[46] U. L. Verrier，数学杂志 1 5，230（1840年）。[47] D. K. Faddeev 和 I. S. Sominsky, 《高等代数问题》，和平出版社，（1972年）。[48] D. Zeilberger，离散数学 49，319（1984年）。[49] G. Toth 和 T. Vertesi, 《物理评论快报》120，020506（2018年）。[50] A. Garg、S. Adhikari，IJTP 60，1038（2021年）[51] D. P. Chi、S. Li，物理学杂志 A：数学与通用 36，11503（2003年）[52] S. A. Hill 和 W. K. Wootters, 《物理评论快报》78，5022（1997年）。[53] W. K. Wootters, 《物理评论快报》80，2245（1998年）。[54] W. K. Wootters，伦敦皇家学会哲学汇刊 A 356，1717（1998年）。[55] Ming Li 和 Shao-Ming Fei, 《物理评论A》82，044303（2010年）。[56] Xue-Na Zhu 和 Shao-Ming Fei, 《物理评论A》86，054301（2012年）。[57] R. Sharma、M. Gupta 和 G. Kapoor，数学不等式杂志 4，355（2010年）。[58] R. Sharma、R. Bhandari 和 M. Gupta，印度统计学杂志 74a 101 （ 2012 年）。[59] Zhao, M.-J.、Li, Z.-G.、Fei, S.-M.、Wang, Z.-X.，物理学杂志 A：数学与理论 43，275203（2010年）。[60] A. K. Ekert、C. M. Alves、D. K. L. Oi、M. Horodecki、P. Horodecki 和 L. C. Kwek, 《物理评论快报》88，217901（2002年）。[61] S. Aggarwal 和 S. Adhikari, arXiv:2307.07952。[62] L. Zou、Y. Ziang，线性代数及其应用，433，1203（2010年）。[63] J. K. Merikoski、H. Sarria、P. Tarazaga，线性代数及其应用，210，227（1994年）[64] X. Yang, 数学分析及其应用杂志 250，372–374（2000年）。[65] Z. Liu、Y. Tang、H Dai、P. Liu、S. Chen 和 X. Ma, 《物理评论快报》129，260501（2022年）。[66] S. Ishizaka, 《物理评论A》69，020301(R)（2004年）。

VIII. 附录

A. 两量子比特纠缠态的重排矩阵不存在非满秩情形

本节将证明，对于任意纠缠的两量子比特态，系数 D_4 不会取零。考虑任意一个两量子比特态，它可通过局部滤波操作变换为 Bell 对角态$\rho^{(BD)} = \sum_{i=1}^{4} p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$（其中 $|\phi_i\rangle's$ 表示 Bell 态），或变换为由密度算符 $\rho^{(1)}$描述的量子态，其形式为 [66]

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+c & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-c & 0 \\ d & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix} \tag{86}$$

其中态参数 b、 c、 d 满足以下任一条件：

(C1) $-1 \le b < 1,\ c = -1,\ d = 0$

(C2) $b = 1,\ -1 < c \le -1,\ d = 0$

(C3) $-1 \le b < 1,\ -1 < c \le b,\ d \le |\sqrt{(1-b)(1+c)}|$

情形 I: 考虑对任意两个量子比特态应用滤波操作后，该态变换为 $\rho^{(1)}$ 的情况。若满足以下条件，则态 $\rho^{(1)}$ 表示一个纠缠态：

(E1) $b, d \in R,\ c \le b,\ d \ne 0$

$\rho^{(1)}$ 的重排矩阵记为 $(\rho^{(1)})^R$ ，其表达式为

$$(\rho^{(1)})^R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ b-c & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix} \tag{87}$$

$(\rho^{(1)})^R$ 的行列式为

$$Det((\rho^{(1)})^R) = \frac{(1-b)(1+c)d^2}{16} \tag{88}$$

利用行列式 $Det((\rho^{(1)})^R)$中的条件 $(C1)$、$(C2)$、$(C3)$ 和 $(E1)$，可知该行列式不为零。因此，厄米矩阵 $((\rho^{(1)})^R)^\dagger(\rho^{(1)})^R$ 是满秩矩阵。因此，对于任意两量子比特纠缠态，$D_4 \ne 0$ $\rho^{(1)}$。

情形 II: 如果将量子态变换为贝尔对角态 $\rho^{(BD)}$，那么也可以证明，纠缠条件与 $Det((\rho^{(BD)})^R) = 0$不能同时成立。这意味着在这种情况下，对于任意两个量子比特纠缠态 $D_4 \ne 0$ $\rho^{(BD)}$ 也成立。因此，结合上述两种情形，我们可以说，对于任意两个量子比特纠缠态， $D_4 \ne 0$。

B. 引理 1 的证明

不等式 (41) 的左端可表示为

$$\prod_{j=2}^{4}(\sigma_1(\rho^R) + \sigma_j(\rho^R))$$

$$= \sigma_{max}^2(\rho^R)||\rho^R||_1 + \sum_{i<j<k}\sigma_i(\rho^R)\sigma j(\rho^R)\sigma_k(\rho^R) \tag{89}$$

$$\ge \lambda_{max}^{lb}||\rho^R||_1 + \sqrt{\sum_{i<j<k}\sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R)\sigma_k^2(\rho^R)} \tag{90}$$

$$= \lambda_{max}^{lb}||\rho^R||_1 + \sqrt{|D_3|} \tag{91}$$

其中，不等式（90）源于以下事实：对于正整数 x_i、$i = 1,\ 2$、.....、 n，$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 成立。

C. 引理2的证明

方程（45）可改写为

$$||\rho^R||_1^2 \;=\; 2\sum_{i<j}\sigma_i(\rho^R)\sigma_j(\rho^R)+T_1 \tag{92}$$

将不等式 $(\sum_{i,\,j=1}^{n} x_{ij})^{\,2} \;\geq\; \sum_{i,\,j=1}^{n} x_{ij}^2$ 代入（92）中的 $x_{ij}=\sigma_i\,(\rho^R)\;\sigma_j\,(\rho^R)$，可得

$$\sum_{i<j}\sigma_i(\rho^R)\sigma_j(\rho^R)\geq\sqrt{\sum_{i<j}\sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R)} \tag{93}$$

利用不等式（93），方程（92）可化简为

$$||\rho^R||_1^2 \;\geq\; 2\sqrt{\sum_{i<j}\sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R)}+T_1 \tag{94}$$

$$=\; 2\sqrt{D_2}+T_1 \tag{95}$$

D. 引理3的证明

（43）的左端可表示为

$$\sum_{1<i<j}\sigma_i^2(\rho^R)\sigma_j^2(\rho^R) \;=\; \sigma_2^2(\rho^R)\sigma_3^2(\rho^R)+\sigma_2^2(\rho^R)\sigma_4^2(\rho^R)$$

$$+\sigma_3^2(\rho^R)\sigma_4^2(\rho^R) \tag{96}$$

$$=\; D_2-\sigma_1^2(\rho^R)(\sum_{i=2}^{4}\sigma_i^2(\rho^R)) \tag{97}$$

$$=\; D_2-\sigma_1^2(\rho^R)(T_1-\sigma_1^2(\rho^R)) \tag{98}$$

E. 重排矩阵一阶矩的估计

式 (85) 可针对 $k=1$ 重新表示为

$$m_1 \;\simeq\; Tr[(\widetilde{\rho^R})P]-\frac{p}{d^2}Tr[P] \tag{99}$$

$$=\; Tr[(\widetilde{\rho^R})P]-\frac{p}{d^2} \tag{100}$$

$$\leq\; Tr[(\widetilde{\rho^R})P]-\frac{l}{m_1+d^2l} \tag{101}$$

在最后一步中，我们使用了（80）。因此，不等式（101）可以改写为

$$m_1+\frac{l}{m_1+d^2l}\leq Tr[(\widetilde{\rho^R})P]:=s_1 \tag{102}$$

化简（102），得到

$$m_1^2+m_1(d^2l-s_1)+l(1-d^2s_1)\leq 0 \tag{103}$$

对 m_1 求解上述二次方程，得

$$\frac{-(d^2l-s_1)-\sqrt{(d^2l-s_1)^2-4l(1-d^2s_1)}}{2}\leq m_1$$

$$\leq\frac{-(d^2l-s_1)+\sqrt{(d^2l-s_1)^2-4l(1-d^2s_1)}}{2} \tag{104}$$

For m_1 to be real, we have

$$(d^2l-s_1)^2-4l(1-d^2s_1)\geq 0 \tag{105}$$

$$\Rightarrow d^4l^2+2l(d^2s_1-2)+s_1^2\geq 0 \tag{106}$$

当 $l\geq\frac{2-d^2s_1+2\sqrt{1-d^2s_1}}{d^4}$ 或 $l\leq\frac{2-d^2s_1-2\sqrt{1-d^2s_1}}{d^4}$ 时，不等式 (106) 成立

情形 1： 当 $2-d^2s_1+2\sqrt{1-d^2s_1}\leq d^4l\leq d^4$

$$f_l(s_1)\leq m_1\leq f_u(s_1) \tag{107}$$

情形 2： 当 $0\leq d^4l\leq 2-d^2s_1-2\sqrt{1-d^2s_1}$

$$g_l(s_1)\leq m_1\leq g_u(s_1) \tag{108}$$

其中 f_l、f_u、g_l、g_u 是 d 和 s_1 的函数，定义如下:

$$f_l(s_1) \;=\; \frac{1}{2}(-d^2+s_1) \tag{109}$$

$$-\frac{1}{2d^2}\sqrt{d^8+2d^6s_1+4d^2s_1+d^4s_1^2-8(1+\sqrt{x})}$$

$$f_u(s_1) \;=\; \frac{-1}{d^2}(x+\sqrt{x})+$$

$$\frac{1}{2d^2}\left(\sqrt{d^8+2d^6s_1+4d^2s_1+d^4s_1^2-8(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$g_l(s_1) \;=\; \frac{1}{d^2}\left(-x+\sqrt{x}-\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}\right)$$

$$g_u(s_1) \;=\; \frac{s_1}{2}+\frac{1}{d^2}\sqrt{1+x-2\sqrt{x}} \tag{110}$$

where $x:=1-d^2s_1$.