arXiv:2302.04806v1 [math.AG] 9 Feb 2023

霍奇理论中的无穷远伪凸性：余维一例子

COLLEEN ROBLES

ABSTRACT. 将 Satake–Baily–Borel 紧化推广到任意周期映射的问题，已归结为在某些“无穷远处邻域”上的一个延拓问题。此类延拓问题要求该邻域是拟凸的。本文旨在通过一个相对简单但非平凡的例子，确立所需的拟凸性：具有 $p_g = 2$ 的权二霍奇结构的周期映射的余维一退化。

1. INTRODUCTION

本文是 [Rob23] 的配套短文。本文的研究动机是将 Satake–Baily–Borel 紧化推广到任意周期映射。

1.1. 动机。简而言之，紧化问题如下。设D 是一个 Mumford–Tate域，它参数化有限维有理向量空间 V上的纯有效权为 w 的 Q极化霍奇结构。固定一个周期映射 $\Phi : B \to \Gamma\backslash D$，它定义在光滑拟射影 B 上；该空间的光滑射影完备化为$\overline{B} \supset B$，且无穷远处的除子 $Z = \overline{B}\backslash B$ 为简单正规交叉除子。令 $\wp = \Phi(B)$表示其像。在 [GGR22]中构造了一个周期映射的真拓扑 Satake–Baily–Borel（SBB）型完备化$\Phi^{\mathsf{S}} : \overline{B} \to \overline{\wp}$。（关于此问题的更详尽综述，参见 [Rob23] 。）不失一般性，可假设该周期映射是真映射。于是 $\wp$ 是拟射影的 [BBT18]。人们希望断言$\overline{\wp}$ 是

日期：2023年2月10日。2010年数学主题分类：14D07、32G20、58A14。
关键词和短语：周期映射、（混合）霍奇结构的变分。Robles 的部分研究经费由美国国家科学基金会 DMS 1611939、1906352 项目资助。

射影代数的。已知当 D 是厄米的且 Γ 是算术的时，结论成立： $\overline{\wp}$ 是 $\wp$ 在 $\Gamma\backslash D$的 Satake–Baily–Borel 紧化中的闭包。一般而言，证明 $\overline{\wp}$ 是复解析空间仍是一个公开问题。

完备化 Φ^{S} 是连续的、真且具有“Stein因子分解”

$$\overline{B} \xrightarrow{\hat{\Phi}^{\mathsf{S}}} \hat{\wp} \longrightarrow \overline{\wp}.$$

$\hat{}\wp \to \overline{\wp}$ 的纤维是有限的，而 $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}$ 的纤维是 $\overline{B}$中的连通紧代数子簇。有人猜想，拓扑空间 $\hat{}\wp$ 是 Moishezon，且映射 $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}} : \overline{B} \to \hat{}\wp$ 是一个态射。当 D 是厄米对称的情形，以及 dim $\wp \leq 2$, [GGLR20]的情形下，该猜想成立。令 $Z_1, \dots, Z_\nu$ 表示 Z 的光滑不可约分支， $Z_I = \cap_{i\in I} Z_i$ 表示闭分层。该猜想已归结为证明 $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}$ 的每个纤维 A 都存在一个邻域$X \subset \overline{B}$ ，使其满足以下性质 [GGR22, 定理 3.20]:

(I) $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}$ 在 X 上的限制是真映射。

(II) $Z_I \cap X$ 上的全纯函数可延拓至 X。

关于性质 (I)，我们可以说明如下。设 $\mathcal{F}_{\mathsf{w}} \subset \mathcal{F}_{\mathsf{w}^{-1}} \subset \cdots \subset \mathcal{F}^0$表示 B上的 Hodge向量丛。假设无穷远处的局部单值化是幂零的，因此 $\mathcal{F}^p$ 可延拓至 $\overline{B}$。

定理1.1 ([GGR22])。$\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}$ 的每个纤维 A 都存在一个邻域$X \subset \overline{B}$ ，具有以下性质:

(i) $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}$ 到 X 的限制是真映射。(ii) 对每个 p，存在一个正整数 $1 \leq m_p$ ，使得线丛 det$(\mathcal{F}^p)^{\otimes m_p}$ 在 X上是平凡的。

第二个性质（II）是一个 Ohsawa–Takegoshi型延拓问题（尽管不需要对 L^2 范数作界估计） [Dem00，Dem16]。此类定理通常要求 X 是拟凸的。

1.2. 伪凸性。回顾一下，如果邻域 X 存在一个多重次调和穷竭函数 $\rho\colon\ X \to \mathbb{R}$，则称其为拟凸的。连续函数 $\rho\colon\ X \to \mathbb{R}$称为穷竭函数，如果对所有 $r \in \mathbb{R}$，$\rho^{-1}[-\infty, r)$都是相对紧的。如果对于每个全纯映射 $\psi\colon\ \Delta \to X$，复合函数 $\rho \circ \psi$ 都是次调和的，则称该函数为多重次调和函数（psh）。如果 ρ 是 $\mathcal{C}^2$，那么当且仅当 $\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\rho \geq 0$时，它是拟次调和的。例如，如果 $f \in \mathcal{O}(X)$，则 $\rho = |f|^2$ 是拟次调和的。同样，带有度量 h 的线丛是正的，如果–log h 是拟次调和的。冈萨定理断言，一个复流形是 Stein 的，当且仅当它存在一个光滑严格拟次调和穷竭函数。

猜想1.2（[Rob23]）。定理1.1中的邻域 X 可以选为拟凸。存在一个连续的穷竭函数 $\rho\colon\ X \to [0, \infty)$，满足$\partial\overline{\partial}\rho(v, \overline{v}) \geq 0$，且当且仅当 v 与Φ^{S}的某个纤维相切时等号成立。

当 D 为厄米对称时、当 $A \subset B$时，以及当 A 是 Z, [Rob23]的一个连通分支时，猜想成立。本短文旨在以下这个特殊但非平凡的情形下证明该猜想。令 $Z_I^* = Z_I \setminus \cup_{j \notin I} Z_j$ 表示 $\overline{B}$的开层。

定理 1.3。设 Mumford–Tate域 D 参数化权为w =2、有效的极化霍奇结构，且具有 $p_g = h^{2,\ 0} = 2$。假设纤维 A 包含在 Z_i^*的一个余维一层中。那么猜想1.2成立。

注记1.4（正则性）。当 D 是厄米的，穷竭函数将是光滑的 [Rob23]。一般而言，ρ 将是 $\mathcal{C}^1$，但不是 $\mathcal{C}^2$。因此，猜想1.2中的不等式 $\partial\overline{\partial}\rho(v, \overline{v}) \geq 0$应理解为允许$\partial\overline{\partial}\rho(v, \overline{v}) = +\infty$。后一种情况可能出现在 v 是正规 Z时，参见§§3.5、4.5和5.5。在这种情况下，$\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\rho$ 是正流。

注 1.5（严格伪多重次调和）。穷竭函数 $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ 将是连续函数 ϱ 在ˆΦ^{S}上的拉回

$$\mathcal{X} \ = \ \hat{\Phi}^{\mathsf{S}}(X) \ \subset \ \hat{\wp}\,.$$

断言 $\partial\overline{\partial}\rho(v,\overline{v}) \geq 0$，且当且仅当 v 与 Φ^{S}的一个纤维相切时取等号，应理解为 ϱ 是 $\mathcal{X}$上的严格拟次调和函数。这种说法是"解释性的"，因为拓扑空间 $\hat{}_{\wp}$ 尚未被证明是复解析的。我们能说的是，空间 $\hat{}_{\wp}$ 是拟射影簇 [GGR22], 的有限并 $\hat{}_{\wp_\pi}$，且限制 $\varrho\big|_{\hat{\wp}_\pi}$ 是严格拟次调和的。

注 1.6（相关工作）。Griffiths 和 Schmid 证明了，D 具有一个光滑穷竭函数，其 Le维型限制在全纯切丛的水平子丛上时，在每一点都为正定 [GS69, (8.1)]。特别地，提升 $\Phi:\ B \to D$ 到 B 的万有覆盖的像具有一个严格伪多重次调和穷竭函数。

2. Proof of Theorem 1.3: preliminaries

2.1. 基本思想。定义

$$\Lambda \ = \ \det(\mathcal{F}^{\mathsf{w}}) \otimes \det(\mathcal{F}^{\mathsf{w}-1}) \otimes \cdots \otimes \det(\mathcal{F}^{\lceil(\mathsf{w}+1)/2\rceil}) \, .$$

The定理 1.1(ii) 意味着 $\Lambda^{\otimes m}$ 在某个正整数 $m \geq 1$对应的 X 上是平凡的 .

注 2.1。为简单起见，我们将在定理 1.3 的证明中假设 $m = 1$ 。

我们将构造两个函数 ρ_0、$\rho_1:\ X \to \mathbb{R}$，它们具有以下性质：

(i) 函数 ρ_0 在 X 上是拟次调和的，并且沿着 $Z \cap X$ 消失。(ii) 限制 $\rho_1\big|_{Z\cap X}$ 是拟次调和的。

(iii) 和 $\rho_0 + \rho_1:\ X \to \mathbb{R}$ 是拟次调和的。事实上，$\partial\overline{\partial}(\rho_0 + \rho_1)(v,\overline{v}) \geq 0$，且等号成立当且仅当 v 与 Φ^{S} 的某个纤维相切。

(iv) 我们有 $\rho_0 + \rho_1 \geq 0$，且该纤维由下式刻画：

$$A \ = \ \{\rho_0 + \rho_1 \ = \ 0\} \, .$$

那么对于 su 充分小的 $\varepsilon > 0$ 我们可以取 $X = \{\rho_0+\rho_1 < \varepsilon\}$和 $\rho = 1/(\varepsilon-\rho_0-\rho_1)$。

函数 ρ_0至少有两种可能性。 $\Lambda\big|_X$ 和[的平凡性——BBT18，定理 6.14]——给出全纯函数 $g_1, \dots, g_\mu \in \mathcal{O}(X)$，它们将 $\Phi\big|_{B\cap X}$的纤维分离开来，并且满足 $V(g_1, \dots, g_\mu) = Z \cap X$。特别地，拟次调和函数

$$\rho_0 \;=\; |g_1|^2 + \cdots + |g_\mu|^2 \tag{2.2}$$

下降到 $\mathcal{X} = \hat{}\Phi^{\mathsf{S}}(X)$，在复解析簇上严格拟次调和

$$\mathcal{X}_0 \;=\; \hat{\Phi}^{\mathsf{S}}(B \cap X)$$

（它在 $\mathcal{X}$ 中稠密），并沿着 $\hat{}\Phi^{\mathsf{S}}(Z \cap X) = \mathcal{X}\backslash\mathcal{X}_0$ 消失。这个选择在 ρ_1 在整个 X 上都是拟次调和时效果很好，其中 ρ_0。（这包括 D 是厄米[Rob23]，的情形，以及其他一些情况，包括 §6 中的两个例子。）

一般来说，这里构造的 ρ_1 似乎不会在整个 X 上都是拟次调和（§§3-5）。在这种情况下，我们对 g_j 沿着 $Z \cap X$ 的消失情况了解不足，无法得出 $\rho_0 + \rho_1$ 是拟次调和的结论。于是我们令 h_0 为 $\Lambda\big|_{B\cap X}$ 的一个平凡化的霍奇范数平方。于是

$$\rho_0 \;=\; 1/h_0 \,:\, X \;\to\; \mathbb{R} \tag{2.3}$$

是拟严格赝凸函数，非负，零点集为 $\{\rho_0 = 0\} = Z \cap X$，并下降为 $\mathcal{X}_0$ 上的严格拟严格赝凸函数，该函数沿 $\mathcal{X}\backslash\mathcal{X}_0$ 消失。与 (2.2) 相比，(2.3) 的优势在于前者的渐近行为已得到充分理解，因此我们将能够证明 $\rho_0 + \rho_1$ 是拟严格赝凸函数。（(2.2) 的优势在于它在整个 X 上都是光滑的。(2.3) 中的函数将是连续的，但一般并不光滑，参见 §§3.4、4.4、5.4。）

函数 ρ_1 将表示为 $-\log h$，其中 $h\colon\; X \to \mathbb{R}$ 是 $Z \cap X$ 上霍奇范数的一个延拓。

2.2. 霍奇范数的延拓。每个 $\Lambda\big|_{Z_I^*}$都对应一个霍奇度量，其定义在相差一个正倍数的意义下是规范的。固定 $\Lambda\big|_X$ 的一个平凡化，并

令 $h_I\colon Z_I^* \cap X \to \mathbb{R}_{>0}$ 为该平凡化的霍奇范数平方。则 $-\log\, h_I$ 是 [GS69] 上的光滑拟次调和函数。

定理 2.4（[Rob23]）。定理1.1的邻域 X 可以选取得满足：它存在一个连续函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$，该函数在各层 $Z_I^* \cap X$ 上光滑（包括 $B \cap X$），在 ˆΦˢ– 纤维上为常数，并具有以下性质：若 $Z_I^* \cap A$ 非空，则 h 在 Z_I^* 上的限制是霍奇范数平方 h_I 的倍数。特别地，$-\log\, h$ 在 Z_I^* 上的限制是多重次调和的。

注 2.5。如果 Mumford–Tate 域 D 是厄米的，那么 h 是光滑的，且 $-\log\, h$ 是拟次调和的 [Rob23]。对于任意 Mumford–Tate 域，光滑性和多重次调和性都可能失效，参见第 3–5 节。（不过，对于所有层 Z_J^*，限制 $h\big|_{Z_J^* \cap X}$ 始终是光滑的。）

2.3. 权为 w $= 2$、带有 $p_g = 2$ 的周期域。我们将在定理 1.3 的证明中大量借鉴配套论文 [Rob23], ，尤其是该论文的第 2–3 节，并沿用其中的记号。

设 D 为参数化有理向量空间 V 上权为 w $= 2$、具有霍奇数 h(V) $=$ (2, h, 2) 的极化霍奇结构的周期域。在其上诱导的霍奇结构

$$H = \bigwedge^2 V$$

具有权 n $= 2$，霍奇数为 h(H) $=$ (1 , 2h , ₁ ₂h(h $-$ 1) $+$ 4 , 2h , 1)。我们假设纤维 A 包含在某个余维一分层 $Z_i^* \subset Z$ 中；不失一般性，$i = 1$ 和

$$A \subset Z_1^*\,.$$

设 $\rho_1 =$ –log h，其中 h 由定理 2.4 给出。问题在于证明我们可以选取一个拟次调和 ρ_0，使得满足 §2.1 的条件 (iii) 和 (iv)。如 §2.1 所述，我们对 ρ_0 的选取将取决于 ρ_1 的性质。ρ_0 和 ρ_1 均由 X 上的周期矩阵表示定义（[Rob23, §2.2]），因此

它们在 $\hat{\Phi}^{S}$ 的纤维上为常数。只需在以点 $b \in A$ 为中心的局部坐标图 (U, t) 中验证 §2.1(iii)-(iv)。（这里我们沿用 [Rob23, §3.2.2] 的记号。）不失一般性，坐标满足

$$U \cap Z_1 \;=\; \{t_1 = 0\}\,.$$

沿着 $U \cap Z_1$ [KPR19, Rob17]，极限混合霍奇结构（W, F, N）有五种可能的“类型”。定理 1.3 的证明在第 3–6 节中分别针对每种类型进行了明确的分类讨论。这些类型由纯权 ℓ 霍奇结构在 $\mathrm{Gr}_\ell^W(V)$ 上的霍奇数 h_ℓ 编号，该结构由 F 确定。用相应的霍奇菱形（§A）直观地表示每种类型会很方便。

一般而言，混合霍奇结构（W, F）并非 $\mathbb{R}$–分裂。为便于接下来的计算，不妨假设我们已将（W, F）替换为由 $F = \exp(\delta) \cdot F$ 给出的 $\mathbb{R}$–$\tilde{}$ $\tilde{}$分裂混合霍奇结构（W, F），其中 $\delta \in \oplus_{p,\ q\le -1} \mathfrak{g}^{p,\ q}_{W,\ F}$。（这总是可以做到的，参见 [CKS86]。）经过此替换后，[Rob23, §3.2.3] 中的断言仍然成立。

全文中我们将频繁用到 Q– W的各向同性

$$Q\left(W_\ell(V)\,,\, W_m(V)\right) \;=\; 0\,, \quad \forall\ \ell + m < 4\,, \tag{2.6a}$$

$$Q\left(W_\ell(H)\,,\, W_m(H)\right) \;=\; 0\,, \quad \forall\ \ell + m < 8\,; \tag{2.6b}$$

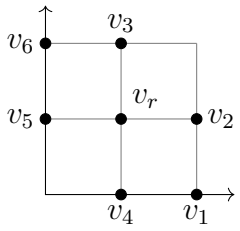
以及

$$N(W_\ell) \;\subset\; W_{\ell-2}\,. \tag{2.6c}$$

3. Proof of Theorem 1.3 for the minimal degeneration

一个极小退化（W, F, N）具有霍奇数 $\mathsf{h}_0 = (0)$、$\mathsf{h}_1 = (1,1)$ 和 $\mathsf{h}_2 = (1, \mathsf{h}-2, 1)$。相应的霍奇菱形 $\diamond(V)$ 为

(3.1)



霍奇菱形 $\diamond(H)$ 见 (A.2)。

我们可以选取 $\{v_1, \dots, v_{\mathsf{d}}\}$ of $V_{\mathbb{C}}$ 的一组基，使得：极化满足 $Q(v_a, v_b) = \delta^7_{a+b}$ 对所有 $1 \le a, b \le 6$, $Q(v_r, v_s) = \delta_{rs}$ 对所有 $7 \le r, s$，且所有其他配对均为零；底层实结构为 $\overline{v_1} = -v_6$, $\overline{v_2} = v_3$, $\overline{v_4} = v_5$ 和 $\overline{v_r} = v_r$；幂零算子由下式给出

$$N \;=\; \mathbf{i}(v_4 \otimes v^2 - v_5 \otimes v^3) \;\in\; \mathrm{End}(V_{\mathbb{R}}, Q)\,; \tag{3.2}$$

霍奇滤过为 $F^2(V_{\mathbb{C}}) = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2\}$，权滤子为 $W_1(V_{\mathbb{C}}) = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{v_4, v_5\}$。采用 [Rob23，第 2.2–2.3] 节中的记号，我们有 $e_0 = v_1 \wedge v_2$ 和 $e_\infty = v_1 \wedge v_4$。

3.1. 周期矩阵表示。如 [Rob23, §2.2], 中所述，$B \cap X$ 上有 $F^2_\Phi = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{\xi_1\,,\,\xi_2\}$，其中

$$\xi_a \;=\; v_a \;+\; \sum_{j \ge 3} \xi_a^j\, v_j\,, \quad a = 1, 2\,.$$

ξ_a^j： $B \cap X \to \mathbb{C}$ 是全纯的，并且在单值化 Γ_X 的作用下定义到等价类。

$$\begin{aligned} \xi_3 \;&=\; v_3 - \xi_2^4\, v_5 - \xi_1^4\, v_6\,, \qquad \xi_4 \;=\; v_4 - \xi_2^3\, v_5 - \xi_1^3\, v_6 \\ \xi_r \;&=\; v_r - \xi_2^r\, v_5 - \xi_1^r\, v_6\,, \quad r \ge 7\,. \end{aligned}$$

将 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 扩展为 $F^1(\Phi)$ 的标架。

根据 [Rob23, (2.13)], 纤维 $A \subset Z$ 由以下方程刻画：

$$A \;=\; \{\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_1^r, \xi_1^6 = 0\}\,. \tag{3.3}$$

按照 [Rob23, §§2.2, 3.1] 的记号，我们有 $\eta_0 = \xi_1 \wedge \xi_2$ 和 $\eta_\infty = \xi_1 \wedge \xi_4$。

3.2. 局部坐标中的矩阵系数。正如 [Rob23, §3.2.2], 所讨论的，我们有 $\xi_j = \exp(\ell(t_1)N)\zeta(t)\cdot(v_j)$，其中 $\zeta\colon U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp)$ 全纯。我们有 $\mathfrak{s}_F^\perp = (\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N) \oplus \mathbb{C}(v_3 \otimes v_1 - v_6 \otimes v^4)$，其中 $\mathfrak{z}_N$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中 N 的中心化子。我们可以将 $\zeta = \exp\,\xi_1^3(v_3 \otimes v^1 - v_6 \otimes v^4)\cdot\alpha$ 分解，其中 $\alpha\colon U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N)$ 全纯。令 $\alpha_j = \alpha(v_j)$，并通过 $\alpha_j = \alpha_j^i\, v_i$ 定义 $\alpha_j^i \in \mathcal{O}(U)$。我们有 $\xi_4^2 = \alpha_2^4 + \mathbf{i}\ell(t)$。经过坐标变换 $t_1 \mapsto \exp(2\pi\alpha_2^4)\, t_1$ 后，我们有 $\alpha_2^4 = 0$。然后

$$\begin{aligned}
\xi_1 \;&=\; \alpha_1 \,+\, \xi_1^3\,(\beta_{1,3} \,+\, \ell(t_1)N\beta_{1,3})\,,\\
\xi_2 \;&=\; \alpha_2 \,+\, \ell(t_1)N\alpha_2\,, \qquad \xi_4 \;=\; -\mathbf{i}N\alpha_2 \,-\, \xi_1^3\, v_6\,,
\end{aligned}$$

with

$$\beta_{1,3} = (v_3 - \alpha_1^4\, v_6) : U \to W_3(V_{\mathbb{C}})$$

全纯。条件 [Rob23, (3.13)] 等价于 ξ_1^3 沿着 $U \cap Z = \{t_1 = 0\}$ 消失。特别是，

$$\xi_1^3 \;=\; t_1\, \nu_1^3 \tag{3.4}$$

对于某个全纯的 $\nu_1^3 : U \to \mathbb{C}$。

3.3. 局部坐标中的截面 η_0 和 η_∞。令

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,5} \;&=\; \alpha(v_1 \wedge v_2) : U \;\to\; W_5(H_{\mathbb{C}})\\
\beta_{0,6} \;&=\; \beta_{1,3} \wedge \alpha_2 : U \;\to\; W_6(H_{\mathbb{C}})\\
\beta_{\infty,5} \;&=\; v_6 \wedge \beta_{1,3} \;=\; v_3 \wedge v_6 : U \;\to\; W_5(H_{\mathbb{C}})\\
\beta_{\infty,4} \;&=\; -\mathbf{i}\,\beta_{1,3} \wedge (N\alpha_2) \,-\, \alpha_1 \wedge v_6 : U \;\to\; W_4(H_{\mathbb{C}})\,.
\end{aligned}$$

注意，$N^3\beta_{0,\ 6}$，$N^2\beta_{\infty,\ 4}$，$N^2\beta_{\infty,\ 5}=0$，$\beta_{0,\ 6}\equiv v_3\wedge v_2$模 W_5（$H_{\mathbb{C}}$），且 $N^2\beta_{0,\ 6}=2\mathbf{i}N\beta_{\infty,\ 4}=2v_5\wedge v_4$。我们有

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \alpha_{0,5}+\ell(t_1)N\alpha_{0,5}+\xi_1^3\left(\beta_{0,6}+\ell(t_1)N\beta_{0,6}+\tfrac{1}{2}\ell(t_1)^2N^2\beta_{0,6}\right)\\ \eta_\infty &= -\mathbf{i}N\alpha_{0,5}+\xi_1^3\left(\beta_{\infty,4}+\ell(t)N\beta_{\infty,4}\right)+(\xi_1^3)^2\left(\beta_{\infty,5}+\ell(t)N\beta_{\infty,5}\right).\end{aligned}$$

3.4. 局部坐标中的霍奇范数。$Z\cap X$到 X上的霍奇范数的延拓为 $h=-\mathrm{Re}\ Q(\eta_0,\overline{\eta}_\infty)$，参见 [Rob23]。牢记 **(2.6)**，在局部坐标中有

$$\begin{aligned}h &= -\mathbf{i}Q(\alpha_{0,5},N\overline{\alpha}_{0,5})+\tfrac{1}{2\pi}|\xi_1^3|^2\log|t_1|^2\\ &\quad+\mathbf{i}\,\xi_1^3\,Q(\overline{\alpha}_{0,5}\,,\,N\beta_{0,6})+\tfrac{1}{2}\,\xi_1^3\,Q(\overline{\alpha}_{0,5}\,,\,\alpha_1\wedge v_6-v_5\wedge\alpha_2)\\ &\quad-\mathbf{i}\,\overline{\xi}_1^3\,Q(\alpha_{0,5}\,,\,N\overline{\beta}_{0,6})+\tfrac{1}{2}\,\overline{\xi}_1^3\,Q(\alpha_{0,5}\,,\,\overline{\alpha}_1\wedge\overline{v}_6-\overline{v}_5\wedge\overline{\alpha}_2)\\ &\quad-\tfrac{1}{2}\,|\xi_1^3|^2\left\{Q(\beta_{0,6},\overline{\beta}_{\infty,4})+Q(\overline{\beta}_{0,6},\beta_{\infty,4})\right\}\\ &\quad-\tfrac{1}{2}\,(\xi_1^3)^2\,Q\left(\overline{\alpha}_{0,5}+\overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{0,6}\,,\,\beta_{\infty,5}-\tfrac{\mathbf{i}}{2\pi}\log|t|^2\,N\beta_{\infty,5}\right)\\ &\quad-\tfrac{1}{2}\,(\overline{\xi}_1^3)^2\,Q\left(\alpha_{0,5}+\xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\,\overline{\beta}_{\infty,5}+\tfrac{\mathbf{i}}{2\pi}\log|t|^2\,N\overline{\beta}_{\infty,5}\right).\end{aligned}$$

$B\cap X$ 上的霍奇范数为 $h_0=Q(\eta_0,\overline{\eta}_0)$。同样，牢记 **(2.6)**，在局部坐标中有

$$\begin{aligned}h_0 &= \tfrac{\mathbf{i}}{2\pi}\log|t_1|^2\,Q(\alpha_{0,5},N\overline{\alpha}_{0,5})-\tfrac{1}{4\pi^2}(\log|t_1|^2)^2\,|\xi_1^3|^2\\ &\quad+\tfrac{\mathbf{i}}{2\pi}\log|t_1|^2\left(\overline{\xi}_1^3\,Q(\alpha_{0,5},N\overline{\beta}_{0,6})-\xi_1^3\,Q(\overline{\alpha}_{0,5},N\beta_{0,6})\right)\\ &\quad+Q\Big(\alpha_{0,5}+\xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\,\overline{\alpha_{0,5}+\xi_1^3\,\beta_{0,6}}\Big)+\tfrac{\mathbf{i}}{2\pi}\log|t_1|^2\,|\xi_1^3|^2\,Q(\beta_{0,6},N\overline{\beta}_{0,6}).\end{aligned}$$

3.5. 多重次调和性。令 $\rho_0=1/h_0$ 和 $\rho_1=-\log\ h_\circ$ 我们知道，ρ_0 在 X上是拟次调和的，且 ρ_1 在 $Z\cap X$上是拟次调和的。本节的目标是证明$\rho_0+\rho_1$ 在 X上是拟次调和的。由于多重次调和性是局部性质，只需

证明 $\rho_0+\rho_1$ 在 U上是拟次调和的。我们计算

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial}(\rho_0+\rho_1) &= \partial\overline{\partial}(1/h_0-\log h)\\ &= \frac{-h_0\partial\overline{\partial}h_0\ +\ 2\,\partial h_0\wedge\overline{\partial}h_0}{h_0^3}\ +\ \frac{-h\partial\overline{\partial}h\ +\ \partial h\wedge\overline{\partial}h}{h^2}\,.\end{aligned}$$

L引理 3.5。取 v 上的全纯向量场 U，使得 $\mathrm{d}_v t_1=1$。我们有 e

$$\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\,(\rho_0+\rho_1)\ =\ +\infty\,.$$

证明。该引理由 (3.4) 以及 §3.4 中的计算得出。关键在于，当 $t_1\to 0$ 时，表达式 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)$ 被该项所支配

$$-\frac{Q(\alpha_{0,5},N\overline{\alpha}_{0,5})^2}{2\pi^2\,h_0^3\,|t_1|^2}\ =\ -\frac{Q(\alpha_{0,5},N\overline{\alpha}_{0,5})^2}{2\pi^2\,h_0^3\,|t_1|^2}\,\mathrm{d}_v t_1\wedge\mathrm{d}_{\overline{v}}\,\overline{t}_1\quad\text{in}\quad\frac{2\,\partial_v h_0\wedge\overline{\partial}_{\overline{v}}\,h_0}{h_0^3}\,.$$

回忆一下，$-\mathbf{i}Q(\alpha_{0,\,5},\ N\overline{\alpha}_{0,\,5})$ 是沿 $Z_1\cap U$ 的霍奇范数；特别地，$-\mathbf{i}Q(\alpha_{0,\,5},\ N\overline{\alpha}_{0,\,5})>0$。或者，也可以直接计算

$$-\mathbf{i}Q(\alpha_{0,5},N\overline{\alpha}_{0,5})\ =\ (1+|\alpha_1^6|^2-\textstyle\sum_r|\alpha_1^r|^2)(1-|\alpha_2^3|^2)\,. \tag{3.6}$$

由 (3.3)

$$A\cap U\ =\ \{t_1\,,\ \alpha_1^r\,,\alpha_1^6\,,\ \alpha_2^3\ =\ 0\}\,. \tag{3.7}$$

因此，(3.6) 在纤维 $A\cap U$ 上恒等于 1。 □

引理 3.8. 固定一个全纯向量场 v 在 U 上，使得 $\mathrm{d}_v t_1=0$。如有必要，缩小 U，则有 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)\ \geq 0$。

推论 3.9。函数 $\rho_0+\rho_1$ 在 X上是拟次调和的。

3.6. 引理 3.8 的证明。

3.6.1. 预备知识。该引理的证明需要对 ρ_0、 ρ_1 及其导数的渐近行为进行冗长分析。考虑到 (3.4)，我们将在局部将 h 和 h_0 都视为关于 t_1、 $\overline{t}_1$、$\log |t_1|^2$ 的多项式，其系数取自空间 $\mathcal{C}^\omega(U)$，即定义在 U上的实解析函数空间；也就是说，

$$h, h_0 \in \mathcal{C}^\omega(U)[t_1, \overline{t}_1, \log |t_1|^2] .$$

同样，我们将 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0 + \rho_1) = \partial\overline{\partial}(\rho_0 + \rho_1)(v, \overline{v})$ 视为 $\mathcal{C}^\omega(U)[t_1, \overline{t}_1, \log |t_1|^2]$ 的分式域中的一个元素。

Set

$$q_1(\alpha) = -\mathbf{i}Q(\alpha_{0,5}, N\overline{\alpha}_{0,5}) \quad \text{and} \quad q_0(\alpha) = Q(\alpha_{0,5}, \overline{\alpha}_{0,5}) .$$

由 (3.4) 和 §3.4 可知

$$\begin{aligned} h &= q_1(\alpha) + O(|t_1| \log |t_1|^2) \\ h_0 &= -\frac{1}{2\pi} \log |t_1|^2 \, q_1(\alpha) + q_0(\alpha) + O(|t_1| \log |t_1|^2) \end{aligned}$$

如 (3.6) 后所述， $q_1(\alpha)$ 在纤维 $A \cap U$ 上恒等于 1。必要时缩小 U，我们可以假设 $q_1(\alpha) > \frac{1}{2}$ 在 U 上成立。于是

$$\begin{aligned} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \rho_1 &= -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log q_1(\alpha) + O(|t_1| \log |t_1|^2) \\ \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \rho_0 &= \frac{(\log |t_1|^2)^2}{4\pi^2 \, h_0^3} \cdot q_1(\alpha)^3 \, \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (1/q_1(\alpha)) \\ &\quad + \frac{\log |t_1|^2}{2\pi \, h_0^3} \cdot \big\{ q_1(\alpha) \, \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} q_0(\alpha) + q_0(\alpha) \, \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} q_1(\alpha) \big\} \\ &\quad - \frac{\log |t_1|^2}{\pi \, h_0^3} \cdot \big\{ \partial_v q_1(\alpha) \, \overline{\partial}_{\overline{v}} q_0(\alpha) + \partial_v q_0(\alpha) \, \overline{\partial}_{\overline{v}} q_1(\alpha) \big\} \\ &\quad + \frac{O(|t_1| \, (\log |t_1|^2)^2)}{h_0^3} . \end{aligned} \tag{3.10}$$

特别是

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \rho_0 &= 0 , \\ \lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \rho_1 &= -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log q_1(\alpha) , \end{aligned}$$

（所有极限均在 $t_2, \dots, t_r$ 保持不变的条件下取。）

3.6.2. 第一步。由 (3.6)、(3.7) 以及第一个霍奇–黎曼双线性关系 $0 = Q(\alpha_1, \alpha_1) = 2\alpha_1^6 + \sum_r (\alpha_1^r)^2$ 可以直接看出，$-\log q_1(\alpha)$ 在 $A \cap U$ 的一个邻域内是拟次调和的；不失一般性，$-\log q_1(\alpha)$ 在 U 上是拟次调和的。若

$$\lim_{t_1 \to 0} -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log q_1(\alpha) \; > \; 0 \,,$$

则由 §3.6.1 可知，必要时缩小 U 后，我们有 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) > 0$ 在 U 上。

3.6.3. 第二步。现在假设

$$\lim_{t_1 \to 0} - \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log q_1(\alpha) \; = \; 0 \,. \tag{3.11}$$

等价地，

$$\lim_{t_1 \to 0} \mathrm{d}_v \alpha_1^r \,, \, \mathrm{d}_v \alpha_1^6 \,, \, \mathrm{d}_v \alpha_2^3 \; = \; 0 \,.$$

考虑 (3.10) 中 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \rho_0$ 的表达式里 $\log |t_1|^2$ 的系数。我们计算

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} q_0(\alpha) \; &= \; Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_1) \, Q\big(\mathrm{d}_v \alpha_2, \mathrm{d}_{\overline{v}} \overline{\alpha}_2\big) \\ &\quad - \; \big|Q\big(\alpha_2, \mathrm{d}_{\overline{v}} \overline{\alpha}_1\big)\big|^2 \; - \; \big|Q\big(\alpha_1, \mathrm{d}_{\overline{v}} \overline{\alpha}_2\big)\big|^2 \\ &= \; -(1 + |\alpha_1^6|^2 - \textstyle\sum_r |\alpha_1^r|^2) \left[\sum_r |\mathrm{d}_v \alpha_2^r|^2 \; - \; |\mathrm{d}_v \alpha_2^6|^2 \right] \\ &\quad - \; \big|\mathrm{d}_v \alpha_1^4 \, + \, \overline{\alpha}_2^3 \, \mathrm{d}_v \alpha_1^5\big|^2 \; - \; |\textstyle\sum_r \overline{\alpha}_1^r \, \mathrm{d}_v \alpha_2^r \, - \, \overline{\alpha}_1^6 \mathrm{d}_v \alpha_2^6|^2 \,. \end{aligned}$$

无穷小周期关系 $0 = Q(\xi_1, \mathrm{d}\xi_2) = Q(\mathrm{d}\xi_1, \xi_2)$ 产生了 $\mathrm{d}_v \alpha_2^6 = -\sum_r \alpha_1^r \mathrm{d}_v \alpha_2^r$ 和 $\mathrm{d}_v \alpha_1^5 = -\alpha_2^3 \mathrm{d}_v \alpha_1^4$，沿着 $t_1 = 0$。由此可得

$$\lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} q_0(\alpha) \; \leq \; 0 \tag{3.12}$$

当且仅当 $\mathrm{d}\alpha_1^4(v)$、$\mathrm{d}\alpha_2^r(v) = 0$ 在 $t_1 = 0$ 时等号成立。如果不等式 (3.12) 是严格不等式，那么 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1)$ 渐近地受 (3.10) 中的对数 $|t_1|^2$ 项支配。特别地，当 $0 < |t_1|$ 足够小时，$\partial \overline{\partial} (\rho_0 + \rho_1)(v, \overline{v}) > 0$。

3.6.4. 第 3 步。我们继续假设 (3.11) 成立，现在设 (3.12) 中等号成立。这些条件等价于

$$\lim_{t_1 \to 0} \mathrm{d}_v \alpha_j^i \,, \qquad \forall\, i, j \,. \tag{3.13}$$

这意味着周期矩阵表示的所有微分 $\mathrm{d}_v \xi_j^i$ 沿着$\{t_1 = 0\}$都消失。如果在 $t_1 = 0$处有 $\mathrm{d}_v \nu_1^3 \neq 0$，那么 $-\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1)$ 渐近地被以下各项所支配

$$|t_1|^2 \, \log |t_1|^2 \left(\frac{\log |t_1|^2}{4\pi^2 \, h_0^2} \, - \, \frac{1}{2\pi \, h} \right) \left| \mathrm{d}_v \nu_1^3 \right|^2 \,.$$

对于足够小的 $0 < |t_1|$，我们有 $-\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) \, > 0$。

3.6.5. 步骤 4. 只需考虑 (3.13) 成立且 $\mathrm{d}_v \nu_1^3$ 沿着 $t_1 = 0$消失的情形。在这种情况下，§§3.2–3.4 中的公式表明

$$\begin{aligned} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \, (\rho_0 + \rho_1) \;\; = \;\; & -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \, \log q_1(\alpha) \\ & + \, \frac{\log |t_1|^2}{2\pi \, h_0^3} \cdot \left\{ q_1(\alpha) \, \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \, q_0(\alpha) \, + \, q_0(\alpha) \, \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \, q_1(\alpha) \right\} \\ & - \, \frac{\log |t_1|^2}{\pi \, h_0^3} \cdot \left\{ \partial_v q_1(\alpha) \, \overline{\partial}_{\overline{v}} \, q_0(\alpha) \, + \, \partial_v q_0(\alpha) \, \overline{\partial}_{\overline{v}} \, q_1(\alpha) \right\} \\ & + \, |t_1|^2 \, \log |t_1|^2 \left(\frac{\log |t_1|^2}{4\pi^2 \, h_0^2} \, - \, \frac{1}{2\pi \, h} \right) \left| \mathrm{d}_v \nu_1^3 \right|^2 \, + \, \cdots \end{aligned}$$

渐近地被 §§3.6.2–3.6.4 中考察的某一项（此处列出的各项）所支配。由此可得，在 U 上 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) \, \geq 0$ （可能需要先缩小U）。这就完成了引理 3.8 的证明。□

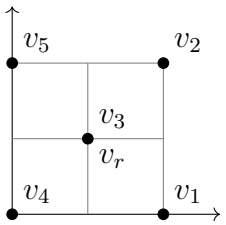
3.7. 伪凸性。为完成定理 1.3 关于退化 (3.1) 的证明（如第 2.1 节所述），只需注意：(1) 引理 3.8 的证明中的分析蕴含第 2.1 节 (iii)；(2) 我们有 $A \subset \{\rho_0 + \rho_1\}$，且类似于引理 3.8 的证明中的分析蕴含第 2.1 节 (iv)。□

其余四种退化的论证与上述类似；在第 4–6 节逐一讨论时，我们将越来越简略。我们将继续大量使用 [Rob23, §§2-3]。

4. Proof of Theorem 1.3 for the second degeneration

下一个退化的极限混合霍奇结构 (W, F, N) 满足$W_0(V) = W_1(V)$ 且 $W_2(V) = W_3(V)$，其霍奇数为 $\mathsf{h}_2 = (1, h, 1)$ 和 $\mathsf{h}_0 = (1)$。相应的霍奇菱形 $\diamond(V)$ 为

(4.1)



关于 $\diamond(H)$ 上的霍奇菱形，请参见（A.3）。

我们可以选取 $V_{\mathbb{C}}$ 的基 $\{v_1, \dots, v_{\mathsf{d}}\}$，使得：极化满足$Q(e_a, e_b) = \delta^6_{a+b}$，对所有 $a, b \le 5$均成立；且 $Q(e_r, e_s) = \delta_{rs}$，对所有 $r, s \ge 6$均成立，其余所有配对均为零；霍奇滤过由 $F^2 = \mathsf{span}\{v_1, v_2\}$和 $F^1 = \mathsf{span}\{v_1, v_2, v_3, v_r\}_{r\ge 6}$给出；底层实结构为 $\overline{v_1} = -v_5$, $\overline{v_3} = -v_3$，其余所有基向量均为实向量；幂零算子由 $N = \mathsf{i}(v_4 \otimes v^3 - v_3 \otimes v^2)$ 给出；霍奇滤过为 $F^2(V) = \mathsf{span}\{v_1, v_2\}$。按照 [Rob23 第 2.2–2.3]节中的记号，我们有 $e_0 = v_1 \wedge v_2$ 且 $e_\infty = v_1 \wedge v_4$。

4.1. 周期矩阵表示。在 $B \cap X$ 上，我们有 $F^2_\Phi = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{\xi_1, \xi_2\}$，其中

$$\xi_a \;=\; v_a \;+\; \sum_{j\ge 3} \xi_a^j\, v_j\,, \quad a = 1, 2\,.$$

$\xi_a^j\colon\ B \cap X \to \mathbb{C}$ 是全纯的，并且定义在单值化Γ_X的作用下（相差一个单值化作用）。

$$\begin{aligned} \xi_3 &= v_3 - \xi_2^3\, v_4 - \xi_1^3\, v_5 \\ \xi_r &= v_r - \xi_2^r\, v_4 - \xi_1^r\, v_5\,, \quad r \ge 6\,. \end{aligned}$$

将 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 扩展为 $F^1(\Phi)$ 的标架。

根据 [Rob23, （2.13）], 纤维 A 由以下方程刻画:

$$A \;=\; \{\xi_1^3\,,\, \xi_1^5\,,\, \xi_1^r \;=\; 0\} \cap Z_1\,. \tag{4.2}$$

我们有 $\eta_0 = \xi_1 \wedge \xi_2$ 以及 $\eta_\infty = \xi_1 \wedge \xi_4$。

4.2. 局部坐标中的矩阵系数。如 [Rob23, §3.2.2],中所述，我们有 $\xi_j = \exp(\ell(t_1)N)\,\zeta(t)\cdot(v_j)$，其中 $\zeta\colon\; U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp)$ 是全纯的。我们有$\mathfrak{s}_F^\perp = (\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N) \oplus \mathbb{C}(v_3 \otimes v^1 - v_5 \otimes v^3)$，其中 $\mathfrak{z}_N$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$中 N 的中心化子。我们可以将 $\zeta = \exp\,\xi_1^3(v_3 \otimes v^1 - v_5 \otimes v^3)\cdot\alpha$ 分解为，其中 $\alpha\colon\; U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N)$ 是全纯的。于是

$$\begin{aligned}
\xi_1 \;&=\; \alpha_1 \,+\, \xi_1^3\,\beta_{1,2} \,+\, \ell(t_1)\,\xi_1^3\,N\beta_{1,2} \\
\xi_2 \;&=\; \alpha_2 \,+\, \ell(t_1)\,N\,\alpha_2 \,+\, \tfrac{1}{2}\,\ell(t_1)^2\,N^2\,\alpha_2\,, \qquad \xi_4 \;=\; N^2\,\alpha_2 \;=\; v_4\,,
\end{aligned}$$

其中 $\beta_{1,\,2} = v_3 - \frac{1}{2}\xi_1^3 v_5\colon\; U \to W_2(V_{\mathbb{C}})$ 是全纯的。条件 [Rob23, (3.13)] 等价于 ξ_1^3 沿 $U \cap Z = \{t_1 = 0\}$的消失。特别地,

$$\xi_1^3 \;=\; t_1\,\nu_1^3 \tag{4.3}$$

对于某个全纯的 $\nu_1^3 : U \to \mathbb{C}$。纤维 (4.2) 局部刻画为

$$A \cap U \;=\; \{t_1,\, \alpha_1^5,\, \alpha_1^r = 0\}\,. \tag{4.4}$$

以下观察将简化后续计算。令 $\alpha_j = \alpha(v_j)$，并由 $\alpha_j = \alpha_j^i\,v_i$ 定义 $\alpha_j^i \in \mathcal{O}(U)$。$\alpha$ 中心化 N 的条件等价于 $\alpha_1^3 = 0$。此外，我们还有 $\xi_2^3 = \alpha_2^3 - \mathrm{i}\ell(t)$。经过坐标变换$t_1 \mapsto \exp(2\pi\alpha_2^3)\,t_1$后，我们还将 $\alpha_2^3 = 0$ 规范化。综上， $\alpha_1^3, \alpha_2^3 = 0$。这意味着

$$0 \;=\; Q(\alpha_i, v_3) \;=\; Q(\alpha_i, N\alpha_j)\,, \qquad i,j = 1,2\,. \tag{4.5}$$

4.3. 局部坐标中的截面 η_0 和 η_∞。令

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,6} &= \alpha_1 \wedge \alpha_2 \,:\, U \;\to\; W_6(H_{\mathbb{C}}) \\
\beta_{0,6} &= \beta_{1,2} \wedge \alpha_2 \,:\, U \;\to\; W_6(H_{\mathbb{C}}) \\
\beta_{\infty,2} &= \beta_{1,2} \wedge (N^2\alpha_2) \,:\, U \;\to\; W_2(H_{\mathbb{C}})\,.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6} \;+\; \ell(t_1)\,N\,(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}) \;+\; \tfrac{1}{2}\,\ell(t_1)^2\,N^2\,(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}) \\
\eta_\infty &= N^2\,\alpha_{0,6} \;+\; \xi_1^3\,\beta_{\infty,2}\,.
\end{aligned}$$

4.4. 局部坐标中的霍奇范数。霍奇范数从 $Z \cap X$ 到 X 的延拓为 $h = -\mathrm{Re}\,Q(\eta_0, \overline{\eta}_\infty)$。$h$ 有两种表达式会用到。记住 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
-Q(\eta_0\,,\,\overline{\eta}_\infty) &= -Q(\xi_1\,,\,\overline{\xi_1})\,Q(\xi_2\,,\,\overline{\xi_4}) \;+\; Q(\xi_1\,,\,\overline{\xi_4})\,Q(\xi_2\,,\,\overline{\xi_1}) \\
&= -Q(\xi_1\,,\,\overline{\xi_1}) \;=\; 1 \,+\, |\xi_1^3|^2 \,+\, |\xi_1^5|^2 \,-\, \sum_{r\geq 6} |\xi_1^r|^2\,;
\end{aligned}$$

其中 $\xi_1^r = \alpha_1^r$ 和 $\xi_1^5 = \alpha_1^5 - \frac{1}{2}(\xi_1^3)^2$。或者，(4.5) 表明 $\overline{\xi}_1^3$ 同时整除 $Q(\alpha_{0,\,6},\ \overline{\beta}_{\infty,\,2})$ 和 $Q(\alpha_{0,\,6},\ N^2\overline{\beta}_{0,\,6}) = Q(N^2\alpha_{0,\,6},\ \overline{\beta}_{0,\,6})$，其中 $\mathcal{C}^\omega(U)$，因此由 (4.3) 得

$$\begin{aligned}
h &= -Q(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\; N^2\overline{\alpha}_{0,6} + \overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{\infty,2}) \\
&= -Q(\alpha_{0,6}, N^2\overline{\alpha}_{0,6}) \;+\; |\xi_1^3|^2(1 + \tfrac{1}{4}|\xi_1^3|^2) \;-\; \mathrm{Re}\,\alpha_1^5(\overline{\xi}_1^3)^2\,.
\end{aligned}$$

$B \cap X$ 上的霍奇范数为 $h_0 = Q(\eta_0, \overline{\eta}_0)$。同样，记住 (2.6)，在局部坐标中有

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{(\log|t_1|^2)^2}{8\pi^2}\, Q\left(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\, N^2(\overline{\alpha}_{0,6} + \overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{0,6})\right) \\ &\quad + \mathbf{i}\frac{\log|t_1|^2}{2\pi} Q\left(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\, N(\overline{\alpha}_{0,6} + \overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{0,6})\right) \\ &\quad + Q\left(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\, \overline{\alpha}_{0,6} + \overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{0,6}\right) \\ &= -\frac{(\log|t_1|^2)^2}{8\pi^2}\,\left\{Q(\alpha_{0,6}\,,\, N^2\overline{\alpha}_{0,6}) \,+\, |\xi_1^3|^2\,(1 - \tfrac{1}{4}|\xi_1^3|^2) \,+\, \mathrm{Re}\,\alpha_1^5(\overline{\xi}_1^3)^2\right\} \\ &\quad - \frac{\log|t_1|^2}{2\pi}\,\left\{\overline{\xi}_1^3\,Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_2) + \xi_1^3\,Q(\overline{\alpha}_1, \alpha_2) \,+\, O(|t_1|^2)\right\} \\ &\quad + Q\left(\alpha_{0,6} + \xi_1^3\,\beta_{0,6}\,,\, \overline{\alpha}_{0,6} + \overline{\xi}_1^3\,\overline{\beta}_{0,6}\right)\,, \end{aligned}$$

第二个等式用到了 (4.5)。

4.5. 多重次调和性。令 $\rho_0 = 1/h_0$ 和 $\rho_1 = -\log\, h$。我们知道，ρ_0 在 X 上是拟次调和的，且 ρ_1 在 $Z \cap X$ 上是拟次调和的。本节的目标是证明 $\rho_0 + \rho_1$ 在 U 上是拟次调和的。我们沿用 §3.5 中的方法。

L引理 4.6。固定 U 上的一个全纯向量场 v，使得 $\mathrm{d}_v t_1 = 1$。我们有 e

$$\lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}}\,(\rho_0 + \rho_1) \;=\; +\infty\,.$$

证明。令

$$q_2(\alpha) \;=\; -Q(\alpha_{0,6}, N^2\overline{\alpha}_{0,6}) \;=\; -Q(\alpha_1\,,\,\overline{\alpha_1}) \;=\; 1 + |\alpha_1^5|^2 - \sum_{r \geq 6} |\alpha_1^r|^2\,.$$

由 (4.4) 可知，$q_2(\alpha)$ 沿着 $A \cap U$ 恒等于一；如有必要，缩小 U，我们可以假设在 U 上，$q_2(\alpha) > \frac{1}{2}$。于是当 $t_1 \to 0$ 时，$\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0 + \rho_1)$ 这一表达式在 $\partial\overline{\partial}\rho_0$ 中由项 $6\, q_2(\alpha)^2\, (8\pi^2)^2\, h_0^3 (\log\, |t_1|^2)^2 \dfrac{\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}\overline{t}_1}{|t_1|^2}$ 所支配。 □

引理 4.7. 固定一个全纯向量场 v 作用在 U 上，且满足 $\mathrm{d}_v t_1 = 0$。必要时缩小 U，我们有 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0 + \rho_1) \geq 0$。

推论 4.8。函数 $\rho_0 + \rho_1$ 在 X 上是拟次调和的。

4.6. 引理 4.7 的证明。引理 4.7 的证明与引理 3.8 的证明思路相同，因此我们也会相应地简要说明。

4.6.1. 步骤 1。由 (4.3) 和 §4.4 可知，当 $t_1 \to 0$ 属于 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)$ 时，首项为 $-\log\, q_2(\alpha)$。根据一般原理，或直接由第一个霍奇–黎曼双线性关系 $0 = Q(\alpha_1, \alpha_1) = 2\,\alpha_1^5 + \sum_{r\geq 6}(\alpha_1^r)^2,$，可知 $-\log\, q_2(\alpha)$ 是拟次调和函数。若 $\lim_{t_1\to 0} -\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\log\, q_2(\alpha) > 0$，则 $\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1) > 0$。

4.6.2. 步骤 2。假设 $\lim_{t_1\to 0} -\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\log\, q_2(\alpha) = 0$。这等价于 $\lim_{t_1\to 0}\mathrm{d}_v\alpha_1^r,\ \mathrm{d}_v\alpha_1^5 = 0$，并且有 $\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1) = 0$。令

$$q_0(\alpha) \;=\; Q(\alpha_{0,6}, \overline{\alpha}_{0,6}) \;=\; Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_1)Q(\alpha_2, \overline{\alpha}_2) \;-\; \left|Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_2)\right|^2 .$$

Then

$$\begin{aligned}
\partial_v\, q_0(\alpha) \;&=\; Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_1)\,\left(\mathrm{d}_v\alpha_2^4 - \overline{\alpha}_2^5\,\mathrm{d}_v\alpha_2^5 + \textstyle\sum\overline{\alpha}_2^r\,\mathrm{d}_v\alpha_2^r\right)\\
&\quad -\, Q(\overline{\alpha}_1, \alpha_2)\,\mathrm{d}_v\alpha_1^4 \;+\; Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_2)\,\left(\overline{\alpha}_1^5\,\mathrm{d}_v\alpha_2^5 \;-\; \textstyle\sum\overline{\alpha}_1^r\,\mathrm{d}_v\alpha_2^r\right)\\
\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\, q_0(\alpha) \;&=\; -Q(\alpha_1, \overline{\alpha}_1)\,\left(\left|\mathrm{d}_v\alpha_2^5\right|^2 \;-\; \textstyle\sum\left|\mathrm{d}_v\alpha_2^r\right|^2\right) \;-\; \left|\mathrm{d}_v\alpha_1^4\right|^2\\
&\quad -\, \left|\overline{\alpha}_1^5\mathrm{d}_v\alpha_2^5 \;-\; \textstyle\sum\overline{\alpha}_1^r\mathrm{d}_v\alpha_2^r\right|^2 .
\end{aligned}$$

第一个霍奇–黎曼双线性关系给出 $0 = Q(\alpha_2, \alpha_2) = 2\alpha_2^4 + \sum(\alpha_2^r)^2$。而无穷小周期关系 $0 = Q(\xi_1, \mathrm{d}\xi_2) = \mathrm{d}\xi_2^5 + \xi_1^3\,\mathrm{d}\xi_2^3 + \xi_1^r\,\mathrm{d}\xi_2^r$ 意味着 $0 = \mathrm{d}_v\alpha_2^5 + \alpha_1^r\,\mathrm{d}_v\alpha_2^r$，因此沿着 $A\cap U$ 有 $\mathrm{d}_v\alpha_2^5 = 0$。于是可得，在 $A\cap U$ 的一个邻域内，$q_0(\alpha) < 0$。若 $\lim_{t_1\to 0}|\mathrm{d}_v\alpha_1^4|^2 + |\mathrm{d}_v\alpha_2^r|^2 > 0$，则当 $t_1 \to 0$ 时，$\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)$ 渐近地受项 $-(1/h_0^2)\,\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\, q_0(\alpha)$ 支配，并且在 $Z_1\cap U = \{t_1 = 0\}$ 的一个穿孔邻域 $\{0 < |t_1| < \varepsilon\}$ 内有 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1) > 0$。

4.6.3. 步骤 3。现在假设 $\lim_{t_1\to 0}\mathrm{d}_v\alpha_1, \mathrm{d}_v\alpha_2 = 0$。对无穷小周期关系求导，得到

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; Q(\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2) \;=\; \mathrm{d}\xi_1^3\wedge\mathrm{d}\xi_2^3 \;+\; \textstyle\sum_r \mathrm{d}\xi_1^r\wedge\mathrm{d}\xi_2^r\\
&=\; \mathrm{d}(t_1\,\nu_1^3)\wedge\mathrm{d}(-\mathbf{i}\ell(t)) \;+\; \textstyle\sum_r \mathrm{d}\alpha_1^r\wedge\mathrm{d}\alpha_2^r \;=\; \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}t_1\wedge\mathrm{d}\nu_1^3 \;+\; \textstyle\sum_r \mathrm{d}\alpha_1^r\wedge\mathrm{d}\alpha_2^r .
\end{aligned}$$

将这个 2-形式作用于 $\partial_{t_1}\wedge v$，得到 $\mathrm{d}_v\nu_1^3 = 2\pi\sum_r(\mathrm{d}_v\alpha_1^r\cdot\mathrm{d}_{\partial_{t_1}}\alpha_2^r - \mathrm{d}_{\partial_{t_1}}\alpha_1^r\cdot\mathrm{d}_v\alpha_2^r)$。特别地，$\lim_{t_1\to 0}\mathrm{d}_v\nu_1^3 = 0$，并且当 $t_1\to 0$ 时，$\mathrm{d}_v\nu_1^3$ 的消失阶不低于 $\mathrm{d}_v\alpha_1, \mathrm{d}_v\alpha_2$ 的消失阶。由 §4.4 中 h 和 h_0 的表达式可知，在 $Z_1\cap U = \{t_1 = 0\}$ 的某个邻域内有 $\partial_v\overline{\partial}_v(\rho_0+\rho_1)\geq 0$。

这就完成了引理 4.7 的证明。 □

4.7. 伪凸性。现在我们按照 §2.1 中概述的论证，证明定理 1.3 对于类型 (4.1) 的退化成立。引理 4.7 的证明中的分析蕴含了 §2.1(iii)。只需指出 ρ 满足 §2.1(iv)。正如该讨论中所指出的，我们有 $\rho_0\geq 0$，且 $\{\rho_0 = 0\} = Z\cap X$。纤维 A 的局部特征由以下条件刻画：

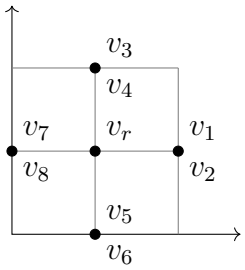
$$A\cap U \;=\; \{t_1, \xi_1^3, \xi_1^5, \xi_1^r = 0\}\,.$$

因此，沿着 $Z\cap X$，我们有 $\rho_1\geq 0$，且 $A = \{\rho_1 = 0\}$。类似于 §4.5 中的分析表明，必要时缩小 X 后，我们在 X 上有 $\rho\geq 0$，且 $A = \{\rho = 0\}$。

5. The third degeneration

下一类退化具有极限混合霍奇结构 (W, F, N)，满足 $W_0(V) = 0$ 且 $W_3(V) = W_4(V) = V$，其霍奇数为 $\mathrm{h}_1 = (2,2)$ 和 $\mathrm{h}_2 = (0, \mathrm{h}-4, 0)$。相应的霍奇菱形 $\diamond(V)$ 为

(5.1)



关于菱形 $\diamond(H)$，请参见 (A.4)。

我们可以选取 $\{v_1, \ldots, v_{\mathrm{d}}\}$ 的 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组基，使得：对于所有 $1\leq a,\ b\leq 8$，极化满足 $Q(v_a, v_b) = \delta_{a+b}^9$；对于所有 $9\leq r,\ s,\ Q(v_r, v_s) = \delta_{rs}$，且所有其他

配对均为零；底层实结构为 $\overline{v_1} = v_3$，$\overline{v_2} = v_4$，$\overline{v_5} = v_7$，$\overline{v_6} = v_8$ 和 $\overline{v_r} = v_r$；幂零算子由下式给出

$$N \;=\; \mathbf{i}(v_6 \otimes v^1 - v_8 \otimes v^3) \,+\, \mathbf{i}(v_5 \otimes v^2 - v_7 \otimes v^4)\,;$$

霍奇滤过为 $F^2(V_{\mathbb{C}}) = $张成$_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2\}$，权滤子为 $W_1(V_{\mathbb{C}}) =$张成$_{\mathbb{C}}\{v_5, \dots, v_8\}$。按照 [Rob23, §§2.2-2.3] 中的记号，我们有 $e_0 = v_1 \wedge v_2$ 和 $e_\infty = v_5 \wedge v_6$。

5.1. 周期矩阵表示。存在全纯函数 $\xi_1^j, \xi_2^j \colon B \cap X \to \mathbb{C}$，它们在 Γ_X 的作用下确定到等价为止，使得 $\xi_1 = v_1 + \sum_{j\geq 3} \xi_1^j\, v_j$, $\xi_2 = v_2 + \sum_{j\geq 3} \xi_2^j$ 是 $F^2(\Phi)$ 的标架，而
$\xi_3 = v_3 - \xi_2^6\, v_7 - \xi_1^6\, v_8$, $\xi_4 = v_4 - \xi_2^5\, v_7 - \xi_1^5\, v_8$, $\xi_5 = v_5 - \xi_2^4\, v_7 - \xi_1^4\, v_8$,
$\xi_6 = v_6 - \xi_2^3\, v_7 - \xi_1^3\, v_8$, $\xi_r = v_r - \xi_2^r\, v_7 - \xi_1^r\, v_8$ 是 $F^1(\Phi)$ 的标架。

根据 [Rob23, (2.13)], 纤维 A 由以下方程定义：

$$A \;=\; \{\xi_1^3\,,\, \xi_1^4\,,\, \xi_2^3\,,\, \xi_2^4 \;=\; 0\} \,\cap\, Z_1\,. \tag{5.2}$$

我们有 $\eta_0 = \xi_1 \wedge \xi_2$ 和 $\eta_\infty = \xi_5 \wedge \xi_6$。

5.2. 局部坐标中的矩阵系数。如 [Rob23, §3.2.2],所述，我们有 $\xi_j = \exp(\ell(t_1)N)\zeta(t)\cdot(v_j)$，其中 $\zeta\colon U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp)$ 全纯。我们有$\mathfrak{s}_F^\perp = (\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N) \oplus \mathbb{C}\, b$，其中 $\mathfrak{z}_N$是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中 N的中心化子，且 $b = (v_3 \otimes v^2 - v_7 \otimes v^6 - v_4 \otimes v^1 + v_8 \otimes v^5)$。记住条件 [Rob23, §3.2.3]：$\zeta$在 $Z_1 \cap U$上的限制与 N对易，我们可以将 $\zeta = \exp(t_1 \nu\, b)\cdot\alpha$分解，其中 $\alpha\colon U \to \exp(\mathfrak{s}_F^\perp \cap \mathfrak{z}_N)$ 和 $\nu\colon U \to \mathbb{C}$ 均为全纯。

定义 $\beta_i = b(\alpha_i)$。则

$$\begin{aligned}
\xi_i \;&=\; \alpha_i + t_1\nu\,\beta_i \,+\, \ell(t_1)N(\alpha_i + t_1\nu\,\beta_i)\,, \qquad i = 1, 2\,,\\
\xi_j \;&=\; \alpha_j + t_1\nu\,\beta_j\,, \qquad j = 5, 6\,,\\
\alpha_5 \;&=\; -\mathbf{i}N\alpha_2 \quad \text{and} \quad \alpha_6 \;=\; -\mathbf{i}N\alpha_1\,.
\end{aligned}$$

设 $\alpha_j = \alpha(v_j)$，并通过 $\alpha_j = \alpha_j^i v_i$ 定义 $\alpha_j^i \in \mathcal{O}(U)$；$\alpha$中心化 N 的条件意味着

$$\alpha_1^4 = \alpha_2^3 . \tag{5.3}$$

纤维 (5.2) 在局部由以下条件刻画

$$A \cap U = \{t_1, \alpha_1^3, \alpha_1^4, \alpha_2^3, \alpha_2^4 = 0\} . \tag{5.4}$$

5.3. 局部坐标中的截面 η_0 和 η_∞。定义 $\alpha_0 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$、$\beta_0 = \alpha_1 \wedge \beta_2 + \beta_1 \wedge \alpha_2 + t_1 \nu \beta_1 \wedge \beta_2$) 和 $\beta_\infty = -\mathrm{i}(N\alpha_2) \wedge \beta_6 - \beta_5 \wedge \mathrm{i}(N\alpha_1) + t_1 \nu \beta_5 \wedge \beta_6$。于是

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \alpha_0 + t_1\nu\beta_0 + \ell(t_1)N(\alpha_0 + t_1\nu\beta_0) + \tfrac{1}{2}\ell(t_1)^2 N^2(\alpha_0 + t_1\nu\beta_0) \\ \eta_\infty &= \tfrac{1}{2}N^2\alpha_0 + t_1\nu\beta_\infty . \end{aligned}$$

5.4. 局部坐标中的霍奇范数。$Z \cap X$ 上的霍奇范数向 X 的延拓为 $h = -\mathrm{Re}\, Q(\eta_0, \overline{\eta}_\infty)$。牢记 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned} h &= -\tfrac{1}{2}Q(\alpha_0, N^2\overline{\alpha}_0) \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\{ t_1\nu \left[Q(\overline{\alpha}_0, \beta_\infty) + Q(\beta_\infty, \tfrac{1}{2}N^2\overline{\alpha}_0) \right] + |t_1\nu|^2 Q(\beta_0, \overline{\beta}_\infty) \right\} \end{aligned}$$

$B \cap X$ 上的霍奇范数为 $h_0 = Q(\eta_0, \overline{\eta}_0)$。同样，牢记 (2.6)，在局部坐标中我们有

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{(\log|t_1|^2)^2}{8\pi^2} Q\left(\alpha_0 + t_1\nu\beta_0\,,\, N^2(\overline{a_0 + t_1\nu\beta_0})\right) \\ &\quad + \mathrm{i}\frac{\log|t_1|^2}{2\pi} Q\left(\alpha_0 + t_1\nu\beta_0\,,\, N(\overline{\alpha_0 + t_1\nu\beta_0})\right) \\ &\quad + Q\left(\alpha_0 + t_1\nu\beta_0\,,\, \overline{\alpha_0 + t_1\nu\beta_0}\right) . \end{aligned}$$

5.5. 多重次调和性。令 $\rho_0 = 1/h_0$ 和 $\rho_1 = -\log h$。我们知道，ρ_0 在 X上是拟次调和的，且 ρ_1 在 $Z \cap X$上是拟次调和的。本节的目标是证明 $\rho_0 + \rho_1$ 在 U上是拟次调和的。我们沿用 §3.5 和 §4.5 中的方法。

L引理 5.5。 固定 U 上的一个全纯向量场 v，使得 $\mathrm{d}_v t_1 = 1$。我们有 e

$$\lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) \;=\; +\infty\,.$$

证明。由 (5.3) 和 (5.4) 可知

$$\begin{aligned} q_2(\alpha) \;&=\; -Q(\alpha_0, N^2\overline{\alpha}_0) \\ &=\; (1-|\alpha_1^3|^2-|\alpha_1^4|^2)(1-|\alpha_2^3|^2-|\alpha_2^4|^2) \;-\; |\alpha_1^3\,\overline{\alpha}_2^3+\alpha_1^4\,\overline{\alpha}_2^4|^2 \end{aligned}$$

在 $A\cap U$ 上恒等于一；如有必要，缩小 U，我们可以假设 $q_2(\alpha) > \frac{1}{2}$ 在 U 上。于是当 $t_1 \to 0$ 时，表达式 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1)$ 由 $\partial\overline{\partial}\rho_0$ 中的项$6\, q_2(\alpha)^2\, (8\pi^2)^2\, h_0^3\, (\log\, |t_1|^2)^2\, \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}\overline{t}_1 / |t_1|^2$ 控制。□

引理 5.6。取 U 上满足 $\mathrm{d}_v t_1 = 0$ 的一个全纯向量场 v。如有必要，缩小 U，则有 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) \geq 0$。

推论 5.7。函数 $\rho_0 + \rho_1$ 在 X 上是拟次调和的。

5.6. 引理 5.6 的证明。证明思路与引理 3.8 和 4.7 相同，因此我们也会相应地简要说明。

5.6.1. 步骤 1。从 §5.4 可知，当 $t_1 \to 0$ 趋于 $\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1)$ 时，首项为 $-\log\, q_2(\alpha)$。由一般原理（或直接计算，利用第一霍奇–黎曼双线性关系 $0 = Q(\alpha_i, \alpha_j)$，$i, j = 1, 2$）可得，$-\log\, q_2(\alpha)$ 是拟次调和的。若 $\lim_{t_1 \to 0} -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log\, q_2(\alpha) > 0$，则 $\lim_{t_1 \to 0} \partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} (\rho_0 + \rho_1) > 0$。

5.6.2. 步骤 2. 假设 $\lim_{t_1 \to 0} -\partial_v \overline{\partial}_{\overline{v}} \log\, q_2(\alpha) = 0$。由于 $-\partial\overline{\partial} \log\, q_2(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{d}_v \alpha_1^3, \mathrm{d}_v \alpha_1^4, \mathrm{d}_v \alpha_2^3, \mathrm{d}_v \alpha_2^4 = 0$，这等价于

$$\lim_{t_1 \to 0} \mathrm{d}_v \alpha_1^3,\, \mathrm{d}_v \alpha_1^4,\, \mathrm{d}_v \alpha_2^3,\, \mathrm{d}_v \alpha_2^4 \;=\; 0\,, \tag{5.8a}$$

这也可以改述为

$$\lim_{t_1 \to 0} \mathrm{d}_v \alpha_1, \mathrm{d}_v \alpha_2 \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad W_2(V_{\mathbb{C}})\,. \tag{5.8b}$$

在这种情况下，我们有 $\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)=0$。令

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= \mathbf{i}Q(\alpha_0,N\overline{\alpha}_0) = \mathbf{i}Q\left(\alpha_1\wedge\alpha_2\,,\,(N\overline{\alpha}_1)\wedge\overline{\alpha}_2+\overline{\alpha}_1\wedge(N\overline{\alpha}_2)\right)\\ &= \mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_1)Q(\alpha_2,\overline{\alpha}_2)-\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_1)Q(\alpha_1,\overline{\alpha}_2)\\ &\quad+\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_2)Q(\alpha_1,\overline{\alpha}_1)-\mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_2)Q(\alpha_2,\overline{\alpha}_1)\,. \end{aligned}$$

If

$$\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_1(\alpha)\neq 0\,, \tag{5.9}$$

于是 §5.4 蕴含，在 $-(\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}h_0)/h_0^2$ 中，项 $-(\log|t_1|^2\,{}^{3}_{16\pi^3\,h_0^3})\,(\alpha)\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_1(\alpha)$ 支配 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)$，当 $t_1\to\infty$ 时。由 (2.6) 和 (5.8) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{t_1\to 0}\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_1(\alpha) &= \mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_1)Q(\alpha_2,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2})-\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_1)Q(\alpha_1,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2})\\ &\quad+\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_2)Q(\alpha_1,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1})-\mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_2)Q(\alpha_2,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1})\,,\\ \lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_1(\alpha) &= \mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_1)Q(\mathrm{d}_v\alpha_2,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2})-\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_1)Q(\mathrm{d}_v\alpha_1,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2})\\ &\quad+\mathbf{i}Q(\alpha_2,N\overline{\alpha}_2)Q(\mathrm{d}_v\alpha_1,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1})-\mathbf{i}Q(\alpha_1,N\overline{\alpha}_2)Q(\mathrm{d}_v\alpha_2,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1})\\ &= \left(1-|\alpha_1^3|^2-|\alpha_1^4|^2\right)\textstyle\sum_{r\geq 9}|\mathrm{d}_v\alpha_2^r|^2\\ &\quad+\left(1-|\alpha_2^3|^2-|\alpha_2^4|^2\right)\textstyle\sum_{r\geq 9}|\mathrm{d}_v\alpha_1^r|^2\\ &\quad+2\mathrm{Re}(\alpha_1^4\overline{\alpha}_2^4)\textstyle\sum_{r\geq 9}\mathrm{d}_v\alpha_2^r\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^r}+2\mathrm{Re}(\alpha_1^3\overline{\alpha}_2^3)\textstyle\sum_{r\geq 9}\mathrm{d}_v\alpha_1^r\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^r}\,. \end{aligned}$$

由 (5.4) 可知，若有必要，缩小 U 后，(5.9) 成立当且仅当 $\lim_{t_1\to 0}\sum(|\mathrm{d}_v\alpha_1^r|^2+|\mathrm{d}_v\alpha_2^r|^2)>0$。在这种情况下，我们在 $Z_1\cap U=\{t_1=0\}$ 的穿孔邻域 $\{0<|t_1|<\varepsilon\}$ 中有 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)>0$。

5.6.3. 第3步。现在假设 (5.8) 和 $\lim_{t_1\to 0}\sum_{r\geq 9}(|\mathrm{d}_v\alpha_1^r|^2+|\mathrm{d}_v\alpha_2^r|^2)=0$ hold 都成立。两者合起来等价于

$$\lim_{t_1\to 0}\mathrm{d}_v\alpha_1,\mathrm{d}_v\alpha_2\equiv 0\mod W_1(V_{\mathbb{C}})\,. \tag{5.10}$$

Set

$$q_0(\alpha) \;=\; Q(\alpha_0,\overline{\alpha}_0) \;=\; Q(\alpha_1,\overline{\alpha}_1)Q(\alpha_2,\overline{\alpha}_2) \,-\, \left|Q(\alpha_1,\overline{\alpha}_2)\right|^2 ,$$

以及 $\omega = -q_2(\alpha)\,\partial\overline{\partial}q_0(\alpha) + 4\,\partial q_1(\alpha)\wedge\overline{\partial}q_1(\alpha)$。如果 $\lim_{t_1\to 0}{}^{\omega}(v,\overline{v}) \neq 0$，那么 §5.4 表明，$\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\rho_0 = \partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(1/h_0)$ 中的项 $\left(\log \dfrac{|t_1|^2}{8\pi^2\,h_0^3}\right)^2{}_{\omega}(v,\overline{v})$ 支配 $\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}(\rho_0+\rho_1)$ as $t_1\to\infty$。

我们断言，$\lim_{t_1\to 0}{}^{\omega}(v,\overline{v}) > 0$ 当且仅当

$$\lim_{t_1\to 0} \left|\mathrm{d}_v\alpha_1^5\right|^2 + \left|\mathrm{d}_v\alpha_1^6\right|^2 + \left|\mathrm{d}_v\alpha_2^5\right|^2 + \left|\mathrm{d}_v\alpha_2^6\right|^2 \;>\; 0\,. \tag{5.11}$$

注意到 (2.6) 和 (5.10) 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1\to 0}\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_1(\alpha) \;=\;& \left(1-|\alpha_1^3|^2-|\alpha_1^4|^2\right)\left(\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^5} + \alpha_2^4\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^7} + \alpha_2^3\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^8}\right)\\
&+ \left(1-|\alpha_2^3|^2-|\alpha_2^4|^2\right)\left(\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^6} + \alpha_1^4\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^7} + \alpha_1^3\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^8}\right)\\
&+ 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1^3\overline{\alpha}_2^3)\left(\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^6} + \alpha_1^4\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^7} + \alpha_1^3\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_2^8}\right)\\
&+ 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1^4\overline{\alpha}_2^4)\left(\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^5} + \alpha_2^4\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^7} + \alpha_2^3\,\overline{\mathrm{d}_v\alpha_1^8}\right).
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1\to 0}\partial_v\overline{\partial}_{\overline{v}}\,q_0(\alpha) =\;& 2\,\mathrm{Re}\left\{(\mathrm{d}_v\alpha_2^5 + \overline{\alpha}_2^4\,\mathrm{d}_v\alpha_2^7 + \overline{\alpha}_2^3\,\mathrm{d}_v\alpha_2^8)(\mathrm{d}_v\overline{\alpha}_1^6 + \alpha_1^4\,\mathrm{d}_v\overline{\alpha}_1^7 + \alpha_1^3\,\mathrm{d}_v\overline{\alpha}_1^8)\right\}\\
&- \left|\mathrm{d}_v\alpha_1^5 + \overline{\alpha}_2^4\,\mathrm{d}_v\alpha_1^7 + \overline{\alpha}_2^3\,\mathrm{d}_v\alpha_1^8\right|^2 - \left|\mathrm{d}_v\alpha_2^6 + \overline{\alpha}_1^4\,\mathrm{d}_v\alpha_2^7 + \overline{\alpha}_1^3\,\mathrm{d}_v\alpha_2^8\right|^2 .
\end{aligned}$$

记住 (5.4)，并在必要时缩小 U，该结论便由以下极限推出；第一个霍奇–黎曼双线性关系 $0 = Q(\alpha_i,\alpha_j)$，对于 $i,j=1,2$，其表述为

$$\begin{aligned}
-\alpha_1^8 \;&=\; \alpha_1^3\,\alpha_1^6 + \alpha_1^4\,\alpha_1^5 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_r (\alpha_1^r)^2\\
-\alpha_2^7 \;&=\; \alpha_2^3\,\alpha_2^6 + \alpha_2^4\,\alpha_2^5 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_r (\alpha_2^r)^2\\
-\alpha_1^7 - \alpha_2^8 \;&=\; \alpha_1^3\,\alpha_2^6 + \alpha_1^4\,\alpha_2^5 + \alpha_1^5\,\alpha_2^4 + \alpha_1^6\,\alpha_2^3 + \textstyle\sum_r \alpha_1^r\,\alpha_2^r ;
\end{aligned}$$

and 无穷小周期关系 $0 = Q(\xi_1, \mathrm{d}\xi_2) = Q(\xi_2, \mathrm{d}\xi_1)$，由此得到

$$\begin{aligned} -\lim_{t_1\to 0} \mathrm{d}\alpha_1^7 &= \alpha_2^4\, \mathrm{d}_v\alpha_1^5 + \alpha_2^3\, \mathrm{d}_v\alpha_1^6 \\ -\lim_{t_1\to 0} \mathrm{d}\alpha_2^8 &= \alpha_1^4\, \mathrm{d}_v\alpha_2^5 + \alpha_1^3\, \mathrm{d}_v\alpha_2^6\,. \end{aligned}$$

5.6.4. 步骤 4. 还需考虑 $\lim_{t_1\to 0}\mathrm{d}_v\alpha_1, \mathrm{d}_v\alpha_2 = 0$ 的情形。对无穷小周期关系求导，得到

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2) \\ &= \mathrm{d}\xi_1^3 \wedge \mathrm{d}\xi_2^6 + \mathrm{d}\xi_1^4 \wedge \mathrm{d}\xi_2^5 + \mathrm{d}\xi_1^5 \wedge \mathrm{d}\xi_2^4 + \mathrm{d}\xi_1^6 \wedge \mathrm{d}\xi_2^3 + \textstyle\sum \mathrm{d}\xi_1^r \wedge \mathrm{d}\xi_2^r \\ &= \tfrac{1}{\pi}\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}\nu + (\mathrm{d}\alpha_2^5 + \mathrm{d}\alpha_1^6) \wedge \mathrm{d}(t_1\nu) \\ &\quad + \mathrm{d}\alpha_1^3 \wedge \mathrm{d}\alpha_2^6 + \mathrm{d}\alpha_1^4 \wedge \mathrm{d}\alpha_2^5 + \mathrm{d}\alpha_1^5 \wedge \mathrm{d}\alpha_2^4 + \mathrm{d}\alpha_1^6 \wedge \mathrm{d}\alpha_2^3 + \textstyle\sum \mathrm{d}\alpha_1^r \wedge \mathrm{d}\alpha_2^r\,. \end{aligned}$$

将这个 2-形式作用于 $\partial_{t_1} \wedge v$，可推出 $\lim_{t_1\to 0} \mathrm{d}_v\nu = 0$，且当 $t_1 \to 0$ 时，$\mathrm{d}_v\nu$ 的消失阶有下界，该下界为 $\mathrm{d}_v\alpha_1, \mathrm{d}_v\alpha_2$ 的消失阶。由 §5.4 中 h 和 h_0 的表达式可知，在 $Z_1 \cap U = \{t_1 = 0\}$ 的某个邻域内有 $\partial_v\overline{\partial}_v(\rho_0 + \rho_1) \geq 0$。

引理 5.6 的证明至此完成。 □

5.7. 伪凸性。现在我们按照 §2.1 中概述的论证，证明定理 1.3 对于 (5.1) 型退化成立。引理 5.6 证明中的分析蕴含 §2.1(iii)。还需注意，ρ 满足 §2.1(iv)。如该讨论中所述，我们有 $\rho_0 \geq 0$，其中 $\{\rho_0 = 0\} = Z \cap X$。纤维 A 的局部特征由下式刻画

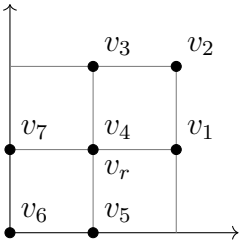
$$A \cap U = \{t_1, \xi_1^3, \xi_1^4, \xi_2^3, \xi_2^4 = 0\}\,.$$

因此沿着 $Z \cap X$，我们有 $\rho_1 \geq 0$，其中 $A = \{\rho_1 = 0\}$。类似于 §5.5 中的分析可知，如有必要缩小 X，我们在 X 上有 $\rho \geq 0$，并且 $A = \{\rho = 0\}$。

6. The last two degenerations

6.1. 倒数第二种退化。第四种退化具有极限混合霍奇结构（W, F, N），其霍奇数为 $\mathsf{h}_0 = (1)$、$\mathsf{h}_1 = (1,1)$ 和 $\mathsf{h}_2 = (0, \mathsf{h}-2, 0)$。相应的霍奇菱形 $\diamond(V)$ 为

(6.1)



霍奇菱形见（A.5） $\diamond(H)$。

我们可以选取 $\{v_1, \dots, v_{\mathsf{d}}\}$ 的 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组基，使得：极化满足 $Q(v_a, v_b) = \delta^8_{a+b}$，对所有 $1 \le a, b \le 7$, $Q(v_r, v_s) = \delta_{rs}$，对所有 $8 \le r, s$ 成立，且所有其他配对均为零；底层实结构为 $\overline{v_1} = v_3$, $\overline{v_2} = v_2$, $\overline{v_4} = -v_4$, $\overline{v_5} = v_7$, $\overline{v_6} = v_6$ 和 $\overline{v_r} = v_r$；幂零算子由下式给出

$$N \;=\; \mathbf{i}(v_5 \otimes v^1 - v_7 \otimes v^3) \;+\; \mathbf{i}(v_6 \otimes v^4 - v_4 \otimes v^2)\,;$$

霍奇滤过为 $F^2(V_{\mathbb{C}}) = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2\}$，权滤子为 $W_0(V_{\mathbb{R}}) = \mathsf{span}_{\mathbb{R}}\{v_6\}$ 和 $W_1(V_{\mathbb{C}}) = \mathsf{span}_{\mathbb{C}}\{v_5, v_6, v_7\}$。我们有 $e_0 = v_1 \wedge v_2$ 和 $e_\infty = v_5 \wedge v_6$，采用 Rob23 第 2.2–2.3] 节的记号。

过滤 $F^2(\Phi)$ 由 $\xi_1 = v_1 + \sum_{j \ge 3} \xi_1^j\, v_1$ 和 $\xi_2 = v_2 + \sum_{j \ge 3} \xi_3^j\, v_j$ 确定。集合 $\{\xi_1, \xi_2\} \cup \{\xi_a = v_a + \xi_a^6\, v_6 + \xi_a^7\, v_7 \mid a = 3, 4, 5\,,\ a \ge 8\}$ 确定了 $F^1(\Phi)$。这里，ξ_i^j 上的全纯函数 $B \cap X$ 在 Γ_X 的作用下确定到等价类。

我们有

$$\eta_0 \;=\; \xi_1 \wedge \xi_2 \quad \text{and} \quad \eta_\infty \;=\; \xi_5 \wedge \xi_6$$

and

$$h \;=\; Q(\eta_0, \overline{\eta}_\infty) \;=\; 1 - |\xi_1^3|^2$$

且 –log h 在 X上是拟次调和的。令 $\rho_1 = -\log h$，并设 ρ_0 为由 (2.2) 给出的光滑函数。根据 [Rob23, (2.13)], 纤维 $A \subset Z$ 由 $\{\xi_1^3 = 0\}$定义。容易验证，条件 §2.1(i)-(iv) 成立，从而对 (6.1) 型的退化证明了定理 1.3。在此情形下，拟次调和穷竭函数 ρ 是光滑的。

6.2. Hodge–Tate 退化。这些极限混合霍奇结构由 $W_0(V) = W_1(V)$ 和 $W_2(V) = W_3(V)$ 刻画；其霍奇数为 $\mathrm{h}_0 = 2$ 和 $\mathrm{h}_2 = (0, \mathrm{h}, 0)$。相应的霍奇菱形见 (A.6)。

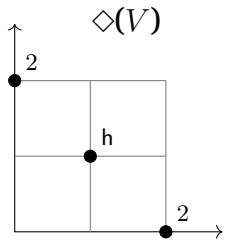
对于 Hodge–Tate 退化，定理 1.3 的证明是显然的：函数h 恒等于 1，因此 $\rho_1 = 0$。必有 $A = Z_1^* = Z_1$，而式 (2.2) 中定义的光滑函数 ρ_0 给出了所需的 X 上的拟次调和穷竭函数。

Appendix A. Hodge diamonds

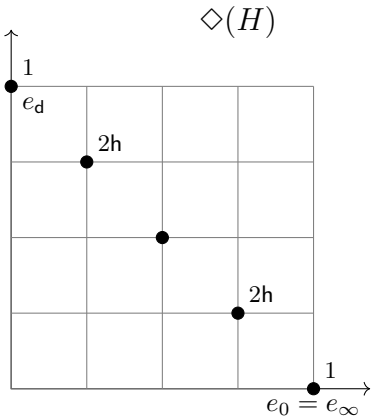
给定向量空间 V 上的混合霍奇结构 (W, F)，霍奇菱形$\diamond_{W,\,F}(V)$ 是 Deligne 分裂 $V_{\mathbb{C}} = \oplus V^{p,\,w^{q},\,F}$([Rob23, §2.2.3]) 的一种可视化表示。它由 (p, q) 平面上的点阵构成，并标注了 $\dim_{\mathbb{C}} V^{p,\,w^{q},\,F}$。这种表示编码了 (W, F) 中许多离散数据，也有助于阐明本文中运用极限混合霍奇结构的构造与论证。本附录给出参数化纯、有效、权 $\mathrm{w} = 2$ 的极化霍奇结构（其霍奇数为 $\mathrm{h} = (2, \mathrm{h}, 2)$）的（非厄米）周期域的霍奇菱形。可能的霍奇菱形共有六种。我们有 $H = \bigwedge^2 V = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{Q}(-2)$ 且 $\mathrm{n} = 4$。在下列菱形中，有些节点未作标记；缺失的维数可由 [Rob23, (2.5) 确定,

(3.9)].

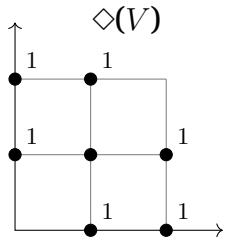
(A.1)



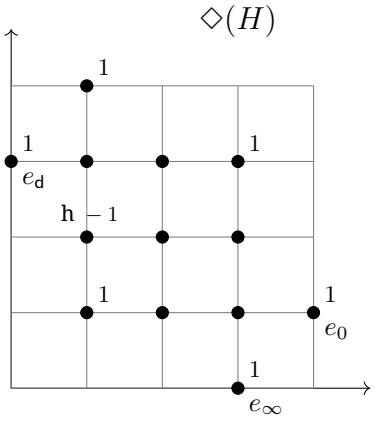
$\mathrm{m} = 4$



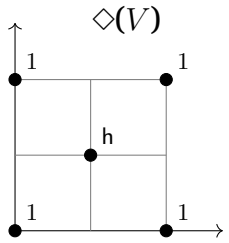
(A.2)



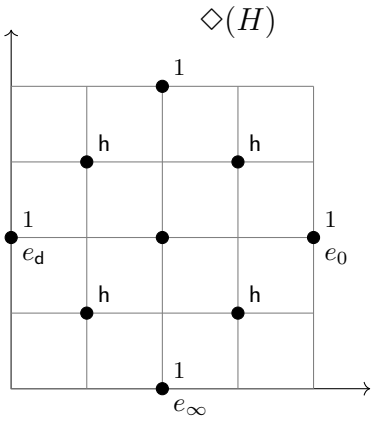
$\mathrm{m} = 5$



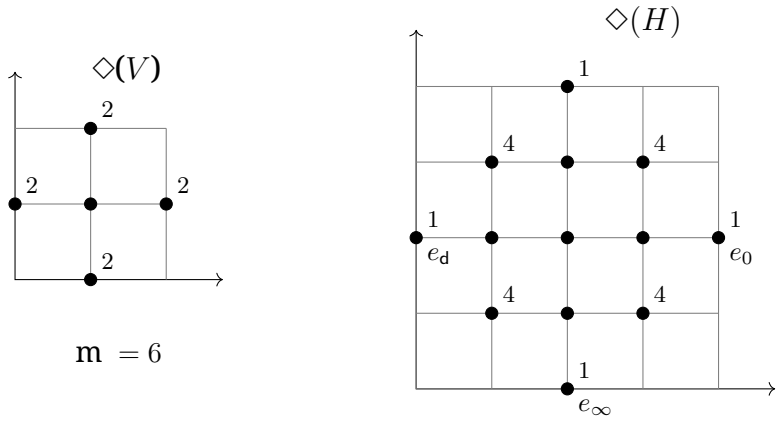
(A.3)



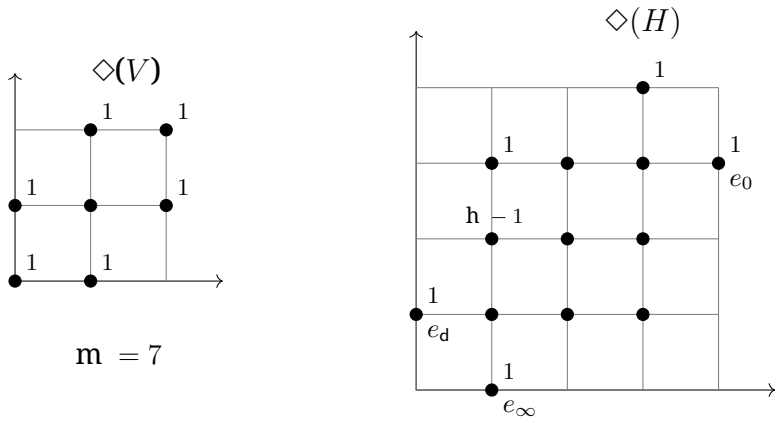
$\mathrm{m} = 6$



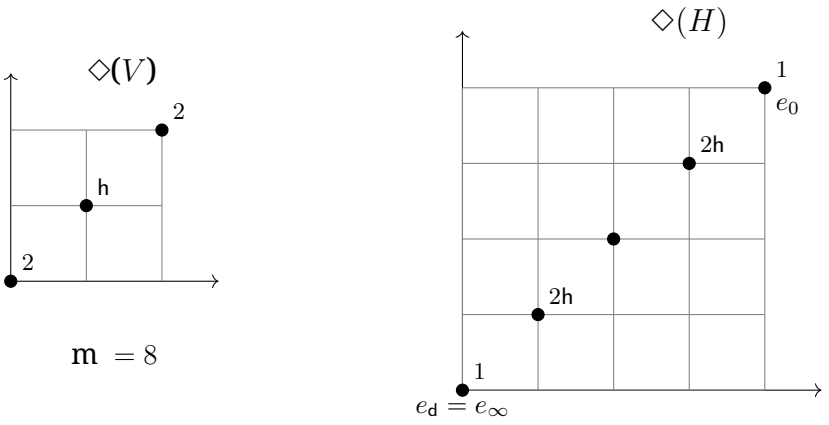
(A.4)



(A.5)



(A.6)



References

[BB66] W. L. Baily, Jr. 和 A. Borel。《有界对称域的算术商的紧化》。《数学年刊》（第 2 辑），84：442–528，1966。

[BBT18] Benjamin Bakker、Yohan Brunebarbe 和 Jacob Tsimerman。o-极小GAGA与Griffiths的一个猜想。arXiv:1811.12230，2018。[CKS86] Eduardo Cattani、Aroldo Kaplan 和 Wilfried Schmid。霍奇结构的退化。《数学年刊》（第2辑），123(3):457–535，1986。[Dem 00] Jean-Pierre Demailly。关于Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 延拓定理。载于《复分析与几何》（巴黎，1997），Progr. Math.第188卷，第47–82页。Birkh¨auser，巴塞尔，2000。[Dem16] Jean-Pierre Demailly。定义在非约化解析子簇上的全纯函数的延拓。载于《Bernhard Riemann逝世一百五十周年纪念文集》第一卷，Adv. Lect. Math. (ALM)第35卷，第191–222页。Int. Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2016。[GGLR20] M. Green、P. Griffiths、R. Laza 和 C. Robles。周期映射与增广霍奇线丛的性质。arXiv:1708.09523，2020。[GGR22] Mark Green、Phillip Griffiths 和 Colleen Robles。周期映射的全局渐近结构。arXiv:2010.06720，2022。[GS69] Phillip Griffiths 和 Wilfried Schmid。局部齐性复流形。Acta Math.，123:253–302，1969。[KPR19] M. Kerr、G. J. Pearlstein 和 C. Robles。关于水平SL(2)的极化关系。Doc. Math.，24，2019。[Rob17] Colleen Robles。霍奇结构的退化。载于《代数几何近期进展综述》，Proc. Sympos. Pure Math.第95卷，第267–283页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2017。arXiv:1607.00933。[Rob23] Colleen Robles。无穷远处霍奇范数的延拓。准备中，2023。[Zuo00] Kang Zuo。关于霍奇丛上Kodaira-Spencer映射核的负性及其应用。Asian J. Math.，4(1):279–301，2000。Kodaira的问题。电子邮箱：robles@math.duke.edu

Mathematics Department, Duke University, Box 90320, Durham, NC 27708-0320