arXiv:2302.04809v1 [quant-ph] 9 Feb 2023

相对熵扰动的下半连续性及其推论

M.E. Shirokov*莫斯科斯捷克洛夫数学研究所

摘要

本文证明，量子操作作用下量子相对熵的减小量是其两个自变量的下半连续函数。特别是，这一性质意味着，量子操作作用下量子相对熵的局部不连续跳跃不会增加。它还意味着量子相对熵联合凸性模（作为量子态系综的函数）具有下半连续性。

本文还探讨了这些结果的各种推论和应用。

目录

1 引言 2

2 预备知识 4

2.1 基本记号.4 2.2 量子相对熵的 Lindblad 扩展.7

3 主要结果 8

3.1 相对熵扰动及其下半连续性.8 3.2 量子操作作用下量子相对熵局部不连续跳跃不增.14 3.3 QRE 联合凸性模量的下半连续性 17 3.3.1 凸混合的情形.17 3.3.2 有限和可数和的情形.18

*电子邮件：msh@mi.ras.ru

4 应用
20 4.1 量子相对熵及相关函数的局部连续性分析 . . . . . 20 4.1.1 Lindblad 引理的推广.20 4.1.2 函数 $\Phi \mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$.20 4.1.3 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta) \mapsto D(\rho+\eta\|\sigma) - D(\rho\|\sigma+\theta)$ . . . . . 21 4.1.4 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta) \mapsto \mathrm{Tr}(\rho+\eta)(-\ln \sigma) - \mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))$. 22 4.1.5 函数 $(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\}) \mapsto D\left(\sum_i p_i\rho_i \| \sum_i q_i\sigma_i\right)$ . . . . . 23 4.1.6 函数 $(\mu,\nu) \mapsto D\left(\int \rho(x)\mu(dx) \| \int \rho(x)\nu(dx)\right)$ . . . . . 25 4.1.7 量子互信息. 29 4.1.8 局部测量的信息增益.31 4.1.9 量子条件相对熵.32 4.2 关于将输入系统的吉布斯态映射为输出系统吉布斯态的信道性质.33 4.2.1 能量受限性质.33 4.2.2 关于平均能量和自由能的连续性 34

5 总结性评论与开放问题 37

1 引言

量子相对熵是量子态的基本特征之一，在研究量子系统和信道的信息与统计性质时发挥着重要作用 [1, 2, 3, 4, 5]。

从数学角度看，量子相对熵 $D(\rho\|\sigma)$ 是一对量子态（或更一般地，正迹类算子）(ρ,σ) 的联合凸函数，其取值属于 $[0,+\infty]$。量子相对熵的一项基本性质是它在量子操作（完全正迹非增线性映射）作用下的单调性，这意味着

$$D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \leq D(\rho\|\sigma)$$

对于任意量子操作 $\Phi: A \to B$ 以及定义在$\mathcal{H}_A$ 上的任意量子态 ρ 和 σ （一侧或两侧的取值都可能为 $+\infty$ ） [6]。

量子相对熵的另一个重要且广泛使用的性质是其（联合）下半连续性，这意味着，对于任意 $c \geq 0$，所有满足 $D(\rho\|\sigma) \leq c$ 的点对 (ρ,σ) 构成 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \times \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 的一个闭子集，其中 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ [4, 5, 7] 上正迹类算子的锥。

在本文中，我们分析非负函数

$$\Delta_\Phi(\rho,\sigma) \doteq D(\rho\|\sigma) - D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$$

对于给定的任意量子操作 $\Phi: A \to B$，它在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A) \times \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中所有满足 $D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 有限的数对 (ρ,σ) 上定义良好。该

函数 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 刻画了量子操作 Φ 的可逆程度。若对于某些量子态 ρ 和 σ，有 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)=0$，则 Petz 定理（参见 [8]）表明，该操作 Φ 关于这些量子态是（完全）可逆的，也就是说，存在量子操作 $\Psi=\Psi(\Phi,\rho,\sigma)$，使得 $\rho=\Psi\circ\Phi(\rho)$ 且 $\sigma=\Psi\circ\Phi(\sigma)$。若 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)\leq\varepsilon$，则操作 Φ 关于状态 ρ 和 σ 是 ε-可逆的，其含义是存在量子操作 $\Psi=\Psi(\Phi,\rho,\sigma)$，使得

$$F(\rho,\Psi\circ\Phi(\rho))\geq\exp(-\varepsilon/2)\quad\text{and}\quad\sigma=\Psi\circ\Phi(\sigma),$$

其中 $F(\cdot,\cdot)$ 是量子态 [9, 10, 11] 的保真度。

我们将证明，对于任意给定的量子操作 Φ，函数 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 在其定义域上是下半连续的。此外，我们还将证明函数

$$(\rho,\sigma,\Phi)\mapsto\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$$

在集合上是下半连续的

$$\{(\rho,\sigma,\Phi)\in\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{F}_{\leq1}(A,B)\,|\,D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))<+\infty\}\,,\tag{1}$$

其中 $\mathfrak{F}_{\leq1}(A,B)$ 是从 A 到 B 的所有量子操作构成的集合，该集合配备了强收敛拓扑 [15]。

最后这一性质意味着，对于任意 $\varepsilon\geq0$，所有满足 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)\leq\varepsilon$ 的三元组 (ρ,σ,Φ) 构成的集合，是式 (1) 中集合的闭子集。它还意味着等式

$$D(\rho\|\sigma)=D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))+\Delta_\Phi(\rho,\sigma)\tag{2}$$

是 $D(\rho\|\sigma)$ 在式 (1) 中的集合上的两个非负下半连续函数之和的分解，因为函数 $(\rho,\sigma,\Phi)\mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 的下半连续性可由量子相对熵的下半连续性以及强收敛的定义推出。

由分解式（2）可立即得出，$D(\rho\|\sigma)$（作为一对（ρ，σ）的函数）的局部连续性蕴含着 $D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 和 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 的局部连续性（既可视为一对（ρ，σ）的函数，其中操作 Φ 固定；也可视为三元组（ρ，σ，Φ）的函数）。这一性质最初在 [16] 中通过直接且相当技术性的方法得到证明，所用的是该文提出的量子相对熵收敛判据。此外，分解式（2）还使我们能够证明

$$\limsup_{n\to+\infty}D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n))-D(\Phi(\rho_0)\|\Phi(\sigma_0))\leq\limsup_{n\to+\infty}D(\rho_n\|\sigma_n)-D(\rho_0\|\sigma_0)\tag{3}$$

对于任意量子操作 $\Phi:\ A\to B$ 以及 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中分别收敛到算子 ρ_0 和 σ_0 的任意序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$，满足 $D(\rho_0\|\sigma_0)<+\infty$。由于（3）右侧的量刻画了给定收敛序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 时量子相对熵的局部不连续性（它总是非负的，当且仅当 $D(\rho_n\|\sigma_n)$ 收敛到 $D(\rho_0\|\sigma_0)$ 时等于零），不等式（3）可以

被解释为量子操作对量子相对熵可能出现的不连续性的“压缩”。

本文的核心部分致力于将上述一般性质应用于量子相对熵及相关函数（量子互信息、平均能量、条件相对熵等）的局部连续性分析。

2 预备知识

2.1 基本符号

设 $\mathcal{H}$ 为可分希尔伯特空间， $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上所有有界算子构成的代数，赋予算子范数 $\|\cdot\|$； $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上所有迹类算子构成的巴拿赫空间，赋予迹范数 $\|\cdot\|_1$。设 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 为量子态的集合（ $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ 中迹为单位的正算子） [12, 13, 14]。

用 $I_{\mathcal{H}}$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的单位算子，用 $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ 表示巴拿赫空间 $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ 上的恒等变换。

量子态 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 的冯·诺依曼熵定义为公式 $S(\rho) = \mathrm{Tr}\eta(\rho)$，其中 $\eta(x) = -x \ln x$（若 $x > 0$），且 $\eta(0) = 0$。它是在集合 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 上取值于 $[0, +\infty]$ [5, 7, 12] 的凹下半连续函数。冯·诺依曼熵满足不等式

$$S(p\rho + (1-p)\sigma) \leq pS(\rho) + (1-p)S(\sigma) + h_2(p) \tag{4}$$

对任意状态 ρ 和 σ，其中 ρ 和 σ 属于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$，且 $p \in$ 属于 $(0, 1)$，均成立；其中 $h_2(p) = \eta(p) + \eta(1-p)$ 是二元熵 [4, 13]。

我们将使用冯·诺依曼熵在正锥 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 上的齐次扩展，其定义如下：

$$S(\rho) \doteq (\mathrm{Tr}\rho) S(\rho/\mathrm{Tr}\rho) = \mathrm{Tr}\eta(\rho) - \eta(\mathrm{Tr}\rho) \tag{5}$$

对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的任意非零算子 ρ，其取值为.....；在零算子 [7] 处取值为 0。

B利用熵的凹性和不等式 (4)，很容易证明..... t

$$S(\rho) + S(\sigma) \leq S(\rho + \sigma) \leq S(\rho) + S(\sigma) + H(\{\mathrm{Tr}\rho, \mathrm{Tr}\sigma\}) \tag{6}$$

对于任意 ρ 和 σ，其中 ρ 和 σ 属于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$，均成立；其中 $H(\{\mathrm{Tr}\rho, \mathrm{Tr}\sigma\}) = \eta(\mathrm{Tr}\rho) + \eta(\mathrm{Tr}\sigma) - \eta(\mathrm{Tr}(\rho + \sigma))$ 是二元熵在 $\mathbb{R}^2$ 的正锥上的齐次扩展。

ρ 和 σ 在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$中的两个量子态的量子相对熵定义为

$$D(\rho \| \sigma) = \sum_i \langle i| \rho \ln \rho - \rho \ln \sigma |i\rangle, \tag{7}$$

其中， $\{|i\rangle\}$ 是量子态 ρ 的特征向量正交归一基，并假设若 $\mathrm{supp}\rho$ 不包含于 $\mathrm{supp}\sigma$ [1, 12, 13]，则 $D(\rho\|\sigma) = +\infty$ 。[1]

设 H 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正（半定）算子（我们始终假设正算子是自伴的）。用 $\mathcal{D}(H)$ 表示 H 的定义域。对于任意正算子 $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$，我们按以下规则定义量 $\mathrm{Tr}H\rho$

$$\mathrm{Tr}H\rho = \begin{cases} \sup_n \mathrm{Tr}P_nH\rho \ \text{ if } \ \mathrm{supp}\rho \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{D}(H)) \\ +\infty \ \text{ otherwise,} \end{cases} \tag{8}$$

其中， P_n 是 H 对应于区间 $[0, n]$ 的谱投影算子，$\mathrm{cl}(\mathcal{D}(H))$ 是 $\mathcal{D}(H)$ 的闭包。

我们将使用 [16] 中引入的以下概念。

定义1. 若由有限秩投影算子构成的双重序列 $\{P_m^n\}_{n\geq 0, m\geq m_0}$ $(m_0 \in \mathbb{N})$ 与收敛到算子 σ_0 的序列 $\{\sigma_n\} \subset \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 完全一致，则

$$P_m^n \leq P_{m+1}^n, \qquad \bigvee_{m\geq m_0} P_m^n \geq Q_n, \tag{9}$$

其中， Q_n 是投影到 σ_n 的支撑上的投影算子，并且

$$P_m^n\sigma_n = \sigma_n P_m^n, \qquad \mathrm{rank}P_m^n\sigma_n = \mathrm{rank}P_m^n, \qquad \|\cdot\|\text{-}\lim_{n\to+\infty} P_m^n = P_m^0 \tag{10}$$

对于所有 $m \geq m_0$ 和 $n \geq 0$，其中极限是在算子范数拓扑下取的。

对于任何收敛到算子 σ_0 的序列 $\{\sigma_n\} \subset \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$，都必须存在一个与序列 $\{\sigma_n\}$ [16, 完全相容的有限秩投影算子双重序列 $\{P_m^n\}_{n\geq 0,\ m\geq m_0}$ 引理 4]。

带有概率分布 $\{p_i\}$ 的有限或可数个量子态集合 $\{\rho_i\}$ 称为（离散）系综，记作 $\{p_i, \rho_i\}$。量子态 $\bar{\rho} = \sum_i p_i\rho_i$ 称为系综 $\{p_i, \rho_i\}$ 的平均态。系综 $\{p_i, \rho_i\}$ 的 Holevo量定义为

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) = \sum_i p_i D(\rho_i\|\bar{\rho}) = S(\bar{\rho}) - \sum_i p_i S(\rho_i), \tag{11}$$

其中第二个公式在 $S(\bar{\rho})$ 有限时成立。该量给出了通过对系综 [12, 13] 进行量子测量所能获得的经典信息量的上界。

对于度量空间 X 上的下半连续函数 f，以及一个给定的、收敛到点 $x_0 \in X$ 的序列 $\{x_n\} \subset X$，满足 $f(x_0) < +\infty$，我们将使用以下量

$$\mathrm{dj}(\{f(x_n)\}) \doteq \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) - f(x_0) \tag{12}$$

[1]算子 ρ 在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的支撑 $\mathrm{supp}\rho$ 是由 ρ 对应于其正特征值的特征向量张成的闭子空间。

该量刻画了函数 f 相对于序列 $\{x_n\}$ 的不连续跳跃。 f 的下半连续性意味着 $\mathrm{dj}(\{f(x_n)\}) \geq 0$，并且

$$\mathrm{dj}(\{f(x_n)\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

我们将使用以下简单的

引理 1. 若 f 和 g 是度量空间 X 上取值于 $(-\infty, +\infty]$ 的下半连续函数，则

$$\mathrm{dj}(\{f(x_n)\}) \leq \mathrm{dj}(\{(f+g)(x_n)\})$$

对于任意收敛于 $x_0 \in X$ 的序列 $\{x_n\} \subset X$，满足 $(f+g)(x_0) < +\infty$。特别地，若

$$\lim_{n\to+\infty}(f+g)(x_n) = (f+g)(x_0) < +\infty$$

then

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) < +\infty.$$

从系统 A 到系统 B 的量子操作 Φ，是从 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ 到 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ 的完全正迹非增线性映射。保迹量子操作称为量子信道 [12, 13]。对于任意量子操作 Φ: $A \to B$，斯坦斯普林定理表明，存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_E$ 和一个压缩算子 V_Φ : $\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$，使得

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A). \tag{13}$$

若 Φ 是信道，则 V_Φ 是等距变换 [12, 13]。

量子信道 $\Phi: A \to B$ 在量子态 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ 下的互信息 $I(\Phi, \rho)$ 可定义为

$$I(\Phi, \rho) = I(B\!:\!R)_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_R(\hat{\rho})} \doteq D(\Phi \otimes \mathrm{Id}_R(\hat{\rho}) \| \Phi(\rho) \otimes \hat{\rho}_R),$$

其中，$\bar{\rho}$ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R)$中的纯态，且 $\mathrm{Tr}_R \bar{\rho} = \rho$ [12, 13]。

记 $\mathfrak{F}_{\leq 1}(A, B)$为从 A 到 B 的所有量子操作构成的集合，并赋予由半范数族 $\Phi \mapsto \|\Phi(\rho)\|_1, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ [15]定义的强收敛拓扑。 $\mathfrak{F}_{\leq 1}(A, B)$中的操作序列 $\{\Phi_n\}$ 强收敛到操作 $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_{\leq 1}(A, B)$，是指

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\rho) = \Phi_0(\rho) \text{ for all } \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A).$$

我们将使用以下重要结果。

引理 2。[17]如果量子态序列 $\{\rho_n\}$ 在弱算子拓扑下收敛到量子态 ρ_0，那么该序列 $\{\rho_n\}$ 在迹范数下收敛到量子态 ρ_0。

2.2 L　Indblad 对量子相对熵的扩展　　y

正算子之间量子相对熵的 Lindblad 扩展ρ 在 $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$中的定义为 σ

$$D(\rho\|\sigma)=\sum_i\langle\varphi_i|\,\rho\ln\rho-\rho\ln\sigma+\sigma-\rho\,|\varphi_i\rangle,$$

其中，$\{\varphi_i\}$ 是算子 ρ 的特征向量所构成的正交归一基，并假设 $D(0\|\sigma)=\mathrm{Tr}\sigma$ ，且若 suppρ 不包含于 suppσ （特别是当 $\rho\neq0$ 且 $\sigma=0$时），则 $D(\rho\|\sigma)=+\infty$ 。

If t若 ρ 的扩展冯·诺伊曼熵 $S(\rho)$（定义见式 (5)）有限，则

$$D(\rho\|\sigma)=\mathrm{Tr}\rho(-\ln\sigma)-S(\rho)-\eta(\mathrm{Tr}\rho)+\mathrm{Tr}\sigma-\mathrm{Tr}\rho, \tag{14}$$

其中，Trρ(–ln σ)按照规则 (8) 定义，且 $\eta(x)=-x\ln x$。

函数 $(\rho,\sigma)\mapsto D(\rho\|\sigma)$ 在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})\times\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$上非负、下半连续且联合凸。我们将使用该函数的以下性质:

- 对于任意 ρ、$\sigma\in\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 和 $c>0$，以下等式成立（两边均可能取值 $+\infty$ ）：

$$D(c\rho\|c\sigma)=cD(\rho\|\sigma), \tag{15}$$

$$D(\rho\|c\sigma)=D(\rho\|\sigma)-\mathrm{Tr}\rho\ln c+(c-1)\mathrm{Tr}\sigma; \tag{16}$$

- 对于任意 ρ、σ 和 ω，在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中，以下不等式成立（一侧或两侧均可能取值 $+\infty$ ）

$$D(\rho\|\sigma+\omega)\leq D(\rho\|\sigma)+\mathrm{Tr}\omega, \tag{17}$$

$$D(\rho+\sigma\|\omega)\geq D(\rho\|\omega)+D(\sigma\|\omega)-\mathrm{Tr}\omega; \tag{18}$$

- 对于任意 ρ、σ、ω 和 ϑ，在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中，以下不等式成立（一侧或两侧均可能取值 $+\infty$ ）

$$D(\rho+\sigma\|\omega+\vartheta)\leq D(\rho\|\omega)+D(\sigma\|\vartheta), \tag{19}$$

若 $\rho\sigma=\rho\vartheta=\sigma\omega=\omega\vartheta=0$，则

$$D(\rho+\sigma\|\omega+\vartheta)=D(\rho\|\omega)+D(\sigma\|\vartheta). \tag{20}$$

如果算子 ρ、σ 和 ω 的扩展冯·诺依曼熵有限，则利用表示式 (14) 很容易证明不等式 (17) 和 (18)。事实上，不等式 (17) 源于对数的算子单调性，不等式 (18) 则由不等式 (6) 得出。在一般情况下，可以利用 [7]中的引理4，通过逼近证明这些不等式。

不等式 (19) 是相对熵的联合凸性和恒等式 (15) 的直接推论。等式 (20) 由定义 [7]得出。

我们将使用 Donald 恒等式

$$pD(\rho\|\omega)+\bar{p}D(\sigma\|\omega)=pD(\rho\|p\rho+\bar{p}\sigma)+\bar{p}D(\sigma\|p\rho+\bar{p}\sigma)+D(p\rho+\bar{p}\sigma\|\omega) \tag{21}$$

其中，对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的任意算子 ρ、σ 和 ω 以及任意 $p\in[0,1[$[18]，[2] 均成立。

3 主要结果

3.1 相对熵扰动及其下半连续性

量子相对熵的一个基本性质是其在量子操作（完全正迹不增线性映射）下的单调性，即

$$D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))\leq D(\rho\|\sigma) \tag{22}$$

对于任意量子操作 $\Phi\colon\ \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ 以及 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中的任意算子 ρ 和 σ，[6].[3]

单调性（22）意味着函数的非负性

$$\Delta_\Phi(\rho,\sigma)\doteq D(\rho\|\sigma)-D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$$

该函数定义在所有满足 $D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 有限的 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中的有序对 (ρ,σ) 所构成的集合上。根据 Φ，该函数可称为相对熵扰动。[4]

事实证明，函数 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 在量子信息论的不同任务中都会（显式或隐式地）出现。为了说明这一点，只需考虑该函数的以下“特殊实现”：

- 若 ρ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{ABC})$ 中的一个量子态，$\sigma=\rho_A\otimes\rho_{BC}$ 且 $\Phi=\mathrm{Tr}_B(\cdot)$，则

$$\Delta_\Phi(\rho,\sigma)=I(A\colon BC)_\rho-I(A\colon C)_\rho=I(A\colon B|C)_\rho \tag{23}$$

  – 量子态 ρ [12, 13] 的量子条件互信息；

- 若 ρ 和 σ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ 中的量子态，且 $\Phi=\mathrm{Tr}_A(\cdot)$，则

$$\Delta_\Phi(\rho,\sigma)=D(\rho\|\sigma)-D(\rho_B\|\sigma_B)=D_A(\rho\|\sigma)$$

  – 量子态 ρ和 σ [20]的量子条件相对熵；

[2]在 [18] 的引理 2 中，假设 ρ、σ 和 ω 是（正规）状态。利用恒等式 (15) 和 (16)，即可将其推广到 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的任意算子。[3]此处及下文中，$D(\cdot\|\cdot)$ 表示第 2.2 节所述的 Umegaki 相对熵 (7) 对 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中算子的 Lindblad 扩展。[4]它也称为相对熵差 [10, 11]。

• 若 $\rho = \sum_i p_i\rho_i \otimes |i\rangle\langle i|$ 是由量子态系综$\{p_i, \rho_i\}$和基 $\{|i\rangle\}$ 确定的 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AE})$中的量子经典态，且该系综由 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$中的量子态构成， $\sigma = \rho_A \otimes \rho_E$并且 Φ是从 A 到 B 的任意信道，则[5]

$$\Delta_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_E}(\rho, \sigma) = \chi(\{p_i, \rho_i\}) - \chi(\{p_i, \Phi(\rho_i)\})$$

– 信道 Φ [21, 22, 23] 对 $\{p_i, \rho_i\}$ 造成的熵扰动；

• 若 ρ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR})$ 中的纯态， $\sigma = \rho_A \otimes \rho_R$ 且 Φ 是一个从 A 到 B 的任意信道，则

$$\Delta_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_R}(\rho, \sigma) = 2S(\rho_A) - I(B\!:\!R)_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_R(\rho)} = I(\widehat{\Phi}, \rho_A)$$

$\widehat{\ }$– 在量子态 ρ_A [12, 24] 下，与信道 Φ 互补的任意信道 Φ 的互信息；[6]

• 若 ρ 和 σ 分别是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ 和 $\Phi(\varrho)$ 中的任意状态，$= \sum_i P_i\varrho P_i$ 是由任意一组 $\{P_i\}$ 两两正交投影算子确定的压缩通道，且对所有 i 都有 $[P_i\sigma] = 0$ ，并且 $\sum_i P_i = I_A$ ，则

$$\Delta_\Phi(\rho, \sigma) = S(\Phi(\rho)) - S(\rho)$$

– 信道 Φ 在量子态 ρ 下的熵增益；

• 若 ρ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ 中的状态， $\sigma = \rho_A \otimes \rho_B$ 且 $\Phi(\varrho) = \sum_i[\text{迹}_B(I_A \otimes M_i)\varrho] \otimes |i\rangle\langle i|$, 其中 $\{M_i\}$ 是 $\mathcal{H}_B$ 上的正算子值测度， $\{|i\rangle\}$ 是 $\mathcal{H}_E$ 中的一个基元，则

$$\Delta_\Phi(\rho, \sigma) = I(A\!:\!B)_\rho - I(A\!:\!E)_{\Phi(\rho)} = D_B^{\mathbb{M}}(\rho)$$

– 对应于正算子值测度$\mathbb{M} = \{M_i\}$ [10, 25, 13]的量子态 ρ 的未优化量子失谐；

• 若 Φ： $A \to B$ 是可降解信道（参见[26]），且 Θ: $B \to E$ 是一个信道，使得 $\Theta \circ \Phi$ 是与 Φ 互补的信道，则

$$\tfrac{1}{2}\Delta_{\Theta\otimes \mathrm{Id}_R}(\Phi \otimes I_R(\bar{\rho}), \Phi(\rho) \otimes \bar{\rho}_R) = I_c(\Phi, \rho)$$

– 信道 Φ 在量子态 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$处的相干信息，其中 $\bar{\rho}$ 是量子态 ρ [12, 13]在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR})$ 中的一个给定纯化。

除了上述例子之外，还应指出，在量子信息论中的许多基本不等式里，差值（右端与左端之差）都可以用函数 $\Delta_\Phi(\rho, \sigma)$ 表示。例如，对于量子信道 $I(\Phi, \rho)$ 的互信息的第一和第二条链式法则，情况就是如此

[5] $\chi(\{p_i, \rho_i\})$表示式（11）中定义的系综 $\{p_i, \rho_i\}$ 的Holevo量。[6]由于互补信道 $\widehat{\Phi}$ 在等距等价意义下确定，互信息$\widehat{\ }$mation $I(\Phi, \rho_A)$由 Φ 唯一确定，并且等于 $2S(\rho_A) - I(\Phi, \rho_A)$ [24]。

（定义见第 2.1 节）。事实上，很容易看出，对于任意信道 $\Phi\colon A\to B$ 和$\Psi: B\to C$，以及 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ 中的任意量子态 ρ，以下表达式成立

$$I(\Phi,\rho)-I(\Psi\circ\Phi,\rho)=\Delta_{\Psi\otimes\mathrm{Id}_R}(\omega_{BR},\omega_B\otimes\omega_R)$$

and

$$I(\Psi,\Phi(\rho))-I(\Psi\circ\Phi,\rho)=\Delta_{\mathrm{Tr}_E(\cdot)}(\Psi\otimes\mathrm{Id}_{RE}(\omega),\Psi(\omega_B)\otimes\omega_{RE}),\tag{24}$$

其中，$\omega=V_\Phi\otimes I_R\cdot\bar{\rho}\cdot V_\Phi^*\otimes I_R$ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{BER})$中的一个量子态，它由信道 Φ 的 Stinespring 表示（13）以及量子态 ρ的一个给定纯化 $\bar{\rho}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR})$定义。

对于上述许多种 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$的“特殊实现”，已知相应的特征量是量子态 ρ的下半连续函数。第一种和第三种情形分别在 [27] 和 [23] 中得到了证明。第四种和第五种情形则可由量子相对熵的下半连续性推出，因为对于任意压缩信道 Φ，$I(\Phi,\rho_A)=D(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\rho)\|\Phi(\rho_A)\otimes\rho_R)$，且 $S(\Phi(\rho))-S(\rho)=D(\rho\|\Phi(\rho))$。

结果表明，所有通过函数 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 表示的特征的下半连续性，都是下述定理第一部分所给出的一般结果的推论。

定理1. A) 对于任意量子操作 $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$，函数 $\Delta_\Phi(\rho,\sigma)=D(\rho\|\sigma)-D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 在集合上是下半连续的

$$\{(\rho,\sigma)\in\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\,|\,D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))<+\infty\}.$$

B) 函数 $(\rho,\sigma,\Phi)\mapsto\Delta_\Phi(\rho,\sigma)$ 在集合上是下半连续的

$$\{(\rho,\sigma,\Phi)\in\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)\times\mathfrak{F}_{\le1}(A,B)\,|\,D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))<+\infty\},$$

其中，$\mathfrak{F}_{\le1}(A,B)$ 是从 A 到 B 的所有量子操作构成的集合，并赋予强收敛拓扑（见第 2.1 节）。

证明. A) 首先假设 Φ 是一个量子信道，其 Stinespring 表示为 $\Phi(\varrho)=\mathrm{Tr}_EV\varrho V^*$, $\varrho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$，其中 V 是从 $\mathcal{H}_A$ 到 $\mathcal{H}_{BE}$ 的等距变换。

设 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$中的算子序列，分别收敛到算子 ρ_0 和 σ_0，且对所有 $n\ge0$，均有 $D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n))<+\infty$。我们需要证明

$$\liminf_{n\to+\infty}\Delta_\Phi(\rho_n,\sigma_n)\ge\Delta_\Phi(\rho_0,\sigma_0).\tag{25}$$

若 $\sigma_0=0$，则 $\rho_0=0$（否则 $D(\Phi(\rho_0)\|\Phi(\sigma_0))=+\infty$），由单调性 (22) 可直接得出 (25)。因此，我们假设 $\sigma_0\neq0$，从而 $\Phi(\sigma_0)\neq0$（因为 Φ 是一个信道）。

由于 V 是等距变换，我们有

$$a_n\doteq D(V\rho_nV^*\|V\sigma_nV^*)=D(\rho_n\|\sigma_n),\ \forall n\ge0.$$

设 $\{P_m^n\}_{n\geq 0,\ m\geq m_0}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$ 中与序列 $\{\Phi(\sigma_n)\}$ 完全一致的有限秩投影算子双重序列（第 2.1 节中的定义1），该序列由 [16]中的引理4保证存在。考虑双重序列

$$a_n^m = D((P_m^n \otimes I_E)V\rho_n V^*(P_m^n \otimes I_E)\|(P_m^n \otimes I_E)V\sigma_n V^*(P_m^n \otimes I_E)) \leq +\infty,$$

$$b_n^m = D((\bar{P}_m^n \otimes I_E)V\rho_n V^*(\bar{P}_m^n \otimes I_E)\|(\bar{P}_m^n \otimes I_E)V\sigma_n V^*(\bar{P}_m^n \otimes I_E)) \leq +\infty$$

and

$$\hat{a}_n^m = D(P_m^n\Phi(\rho_n)P_m^n\|P_m^n\Phi(\sigma_n)) < +\infty,$$

$$\hat{b}_n^m = D(\bar{P}_m^n\Phi(\rho_n)\bar{P}_m^n\|\bar{P}_m^n\Phi(\sigma_n)) < +\infty,$$

$n \geq 0$、$m \geq m_0$，其中 $P_m^n = I_B - P_m^n$。根据 [7] 中的引理4，我们有

$$a_n \geq a_n^m + b_n^m. \tag{26}$$

下面的引理 3 意味着

$$\hat{a}_n \doteq D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n)) = \hat{a}_n^m + \hat{b}_n^m + D(\Phi(\rho_n)\|\tfrac{1}{2}(\Phi(\rho_n) + U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*)) \tag{27}$$

对于所有 $n \geq 0$ 和 $m \geq m_0$，其中 $U_m^n = 2P_m^n - I_B$ 是酉算子。

由于 $b_n^m \leq \hat{b}_n^m$ 根据量子相对熵的单调性性质 (22)，由 和 (27) 可得 (26)

$$c_n^m \doteq a_n^m - \hat{a}_n^m - D(\Phi(\rho_n)\|\tfrac{1}{2}(\Phi(\rho_n) + U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*)) \leq a_n - \hat{a}_n = \Delta_\Phi(\rho_n, \sigma_n) \tag{28}$$

对于所有 $n \geq 0$ 和 $m \geq m_0$。

根据下文的引理4，双重序列 $\{P_m^n\}_{n\geq 0, m\geq m_0}$ 的性质可推出

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{a}_n^m = \hat{a}_0^m < +\infty \quad \forall m \geq m_0. \tag{29}$$

由于当 $n \to +\infty$ 时，P_m^n 在算子范数拓扑下趋于 P_m^0，且对于所有 $n \geq 0$ 和 $m \geq m_0$，$\Phi(\rho_n) \leq \Phi(\rho_n) + U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*$，由 [28] 中的命题 2 可得

$$\lim_{n\to+\infty} D(\Phi(\rho_n)\|\tfrac{1}{2}(\Phi(\rho_n)+U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*)) = D(\Phi(\rho_0)\|\tfrac{1}{2}(\Phi(\rho_0)+U_m^0\Phi(\rho_0)[U_m^0]^*)) < +\infty. \tag{30}$$

由于对于所有 $m \geq m_0$、$\omega = \rho$、σ，当 $n \to +\infty$ 时，$(P_m^n \otimes I_E)V\omega_n V^*(P_m^n \otimes I_E)$ 趋于 $(P_m^0 \otimes I_E)V\omega_0 V^*(P_m^0 \otimes I_E)$，量子相对熵的下半连续性意味着

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n^m \geq a_0^m$$

对于所有 $m \geq m_0$。由此以及极限关系 (29) 和 (30) 可知

$$\liminf_{n\to+\infty} c_n^m \geq c_0^m$$

对于所有 $m \geq m_{0}$。因此，由（28）可知，要证明（25），只需证明 th at

$$\lim_{m\to+\infty} c_n^m = \Delta_\Phi(\rho_n, \sigma_n) \leq +\infty$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立。这可通过注意到以下事实来证明:

$$\lim_{m\to+\infty} D(\Phi(\rho_n)\|\tfrac{1}{2}(\Phi(\rho_n) + U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*)) = 0 \tag{31}$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立，因为 [7] 中的引理4蕴含

$$\lim_{m\to+\infty} \hat{a}_n^m = \hat{a}_n < +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{m\to+\infty} a_n^m = a_n \leq +\infty.$$

由于条件 $D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n)) < +\infty$ 蕴含对所有 $n \geq 0$ 均有 $\mathrm{supp}\Phi(\rho_n) \subseteq \mathrm{supp}\Phi(\sigma_n)$，双重序列 $\{P_m^n\}_{n\geq 0,\ m\geq m_0}$ 的性质表明，对每个 $n \geq 0$，当 $m \to +\infty$ 时，$U_m^n\Phi(\rho_n)[U_m^n]^*$ 趋于 $\Phi(\rho_n)$。因此，利用 [28] 中的命题 2 即可轻易证明极限关系（31）。

当 Φ 是任意量子操作时，断言 A 成立，这可由下文将证明的断言 B 推出（利用上文已证明的断言 A 的部分）。

B) 设 $\{\rho_n\}$和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中的算子序列，分别收敛到算子 ρ_0 和 σ_0。设 $\{\Phi_n\}$ 是 $\mathfrak{F}_{\leq 1}(A, B)$ 中的量子操作序列，强收敛到量子操作 Φ_0，且对所有 $n \geq 0$，都有 $D(\Phi_n(\rho_n)\|\Phi_n(\sigma_n)) < +\infty$。我们需要证明

$$\liminf_{n\to+\infty} \Delta_{\Phi_n}(\rho_n, \sigma_n) \geq \Delta_{\Phi_0}(\rho_0, \sigma_0). \tag{32}$$

首先假设 $\{\Phi_n\}$是一个强收敛到量子信道 Φ_0的量子信道序列。根据 [15] 中的定理 7，存在一个系统 E 以及一个等距算子序列$\{V_n\}$，它们从 $\mathcal{H}_A$ 映射到 $\mathcal{H}_{BE}$，并强收敛到等距变换 V_0，使得对所有 $n \geq 0$，$\Phi_n(\varrho) = \mathrm{Tr}_E V_n\varrho V_n^*$。

显然，当 $n \to +\infty$时，$\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_{BE})$ 中的算子 $\varrho_n = V_n\rho_n V_n^*$和 $\varsigma_n = V_n\sigma_n V_n^*$分别趋于算子 $\varrho_0 = V_0\rho_0 V_0^*$和 $\varsigma_0 = V_0\sigma_0 V_0^*$。由于所有算子 V_n 都是等距变换，我们有

$$D(\varrho_n\|\varsigma_n) = D(\rho_n\|\sigma_n) \quad \forall n \geq 0.$$

因此，对于所有 $n \geq 0$，$\Delta_{\Phi_n}(\rho_n, \sigma_n) = \Delta_\Theta(\varrho_n, \varsigma_n)$，其中 $\Theta = \mathrm{Tr}_E(\cdot)$ 是一个从 BE 到 B 的信道。由此，极限关系 (32) 可由断言 A 已证明的部分推出。

现在假设 $\{\Phi_n\}$是一个强收敛到量子操作 Φ_0的量子操作序列。[16] 中的引理 2及其证明表明，存在一个系统$\backsim C$ 以及一个从 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ 到 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_C)$ 的量子信道序列 $\{\Phi_n\}$，该序列强$\widetilde{}$收敛到量子信道 Φ_0，使得

$$\Phi_n(\varrho) = P_B\widetilde{\Phi}_n(\varrho) = \widetilde{\Phi}_n(\varrho)P_B \quad \forall\varrho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A),\ \forall n \geq 0,$$

其中 P_B是投影到 $\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_C$的子空间 $\mathcal{H}_B$上的投影算子。根据恒等式 (20)，我们有

$$D(\widetilde{\Phi}_n(\rho_n)\|\widetilde{\Phi}_n(\sigma_n)) = D(\Phi_n(\rho_n)\|\Phi_n(\sigma_n)) + D(\Psi_n(\rho_n)\|\Psi_n(\sigma_n)), \quad \forall n \geq 0, \tag{33}$$

~其中 $\Psi_n(\varrho) = P_C\Phi_n(\varrho)$， P_C是投影到 $\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_C$的子空间 $\mathcal{H}_C$上的投影算子。

由于我们不假设对所有 $n \geq 0$， $D(\rho_n\|\sigma_n)$ 都是有限的，因此无法保证~ ~ $D(\Phi_n(\rho_n)$ $\|\Phi_n(\sigma_n))$ 是有限的。所以，我们不能直接将~证明的上述部分应用于序列 $\{\Phi_n\}$。不过，我们可以将讨论限定在以下情形：

$$\liminf_{n\to+\infty} D(\widetilde{\Phi}_n(\rho_n)\|\widetilde{\Phi}_n(\sigma_n)) \leq \liminf_{n\to+\infty} D(\rho_n\|\sigma_n) < +\infty,$$

因为否则极限关系 (32) 显然成立。因此，通过取一个子序列~ ~，我们可以假设对所有 $n > 0$，~ $D(\Phi_n(\rho_n)\|\Phi_n(\sigma_n)) < +\infty$ 。

如果 $D(\widetilde{\Phi}_0(\rho_0)\|\widetilde{\Phi}_0(\sigma_0)) < +\infty$ ，那么将证明的上述部分应用于量子信道序列 $\{\Phi_n\}$，可得~

$$\liminf_{n\to+\infty} \Delta_{\widetilde{\Phi}_n}(\rho_n, \sigma_n) \geq \Delta_{\widetilde{\Phi}_0}(\rho_0, \sigma_0).$$

这与（33）一起推出（32），因为

$$\liminf_{n\to+\infty} D(\Psi_n(\rho_n)\|\Psi_n(\sigma_n)) \geq D(\Psi_0(\rho_0)\|\Psi_0(\sigma_0)) \tag{34}$$

根据量子相对熵的下半连续性。

如果 $D(\widetilde{\Phi}_0(\rho_0)\|\widetilde{\Phi}_0(\sigma_0)) = +\infty$ 那么，式（33）以及假设的$D(\Phi_0(\rho_0)\|\Phi_0(\sigma_0))$有限性表明， $D(\Psi_0(\rho_0)$ $\|\Psi_0(\sigma_0)) = +\infty$。因此，由（34）可得

$$\lim_{n\to+\infty} D(\Psi_n(\rho_n)\|\Psi_n(\sigma_n)) = +\infty.$$

这意味着

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_{\Phi_n}(\rho_n, \sigma_n) = +\infty,$$

由于 (33)，对于所有 n， $\Delta_{\Phi_n}(\rho_n, \sigma_n) \geq D(\Psi_n(\rho_n)\|\Psi(\sigma_n))$。因此，在这种情况下，极限关系 (32) 显然成立。 □

引理 3. 设 ρ 和 σ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的算子， P 是 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 中的投影算子，且满足 $P\sigma = \sigma P$。那么

$$D(\rho\|\sigma) = D(P\rho P\|P\sigma) + D(\bar{P}\rho\bar{P}\|\bar{P}\sigma) + D(\rho\|\tfrac{1}{2}(\rho + U\rho U^*)), \tag{35}$$

其中 $U = 2P - I_{\mathcal{H}}$ 是酉算子。

证明。我们不妨假设算子 ρ 和 σ 均非零，否则式 (35) 显然成立。

由于 $U\sigma U^*=\sigma$和 $U^*=U$，利用 Donald 恒等式 (21) 可得

$$\begin{aligned} D(\rho\|\sigma) &= \tfrac{1}{2}D(\rho\|\sigma)+\tfrac{1}{2}D(U\rho U^*\|\sigma)=D(\tfrac{1}{2}(\rho+U\rho U^*)\|\sigma) \\ &+ \tfrac{1}{2}D(\rho\|\tfrac{1}{2}(\rho+U\rho U^*))+\tfrac{1}{2}D(U\rho U^*\|\tfrac{1}{2}(\rho+U\rho U^*)) \\ &= D(P\rho P+\bar{P}\rho\bar{P}\|\sigma)+D(\rho\|\tfrac{1}{2}(\rho+U\rho U^*)) \\ &= D(P\rho P\|P\sigma)+D(\bar{P}\rho\bar{P}\|\bar{P}\sigma)+D(\rho\|\tfrac{1}{2}(\rho+U\rho U^*)), \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由恒等式 (20) 得出。 □

引理4. 设 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的算子序列，分别收敛于算子 ρ_0 和 $\sigma_0\neq 0$。若 $\{P_m^n\}_{n\geq 0,\ m\geq m_0}$ 是与序列 $\{\sigma_n\}$ 完全一致的有限秩投影算子双重序列（定义1见第 2.1 节），则

$$\lim_{n\to+\infty} D(P_m^n\rho_n P_m^n\|P_m^n\sigma_n)=D(P_m^0\rho_0P_m^0\|P_m^0\sigma_0)<+\infty \quad \forall m\geq m_0. \tag{36}$$

证明. 由于根据条件 (9) 和 (10)，当 $n\to+\infty$时 $P_m^n\rho_nP_m^n$趋于 $P_m^0\rho_0P_m^0$，且 $\sup_{n\geq 0}\mathrm{rank}P_m^n\rho_nP_m^n<+\infty$，由表示式 (14) 可知，要证明 (36)，只需证明

$$\lim_{n\to+\infty}\|P_m^n\ln(P_m^n\sigma_n)-P_m^0\ln(P_m^0\sigma_0)\|=0 \tag{37}$$

对任意给定的 $m\geq m_0$。由 (10) 中的第二个条件可知，对所有 $n\geq 0$，$\mathrm{rank}P_m^n\sigma_n=\mathrm{rank}P_m^{n^-}$。因此，序列 $\{P_m^n\sigma_n+P_m^n\}_n$ 由有界非退化算子构成；由 (10) 中的第三个条件，它在算子范数下收敛于非退化算子 $P_m^0\sigma_0+\bar{P}_m^0$。由此可得，对所有 $n\geq 0^-$，均有 $P_m^n\sigma_n+P_m^n\geq\epsilon I_{\mathcal{H}}$，其中某个 $\epsilon>0$。因此，根据 [29] 中的命题VIII.20，序列 $\{\ln(P_m^n\sigma_n+P_m^n)\}_n$在算子范数下收敛于算子 $\ln(P_m^0\sigma_0+\bar{P}_m^0)$。这便推出了 (37)，因为

$$P_m^n\ln(P_m^n\sigma_n)=P_m^n\ln(P_m^n\sigma_n+\bar{P}_m^n)\quad\forall n\geq 0.\ \square$$

3.2 量子操作作用下量子相对熵局部不连续跳跃的不增性

量子操作引起的相对熵扰动的下半连续性意味着，量子相对熵的局部不连续跳跃在量子操作作用下不会增加。

命题 1. 设 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中的算子序列，分别收敛于算子 ρ_0 和 σ_0，且满足 $D(\rho_0\|\sigma_0)<+\infty$。

A) 如果 Φ 是从 A 到 B 的任意量子操作，那么

$$\limsup_{n\to+\infty}D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n))-D(\Phi(\rho_0)\|\Phi(\sigma_0))\leq\limsup_{n\to+\infty}D(\rho_n\|\sigma_n)-D(\rho_0\|\sigma_0). \tag{38}$$

B) 如果 $\{\Phi_n\}$ 是从 A 到 B 的一列量子操作，并强收敛到量子操作 Φ_0，那么

$$\limsup_{n\to+\infty} D(\Phi_n(\rho_n)\|\Phi_n(\sigma_n)) - D(\Phi_0(\rho_0)\|\Phi_0(\sigma_0)) \leq \limsup_{n\to+\infty} D(\rho_n\|\sigma_n) - D(\rho_0\|\sigma_0) \quad (39)$$

注：由于 $D(\rho_0\|\sigma_0)$ 的有限性以及量子相对熵的单调性，(38) 和 (39) 左端的表达式均定义良好。

根据量子相对熵的下半连续性，在给定的收敛序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 下，(38) 右端和左端的量刻画了函数 $(\rho,\sigma) \mapsto D(\rho\|\sigma)$ 以及 $(\rho,\sigma) \mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 的不连续性。因此，命题1A的断言可以解释为：量子操作对量子相对熵可能存在的不连续性进行了“压缩”。

证明。由于量子相对熵是其参数的下半连续函数，根据第 2.1 节的引理 1，命题的断言 A 和 B 分别由定理1的断言 A 和 B 得出。 □

命题 1 推出以下结论，可将其视为单个量子操作以及强收敛的量子操作序列保持量子相对熵的局部连续性。这一结论最初在 [16] 中以完全不同的方法证明（该方法基于其中提出的量子相对熵收敛判据）。

推论 1. 设 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$中的算子序列，分别收敛到算子 ρ_0 和 σ_0，且满足

$$\lim_{n\to+\infty} D(\rho_n\|\sigma_n) = D(\rho_0\|\sigma_0) < +\infty. \quad (40)$$

A) 若 Φ 是从 A 到 B 的任意量子操作，则

$$\lim_{n\to+\infty} D(\Phi(\rho_n)\|\Phi(\sigma_n)) = D(\Phi(\rho_0)\|\Phi(\sigma_0)) < +\infty. \quad (41)$$

B) 若 $\{\Phi_n\}$ 是从 A 到 B 的量子操作序列，并强收敛到量子操作 Φ_0，则

$$\lim_{n\to+\infty} D(\Phi_n(\rho_n)\|\Phi_n(\sigma_n)) = D(\Phi_0(\rho_0)\|\Phi_0(\sigma_0)) < +\infty.$$

注 1. 粗略地说，两个状态 ρ 和 σ 的量子相对熵可表示为

$$D(\rho\|\sigma) = F(\rho,\sigma) - S(\rho), \quad \text{where} \quad F(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}\rho(-\ln\sigma),$$

即表示为非负下半连续函数 F 和S之差。很容易看出，一般而言，函数 F 和 S 的局部连续性不会在量子信道作用下保持不变；也就是说，极限关系

$$\lim_{n\to+\infty} F(\rho_n,\sigma_n) = F(\rho_0,\sigma_0) < +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{n\to+\infty} S(\rho_n) = S(\rho_0) < +\infty \quad (42)$$

对于 $\mathfrak{S}_+(\mathcal{H}_A)$ 中收敛到量子态 ρ_0 和 σ_0的一些量子态序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$，并不能分别推出极限关系成立

$$\lim_{n\to+\infty} F(\Phi(\rho_n),\Phi(\sigma_n)) = F(\Phi(\rho_0),\Phi(\sigma_0)) < +\infty \tag{43}$$

and

$$\lim_{n\to+\infty} S(\Phi(\rho_n)) = S(\Phi(\rho_0)) < +\infty \tag{44}$$

对于任意信道 Φ。

因此，如果 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是任意两个满足极限关系 (42) 的收敛量子态序列，但极限关系 (44) 不成立，那么推论 1A 表明，极限关系 (43) 也不成立，并且函数 F 的不连续跳跃会以如下方式补偿函数 S 的不连续跳跃：

$$\lim_{n\to+\infty} (F-S)(\Phi(\rho_n),\Phi(\sigma_n)) = (F-S)(\Phi(\rho_0),\Phi(\sigma_0)) < +\infty.$$

请注意，量子相对熵的单调性意味着，在量子信道作用下，冯·诺依曼熵 S 可能增加的部分也会得到类似的补偿。这种补偿是保证量子相对熵这一函数 $F-S$ 不增加所必需的。

注 2. 乍看之下，推论 1 是命题 1 对证明量子相对熵及相关函数的局部连续性（收敛性）这一任务的唯一贡献。事实上，命题 1 更一般的断言使我们能够通过一致逼近来证明给定函数 f 的局部连续性：用适当的函数 f_n 一致逼近该函数，并且对于这些函数，可以建立类似于 (38) 的关系，其右端在 $n \to +\infty$ 时趋于零。下文第 4.1.6 节命题 9 的证明中采用了这一方法。

存在一类量子操作 Φ，当 (42) 中的第二个极限关系成立时，关系式 (44) 对它们成立。这类量子操作由以下等价性质刻画 [30, 定理 1]:

- $S(\Phi(\rho)) < +\infty$ 对于任意满足 $S(\rho) < +\infty$的量子态 ρ；
- $\sup\{S(\Phi(\rho)) \mid \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \text{阶}\rho = 1\} < +\infty$。

第一条性质意味着这类操作保持冯·诺依曼熵的有限性，因此称为 PFE 操作；[30], 中可找到它们的详细分类。

推论 2. 设 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中分别收敛于算子 ρ_0 和 σ_0 的算子序列，使得

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Tr}\rho_n(-\ln\sigma_n) = \mathrm{Tr}\rho_0(-\ln\sigma_0) < +\infty. \tag{45}$$

Then

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Tr}\Phi(\rho_n)(-\ln\Phi(\sigma_n)) = \mathrm{Tr}\Phi(\rho_0)(-\ln\Phi(\sigma_0)) < +\infty \tag{46}$$

对于任意 PFE 操作 Φ。

证明。根据第 2.1 节的引理 1，条件 (45) 意味着 (40) 成立，且 (42) 中的第二个极限关系成立。因此，根据推论 1A，(41) 成立；又由于 Φ 是一个 PFE 操作，(44) 成立。显然，(46) 可由 (41) 和 (44) 推出。 □

3.3 量子相对熵联合凸性模量的下半连续性

3.3.1 凸混合的情形

量子相对熵的联合凸性意味着

$$D\left(\sum_i p_i\rho_i \middle\| \sum_i p_i\sigma_i\right) \le \sum_i p_i D(\rho_i\|\sigma_i)$$

对于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 中具有相同概率分布 $[7, 12, 13]$ 的任意量子态系综 $\{p_i, \rho_i\}$ 和 $\{p_i, \sigma_i\}$。

用 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 中所有离散态系综的集合。我们称 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中的系综序列 $\mu_n = \{p_i^n, \rho_i^n\}$ D_0-收敛到系综$\mu_0 = \{p_i^0, \rho_i^0\}$，如果

$$\lim_{n\to+\infty} p_i^n\rho_i^n = p_i^0\rho_i^0 \quad \forall i.$$

定理 1A 推出如下结论

命题 2. 非负函数

$$(\{p_i, \rho_i\}, \{p_i, \sigma_i\}) \mapsto \sum_i p_i D(\rho_i\|\sigma_i) - D\left(\sum_i p_i\rho_i \middle\| \sum_i p_i\sigma_i\right)$$

在集合上是下半连续的

$$\left\{(\{p_i, \rho_i\}, \{p_i, \sigma_i\}) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H}) \,\middle|\, D\left(\sum_i p_i\rho_i \middle\| \sum_i p_i\sigma_i\right) < +\infty\right\} \tag{47}$$

关于 D_0-收敛，在 $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中。

证明. 对于属于式 (47) 中集合的一对系综 $\mu = \{p_i, \rho_i\}$ 和 $\nu = \{p_i, \sigma_i\}$，引入量子经典态

$$\hat{\mu} = \sum_i p_i\rho_i \otimes |i\rangle\langle i| \quad \text{and} \quad \hat{\nu} = \sum_i p_i\sigma_i \otimes |i\rangle\langle i|$$

在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E)$ 中，其中 $\{|i\rangle\}$ 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_E$中的一个基。因此，恒等式 (20) 表明

$$\sum_i p_i D(\rho_i\|\sigma_i) = D(\hat{\mu}\|\hat{\nu}),$$

而

$$D\left(\sum_i p_i\rho_i \middle\| \sum_i p_i\sigma_i\right) = D(\Phi(\hat{\mu})\|\Phi(\hat{\nu}))$$

其中 $\Phi = \mathrm{Tr}_E(\cdot)$。因此，该命题的断言可直接由定理 1A 得出。 □

利用量子相对熵的下半连续性以及第 2.1 节中的引理 2，很容易证明函数 $(\{p_i,\rho_i\},\{p_i,\sigma_i\}) \mapsto D(\sum_i p_i\rho_i \| \sum_i p_i\sigma_i)$ 关于 D_0-收敛，在集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上是下半连续的。因此，命题 2（根据第 2.1 节中的引理 1）推出了量子相对熵的如下收敛条件。

推论 3. 设 $\{\{p_i^n,\rho_i^n\}\}_n$ 和 $\{\{p_i^n,\sigma_i^n\}\}_n$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中分别收敛到系综 $\{p_i^0,\rho_i^0\}$ 和 $\{p_i^0,\sigma_i^0\}$ 的系综序列，且满足 D_0。如果

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_i p_i^n D(\rho_i^n\|\sigma_i^n) = \sum_i p_i^0 D(\rho_i^0\|\sigma_i^0) < +\infty$$

then

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(\sum_i p_i^n\rho_i^n \middle\| \sum_i p_i^n\sigma_i^n\right) = D\left(\sum_i p_i^0\rho_i^0 \middle\| \sum_i p_i^0\sigma_i^0\right) < +\infty.$$

在第 4.1.5 节中，我们将把推论 3 的断言推广到任意 D_0-收敛的离散系综序列的情形。

3.3.2 有限和可数和的情形

量子相对熵的联合凸性和下半连续性，以及恒等式 (15)，意味着

$$D\left(\sum_i \rho_i \middle\| \sum_i \sigma_i\right) \leq \sum_i D(\rho_i\|\sigma_i) \tag{48}$$

对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$中任意有限或可数的算子集 $\{\rho_i\}$ 和 $\{\sigma_i\}$，只要$\sum_i \mathrm{Tr}\rho_i$和$\sum_i \mathrm{Tr}\sigma_i$ 有限，

记 $\mathfrak{T}_+^\infty(\mathcal{H})$为集合 $\{\{\varrho_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) | \sum_i \mathrm{Tr}\varrho_i < +\infty\}$。若序列 $\{\{\varrho_i^n\}_i\}_n \subset \mathfrak{T}_+^\infty(\mathcal{H})$收敛到 $\{\varrho_i^0\} \in \mathfrak{T}_+^\infty(\mathcal{H})$，即$\sum_i \varrho_i^n$在 $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$中收敛到 $\sum_i \varrho_i^0$，或者等价地，[7]

$$\lim_{n\to+\infty} \varrho_i^n = \varrho_i^0 \ \ \forall i \quad \text{and} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_i \mathrm{Tr}\varrho_i^n = \sum_i \mathrm{Tr}\varrho_i^0.$$

与命题 2 的证明中相同的论证，使我们能够从定理 1A 推导出以下结论

[7]这一等价关系由第 2.1 节中的引理 2 得出。

命题 3。函数 $(\{\rho_i\},\{\sigma_i\}) \mapsto \sum_i D(\rho_i\|\sigma_i) - D(\sum_i \rho_i \| \sum_i \sigma_i)$ 在该集合上是下半连续的

$$\left\{ (\{\rho_i\},\{\sigma_i\}) \in [\mathfrak{T}_+^\infty(\mathcal{H})]^{\times 2} \;\middle|\; D\left(\sum_i \rho_i \middle\| \sum_i \sigma_i\right) < +\infty \right\}.$$

这一结果与第 2.1 节中的引理 1 直接推出以下关于有限和可数和的量子相对熵收敛性的观察。

推论 4. 设 $\{\{\rho_i^n\}_{n\geq 0}\}_{i\in I}$ 和 $\{\{\sigma_i^n\}_{n\geq 0}\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中有限或可数个收敛算子序列，且满足 $\sum_{i\in I} D(\rho_i^0\|\sigma_i^0) < +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I} \mathrm{Tr}\rho_i^n = \sum_{i\in I} \mathrm{Tr}\rho_i^0 < +\infty \quad and \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I} \mathrm{Tr}\sigma_i^n = \sum_{i\in I} \mathrm{Tr}\sigma_i^0 < +\infty,$$

其中 $\rho_i^0 = \lim_{n\to+\infty} \rho_i^n$ 且 $\sigma_i^0 = \lim_{n\to+\infty} \sigma_i^n$, $i \in I$。则[8]

$$\mathrm{dj}\left(\left\{ D\left(\sum_{i\in I} \rho_i^n \middle\| \sum_i \sigma_i^n\right) \right\}_n \right) \leq \mathrm{dj}\left(\left\{ \sum_{i\in I} D(\rho_i^n\|\sigma_i^n) \right\}_n \right). \tag{49}$$

特别地，若

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I} D(\rho_i^n\|\sigma_i^n) = \sum_{i\in I} D(\rho_i^0\|\sigma_i^0) < +\infty \tag{50}$$

then

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(\sum_{i\in I} \rho_i^n \middle\| \sum_i \sigma_i^n\right) = D\left(\sum_{i\in I} \rho_i^0 \middle\| \sum_i \sigma_i^0\right) < +\infty.$$

注：(49) 式左侧定义良好，因为根据条件 $\sum_{i\in I} D(\rho_i^0\|\sigma_i^0) < +\infty$ 以及不等式 (48)，$D(\sum_{i\in I} \rho_i^0 \| \sum_i \sigma_i^0) < +\infty$。

若集合 I 是有限的，则条件（50）意味着

$$\lim_{n\to+\infty} D(\rho_i^n\|\sigma_i^n) = D(\rho_i^0\|\sigma_i^0) < +\infty \quad \forall i \in I. \tag{51}$$

因此，在这种情况下，命题 4 的最后一个断言与 [28]，中的推论 3 一致；该推论指出，有限求和可保持量子相对熵收敛。

如果集合 I 是可数的，那么 (51) 是 (50) 的必要条件，但不是充分条件。因此，在这种情况下，我们可以将 (50) 视为在可数求和下保持量子相对熵收敛的充分条件。它可以与 [16] 中推论 4 给出的条件进行比较。利用不等式 (48) 和 Dini 引理可以证明，前一个条件略弱于后一个条件。推论 4（本文中的）的优势在于一般关系 (49)，它为量子相对熵局部连续性的分析提供了额外的能力（参见第 4.1.6 节中命题 9 的证明，该证明基于第 4.1.5 节中推论 7 的主要断言，而推论 7 是利用 (49) 证明的）。

[8]符号 "dj" 在（12）中定义。

4 应用

4.1 量子相对熵及相关函数的局部连续性分析

4.1.1 Lindblad 引理的推广

关于量子相对熵收敛（局部连续性），最著名且应用最广泛的结果见 [7] 中的引理4。该引理指出:

$$\lim_{n\to+\infty} D(P_n\rho P_n\|P_n\sigma P_n) = D(\rho\|\sigma) \leq +\infty$$

对于任意算子 ρ 和 σ，其中 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$，$\{P_n\}$ 是任意一个非递减的投影算子序列，并在强算子拓扑下收敛至单位算子。第 3 节的结果推出了这一断言的以下加强版本。

命题 4. 若 ρ 和 σ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的算子，且满足 $D(\rho\|\sigma) < +\infty$，则

$$\lim_{n\to+\infty} D(A_n\rho A_n\|A_n\sigma A_n) = D(A_0\rho A_0\|A_0\sigma A_0) \tag{52}$$

对于任意在强算子拓扑下收敛至算子 $A_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 的序列 $\{A_n\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$。若对所有 n 均有 $A_0 = I_{\mathcal{H}}$ 和 $\|A_n\| \leq 1$，则无论条件 $D(\rho\|\sigma) < +\infty$ 是否成立，式（52）都成立。

证明。一致有界原理（见 [29, 定理 III.9]）意味着 $\sup_n \|A_n\| < +\infty$。因此，由恒等式 (15)，我们可以假设 $\|A_n\| \leq 1$ 对所有 $n \geq 0$成立。于是，$\Phi_n = A_n(\cdot)A_n$ 是一个强收敛于量子操作 $\Phi_0 = A_0(\cdot)A_0$ 的量子操作序列。因此，极限关系 (52) 由第 3.2 节中的推论 1B 得出。

当 $D(\rho\|\sigma) = +\infty$ 时，只要 $A_0 = I_{\mathcal{H}}$ 且对所有 n 都有 $\|A_n\| \leq 1$，(52) 即成立。这是由量子相对熵的下半连续性得到的，因为根据量子相对熵在量子操作 $\Phi_n = A_n(\cdot)A_n$ 下的单调性，有 $D(A_n\rho A_n\|A_n\sigma A_n) \leq D(\rho\|\sigma)$。□

注3。命题 4 的主要断言中的条件 $D(\rho\|\sigma) < +\infty$ 是必要的。事实上，设 ρ 和 σ 是在给定基 $\{|i\rangle\}$ 中可对角化的算子，且在 $\mathcal{H}$ 中满足 $D(\rho\|\sigma) = +\infty$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $A_n = \sum_{i>n} |i\rangle\langle i|$。那么，很容易看出，序列 $\{A_n\}$ 强收敛于 $A_0 = 0$,

$$D(A_n\rho A_n\|A_n\sigma A_n) = +\infty \quad \forall n, \quad \text{while} \quad D(A_0\rho A_0\|A_0\sigma A_0) = D(0\|0) = 0.$$

4.1.2 函数 $\Phi \mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$

在 $\rho_n = \rho_0$ 和 $\sigma_n = \sigma_0$ 的情形下，利用第 3.2 节中的推论1B，我们得到关于函数 $\Phi \mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 的性质的以下结果。

命题 5.若 ρ 和 σ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 中的算子，且 $D(\rho\|\sigma) < +\infty$，则函数 $\Phi \mapsto D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 在从 A 到任意配备强收敛拓扑的量子系统的所有量子操作集合上连续。

以下内容可以说明这一论断的实用性

例 1. 设 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是任意强连续的量子信道族（例如量子动力半群）。那么命题 5 推出函数

$$t \mapsto D(\Phi_t(\rho)\|\Phi_t(\sigma))$$

对于任意满足 $D(\rho\|\sigma)$ 有限的输入态 ρ 和 σ，该函数在 $\mathbb{R}_+$ 上连续。

若 $\{\Phi_t\}$ 是半群，则量子相对熵的一般性质表明，上述函数在 $\mathbb{R}_+$ 上单调不增且下半连续。这只能推出它在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续。因此，即使在这种情形下，关于该函数连续性的断言也并非显而易见。

4.1.3 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta) \mapsto D(\rho+\eta\|\sigma) - D(\rho\|\sigma+\theta)$

不等式 (17) 和 (18) 表明

$$D(\rho+\eta\|\sigma) \geq D(\rho\|\sigma+\theta) - \mathrm{Tr}\theta - \mathrm{Tr}\sigma$$

对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的任意算子 ρ、σ、η 和 θ。

定理 1A 推出以下结论

命题 6. 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta) \mapsto D(\rho+\eta\|\sigma) - D(\rho\|\sigma+\theta)$ 在集合上是下半连续的

$$\left\{(\rho,\sigma,\eta,\theta) \in [\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})]^{\times 4} \;\middle|\; D(\rho\|\sigma+\theta) < +\infty\right\}.$$

证明. 设 $\mathcal{H}_R$ 是一个二维希尔伯特空间。对于给定的算子 ρ、σ 和 θ，其中 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$，考虑算子

$$\hat{\rho} = \rho\otimes|0\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma} = \sigma\otimes|0\rangle\langle 0| + \theta\otimes|1\rangle\langle 1|$$

属于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_R)$，其中 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 是 $\mathcal{H}_R$中的一个基。于是恒等式 (20)意味着

$$D(\hat{\rho}\|\hat{\sigma}) = D(\rho\|\sigma) + D(0\|\theta) = D(\rho\|\sigma) + \mathrm{Tr}\theta,$$

而

$$D(\mathrm{Tr}_R\hat{\rho}\|\mathrm{Tr}_R\hat{\sigma}) = D(\rho\|\sigma+\theta).$$

因此

$$D(\rho\|\sigma) = D(\rho\|\sigma+\theta) + \Delta_{\mathrm{Tr}_R(\cdot)}(\hat{\rho},\hat{\sigma}) - \mathrm{Tr}\theta. \tag{53}$$

利用 Donald 恒等式 (21) 以及恒等式 (15) 和 (16)，我们得到

$$D(\rho+\eta\|\sigma) + f(\rho,\eta) = D(\rho\|\sigma) + D(\eta\|\sigma) + \ln 2\mathrm{Tr}(\rho+\eta) - \mathrm{Tr}\sigma, \tag{54}$$

其中 $f(\rho,\eta) = D(\rho\|\frac{1}{2}(\rho+\eta)) + D(\eta\|\frac{1}{2}(\rho+\eta))$。应用 [28]中的命题 2，很容易证明 $f(\rho,\eta)$ 是 $[\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})]^{\times 2}$上的连续函数。恒等式 (16) 和不等式 (17) 表明 $f(\rho,\eta) \leq \ln 2\mathrm{Tr}(\rho+\eta)$。

由 (53) 和 (54) 可得

$$D(\rho+\eta\|\sigma)-D(\rho\|\sigma+\theta)=D(\eta\|\sigma)+\Delta_{\mathrm{Tr}_{R(\cdot)}}(\hat{\rho},\hat{\sigma})+[\ln 2\mathrm{Tr}(\rho+\eta)-f(\rho,\eta)]-\mathrm{Tr}(\sigma+\theta)$$

对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中任意满足 $D(\rho\|\sigma+\theta)<+\infty$ 的 ρ、σ、η 和 θ。因此，该命题的断言可由量子相对熵的下半连续性、定理 1A 以及上文提及的函数 $f(\rho,\eta)$ 的连续性得出。 □

命题 6，量子相对熵的下半连续性和引理 1 推出以下结论

推论 5. 设 $\{\rho_n^1\}$、$\{\rho_n^2\}$、$\{\sigma_n^1\}$ 和 $\{\sigma_n^2\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的算子序列，分别收敛到算子 ρ_0^1、ρ_0^2、σ_0^1 和 σ_0^2，且对所有 $n\geq 0$，均有 $\rho_n^2\leq\rho_n^1$ 和 $\sigma_n^1\leq\sigma_n^2$。若 $D(\rho_0^1\|\sigma_0^1)<+\infty$，则 $D(\rho_0^2\|\sigma_0^2)<+\infty$，且 [9]

$$\mathrm{dj}(\{D(\rho_n^2\|\sigma_n^2)\})\leq\mathrm{dj}(\{D(\rho_n^1\|\sigma_n^1)\}).$$

特别地，若

$$\lim_{n\to+\infty}D(\rho_n^1\|\sigma_n^1)=D(\rho_0^1\|\sigma_0^1)<+\infty$$

then

$$\lim_{n\to+\infty}D(\rho_n^2\|\sigma_n^2)=D(\rho_0^2\|\sigma_0^2)<+\infty.$$

推论 5 的最后一个断言与 [28] 中命题 2 的断言一致；该命题是通过相当间接且复杂的方法证明的。

4.1.4 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta)\mapsto\mathrm{Tr}(\rho+\eta)(-\ln\sigma)-\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))$

对数的算子单调性和显然的不等式 $\sigma\leq I_{\mathcal{H}}\mathrm{Tr}\sigma$ 表明

$$\mathrm{Tr}(\rho+\eta)(-\ln\sigma)\geq\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))-\mathrm{Tr}\eta\ln\mathrm{Tr}\sigma$$

对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的任意算子 ρ、σ、η 和 θ。[10]

命题 6 推出如下结论

命题 7. 函数 $(\rho,\sigma,\eta,\theta)\mapsto\mathrm{Tr}(\rho+\eta)(-\ln\sigma)-\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))$ 在集合上是下半连续的

$$\left\{(\rho,\sigma,\eta,\theta)\in[\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})]^{\times 4}\mid\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))<+\infty\right\}.$$

证明。根据量子相对熵和扩展冯·诺伊曼熵的下半连续性，函数 $(\sigma,\eta)\mapsto\mathrm{Tr}\eta(-\ln\sigma)=D(\eta\|\sigma)+S(\eta)+\mathrm{Tr}\eta(1-\ln\mathrm{Tr}\eta)-\mathrm{Tr}\sigma$ 在集合 $[\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})]^{\times 2}$ 上是下半连续的。因此，要证明该命题，只需证明函数 $(\rho,\sigma,\theta)\mapsto\mathrm{Tr}\rho(-\ln\sigma)-\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))$ 在所有满足 $\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))<+\infty$ 的三元组 (ρ,σ,θ) 所组成的集合上是下半连续的。

[9] 符号 "dj" 在 (12) 中定义。[10] 根据 (8)，我们假设对于任意非零 $\varrho\in\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$，$0\ln 0=0$ 且 $\mathrm{Tr}\varrho\ln 0=+\infty$。

由于 $\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))$ 的有限性意味着熵 $S(\rho)$ 的有限性，利用表示式 (14)，我们得到

$$\mathrm{Tr}\rho(-\ln\sigma)-\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))=D(\rho\|\sigma)-D(\rho\|\sigma+\theta)+\mathrm{Tr}\theta.$$

由命题 6 可知，函数 $(\rho,\sigma,\theta)\mapsto D(\rho\|\sigma)-D(\rho\|\sigma+\theta)$ 在满足 $D(\rho\|\sigma+\theta)<+\infty$ 的所有三元组 (ρ,σ,θ) 构成的集合上是下半连续的；该集合包含所有满足 $\mathrm{Tr}\rho(-\ln(\sigma+\theta))<+\infty$ 的三元组 (ρ,σ,θ) 构成的集合。 □

推论 6. 设 $\{\rho_n^1\}$, $\{\rho_n^2\}$, $\{\sigma_n^1\}$ 和 $\{\sigma_n^2\}$ 是 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的算子序列，分别收敛到算子 ρ_0^1, ρ_0^2, σ_0^1 和 σ_0^2，并满足对于所有 $n\geq 0$, $\rho_n^1\geq\rho_n^2$ 和 $\sigma_n^1\leq\sigma_n^2$。若 $\mathrm{Tr}\rho_0^1(-\ln\sigma_0^1)<+\infty$，则 $\mathrm{Tr}\rho_0^2(-\ln\sigma_0^2)<+\infty$，且 [11]

$$\mathrm{dj}(\{\mathrm{Tr}\rho_n^2(-\ln\sigma_n^2)\})\leq\mathrm{dj}(\{\mathrm{Tr}\rho_n^1(-\ln\sigma_n^1)\}).$$

特别是，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Tr}\rho_n^1(-\ln\sigma_n^1)=\mathrm{Tr}\rho_0^1(-\ln\sigma_0^1)<+\infty$$

then

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Tr}\rho_n^2(-\ln\sigma_n^2)=\mathrm{Tr}\rho_0^2(-\ln\sigma_0^2)<+\infty.$$

在 [28, 附录] 中给出的推论 6 的直接证明需要大量技术工作。

4.1.5 函数 $(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\})\mapsto D\left(\sum_i p_i\rho_i\|\sum_i q_i\sigma_i\right)$

利用量子相对熵的联合凸性（以不等式 (48) 的形式）以及恒等式 (15) 和 (16)，很容易证明

$$D\left(\sum_i p_i\rho_i\middle\|\sum_i q_i\sigma_i\right)\leq\sum_i p_iD(\rho_i\|\sigma_i)+D_{\mathrm{KL}}(\{p_i\}\|\{q_i\})$$

对于任意由 $\{p_i,\rho_i\}$ 和 $\{q_i,\sigma_i\}$ 构成的量子态系综，取自 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$，其中

$$D_{\mathrm{KL}}(\{p_i\}\|\{q_i\})\doteq\sum_i p_i\ln(p_i/q_i)$$

是概率分布 $\{p_i\}$ 和 $\{q_i\}$之间的 Kullback-Leibler 散度（假设 $D_{\mathrm{KL}}(\{p_i\}\|\{q_i\})=+\infty$，若存在 i 使得 $p_i\neq 0$ 和 $q_i=0$。）[31]。事实上，利用恒等式 (15) 和 (16)，很容易证明

$$\sum_i p_iD(\rho_i\|\sigma_i)+D_{\mathrm{KL}}(\{p_i\}\|\{q_i\})=\sum_i D(p_i\rho_i\|q_i\sigma_i).\tag{55}$$

定理 1A 推出以下结论

[11]符号“dj”在（12）中定义。

命题 8. 非负函数

$$(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\})\mapsto\sum_i p_iD(\rho_i\|\sigma_i)+D_{\mathrm{KL}}(\{p_i\}\|\{q_i\})-D\left(\sum_i p_i\rho_i\middle\|\sum_i q_i\sigma_i\right)$$

在集合上是下半连续的

$$\left\{(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\})\in\mathcal{P}(\mathcal{H})\times\mathcal{P}(\mathcal{H})\,\middle|\,D\left(\sum_i p_i\rho_i\middle\|\sum_i q_i\sigma_i\right)<+\infty\right\}$$

关于 $\mathcal{P}(\mathcal{H})\times\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中的 D_0-收敛。[12]

证明. 只需使用 (55)，并应用第 3.3.2 节中的命题 3。 □

命题 8 使我们能够推广第 3.3.1 节中推论 3 的断言。

推论 7. 设 $\{\{p_i^n,\rho_i^n\}\}_n$ 和 $\{\{q_i^n,\sigma_i^n\}\}_n$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{H})D_0$-收敛到系综 $\{p_i^0,\rho_i^0\}$ 和 $\{q_i^0,\sigma_i^0\}$ 的系综序列，且满足 $\sum_i p_i^0D(\rho_i^0\|\sigma_i^0)<+\infty$ 和 $D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^0\}\|\{q_i^0\})<+\infty$。那么 [13]

$$\mathrm{dj}\left(\left\{D\left(\sum_i p_i^n\rho_i^n\middle\|\sum_i q_i^n\sigma_i^n\right)\right\}\right)\le\mathrm{dj}\left(\left\{\sum_i p_i^nD(\rho_i^n\|\sigma_i^n)+D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\}\|\{q_i^n\})\right\}\right).$$

特别地，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_i p_i^nD(\rho_i^n\|\sigma_i^n)=\sum_i p_i^0D(\rho_i^0\|\sigma_i^0)<+\infty \tag{56}$$

and

$$\lim_{n\to+\infty}D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\}\|\{q_i^n\})=D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^0\}\|\{q_i^0\})<+\infty \tag{57}$$

then

$$\lim_{n\to+\infty}D\left(\sum_i p_i^n\rho_i^n\middle\|\sum_i q_i^n\sigma_i^n\right)=D\left(\sum_i p_i^0\rho_i^0\middle\|\sum_i q_i^0\sigma_i^0\right)<+\infty. \tag{58}$$

若 $\rho_i^n\rho_j^n=\rho_i^n\sigma_j^n=\sigma_i^n\sigma_j^n=0$ 对所有 $i\neq j$ 及任意 n 成立，则 (56) 和 (57) 是 (58) 的必要条件。

证明。根据第 2.1 节中的引理 1，主要断言可由命题 8 以及函数 $(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\})\mapsto D(\sum_i p_i\rho_i\|\sum_i q_i\sigma_i)$ 的下半连续性推出。

若 $\rho_i^n\rho_j^n=\rho_i^n\sigma_j^n=\sigma_i^n\sigma_j^n=0$ 对所有 $i\neq j$ 和任意 n，恒等式 (20) 蕴含 th at

$$D\left(\sum_i p_i^n\rho_i^n\middle\|\sum_i q_i^n\sigma_i^n\right)=\sum_i p_i^nD(\rho_i^n\|\sigma_i^n)+D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\}\|\{q_i^n\})\quad\forall n.$$

[12] $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有离散态系综的集合。D_0-收敛在第 3.3.1 节中定义。[13] 符号 "dj" 在 (12) 中定义。

因此，根据第 2.1 节的引理 1，最后一个断言可由函数 $(\{p_i,\rho_i\},\{q_i,\sigma_i\})\mapsto\sum_i p_i D(\rho_i\|\sigma_i)$ 和 Kullback-Leibler 散度的下半连续性得出。□

例 2. 设 $\{\rho_i\}$ 和 $\{\sigma_i\}$ 是量子态的可数集合，满足 $\sup_i D(\rho_i\|\sigma_i)<+\infty$。若 $\{\{p_i^n\}_i\}_n$ 和 $\{\{q_i^n\}_i\}_n$ 是分别收敛到概率分布 $\{p_i^0\}$ 和 $\{q_i^0\}$ 的概率分布序列，且满足条件 (57)，则由推论 7可知

$$\lim_{n\to+\infty} D\left(\sum_i p_i^n\rho_i\middle\|\sum_i q_i^n\sigma_i\right)=D\left(\sum_i p_i^0\rho_i\middle\|\sum_i q_i^0\sigma_i\right)<+\infty.$$

4.1.6 函数 $(\mu,\nu)\mapsto D\left(\int\rho(x)\mu(dx)\|\int\rho(x)\nu(dx)\right)$

假设 $\rho(x)$ 是定义在可分度量空间X 上的、取值于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 的可测函数，并且 $\{\mu_n\}$ 和 $\{\nu_n\}$ 是定义在 X 上的概率测度序列，分别（以某种意义）收敛到概率测度 μ_0 和 ν_0，满足

$$\lim_{n\to+\infty} D_{\mathrm{KL}}(\mu_n\|\nu_n)=D_{\mathrm{KL}}(\mu_0\|\nu_0)<+\infty, \tag{59}$$

其中

$$D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu)=\int_X\ln\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)\mu(dx)$$

是概率测度 μ 和 ν之间的 Kullback-Leibler 散度，$\frac{d\mu}{d\nu}$ 表示 μ 关于 ν 的拉东-尼科迪姆导数（若 μ 不关于 ν绝对连续，则 $D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu)=+\infty$）[31, 32, 33]。

受第 4.1.5 节中例 2（其中 $\sigma_i=\rho_i$）的启发，我们猜想条件 (59) 蕴含

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} D\left(\int_X\rho(x)\mu_n(dx)\middle\|\int_X\rho(x)\nu_n(dx)\right)\\&=D\left(\int_X\rho(x)\mu_0(dx)\middle\|\int_X\rho(x)\nu_0(dx)\right)<+\infty.\end{aligned} \tag{60}$$

利用推论 7 的主要断言和一种简单的逼近技巧，可以证明以下命题

命题 9. 设 $\rho(x)$ 是定义在可分度量空间 X 上的取值于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 的连续函数。设 $\{\mu_n\}$ 和 $\{\nu_n\}$ 是概率测度序列，它们按集合收敛至概率测度 μ_0 和 ν_0，且对于所有 $n\geq0$，μ_n 关于ν_n 绝对连续，并且拉东-尼科迪姆导数族 $\left\{\frac{d\mu_n}{d\nu_n}\right\}_{n\geq0}$ 在 X 上一致有界且一致等度连续，即

$$\sup_{n\geq0}\sup_{x\in X}\frac{d\mu_n}{d\nu_n}(x)<+\infty,\quad\sup_{n\geq0}\sup_{d(x_1,x_2)\leq\varepsilon}\left|\frac{d\mu_n}{d\nu_n}(x_1)-\frac{d\mu_n}{d\nu_n}(x_2)\right|=o(1)\quad as\ \varepsilon\to0, \tag{61}$$

[14]它 m 意味着对于任意的 X [35 的博雷尔子集 A，$\mu_n(A)$ 和 $\nu_n(A)$ 趋于 $\mu_0(A)$ 和 $\nu_0(A)$].

其中， $d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的度量，那么 (59) 蕴含 (60)。

证明。对于给定的 $\varepsilon > 0$，取 X 的一个可数分解 $\{X_i\}$，使其由互不相交的博雷尔子集组成，且直径不超过 ε。

对于每个 n，考虑 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 中状态的系综 $\{p_i^n, \rho_i^n\}$ 和 $\{q_i^n, \sigma_i^n\}$，其中

$$p_i^n = \mu_n(X_i), \quad \rho_i^n = \frac{1}{p_i^n}\int_{X_i} \rho(x)\mu_n(dx), \quad q_i^n = \nu_n(X_i), \quad \sigma_i^n = \frac{1}{q_i^n}\int_{X_i} \rho(x)\nu_n(dx).$$

若 $\mu_n(X_i) = 0$（相应地，$\nu_n(X_i) = 0$），我们假设 $p_i^n = 0$ 和 $\rho_i^n = \tau$（相应地，$q_i^n = 0$ 和 $\sigma_i^n = \tau$），其中 τ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 中的任意量子态。注意，根据条件，$q_i^n = 0$蕴含 $p_i^n = 0$。

序列 $\{\mu_n\}$和 $\{\nu_n\}$ 的集集收敛到概率测度μ_0 和 ν_0，这意味着序列 $\{\{p_i^n, \rho_i^n\}_i\}_n$ 和 $\{\{q_i^n, \sigma_i^n\}_i\}_n$ 在 D_0 意义下收敛到系综 $\{p_i^0, \rho_i^0\}$ 和 $\{q_i^0, \sigma_i^0\}$。[15]

为简化记号，将 X 上的函数 $\frac{d\mu_n}{d\nu_n}$ 记作 f_n。条件 (61) 蕴含

$$\sup_{n\geq 0}\sup_{x\in X} f_n(x) \leq b \quad \text{and} \quad \sup_{n\geq 0}\sup_{d(x_1,x_2)\leq\varepsilon} |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \alpha(\varepsilon), \tag{62}$$

其中 $b \in \mathbb{R}_+$，而 $\alpha(\varepsilon)$ 是一个当 $\varepsilon \to 0^+$ 时趋于零的函数。

令 $\omega_{\eta,\,b}(\varepsilon) \doteq \sup\{|\eta(x_1) - \eta(x_2)| \, x_1, x_2 \in [0,b], |x_1 - x_2| \leq \varepsilon\}$ 为函数 $\eta(x) = -x\ln x$ 在 $[0,b]$ 上的连续模（假设 $\eta(0) = 0$）。

我们将证明

$$\sum_i p_i^n D(\rho_i^n \| \sigma_i^n) \leq \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)) \quad \forall n \geq 0 \tag{63}$$

and

$$0 \leq D_{\mathrm{KL}}(\mu_n \| \nu_n) - D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\} \| \{q_i^n\}) \leq \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)) \quad \forall n \geq 0. \tag{64}$$

对任意给定的 $n \geq 0$，令 $a_i^n = \inf_{x\in X_i} f_n(x)$，且 $b_i^n = \sup_{x\in X_i} f_n(x)$。由于对每个 i，集合 X_i 的直径不超过 ε，由 (62) 可得

$$b_i^n - a_i^n \leq \alpha(\varepsilon). \tag{65}$$

由于 $p_i = \mu_n(X_i) = \int_{X_i} f_n(x)\nu_n(dx)$ 且 $q_i = \nu_n(X_i)$，因此有

$$a_i^n \leq p_i^n/q_i^n \leq b_i^n \quad \forall i : q_i^n \neq 0. \tag{66}$$

由 (65) 和 (66) 可得

$$\sup_{x\in X_i} |f_n(x) - p_i^n/q_i^n| \leq \alpha(\varepsilon) \quad \forall i : q_i^n \neq 0. \tag{67}$$

[15] D_0-收敛在第 3.3.1 节中定义。

为证明 (63)，注意到对于每个 i， ν_n/q_i^n 都是 X_i 上的概率测度，且 n 使得 $q_i^n \neq 0$。因此，利用下文的引理 5 以及恒等式 (15) 和 (16)，我们得到

$$\begin{aligned} p_i^n D(\rho_i^n \| \sigma_i^n) &= p_i^n D\left(\int_{X_i} \frac{q_i^n}{p_i^n} \rho(x) f_n(x) \frac{\nu_n(dx)}{q_i^n} \,\middle\|\, \int_{X_i} \rho(x) \frac{\nu_n(dx)}{q_i^n} \right) \\ &\leq \int_{X_i} D(q_i^n \rho(x) f_n(x) \| p_i^n \rho(x)) \frac{\nu_n(dx)}{q_i^n} = \int_{X_i} f_n(x) \ln \left(\frac{q_i^n f_n(x)}{p_i^n} \right) \nu_n(dx) \\ &= \int_{X_i} \left(\eta\left(\frac{p_i^n}{q_i^n} \right) - \eta(f_n(x)) \right) \nu_n(dx) \leq q_i^n \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)) \end{aligned}$$

对于每个满足 $p_i^n \neq 0$ 的 i 和 n，其中最后一个不等式由 (67) 得出。该不等式蕴含 (63)。

(64) 中的左侧不等式由 Kullback-Leibler 散度在正线性映射 $\mu \mapsto \{\mu(X_i)\}_i$ 下的单调性得出。该映射将 X 上所有有符号博雷尔测度构成的空间映射到由 X 的分解 $\{X_i\}_i$ 所确定的空间 ℓ_1。

为证明 (64) 中的右侧不等式，注意到 (67) 蕴含

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{KL}}(\mu_n \| \nu_n) = -\int_X \eta(f_n(x)) \nu_n(dx) &\leq \sum_i \int_{X_i} \left(-\eta\left(\frac{p_i^n}{q_i^n} \right) + \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)) \right) \nu_n(dx) \\ &= D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\} \| \{q_i^n\}) + \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)). \end{aligned}$$

不等式 (63) 和 (64) 表明

$$\sup_{n \geq 0} \left| \sum_i p_i^n D(\rho_i^n \| \sigma_i^n) + D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\} \| \{q_i^n\}) - D_{\mathrm{KL}}(\mu_n \| \nu_n) \right| \leq \omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)).$$

因此，由条件 (59) 可得

$$\mathrm{dj} \left(\left\{ \sum_i p_i^n D(\rho_i^n \| \sigma_i^n) + D_{\mathrm{KL}}(\{p_i^n\} \| \{q_i^n\}) \right\}_n \right) \leq 2\omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)).$$

因此，根据第 4.1.5 节中的推论 7，我们有

$$\mathrm{dj} \left(\left\{ D\left(\sum_i p_i^n \rho_i^n \,\middle\|\, \sum_i q_i^n \sigma_i^n \right) \right\}_n \right) \leq 2\omega_{\eta,b}(\alpha(\varepsilon)).$$

由于通过选择足够小的 ε，$\omega_{\eta,\ b}(\alpha(\varepsilon))$ 可以任意小，因此注意到

$$\sum_i p_i^n \rho_i^n = \int_X \rho(x) \mu_n(dx) \quad \text{and} \quad \sum_i q_i^n \sigma_i^n = \int_X \rho(x) \nu_n(dx). \ \square$$

注 4. 命题 9 中序列 $\{\mu_n\}$ 和 $\{\nu_n\}$ 对测度 μ_0 和 ν_0 的集集收敛，可以放宽为弱收敛，条件是对于任意 $\varepsilon > 0$，存在空间 X 的一个可数分解 $\{X_i\}$，将其分为互不相交的博雷尔子集，且其直径为 $\leq \varepsilon$，使得对于所有 i，都有 $\mu_0(\partial X_i) = \nu_0(\partial X_i) = 0$，其中$\partial X_i$ 是 X_i的边界。由上述证明和 Portmanteau 定理 [34, 35]可得此结论。

条件 (61) 相当严格，但似乎可以通过在不等式 (63) 和 (64) 的证明中采用更精细的估计来放宽。

例 3. 设 $\mathcal{H}$ 是描述 n 模量子振子的希尔伯特空间，$\mathfrak{S}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{H})$ 是经典态的集合，即相干态族 $\{|\bar{z}\rangle\langle\bar{z}|\}_{\bar{z}\in\mathbb{C}^n}$ 的凸闭包 [12, 36]。$\mathfrak{S}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{H})$ 中的每个状态 ρ 都可以表示为

$$\rho = \int_{\mathbb{C}^n} |\bar{z}\rangle\langle\bar{z}|\mu_\rho(dz_1...dz_n), \quad \bar{z} = (z_1, ..., z_n), \tag{68}$$

其中 μ_ρ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的博雷尔概率测度，可称为 ρ 的表示测度。表示式 (68) 是 Glauber-Sudarshan P-表示，因为通常它写作

$$\rho = \int_{\mathbb{C}^n} |\bar{z}\rangle\langle\bar{z}|P_\rho(\bar{z})dz_1...dz_n,$$

其中 P_ρ 是量子态 ρ 的 P-函数，在这种情况下它是非负的，可以视为 $\mathbb{C}^n$ 上的广义概率密度函数（与标准概率密度不同，函数 P_ρ 可能是奇异的，因为测度 μ_ρ 相对于 $\mathbb{C}^n$ 上的勒贝格测度可能不是绝对连续的） [37, 38]。

命题 9 与 $X = \mathbb{C}^n$ 和 $\rho(\bar{z}) = |\bar{z}\rangle\langle\bar{z}|$ 以及备注 4，借助以下性质，使我们能够得到量子相对熵在 n模量子振子的经典态之间收敛的一个充分条件：对于任意收敛到经典态 ρ_0 的经典态序列 $\{\rho_n\}$，都存在一个子序列 $\{\rho_{n_k}\}$ 以及一个由定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的博雷尔概率测度构成的序列 $\{\mu_k\}$，该序列弱收敛到博雷尔概率测度μ_0，使得对于所有 k，μ_k 都是 ρ_{n_k} 的表示测度，并且 μ_0 是 ρ_0的表示测度。此性质可由 [39]中的命题 2 得出。

以下　　引理给出了量子相对熵联合凸性的一个“连续”版本。[16]

引理 5. 设 $\rho(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是定义在可分度量空间 X上取值于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 的连续函数。那么

$$D\left(\int_X \rho(x)\mu(dx)\middle\|\int_X \sigma(x)\mu(dx)\right) \leq \int_X D(\rho(x)\|\sigma(x))\mu(dx) \tag{69}$$

对于 X上的任意博雷尔概率测度 μ。

注：由于量子相对熵是下半连续的，函数 $x \mapsto D(\rho(x)\|\sigma(x))$ 在 X 上下半连续，因此相对于 X 上的博雷尔 σ-代数可测。所以，式 (69) 右侧的表达式定义良好。

[16]我确信文献中可以找到引理 5 中的断言。若能提供相应的参考文献，我将不胜感激。

证明。量子相对熵的联合凸性意味着，对于任意纯原子（离散）概率测度 μ，式 (69) 都成立。也就是说，该测度具有 $\sum_i p_i\delta(x_i)$ 的形式，其中 $\{p_i\}$ 是概率分布，$\{x_i\}$ 是 X 的有限或可数子集，而 $\delta(x)$ 表示集中于 x 的狄拉克测度。

对于给定的定义在 X 上的概率测度 μ，很容易构造出一个定义在 X 上的纯原子概率测度序列 $\{\mu_n\}$，使其弱收敛到定义在 X 上的给定概率测度 μ，满足

$$\int_X D(\rho(x)\|\sigma(x))\mu_n(dx) \leq \int_X D(\rho(x)\|\sigma(x))\mu(dx) \quad \forall n. \tag{70}$$

利用弱收敛的定义（参见 [34, 35]）和第 2.1 节中的引理 2，很容易证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X \rho(x)\mu_n(dx) = \int_X \rho(x)\mu(dx) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_X \sigma(x)\mu_n(dx) = \int_X \sigma(x)\mu(dx)$$

因此，量子相对熵的下半连续性表明

$$\liminf_{n\to+\infty} D\left(\int_X \rho(x)\mu_n(dx)\middle\|\int_X \sigma(x)\mu_n(dx)\right) \geq D\left(\int_X \rho(x)\mu(dx)\middle\|\int_X \sigma(x)\mu(dx)\right).$$

由于 (69) 对 $\mu = \mu_n$ 成立，最后一个不等式与 (70) 推出 (69)。 □

4.1.7 量子互信息

本文以一般形式证明的函数 $(\rho,\sigma) \mapsto D(\rho\|\sigma) - D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 的下半连续性，先前已在特殊情形下得到证明：当 ρ 是复合量子系统 $A_1...A_n$，$\sigma = \rho_{A_1}\otimes...\otimes\rho_{A_n}$ 的量子态，且 Φ 是局部信道 [19] 时。在此情形下，$D(\rho\|\sigma) = I(A_1:...:A_n)_\rho$ 是量子态 ρ 的量子互信息（QMI），它描述了该量子态的总关联 [40, 10]。

局部信道作用下量子互信息（QMI）减小的下半连续性，与量子条件互信息（23）的下半连续性有关（这是由 Stinespring 表示所致）；后者已在 [27, 第 6] 节中得到证明。在 [19]第 5 节中，这一性质被用于为量子互信息（条件和无条件）以及压缩纠缠推导新的收敛条件，其有效性通过具体示例得以展示。所有这些结果也都可以视为第 3.1 节中定理1的应用。

这里我们提出一个在 [19] 中未提及的观察结果。

[17]对每个 n，将可分空间 X作可数分解 $\{X_i^n\}$，使其分为直径为 $\leq 1/n$ 的不相交子集；在每个子集中选取一个合适的点 x_i，再利用 Portmanteau 定理证明测度序列 $\mu_n = \sum_i \mu(X_i)\delta(x_i)$ 弱收敛到测度 μ [34, 35]，即可完成此事。

命题 10。设 $A_1...A_n$ 是一个 n 方量子系统，$n > 2$，且 $B_1 = A_{i_1^1}...A_{i_{k(1)}^1}$、...、$B_m = A_{i_1^m}...A_{i_{k(m)}^m}$ 是由 $[1,n]\cap\mathbb{N}$ 的不相交子集 $\{i_1^1,..,i_{k(1)}^1\}$、...、$\{i_1^m,..,i_{k(m)}^m\}$ 所确定的子系统。$m < n$.[18]

非负函数 $\rho \mapsto I(A_1 : ... : A_n)_\rho - I(B_1 : ... : B_m)_\rho$ 在该集合上是下半连续的

$$\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A_1..A_n}) \,|\, I(B_1 : ... : B_m)_\rho < +\infty\}\,. \tag{71}$$

若函数 $\rho \mapsto I(A_1 : ... : A_n)_\rho$ 在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A_1..A_n})$ 的某个子集 $\mathfrak{S}_0$ 上连续，则函数 $\rho \mapsto I(B_1 : ... : B_m)_\rho$ 在 $\mathfrak{S}_0$ 上连续。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\bigcup_{j=1}^m \{i_1^j,..,i_{k\ (j)}^j\} = [1,n']\cap\mathbb{N}$，其中某个 $n' \le n$.

定理 1A 蕴含函数 $\rho \mapsto I(A_1 : ... : A_n)_\rho - I(A_1 : ... : A_{n'})_\rho$ 在该集合上是下半连续的

$$\mathfrak{A} = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A_1..A_n}) \,|\, I(A_1 : ... : A_{n'})_\rho < +\infty\}\,.$$

由于

$$I(A_1 : ... : A_{n'})_\rho = I(B_1 : ... : B_m)_\rho + \sum_{j=1}^m I(A_{i_1^j} : ... : A_{i_{k(j)}^j})_\rho, \tag{72}$$

量子互信息的下半连续性意味着函数 $\rho \mapsto I(A_1 : ... : A_{n'})_\rho - I(B_1 : ... : B_m)_\rho$ 在（71）中的集合上是下半连续的，我们将该集合记为 $\mathfrak{B}$。

因此，函数 $f(\rho) = I(A_1 : ... : A_n)_\rho - I(B_1 : ... : B_m)_\rho$ 在集合 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 上是下半连续的。

显然，对于任意 ρ 属于 $\mathfrak{B}\setminus\mathfrak{A}$，都有 $f(\rho) = +\infty$。因此，要证明 f 在 $\mathfrak{B}$ 上的下半连续性，只需证明对于任意收敛到量子态 $\rho_0 \in \mathfrak{B}\setminus\mathfrak{A}$ 的序列 $\{\rho_n\} \subset \mathfrak{A}$，$\lim_{n\to+\infty} f(\rho_n) = +\infty$。注意到恒等式（72）意味着

$$f(\rho_n) \ge \sum_{j=1}^m I(A_{i_1^j} : ... : A_{i_{k(j)}^j})_{\rho_n} \quad \forall n,$$

由于量子互信息的下半连续性，该不等式右侧趋于 $\sum_{j=1}^m I(A_{i_1^j} : ... : A_{i_{k(j)}^j})_{\rho_0} = +\infty$。

该命题的第二个断言由第 2.1 节中的引理 1 从第一个断言推出。 □

根据命题 10，“大型”复合系统 $A_1..A_n$ 中总关联的局部连续性（收敛）意味着任意复合系统 $B_1...B_m$ 中总关联的局部连续性（收敛）；该系统的各个部分 B_1,..,B_m 是通过合并子系统 A_1,..,A_n 中的若干个而得到的。例如，$I(A : B : C)$ 的局部连续性意味着 $I(A : B)$、$I(B : C)$、$I(A : C)$、$I(A : BC)$、$I(AB : C)$ 和 $I(AC : B)$ 的局部连续性。

[18] We do not assume that $B_1...B_m = A_1...A_n$ in general.

备注 5. 命题 10 的断言对多体量子条件互信息也成立，即将函数 $I(A_1:...:A_n)_\rho$ 和 $I(B_1:...:B_m)_\rho$ 分别替换为 $I(A_1:...:A_n|C)_\rho$ 和 $I(B_1:...:B_m|C)_\rho$ 后，结论仍然成立。利用 [19] 中的定理 3 以及多体量子条件互信息的下半连续性 [27]，采用类似的论证即可证明这一点。

4.1.8 局部测量的信息增益

由正算子值测度（POVM） $\mathbb{M}=\{M_i\}$ 描述的量子测量在量子态 ρ 下、作用于 $\mathcal{H}_A$ 上的信息增益 $\mathrm{IG}(\mathbb{M},\rho)$，可定义为信道 $\Psi_{\mathbb{M}}(\rho)=\sum_i[\mathrm{Tr}M_i\rho]|i\rangle\langle i|$在量子态 ρ下从 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$到 $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_E)$的互信息 $I(\Psi_{\mathbb{M}},\rho)$，其中 $\{|i\rangle\}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_E$ 中的一组基，且 $\dim\mathcal{H}_E=\mathrm{card}\{M_i\}$ [41, 42]，即

$$\mathrm{IG}(\mathbb{M},\rho)=I(E:R)_{\Psi_{\mathbb{M}}\otimes\mathrm{Id}_R(\bar{\rho})},$$

其中， $\bar{\rho}$ 是量子态 ρ在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR})$中的一个纯化。

现在假设 ρ 是双体系统 AB 的一个量子态，且 $\mathbb{M}=\{M_i\}$ 是作用于 $\mathcal{H}_A$上的正算子值测度（POVM）。那么， $\mathbb{M}\otimes I_B=\{M_i\otimes I_B\}$是作用于 $\mathcal{H}_{AB}$上的正算子值测度，描述对系统 AB的量子态的部分 A 实施的局部测量。容易看出

$$\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho)\leq\mathrm{IG}(\mathbb{M},\rho_A).$$

事实上，由于 $\Psi_{\mathbb{M}\otimes I_B}=\Psi_{\mathbb{M}}\circ\Theta$，其中 $\Theta=\mathrm{Tr}_B(\cdot)$，信道互信息的第二链式法则（参见 [12, 13]）蕴含

$$\mathrm{IG}(\mathbb{M},\rho_A)-\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho)=I(\Psi_{\mathbb{M}},\Theta(\rho))-I(\Psi_{\mathbb{M}}\circ\Theta,\rho)\geq 0. \tag{73}$$

第 3.1 节中的定理 1A 蕴含如下结果

命题 11。设 $\mathbb{M}=\{M_i\}$ 是 $\mathcal{H}_A$ 上的正算子值测度。则非负函数

$$\rho\mapsto\mathrm{IG}(\mathbb{M},\rho_A)-\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho)$$

在集合 $\{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})\mid\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho)<+\infty\}$ 上是下半连续的。

证明。纯化理论的基本结果（参见 [12, 13]）表明，对于 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ 中收敛到量子态 ρ_0 的任意状态序列 $\{\rho_n\}$，存在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{ABR})$ 中收敛到纯态 $\bar{\rho}_0$ 的纯态序列 $\{\bar{\rho}_n\}$，使得对所有 $n\geq 0$ 都有 $\mathrm{Tr}_R\bar{\rho}_n=\rho_n$。

利用这一观察、表达式 (24) 以及等式 (73)，很容易从定理 1A 得到该命题的断言。□

推论 8. 设 $\mathbb{M}=\{M_i\}$ 是 $\mathcal{H}_A$ 上的一个正算子值测度。如果 $\{\rho_n\}$ 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$ 中收敛到量子态 ρ_0 的一个序列，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{IG}(\mathbb{M},[\rho_n]_A)=\mathrm{IG}(\mathbb{M},[\rho_0]_A) \tag{74}$$

then

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho_n)=\mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho_0). \tag{75}$$

极限关系 (74) 成立的条件是

$$\lim_{n\to+\infty}S([\rho_n]_A)=S([\rho_0]_A)<+\infty.$$

证明。第一个断言由第 2.1 节中的命题 11 和引理 1 得出，这是由于函数 $\rho\mapsto \mathrm{IG}(\mathbb{M}\otimes I_B,\rho)$ 的下半连续性。第二个断言由 [19] 中的命题 6A 得出。 □

命题 6A 中量子测量的信息增益的收敛条件表明，在以下任一条件下，(75) 成立：$\mathrm{card}\mathbb{M}<+\infty$ 或

$$\lim_{n\to+\infty}S(\rho_n)=S(\rho_0)<+\infty.$$

推论 8 给出了 (75) 的其他充分条件，这些条件通过考虑正算子值测度 $\mathbb{M}\otimes I_B$ 的局部结构而得到。

4.1.9 量子条件相对熵

复合系统 AB 的状态 ρ 和 σ 之间的量子条件相对熵由 Capel、Lucia 和 Perez-Garcia 定义为

$$D_A(\rho\|\sigma)=D(\rho\|\sigma)-D(\rho_B\|\sigma_B).$$

在引入这一概念的文章 [20], 中，可以找到它的许多有趣性质。量子相对熵的单调性表明，对于任意 ρ 和 σ，$D_A(\rho\|\sigma)\geq 0$ 。

第 3 节中的定理1和推论 1直接推出以下结论

命题 12. 非负函数 $(\rho,\sigma)\mapsto D_A(\rho\|\sigma)$ 在集合上是下半连续的

$$\left\{(\rho,\sigma)\in[\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})]^{\times 2}\;\middle|\;D(\rho_B\|\sigma_B)<+\infty\right\}.$$

如果函数 $(\rho,\sigma)\mapsto D(\rho\|\sigma)$ 在 $[\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})]^{\times 2}$ 的某个子集 $\mathfrak{S}_0$ 上连续，那么函数 $(\rho,\sigma)\mapsto D_A(\rho\|\sigma)$ 在 $\mathfrak{S}_0$ 上连续。

4.2 关于将输入系统的吉布斯态映射为输出系统吉布斯态的信道性质

4.2.1 能量受限性质

设 H_X 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_X$ 上满足 Gibbs 条件的正算子

$$\mathrm{Tr}e^{-\beta H_X} < +\infty \quad \forall \beta > 0, \quad X = A, B. \tag{76}$$

我们将把 H_X 视为量子系统 X的哈密顿量（能量可观测量）。因此，对于任意量子态 $\rho \in \mathfrak{S}$（$\mathcal{H}_X$），E_{H_X}（ρ）$\doteq \mathrm{Tr}H_X\rho$（定义见（8））的值就是该量子态的平均能量。

Let

$$\gamma_{H_X,\beta} = e^{-\beta H_X}/\mathrm{Tr}e^{-\beta H_X} \tag{77}$$

设其为系统 X 在逆温度 $\beta > 0$ [4, 5, 12]下的吉布斯态。

我们将使用以下

命题 13。设 H_X 是 $\mathcal{H}_X$ 上的一个正算子，满足条件（76），$X = A$， B。

A) 若 Φ 是一个从 A 到 B 的量子信道，使得 $\Phi(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'}$ 对某个$\beta, \beta' > 0$ 成立，则

$$\sup\{E_{H_B}(\Phi(\rho)) \,|\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A),\, E_{H_A}(\rho) \le E\} < +\infty \quad \forall E > 0.$$

B) 若 $\{\Phi_n\}$ 是一个从 A 到 B 的信道序列，且强收敛到一个信道Φ_0，使得 $\Phi_n(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'_n}$ 对某些正的 β, β'_n, $n \ge 0$成立，则

$$\sup_{n\ge 0}\sup\{E_{H_B}(\Phi_n(\rho)) \,|\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A),\, E_{H_A}(\rho) \le E\} < +\infty \quad \forall E > 0.$$

证明。只需证明断言 B。

由条件可知，$\Phi_n(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'_n}$ 趋于 $\Phi_0(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'_0}$，因此我们得出 β'_n 趋于 β'_0。于是 $\beta'_* \doteq$ 取最小值 $_{n\ge 0}\,\beta'_n > 0$。

记 $\mathfrak{C}_{H_A,\ E}$ 为 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ 中所有满足 $E_{H_A}(\rho) \le E$的状态 ρ 的集合。由量子相对熵的单调性，对于任意状态 ρ 属于 $\mathfrak{C}_{H_A,\ E}$，我们有

$$D(\Phi_n(\rho)\|\gamma_{H_B,\beta'_n}) \le D(\rho\|\gamma_{H_A,\beta}) \le \beta\mathrm{Tr}H_A\rho + \ln \mathrm{Tr}e^{-\beta H_A} \le E + \ln \mathrm{Tr}e^{-\beta H_A} \quad \forall n \ge 0.$$

因此，由于 $\gamma_{H_B,\ \beta'_n} \le C_n\gamma_{H_B,\ \beta'_*}$，其中 $C_n =$迹$e^{-\beta'_* H}$/迹$e^{-\beta'_n H}$，利用不等式 (17) 和恒等式 (16)，我们得到

$D(\Phi_n(\rho)\|\gamma_{H,\beta_*}) \le D(\Phi_n(\rho)\|\gamma_{H_B,\beta'_n}) + \ln C_n \le E +$ln 迹$e^{-\beta H_A} +$ln $C_n < +\infty \quad \forall n \ge 0$.因此，$\sup_{n\ge 0}\sup_{\rho\in\mathfrak{C}_{H_A,E}} D(\Phi_n(\rho)\|\gamma_{H_B,\beta_*}) < +\infty$ 因为 C_n 趋于 $C_0 < +\infty$ 当$n \to +\infty$。由于对于任意 $\lambda > 0$，都有迹$[\gamma_{H_B,\beta_*}]^\lambda < +\infty$，根据 [44] 中的命题 3，这意味着 $\sup_{n\ge 0}\sup_{\rho\in\mathfrak{C}_{H_A,E}} S(\Phi_n(\rho)) < +\infty$，因此 $\sup_{n\ge 0}\sup_{\rho\in\mathfrak{C}_{H_A,E}} E_{H_B}(\Phi_n(\rho)) < +\infty$。 □

命题 13 的断言 A 指出，任何满足 $\Phi(\rho_{H_A,\beta}) = \gamma_{H_B,\beta'}$（其中 $\beta, \beta' > 0$）的从 A 到 B 的量子信道 Φ，都是能量受限的，即它具有有限的能量放大因子 [43], 。

4.2.2 平均能量与自由能的连续性

平均能量有限为 $E_{H_X}(\rho)$、逆温度为 $\beta>0$ 的量子系统 X 的量子态 ρ 的自由能定义为

$$F_{H_X,\beta}(\rho)=E_{H_X}(\rho)-\beta^{-1}S(\rho)$$

（ $E_{H_X}(\rho)$有限意味着 $S(\rho)$有限） [5]。容易看出，

$$D(\rho\|\gamma_{H_X,\beta})=\beta E_{H_X}(\rho)-S(\rho)+\ln \mathrm{Tr}e^{-\beta H_X}=\beta(F_{H_X,\beta}(\rho)-F_{H_X,\beta}(\gamma_{H_X,\beta})),$$

其中，$\gamma_{H_X,\ \beta}$ 是式 (77) 中定义的吉布斯态。因此，我们可以通过下式为 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_X)$中的任意量子态 ρ 定义自由能：

$$F_{H_X,\beta}(\rho)=\beta^{-1}D(\rho\|\gamma_{H_X,\beta})+F_{H_X,\beta}(\gamma_{H_X,\beta})=\beta^{-1}\big(D(\rho\|\gamma_{H_X,\beta})-\ln \mathrm{Tr}e^{-\beta H_X}\big)\,. \quad (78)$$

由于对任意 $\lambda>0$都有 $\mathbf{Tr}[\gamma_{H_X,\beta}]^{\lambda}<+\infty$ ， [44] 中的命题 3 的断言 2 蕴含：

$$\{F_{H_X,\beta}(\rho)<+\infty\} \quad \Leftrightarrow \quad \{E_{H_X}(\rho)<+\infty\}. \quad (79)$$

函数$E_{H_X}(\rho)$和$F_{H_X,\ \beta}(\rho)$在 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_X)$上均为下半连续（由式 (78) 以及量子相对熵的下半连续性可知，自由能下半连续）。

众所周知，平均能量$E_{H_X}(\rho)$作为 ρ的函数，具有比冯·诺依曼熵 $S(\rho)$更奇异的性质。事实上，对于任意 $E>0$ [5]，函数 $S(\rho)$在满足$E_{H_X}(\rho)\leq E$ 的状态集合 ρ 上是一致连续的（命题 1], ）；但容易看出，如果E 大于 H_X的最小特征值，函数 $E_{H_X}(\rho)$在该集合上并不连续。

同时，利用 [44] 中命题 3 的断言 3，可以很容易地证明

$$\left\{\lim_{n\to+\infty}D(\rho_n\|\gamma_{H_X,\beta})=D(\rho_0\|\gamma_{H_X,\beta})<+\infty\right\}\ \Leftrightarrow\ \left\{\lim_{n\to+\infty}E_{H_X}(\rho_n)=E_{H_X}(\rho_0)<+\infty\right\},$$

其中，$\{\rho_n\}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H}_X)$ 是一个收敛到量子态 ρ_0 的序列。由此以及表达式 (78) 可知，自由能 $F_{H_X,\ \beta}(\rho)$ 的局部连续性等价于平均能量 $E_{H_X}(\rho)$ 的局部连续性。因此，接下来我们将只关注函数 $E_{H_X}(\rho)$。

上述等价关系表明， [16] 中命题 2 所给出的函数 $\rho\mapsto D(\rho\|\gamma_{H_X,\ \beta})$ 局部连续性判据，也给出了平均能量 $E_{H_X}(\rho)$ 局部连续性的判据。利用简单的估计和 Dini 引理，可以直接证明后一个判据。

第 3.2 节的结果使我们能够得出一些条件，在这些条件下，量子信道从 A 到 B时，函数 E_{H_A} 的局部连续性得以保持。

命题 14. 设 H_X 是 $\mathcal{H}_X$ 上的一个正算子，满足条件 (76)，$X = A,\ B$。设 $\{\Phi_n\}$ 是从 A 到 B 的信道序列，强收敛到信道 Φ_0，使得

$$\Phi_n(\gamma_{H_A,\beta}) = \gamma_{H_B,\beta'_n} \tag{80}$$

对于某些正的 β、β'_n、$n \geq 0$。于是

$$\mathrm{dj}(\{E_{H_B}(\Phi_n(\rho_n))\} \leq (\beta/\beta'_0)\mathrm{dj}(\{E_{H_A}(\rho_n)\}) \tag{81}$$

对于任意收敛到量子态 ρ_0 的序列 $\{\rho_n\}$，且满足 $E_{H_A}(\rho_0) < +\infty$.[19] 特别是，若

$$\lim_{n\to+\infty} E_{H_A}(\rho_n) = E_{H_A}(\rho_0) < +\infty$$

then

$$\lim_{n\to+\infty} E_{H_B}(\Phi_n(\rho_n)) = E_{H_B}(\Phi_0(\rho_0)) < +\infty.$$

注意：(81) 式左端定义良好，因为第 4.2.1 节中的命题 13A 蕴含 $E_{H_B}(\Phi_0(\rho_0)) < +\infty$。

证明。由于当 $n \to +\infty$ 时，$\Phi_n(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'_n}$ 趋于 $\Phi_0(\gamma_{H_A,\ \beta}) = \gamma_{H_B,\ \beta'_0}$，不难看出

$$\lim_{n\to+\infty} \beta'_n = \beta'_0. \tag{82}$$

我们可以假设 (81) 式右端有限，并且对所有 $n \geq 0$，$E_{H_A}(\rho_n) < +\infty$。由此可知 $\sup_n E_{H_A}(\rho_n) < +\infty$。因此，条件 (80) 和第 4.2.1 节中的命题 13B 蕴含 $\sup_n E_{H_B}(\Phi_n(\rho_n)) < +\infty$，从而

$$\lim_{n\to+\infty} S(\Phi_n(\rho_n)) = S(\Phi_0(\rho_0)) < +\infty$$

根据 [5]中冯·诺依曼熵的收敛条件。由于

$$D(\Phi_n(\rho_n)\|\gamma_{H_B,\beta'_n}) = \beta'_n E_{H_B}(\Phi_n(\rho_n)) - S(\Phi_n(\rho_n)) + \ln \mathrm{Tr} e^{-\beta'_n H_B}, \tag{83}$$

最后一个极限关系和（82）意味着

$$\mathrm{dj}(\{D(\Phi_n(\rho_n)\|\gamma_{H_B,\beta'_n})\}) = \beta'_0 \mathrm{dj}(\{E_{H_B}(\Phi_n(\rho_n))\}). \tag{84}$$

由于

$$D(\rho_n\|\gamma_{H_A,\beta}) = \beta E_{H_A}(\rho_n) - S(\rho_n) + \ln \mathrm{Tr} e^{-\beta H_A},$$

我们有

$$\mathrm{dj}(\{D(\rho_n\|\gamma_{H_A,\beta})\}) \leq \beta \mathrm{dj}(\{E_{H_A}(\rho_n)\}) \tag{85}$$

根据冯·诺依曼熵的下半连续性。

第 3.2 节中的命题 1B、(84) 和 (85) 推出 (81)。 □

[19]符号"dj"定义见（12）。

推论 9. 设 H_X 是作用在 $\mathcal{H}_X$ 上且满足条件 (76) 的正算子，$X = A, B$。

A）如果 Φ 是一个从 A 到 B 的量子信道，且 $\Phi(\gamma_{H_A,\,\beta}) = \gamma_{H_B,\,\beta'}$ 对某个 $\beta, \beta' > 0$ 成立，那么函数 $E_{H_B}(\Phi(\rho))$ 在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H}_A)$ 的任意子集上连续，只要函数 $E_{H_A}(\rho)$ 在该子集上连续。

B）如果 ρ_* 是 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ 中的一个量子态，且 $E_{H_A}(\rho_*) < +\infty$，那么

$$\lim_{n\to+\infty} E_{H_B}(\Phi_n(\rho_*)) = E_{H_B}(\Phi_0(\rho_*)) < +\infty$$

对于任意一列从 A 到 B 的信道 $\{\Phi_n\}$，若其强收敛到满足 $\Phi_n(\gamma_{H_A,\,\beta}) = \gamma_{H_B,\,\beta'_n}$ 的信道 Φ_0，其中某个正的 β, β'_n, $n \geq 0$。

例4。设 A 是单模量子振子，$\Phi_{N_c,\,k}$ 是从 A 到 $B = A$ 的衰减/放大量/经典噪声高斯信道，其定义公式为

$$\mathrm{Tr}\Phi_{N_c,k}(\rho)W(z) = \mathrm{Tr}\rho W(kz)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(N_c + \frac{|k^2-1|}{2}\right)(x^2+y^2)\right], \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A),$$

其中 $z = (x, y)$，$\{W(z)\}$ 是魏尔算符族（在空间 $\mathcal{H}_A$ 上不可约作用），$N_c \geq 0$ 是环境噪声功率，$k > 0$ 是衰减/放大系数 [12, Ch.12]。

若 $N \doteq \hat{H}_A = \hat{a}^*\hat{a} = \sum_{n\geq 0} n|n\rangle\langle n|$ 是数算符，则 $\gamma_{\hat{N},\beta}$ 是高斯态

$$\rho(N) = \frac{1}{N+1}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{N}{N+1}\right]^n |n\rangle\langle n|$$

其平均光子数为 $N = (e^\beta - 1)^{-1}$。容易证明

$$\Phi_{N_c,k}(\rho(N)) = \rho(N')$$

对于任意 $N \geq 0$，其中 $N' = k^2 N + \max\{k^2 - 1, 0\} + N_c$ [12, 第 12.6 节3]。因此，对于信道 $\Phi_{N_c,k}$，推论 9A 的条件成立；该推论表明，信道 $\Phi_{N_c,k}$ 保持函数 $E_{\hat{N}}(\rho) = \mathrm{tr}N\rho$ 的局部连续性。

利用命题 14 以及 $\Phi_n = \Phi_{N_c,k}$，对所有 n，可以得到函数 $E_{\hat{N}}(\Phi_{N_c,k}(\rho))$ 与 $E_{\hat{N}}(\rho)$ 的不连续跳跃之间的关系；这些函数对应于任意给定的收敛量子态序列。

例5. 设 ρ_* 是 $\mathcal{H}_A$ 上的一个量子态，满足 $E_{H_A}(\rho_*) < +\infty$。设 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是从 A 到 B 的任意强连续量子信道族，满足 $\Phi_t(\gamma_{H_A,\,\beta}) = \gamma_{H_B,\,\beta'_t}$，对所有 $t \geq 0$ 以及某些 β、$\beta'_t > 0$ 均成立。则推论 9B 表明，函数

$$t \mapsto E_{H_B}(\Phi_t(\rho_*)), \quad t \mapsto D(\Phi_t(\rho_*)\|\gamma_{H_B,\beta'_t}) \quad \text{and} \quad t \mapsto S(\Phi_t(\rho_*))$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上连续（最后两个函数的连续性可由第一个函数的连续性推出，这是因为量子相对熵的下半连续性以及类似于 (83) 的关系）。

这一观察适用于任何保持吉布斯态的量子动力半群 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\,\gamma_{H_A,\,\beta}$（在此情况下 $A = B$ 和 $\beta'_t = \beta$。）

5 总结性说明与开放问题

在本文中，我们证明了该函数的下半连续性

$$(\rho,\sigma)\mapsto D(\rho\|\sigma)-D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$$

对于任意给定的量子操作 Φ，并讨论了其推论和应用。事实证明，这一性质使我们能够得到量子相对熵及相关函数的许多新的局部连续性（收敛）条件，并用不同的方法重新证明了此前得到的若干同类结果。因此，可以说，量子相对熵的这一既有性质，在分析量子系统和信道的熵特征的局部连续性时发挥着核心作用；这些熵特征要么通过量子相对熵定义（如量子互信息），要么可以表示为量子相对熵（如平均能量）。

自然会产生这样一个问题：能否为其他散度型函数（Belavkin-Staszewski相对熵、Rényi相对熵等）证明相同的性质？下面我们将介绍在第 3 节 3.1 中证明定理1时所主要用到的（Umegaki量子相对熵的 Lindblad 延拓）的基本性质：

- 量子相对熵的下半连续性；
- 量子相对熵关于量子操作的单调性；
- 恒等式 $D(\rho+\sigma\|\omega+\vartheta)=D(\rho\|\omega)+D(\sigma\|\vartheta)$ 对于 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中满足 $\rho\sigma=\rho\vartheta=\sigma\omega=\omega\vartheta=0$ 的任意算子 ρ、σ、ω 和 ϑ 均成立；
- 极限关系成立

  $$\lim_{n\to+\infty}D(P_m^n\rho_nP_m^n\|P_m^n\sigma_n)=D(P_m^0\rho_0P_m^0\|P_m^0\sigma_0)<+\infty\quad\forall m\geq m_0$$

  对于算子在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中分别收敛到算子 ρ_0 和 $\sigma_0\neq 0$ 的任意序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$，其中 $\{P_m^n\}_{n\geq 0,\ m\geq m_0}$ 是与序列 $\{\sigma_n\}$ 完全一致的任意有限秩投影算子双重序列（定义1见第 2.1 节，引理4见第 3.1 节）；
- Donald 恒等式（21）；
- 关于量子相对熵第一自变量的控制收敛条件：如果

  $$\lim_{n\to+\infty}D(\rho_n^1\|\sigma_n)=D(\rho_0^1\|\sigma_0)<+\infty$$

  对于某些在 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ 中的序列 $\{\rho_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 分别收敛到算子 ρ_0 和 σ_0，那么

  $$\lim_{n\to+\infty}D(\rho_n^2\|\sigma_n)=D(\rho_0^2\|\sigma_0)<+\infty$$

  对于任意收敛到算子 ρ_0^2 的 $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$中的序列 $\{\rho_n^2\}$，使得对所有 n 及某个 $c>0$，$\rho_n^2\leq c\rho_n^1$（命题 2 中关于 [28] 的部分）。

上述量子相对熵的前三个性质是散度型函数的典型性质，而后三个性质则相当特殊。例如，鉴于 Belavkin-Staszewski 相对熵在 [45, 命题 6.7] 中提及的有限维情形下不连续，第四个性质似乎并不适用于它。

当然，我们并未断言上述所有性质对于在第 3 节中针对散度型函数 D证明定理1的类似结论都是必要的。

我感谢 A.S.Holevo、A.V.Bulinski 和 E.R.Loubenets 提供有益的讨论和评论。特别感谢 M.M.Wilde 的宝贵交流。

参考文献

[1] H.Umegaki, 《算子代数中的条件期望，IV（熵与信息）》, Kodai Math.Sem.Rep., 14, 59-85 (1962).[2] B.Schumacher, M.D.Westmoreland, 《量子信息论中的相对熵》, arXiv:quant-ph/0004045.[3] V. Vedral, 《相对熵在量子信息论中的作用》, Rev. Mod. Phys. 74, 197; arXiv:quant-ph/0102094.[4] M.Ohya, D.Petz, 《量子熵及其应用》, 《理论与数学物理》（Springer Berlin Heidelberg, 2004）。[5] A.Wehrl, 《熵的一般性质》, Rev. Mod. Phys. 50, 221-250 (1978).[6] G.Lindblad《完全正映射与熵不等式》, Comm. Math. Phys. 40(2),147-151 (1975).[7] G.Lindblad《有限量子系统的期望与熵不等式》, Comm. Math. Phys. 1974. 39(2), 111-119 (1974).[8] D.Petz, 《冯·诺伊曼代数上信道的充分性》, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 39(153), 97-108 (1988).[9] D.Sutter, M.Tomamichel, A.W.Harrow, 《通过压缩Petz恢复映射强化相对熵的单调性》, IEEE Transactions on Information The- ory, 62(5), 2907-2913, (2016).[10] M.M.Wilde, 《量子信息论中的可恢复性》, 伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学, 471(2182):20150338 (2015).[11] M.Junge, R.Renner, D.Sutter, M.M.Wilde, A.Winter, 《通用恢复映射与量子相对熵的近似充分性》, Annales Henri Poincare, 19(10), 2955-2978, (2018).

[12] A.S.Holevo《量子系统、信道与信息：数学导论》，柏林，DeGruyter，2012年。[13] M.M.Wilde，《量子信息论》。剑桥大学出版社，2013年。[14] B.Simon，《算子理论：分析学综合课程，第四部分》，美国数学会，2015年。[15] M.E.Shirokov，《量子信道的强收敛：Stinespring扩张的连续性与酉扩张的不连续性》，《数学物理杂志》2020. 61, 082204; arXiv:1712.03219.[16] M.E.Shirokov，《量子相对熵的收敛判据及其应用》，Sb.Math., 213(12), 137-174 (2022); arXiv:2205.10341.[17] G.F.Dell'Antonio，《正规态序列的极限》，《纯粹与应用数学通讯》20, 413-430 (1967).[18] M.J.Donald，《关于相对熵的进一步结果》，《剑桥哲学会数学学报》101, 363 (1987).[19] M.E.Shirokov，《量子条件互信息下半连续性及其推论》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，313 (2021), 203-227; arXiv:2001.08691.[20] A.Capel, A.Lucia, D.Perez-Garcia，《量子条件相对熵与相对熵的准因子化》，《物理学杂志A：数学与理论》51 (2018) 484001; arXiv:1804.09525.[21] F.Buscemi, M.Horodecki，《迈向量子测量中信息—扰动权衡的统一方法》，《开放系统与信息动力学》，16(01), 29-48, (2009).[22] F.Buscemi, S.Das, M.M.Wilde《熵增益、信息增益与完全正性背景下的近似可逆性》，《物理评论A》93(6), 062314 (2016); arXiv:1601.01207.[23] M.E.Shirokov, A.S.Holevo，《量子信息论中熵扰动下半连续性及其应用》，《数学汇报》，81(5) (2017), 1044-1060; arXiv:1608.02203.[24] A.S.Holevo，《关于互补信道与可加性问题》，《概率论与应用》，51, 133-143 (2005); arXiv:quant-ph/0509101.[25] M.Berta, F.G.S.L.Brandao, C.Majenz, M.M.Wilde，《量子关联的解构与条件擦除》，arXiv:1609.06994[quant-ph]。

[26] T.S.Cubitt, M.B.Ruskai, G.Smith, ”可降解量子信道的结构”, 数学物理学杂志, 49(10), 102104, (2008).[27]M.E.Shirokov, ”无限维量子系统中的相关性测度”, 《数学文集》, 207(5), 724-768 (2016年).[28]M.E.Shirokov, ”量子相对熵的收敛条件及广义量子狄尼引理的其他应用”, Lobachevskii J. Math. 43, 1755-1777 (2022年); arXiv:2205.09108.[29] M.Reed, B.Simon, ”《现代数理物理方法》. 第一卷. 泛函分析”, 学术出版社 Inc., 1980.[30] A.V.Bulinski, M.E.Shirokov, ”保持冯·诺依曼熵有限的量子信道与操作”, Lobachevskii J. Math., 41(12), 2383- 2396, (2020年); ar Xiv: 2004.03582.[31] T.M.Cover, J.A.Thomas, ”信息论基础”, New York (2006).[32] C.Bishop, ”《模式识别与机器学习》”, 施普林格, 2006.[33] F.Nielsen, ”位置-尺度密度之间的 Kullback-Leibler 散度”, arXiv:1904.10428.[34] P.Billingsley, ”《概率测度的收敛》”, 威利, 1968.[35] V.I.Bogachev, ”测度论”, 施普林格 Berlin, Heidelberg, 2007.[36]Ch.Gerry, P.L.Knight ”《量子光学导论》”, 剑桥大学出版社, 2005年.[37] R.J. Glauber, ”辐射场的相干态与非相干态”, Phys. Rev., 131, 2766 (1963).[38] E.C.G.Sudarshan, ”统计光束的半经典描述与量子力学描述的等价性”, Phys. Rev. Lett., 10, 277 (1963).[39]A.S.Holevo, M.E.Shirokov, ”连续系综与无限维信道的 χ-容量”, 《概率论及其应用》, 50(1), 86-98 (2005年); arXiv:quant-ph/0408176.[40]G.Lindblad, ”熵、信息与量子测量”, Commun. Math. Phys. 33 (4), 305-322 (1973).[41] F.Buscemi, M.Hayashi, M.Horodecki, ”量子测量中的全局信息平衡”, Physical Review Letters 100(21), 210504 (2008).

[42] M.Berta, J.M.Renes, M.M.Wilde, ”识别量子测量的信息增益”, IEEE信息论汇刊. 60(12), 7987-8006 (2014).[43] A.Winter, ” 能量约束的菱形范数及其在连续变量信道容量一致连续性中的应用”, arXiv:1712.10267.[44] M.E.Shirokov, ”状态子集的熵特征 I”, 《数学汇报》, 70(6), 1265-1292 (2006); arXiv: quant-ph/0510073.[45] A.Bluhm, A.Capel, P.Gondolf, A.Perez-Hernandez, ”通过近似凸性实现量子熵量的连续性”, arXiv:2208.00922.