arXiv:2302.04816v3 [math-ph] 1 Nov 2023

# 投影算子的最优半经典正则性与强 Weyl 定律

Laurent Lafleche

法国里昂第一大学 *Camille Jordan*研究所，*UMR 5208* 法国国家科学研究中心

摘要。 投影算子自然地作为与量子力学等领域以及行列式点过程研究中的斯莱特行列式相关联的单粒子密度算子出现。在量子力学半经典近似的背景下，投影算子可视为相空间子集的特征函数的对应物，而这类函数是不连续的。我们证明，投影算子确实收敛到相空间的特征函数；并且就量子 Sobolev 空间而言，它们具有与特征函数相同的最大正则性。这可以解释为关于 Schatten 范数中交换子大小的半经典渐近结果。我们的研究回答了 J. Chong、L. Lafleche、C. Saffirio 在 arXiv:2103.math.AP 中提出的一个问题，即能否将投影算子作为初始数据。此外，我们还为相空间中的 Weyl 定律给出了 Sobolev 空间中的强收敛结果。

目录

1. 引言 21.1. 相空间量子力学 21.2. 动机：斯莱特行列式与半经典平均场极限 32. 主要结果 42.1. Sobolev 空间 42.2. 投影的最大正则性 52.3. 薛定谔算子的情形 63. 谐振子的具体例子。 94. 薛定谔算子的情形 105. 投影算子收敛到示性函数 116. Sobolev 空间中的 Weyl 定律证明 16参考文献 19

电子邮箱：laurent.lafleche@ens-lyon.fr。2020 年数学主题分类号。81Q20 · 81S30 · 47A30 (46N50,46E35)。关键词和短语。半经典极限、Weyl 定律、迹不等式、换位子估计。

## 1. 引言

投影算子自然地出现在量子力学中，最简单的例子是与波函数 $\psi$ 相关联的投影算子 $\boldsymbol{\rho} = |\psi\mathbf{ih}\psi|:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\mathbf{verifying}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi|^2 = 1$，其定义为

$$\boldsymbol{\rho}\varphi(x) = \psi(x)\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\psi(y)}\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

对任意 $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$。更一般地，投影算子可以定义为满足 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$ 的算子 $\boldsymbol{\rho}$。本文将考虑作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的紧算子，并用 $\mathbf{L}^\infty$ 表示这类算子的集合。容易看出，这样的算子自动属于迹类，因此，如果 $\boldsymbol{\rho}$ 是自伴的，就可以将其视为表示一个量子系统状态的密度算子。

在经典极限下，也就是说，在普朗克常数 $h = 2\pi\hbar$ 可忽略的单位制中，密度算子的经典类比是相空间密度 $f(x,v)$，表示在位置 $x \in \mathbb{R}^d$、速度为 $v \in \mathbb{R}^d$时找到粒子的概率。从这一角度来看，投影算子可以视为满足 $f^2 = f$ 的函数的量子类比，也就是特征函数。众所周知（例如参见 [24]），特征函数不可能具有无穷阶正则性，而测试函数所允许的最大正则性可以表述为：这类函数至多属于 Besov 空间 $B^s_{p,\infty}$ 其中 $s \le 1/p$。本文旨在证明，投影算子也具有这一性质的类似结论。

### 1.1. 相空间量子力学。

为了更精确地建立密度算子与相空间函数之间的类比，通常会引入 Weyl 量子化。与傅里叶反演公式类似，它将函数 $f$ 对应到算子

$$\boldsymbol{\rho}_f := \int_{\mathbb{R}^{2d}}\widehat{f}(y,\xi)\,e^{2i\pi(y\cdot x+\xi\cdot\boldsymbol{p})}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

其中，$x$ 被视为乘以 $x$ 的算子，而 $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$ 是动量的量子类比；$\nabla$ 表示关于 $x$ 变量的梯度，$\hbar = h/(2\pi)$是普朗克常数。该算子的积分核为

$$\boldsymbol{\rho}_f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d}e^{-2i\pi(y-x)\cdot\xi}\,f(\tfrac{x+y}{2},h\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

也可以考察称为 Wigner 变换的逆运算，它将算子 $\boldsymbol{\rho}$对应到相空间上的一个函数

$$f_{\boldsymbol{\rho}}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\,y\cdot\xi/\hbar}\,\boldsymbol{\rho}(x+\tfrac{y}{2},x-\tfrac{y}{2})\,\mathrm{d}y.$$

例如，注意到至少形式上 $h^d\mathbf{Tr}(\boldsymbol{\rho}_f) = \int_{\mathbb{R}^{2d}}f(x,\ \xi)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}\xi$其中 Tr 表示迹，并且 $h^d\mathbf{Tr}(|\boldsymbol{\rho}_f|^2) = \int_{\mathbb{R}^{2d}}|f(x,\ \xi)|^2\mathbf{d}x\,\mathbf{d}\xi$，其中 $|A| = \sqrt{A^*A}$表示算子的绝对值，因此自然会考虑以下缩放的 Schatten 范数

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} = h^{\frac{d}{p}}\|\boldsymbol{\rho}\|_p = h^{\frac{d}{p}}\,\mathrm{Tr}(|\boldsymbol{\rho}|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

它们是相空间勒贝格范数的量子版本。另一方面，根据对应原理，可以通过以下公式定义相空间中梯度的量子类比

$$\boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\rho} := [\nabla, \boldsymbol{\rho}] \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\rho} := \left[\frac{x}{i\hbar}, \boldsymbol{\rho}\right]. \tag{3}$$

由于这些公式是经典相空间梯度的 Weyl 量子化，因此也可以这样理解

$$\boldsymbol{\rho}_{\nabla_x f} = \boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\rho}_f \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\rho}_{\nabla_\xi f} = \boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\rho}_f. \tag{4}$$

这些量在$\hbar$缩放的 Schatten 范数中的一致有界性，因而可视为相空间函数映射到索伯列夫空间的有界性的量子类比。关于这些思想及其应用的更详细介绍，请参阅 [14] 。

**1.2. 动机：斯莱特行列式与半经典平均场极限。** 我们关注的是作为投影算子的单粒子密度矩阵。例如，在考察斯莱特行列式的单粒子约化密度时，就会出现这类态。回忆一下，斯莱特行列式 $\omega_N$ 可定义为如下的 $N$ 体波函数

$$\Psi_N(x_1, \dots, x_N) := \frac{1}{\sqrt{N!}} \det(\psi_j(x_k))_{(j,k)\in\{1,\dots,N\}^2} \tag{5}$$

或相应的密度算子

$$\omega_N = |\Psi_N\rangle \langle \Psi_N|$$

其中 $(\psi_1, \dots\dots, \psi_N)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个正交归一族。其单粒子约化密度（或第一边缘分布）于是具有如下形式

$$\omega = N \operatorname{Tr}_{2,\dots,N}(\omega_N) = \sum_{j=1}^{N} |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

若我们选择归一化 $\operatorname{Tr}(\omega) = N$。特别地，它仍然是一个投影，即满足 $\omega^2 = \omega$。反过来，对于任意满足条件的自伴单粒子密度算子 $\omega$

$$\operatorname{Tr}(\omega) = N \quad \text{and} \quad \omega^2 = \omega \tag{6}$$

根据谱定理，可以构造一个斯莱特行列式（5）。为了与 Weyl 量子化和 Wigner 变换相容，并了解当单位选取使得 $\hbar$ 变得可忽略时会发生什么，或者等价地，在经典极限 $\hbar \to 0$下，我们定义 $\boldsymbol{\rho} = (Nh^d)^{-1}\omega$，使得 $h^d \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} f_{\boldsymbol{\rho}} = 1$，并假设

$$\|f_{\boldsymbol{\rho}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \mathcal{C}_2 < \infty$$

当 $\hbar \to 0$ 时收敛到一个常数。根据 Wigner 变换的性质，有

$$\mathcal{C}_2^2 = h^d \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}^2\right) = \frac{1}{N^2 h^d} \operatorname{Tr}\left(\omega^2\right) = \frac{1}{N^2 h^d} \operatorname{Tr}(\omega) = \frac{1}{N h^d}.$$

因此， $N$ 和 $h$ 通过关系 $Nh^d = \mathsf{C}_2^{-2}$相联系。这与费米子混合态的情况形成对比；在后一种情况下，更一般地可能有$N\,h^d \leq \mathsf{C}_2^{-2}$（见 [6]）。此外，由方程 (6) 可知， $\omega$ 的算子范数为 $\|\omega\|_\infty = 1$。因此，根据定义， $\boldsymbol{\rho}$的算子范数为 $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|\boldsymbol{\rho}\|_\infty = \frac{1}{Nh^d} = \mathsf{C}_2^2,$，且同样与 $\hbar$无关。总之，$\mathsf{C}_2^2 = (Nh^d)^{-1}$ 与 $\hbar$ 无关，并且满足 $\boldsymbol{\rho} = \mathsf{C}_2^2\,\omega$。为简化起见，在本文余下部分中，我们仅考虑 $\mathsf{C}_2 = 1$ 的情形，此时定理对应于 $h = N^{-1/d}$ 和 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho} = \omega$ 的情形。

这项研究的动机之一源于这样一个问题：当相互作用势是奇异的，从 $N$体薛定谔方程过渡到 Hartree–Fock 方程和弗拉索夫方程的平均场极限与半经典极限，正如 [23, 6]中所研究的那样。在后者的第二篇工作中，根据第 半经典正则性节中所定义的量子 Sobolev 空间，对初始数据作出了假设；我们在此证明，这些假设与投影算子以及斯莱特行列式并不相容，正如 [6, 注 43]中所猜想的那样。

关于算子 $x$ 和 $\boldsymbol{p}$ 与算子的交换子的精确估计，也有助于理解量子最优传输中某些伪度量自距离的大小，而这与维格纳–柳泽偏斜信息有关（见 [9,15]）。

## 2. 主要结果

我们的结果主要涉及三种情形。第一个结果，即定理 1，讨论了投影算子缺乏高阶正则性的问题，并且对所有投影算子都成立。随后，定理 2 表明，存在达到第一定理所允许的最大正则性的态。最后，定理 3 声称，然而也存在正则性严格低于最大正则性的态。此外，作为一个应用，它还表明，对投影算子所获得的正则性可以改进 Weyl 定律的表述。

### 2.1. Sobolev 空间。

用 $z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ 表示相空间变量。那么，在经典情形下，相空间上函数的 1 阶齐次索博列夫空间可定义为满足以下条件的函数集合 $f\colon\ \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ 在无穷远处趋于零，且下列范数有限

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^{2d})} = \|\nabla_z f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}\,.$$

通常，也可以通过定义范数 $\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{2d})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} + \|\nabla_z f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}$来定义相应的非齐次空间。类似地，1 阶量子 Sobolev 范数由以下公式定义

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{W}}^{1,p}} := \|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p}\,.$$

其中 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\rho}$ 是向量值算子（$\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{\nabla}_\xi\boldsymbol{\rho}$），其绝对值满足 $|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\rho}|^2 = |\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{\rho}|^2 + |\boldsymbol{\nabla}_\xi\boldsymbol{\rho}|^2$。当 $s \in$ （0，1）时，分数阶的量子类比

Gagliardo–Sobolev 范数定义为 $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{W}^{s,\,p}} = \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} + \|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{W}}^{s,\,p}}$ 在 [14] 其中

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{W}}^{s,p}}^{p} := \gamma_{s,p}\, h^{d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\mathrm{Tr}(|\mathsf{T}_z\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}|^{p})}{|z|^{2d+sp}}\,\mathrm{d}z, \tag{7}$$

对于某个常数 $\gamma_{s,\,p} > 0$。这里，$\mathsf{T}_z$ 是定义为如下形式的量子相空间平移算子：

$$\mathsf{T}_{z_0}\boldsymbol{\rho} = e^{i(\xi_0\cdot x - x_0\cdot \boldsymbol{p})/\hbar}\,\boldsymbol{\rho}\, e^{i(x_0\cdot \boldsymbol{p} - \xi_0\cdot x)/\hbar}. \tag{8}$$

更一般地，当 $s \in [0,2)$ 时，量子 Besov 范数 [14] 定义为 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{B}^{s}_{p,\,q}} = \mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^p} + \mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\dot{\mathcal{B}}^{s}_{p,\,q}}$ 其中

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{s}_{p,q}} := \left\| \frac{\|\mathsf{T}_{2z}\boldsymbol{\rho} - 2\,\mathsf{T}_z\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p}}{|z|^{s+2d/q}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^{2d})}. \tag{9}$$

我们记作[1]

$$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^{s}_{p,q} \tag{10}$$

只要存在一个与 $C$ 无关的常数 $\hbar$ 使得 $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{B}^{s}_{p,\,q}} < C$。与 Sobolev 范数相比，这些 Besov 范数构成了更精细的尺度，因为对于任意$s \in (0,\,1)$、任意实数 $1 < r < p < q$ 以及任意 $\varepsilon > 0$ 充分小的情形（见 [14]）

$$\mathcal{B}^{s+\varepsilon}_{p,q} \subset \mathcal{B}^{s}_{p,1} \subset \mathcal{B}^{s}_{p,r} \subset \mathcal{W}^{s,p} \subset \mathcal{B}^{s}_{p,q} \subset \mathcal{B}^{s}_{p,\infty} \subset \mathcal{B}^{s-\varepsilon}_{p,q}. \tag{11}$$

2.2. **投影的最大正则性**。我们的主要结果可以概括为：如果 $\boldsymbol{\rho}$ 是 $\mathcal{L}^1$, 中的一个紧投影算子，那么 $\boldsymbol{\rho} \notin \mathcal{B}^{s}_{p,\,q}$ 只要$s > 1/p$，或者 $s = 1/p$并且 $q < \infty$。这对应于图 1中的红色部分。

**定理 1.** 设 $s \in [0,1]$、$(p,q) \in [1,\infty]^2$和 $\hbar$是某个收敛到0的序列。那么，若$(\boldsymbol{\rho}_\hbar)_{\hbar\in(0,1)}$ 是满足 $\boldsymbol{\rho}_\hbar^2 = \boldsymbol{\rho}_\hbar$ 和 $h^d\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = 1$的算子序列，则有以下结论。

- 若这些算子是自伴的，则

$$\|\boldsymbol{\rho}_\hbar\|_{\dot{\mathcal{B}}^{s}_{p,q}} \to \infty \qquad \textit{if } s > 1/p, \textit{ or } s = 1/p \textit{ and } q < \infty \tag{12}$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_\hbar\|_{\dot{\mathcal{W}}^{s,p}} \to \infty \qquad \textit{if } s \geq 1/p \textit{ and } p > 1. \tag{13}$$

- 若这些算子不是自伴的，则只要满足 $p \geq \frac{2d}{d+s}$，结论仍然成立。若$p < \frac{2d}{d+s}$，则只要$\mathcal{L}^{2+\varepsilon}$关于 $\hbar$一致成立，其中 $\varepsilon > 0$为某个常数，结论便成立。

利用上述定理，更具体地说，方程（13），在整数阶正则性的情形下，可得出某些交换子在 Schatten 范数中的行为。

[1]更严谨地说，我们可以定义空间 $\ell^\infty\mathrm{B}^{s}_{p,q}$，其元素为 $\hbar$ 依赖的、形式为 $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_\hbar)_{\hbar\in(0,1)}$ 的算子，并将范数定义为 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\ell^\infty\mathrm{B}^{s}_{p,q}} = \sup_{\hbar\in(0,1)} \mathrm{k}\boldsymbol{\rho}_\hbar\mathrm{k}_{\mathcal{B}^{s}_{p,q}}$，这样记号 (10) 就可以替换为 $\boldsymbol{\rho} \in \ell^\infty\mathrm{B}^{s}_{p,q}$。包含关系序列 (11) 也应从这一角度来理解。

**推论 2.1**。 对于任意 $p > 1$ 以及任意一列在 $\mathcal{L}^1$ 中一致有界的自伴投影算子$\boldsymbol{\rho}$ $\hbar$

$$\frac{1}{\hbar}\left\|[x,\boldsymbol{\rho}]\right\|_{\mathcal{L}^p} + \left\|[\nabla,\boldsymbol{\rho}]\right\|_{\mathcal{L}^p} \underset{\hbar\to 0}{\to} \infty.$$

在特殊情况下，当 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^s_{p,\,q}$ 对于某些 $s > 0$和 $p \geq 2$，则由命题*5.1* 的证明可知，上述方程中的两个量实际上分别趋于 $\infty$ 。

方程（12）实际上也给出了一些对易子的半经典行为，即使在正则性阶数不是整数的情况下也是如此。这是因为注意到$\mathsf{T}_z - 1 = \mathsf{T}_{(x,0)}(\mathsf{T}_{(0,\xi)} - 1) + \mathsf{T}_{(x,0)} - 1$，并且

$$\left|\mathsf{T}_{(0,\xi)}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\right| = \left|e^{i\,x\cdot\xi/\hbar}\,\boldsymbol{\rho}\,e^{-i\,x\cdot\xi/\hbar} - \boldsymbol{\rho}\right| = \left|\left[e^{i\,x\cdot\xi/\hbar},\boldsymbol{\rho}\right]\right| \tag{14}$$

对于 $\mathsf{T}_{(x,0)}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}$，存在类似的公式。这给出了以下渐近结果。

**推论 2.2**。 在与定理 *1*相同的假设下，对于任意 $s > 1/p$,

$$\sup_{(y,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{\hbar^s\,|\xi|^s}\left\|\left[e^{2i\pi\,x\cdot\xi},\boldsymbol{\rho}\right]\right\|_{\mathcal{L}^p} + \frac{1}{\hbar^s\,|y|^s}\left\|\left[e^{2i\pi\,y\cdot\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\rho}\right]\right\|_{\mathcal{L}^p} \to \infty.$$

如前一个推论所述，在特殊情况下，当 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^s_{p,\,q}$ 对于某些 $s > 0$ 和$p \geq 2$，两个项分别趋于 $\infty$ 。

2.3. **薛定谔算子的情形**。 定理 1 是最优的，因为存在一些算子，其允许的最大正则性得以达到。特别考虑以下形式的一类态 [12], 它们的形式为

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(-\hbar^2\Delta + V(x)) =: \mathbb{1}_{|\boldsymbol{p}|^2\leq U(x)} \tag{15}$$

其中， $U = -V$ 满足：存在 $\varepsilon > 0$ 以及开集 $\Omega_\varepsilon$ 和 $\Omega$，使得 $\Omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$，并且

$$\begin{cases} U \in C^\infty(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^c) \\ U \leq -\varepsilon \text{ on } \Omega^c_\varepsilon. \end{cases} \tag{16}$$

于是由 [12, 定理 1。2] 可知，存在一个与 $\hbar \in$ 无关的常数 $C > 0$ （0，1），使得

$$\left\|\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{\rho}\right\|_{\mathcal{L}^1} \leq C \qquad \text{and} \qquad \left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi\boldsymbol{\rho}\right\|_{\mathcal{L}^1} \leq C. \tag{17}$$

更确切地说，这意味着如下结论。

**定理 2**。 设 $\boldsymbol{\rho} = \mathbb{1}_{|\boldsymbol{p}|^2\leq U(x)}$ 或 $\boldsymbol{\rho} = \mathbb{1}_{|x|^2\leq U(\boldsymbol{p})}$ 满足 $U$ 假设(16)以及 $U_+ \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$。则 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$ 并且对于任意 $p \in [1,\infty]$,

$$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^{1/p}_{p,\infty} \cap \mathcal{W}^{1,1}. \tag{18}$$

关于 $\hbar$ 一致。特别地， $\boldsymbol{\rho}$ 的 *Wigner* 变换满足 $f_{\boldsymbol{\rho}} \in B^{1/2}_{2\,\infty}\,.\,(\mathbb{R}^{2d})$关于 $\hbar$ 一致，因此，对于任意 $s \in [0,1/2)$

$$f_{\boldsymbol{\rho}} \in H^s(\mathbb{R}^{2d}) \tag{19}$$

关于 $\hbar$ 一致。

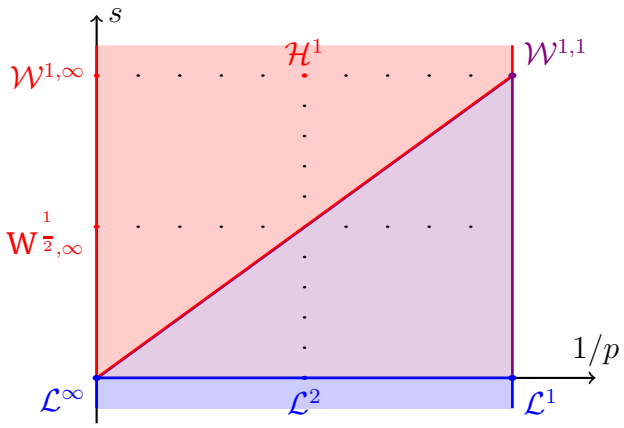



图 1. Sobolev 空间 $\mathrm{W}^{s,p}$中自伴投影算子的正则性。上方（红色）区域对应禁用空间，中间（紫色）区域对应允许空间，下方（蓝色）区域对应投影算子总是属于的空间。对角线对应禁用空间 $\mathrm{W}^{1/p,p}$ with$p \in (1,\infty)$，其范围略小于允许空间 $\mathrm{B}_p^{1/p}{}_{,\infty}$。

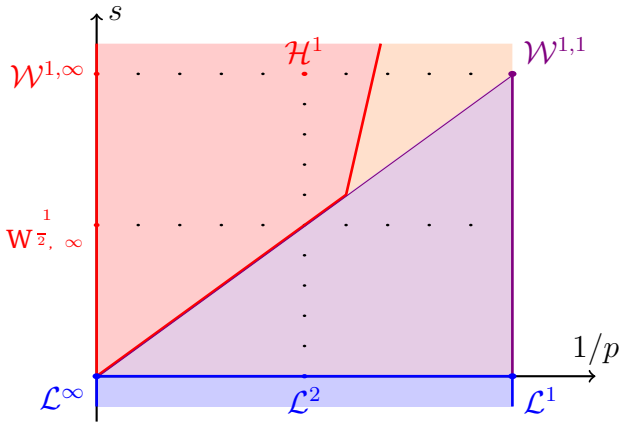



图 2.维数为$\mathcal{W}^{s,p}$ 中的非自伴投影算子正则性 $d = 3$。在这种情况下，定理 1若要在右上区域成立，所需假设不止迹条件。不过，我们猜想该结果在该区域也成立。

**注 2.1**。乍看之下，似乎令人惊讶的是，在空间 $\mathcal{W}^{1,1}$ 中可以找到投影算子，而非空集的经典特征函数 $\chi(z) = \mathbb{1}_A(z)\, A \subset \mathbb{R}^{2d}$ 却从不属于 $W^{1,1}(\mathbb{R}^{2d})$。但这类函数 $\chi$ 可以属于 $BV(\mathbb{R}^{2d})$，也就是有界变差分布构成的集合，换言之，其梯度为测度的分布。在半经典分析中，集合 $\mathcal{L}^1$ 确实应当更适宜地解释为

测度空间的量子类比。例如，函数 $g_h(z) = (2/h)^d e^{-|z|^2/\hbar}$ 的 *Weyl* 量子化对任意 $h > 0$, $\|\boldsymbol{\rho}_{g_h}\|_{\mathcal{L}^1} = 1$ 均成立，但其 *Wigner* 变换收敛于 $\delta_0$。同样，集合 $\mathcal{W}^{1,1}$ 应被视为 $BV(\mathbb{R}^{2d})$ 的量子类比。

**注 2.2**。由量子梯度的定义（3）可知，对任意$f \in H^1(\mathbb{R}^{2d})$以及任意 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$，

$$\left\|\left[\varphi(x), \boldsymbol{\rho}_f\right]\right\|_{\mathcal{L}^2}^2 = h^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left|(\varphi(x) - \varphi(y))\, \boldsymbol{\rho}_f(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \hbar^2 \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^d)}^2 \left\|\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\rho}_f\right\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

由于 $\|\boldsymbol{\nabla}_\xi \boldsymbol{\rho}_f\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|\boldsymbol{\rho}_f\|_{\mathcal{W}^{1,\,2}} = \|f\|_{H^1\,(\mathbb{R}^{2d})}$，另一方面

$$\left\|\left[\varphi(x), \boldsymbol{\rho}_f\right]\right\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\, \|\boldsymbol{\rho}_f\|_{\mathcal{L}^2} = 2\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$$

由双线性复插值可得（参见 [27, 引理 28。3]）

$$\left\|\left[\varphi(x), \boldsymbol{\rho}_f\right]\right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \sqrt{C_d \hbar}\, \|\varphi\|_{B^{1/2}_{\infty,1}(\mathbb{R}^d)}\, \|f\|_{B^{1/2}_{2,\infty}(\mathbb{R}^{2d})}$$

对于某个仅依赖于 $d$ 的常数 $C_d$。因此，采用 [10], 的记号，将上述不等式应用于 $f = f_{\boldsymbol{\rho}}$,

$$2\,h^d \operatorname{Var}(X(\varphi)) = h^d \operatorname{Tr}\left(|[\varphi(x), \boldsymbol{\rho}]|^2\right) \leq C_d\, \hbar\, \|\varphi\|^2_{B^{1/2}_{\infty,1}(\mathbb{R}^d)}\, \|\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,\infty}} \tag{20}$$

这里回顾一下，$\hbar = h/(2\pi)$。方程 (20) 给出了 [10] 中关于与 $\boldsymbol{\rho}$相关的行列式点过程的线性统计量方差的公式（*5.30*）的定量版本。本文中，*Deleporte* 和 *Lambert* 猜想，对于在集合 $\varphi \in C_c^\infty$上非零的$\{\, U > 0\}$，也应成立同阶的下界；也就是说，如果 $\boldsymbol{\rho}$ 具有(15) 的形式，则存在一个常数 $c_\varphi > 0$，与 $\hbar$无关，使得

$$\|[\varphi(x), \boldsymbol{\rho}]\|_{\mathcal{L}^2} \geq c_\varphi \sqrt{\hbar}.$$

注意，由推论*2.2* 和定理 *2* 已经可知，对于任意$\varepsilon > 0$ 以及任意 $\boldsymbol{\rho}$ 形如(15)且满足 $U$ 的(16)

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left\|\left[\frac{e^{2i\pi\, x\cdot\xi}}{|\xi|^{1/2-\varepsilon}}, \boldsymbol{\rho}\right]\right\|_{\mathcal{L}^2} \geq G(\hbar)\, \hbar^{1/2-\varepsilon}$$

对于某个函数 $G$，使得 $G(\hbar) \underset{\hbar\to 0}{\to} \infty$。

借助众所周知的 Weyl 渐近公式，我们可以得到关于形如 (15) 的谱投影的更精确结果（例如参见 [11]）。这意味着以下定理所指出的：定理 2 中的正则性并非普遍成立，而且存在正则性较低的投影算子。更准确地说，对于任意 $s > 0$，都存在一些投影算子，它们在 $\mathsf{W}^{s,p}$ 中不关于 $\hbar$ 一致有界。

**定理 3**。设 $\boldsymbol{\rho}_\hbar = \mathbb{1}_{|\boldsymbol{p}|^2 \leq U(x)}$ 满足 $U_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$。则 $\boldsymbol{\rho}_\hbar$ 的 *Husimi* 变换在 $L^p(\mathbb{R}^{2d})$ 中弱收敛到 $\mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq U(x)}$，对所有 $p \in (0,1)$ 均成立，当

$\hbar \to 0$。此外，当 $U$ 满足假设(16) 且 Ω 有界时，对于任意$p \in [1,\infty)$ 和 $s \in [0,1/p)$,

(21) $$\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}_\hbar} \underset{\hbar\to 0}{\to} \mathbb{1}_{|\xi|^2\le U(x)} \quad \textit{in } W^{s,p}(\mathbb{R}^{2d})$$

(22) $$f_{\boldsymbol{\rho}_\hbar} \underset{\hbar\to 0}{\to} \mathbb{1}_{|\xi|^2\le U(x)} \quad \textit{in } W^{s,p}(\mathbb{R}^{2d}) \textit{ with } s \in \left(\tfrac{1}{p'}, \tfrac{1}{2} + 2d\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

其中 $p' = \frac{p}{p-1}$。此外，对于任意 $p \in [1,\infty)$，在 $L^p(\mathbb{R}^{2d})$ 中也有收敛。

然而，存在函数 $U$，满足 $\sqrt{U} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^d(\mathbb{R}^d) \cap C^\alpha(\mathbb{R}^d)$，其中 $\alpha \in (0,1)$，使得对所有 $s > \alpha/p$，$\mathbb{1}_{|\xi|^2\le U(x)} \notin B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$，并且满足

(23) $$\|\boldsymbol{\rho}_\hbar\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \underset{\hbar\to 0}{\to} \infty.$$

3. 谐振子的显式例子。

一个可以进行显式计算的例子是谐振子势阱中的非相互作用费米子情形，另请参见例如 [4]。考虑由谐振子给出的哈密顿量

$$\mathsf{H}_N = \mathrm{d}\Gamma(H) = \sum_{n=1}^{N} H_n \quad \text{where} \quad H = |\boldsymbol{p}|^2 + |x|^2$$

并且其中每个 $H_n$ 都是作用于第 $n$ 个粒子上的单粒子哈密顿量 $H$。众所周知，$H$的本征值具有 $(2n+1)\hbar$ 的形式，其中 $n \in \mathbb{N}$，对应的本征向量 $\psi_n$ 由厄米函数给出。$\mathsf{H}_N$的基态由单体哈密顿量的前 $N$ 个本征向量构成的斯莱特行列式给出。为简单起见，假设粒子数满足 $N = \binom{d+n}{d}$，其中$n \in \mathbb{N}$，则其单粒子密度算子可写为

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{|\alpha|_1 \le n} |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$$

其中，$\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$是一个多重指标，其中 $|\alpha|_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$且 $\psi_\alpha = \psi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\alpha_d}$。它满足 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = N = h^{-d}$且 $0 \le \boldsymbol{\rho} \le 1$。按照类似于例如 [4], 中所做的计算，可得

(24) $$|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1}\boldsymbol{\rho}|^p = \frac{1}{(2\hbar)^{p/2}} \sum_{|\alpha|_1 = n} (\alpha_1+1)^{p/2} \left( |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| + |\psi_{\alpha+e_1}\rangle\langle\psi_{\alpha+e_1}| \right).$$

由此 可推得，对于任意 $p \in [1,\infty]$，存在一个与 $\hbar$无关的$C_p$，使得

$$\|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1}\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} = \frac{C_p}{h^{1/p'}}$$

其中，$p' = \frac{p}{p-1}$ 是 $p$的赫尔德共轭指数。常数 $C_p$ 可以显式计算，并且满足：当 $p \le 2$时，$C_p = (2d)^{1/p}\sqrt{\pi}(d!)^{\frac{1}{d}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$；当 $p \ge 2$时，$C_p \le 2^{1/p}\sqrt{\pi}(d!)^{\frac{1}{d}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$。此外，

$$\|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1}\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^1} \le \frac{2d\sqrt{\pi}}{\sqrt{d!}}, \qquad \|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1}\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^2} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}, \qquad \|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1}\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^\infty} \le \frac{\sqrt{(d!)^{1/d}\,\pi}}{h}.$$

将 $\boldsymbol{\nabla}_\xi$ 替换为 $\boldsymbol{\nabla}_x$，同样的估计仍然成立。特别地，$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{W}^{1,\,1} \cap \mathcal{L}^\infty$，因此，与定理2的证明中一样，$\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{B}_p^{1/p,\,\infty}$ 对任意 $p \in [1,\infty]$均成立。

证明。按照 [4], 中的类似计算，可以计算 $[x_1, \boldsymbol{\rho}]$，利用 $x_1 = \frac{a+a^*}{2}$这一事实，其中 $a^* = x - i\boldsymbol{p}$且 $a = x + i\boldsymbol{p}$分别为产生算符和湮灭算符。由此得到

$$[x_1, \boldsymbol{\rho}] = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}} \sum_{|\tilde{\alpha}|_1 \leq n} \sqrt{a+1} \left( |\psi_{a+1}\rangle \langle \psi_a| - |\psi_a\rangle \langle \psi_{a+1}| \right) \otimes |\psi_{\tilde{\alpha}}\rangle \langle \psi_{\tilde{\alpha}}|$$

其中 $\tilde{\alpha} = (0,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_d)$ 和 $a = n - |\tilde{\alpha}|_1$。取 $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_d)$，其中$\alpha_1 = a$，即可将其等价地写为

$$\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1} \boldsymbol{\rho} = \frac{i}{\sqrt{2\hbar}} \sum_{|\alpha|_1 = n} \sqrt{\alpha_1 + 1} \left( |\psi_{\alpha_1}\rangle \langle \psi_{\alpha_1+1}| - |\psi_{\alpha_1+1}\rangle \langle \psi_{\alpha_1}| \right) \otimes |\psi_{\tilde{\alpha}}\rangle \langle \psi_{\tilde{\alpha}}| \,.$$

注意，$\psi_{\alpha_1} \otimes \psi_{\tilde{\alpha}} = \psi_\alpha$且 $\psi_{\alpha_1+1} \otimes \psi_{\tilde{\alpha}} = \psi_{\alpha+e_1}$，其中 $e_1 = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$。因此，将上述算子平方，并利用 $\psi_n$ 族是正交归一的这一事实，可得

$$|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1} \boldsymbol{\rho}|^2 = \frac{1}{2\hbar} \sum_{|\alpha|_1 = n} (\alpha_1 + 1) \left( |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha| + |\psi_{\alpha+e_1}\rangle \langle \psi_{\alpha+e_1}| \right).$$

由于这是一个对角算子，我们可推知更一般的公式（24）成立。取迹后得到

$$h^d \operatorname{Tr}(|\boldsymbol{\nabla}_{\xi_1} \boldsymbol{\rho}|^p) = \frac{2\,h^d}{(2\hbar)^{p/2}} \sum_{|\alpha|_1 = n} (\alpha_1 + 1)^{p/2} = \frac{2\,h^d}{(2\hbar)^{p/2}} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{d+n-k-1}{d-2} k^{p/2}$$

我们利用 $\binom{d+n}{d} = N = h^{-d}$和 $(n+1)^d \leq N\,d$这一事实得出该结果！$\leq (n+d)^d$。□

## 4. 薛定谔算子的情形

已知方程（17），定理 2 的证明核心不过是对量子 Besov 空间使用一个插值不等式。

定理 *2*的证明。由 Cwikel–Lieb–Rozenblum 不等式 [8] 可知

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^1} \leq C \, \|U_+\|_{L^{d/2}(\mathbb{R}^d)} \tag{25}$$

其中 $U_+ = \max(U, 0)$，因此上述假设 (16) 特别意味着$\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{L}^1$。结合方程（17），我们推得 $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{W}^{1,1}$。由于 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$，可知 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^\infty} \leq 1$。现在注意，若 $\theta \in [0,1]$、$(s_0, s_1) \in [0,1]^2$ 且 $(p_0, p_1, q_0, q_1) \in [1,\infty]^4$，则根据 Besov 范数的定义 (9) 以及 Lebesgue 范数和 Schatten 范数的 Hölder不等式，对于任意 $s_\theta$、$p_\theta$ 以及满足以下条件的 $q_\theta$

$$s_\theta = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

以下插值不等式成立

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{s_\theta}_{p_\theta,q_\theta}} \le \|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{\dot{\mathcal{B}}^{s_0}_{p_0,q_0}} \|\boldsymbol{\rho}\|^{\theta}_{\dot{\mathcal{B}}^{s_1}_{p_1,q_1}}. \tag{26}$$

我们由 [14, 公式（31）] 可知，对任意 $p \in [1,\infty]$,

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{1}_{p,\infty}} \le 2\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{W}}^{1,p}}. \tag{27}$$

另一方面，对任意 $p \in [1,\infty]$，由三角不等式以及平移算子 $\mathsf{T}_z$ 是酉算子、因而保持 Schatten 范数不变这一事实，可得

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{0}_{\infty,\infty}} = \Big\| \|\mathsf{T}_{2z}\boldsymbol{\rho} - 2\,\mathsf{T}_z\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^\infty} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \le 4\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

因此，我们推得

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{1/p}_{p,\infty}} \le \|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{\dot{\mathcal{B}}^{0}_{\infty,\infty}} \|\boldsymbol{\rho}\|^{\theta}_{\dot{\mathcal{B}}^{1}_{1,\infty}} \le 2^{2-\theta}\|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^\infty} \|\boldsymbol{\rho}\|^{\theta}_{\dot{\mathcal{W}}^{1,1}}.$$

结合 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^p}$ 关于 $\hbar$ 一致有界这一事实，可知 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{B}^{1/p}_{p},\infty}$ 关于 $\hbar$ 一致有界，由此完成公式（18）的证明。插值不等式（26）现在意味着 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{W}^{s,2}} \le C\,\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{B}^{1/p}_{p},\infty}$。但根据 Wigner 变换是从 $\mathrm{L}^2$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 的等距映射这一事实，以及 $H^s$ 的积分刻画，不难看出（另见 [14]），$\mathrm{k}f_{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{k}_{H^s} = C\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{W}^{s},2}$，由此推出公式（19）。□

## 5. 投影算子收敛到示性函数

本节中，我们证明定理 1。我们先介绍一些对分析有用的工具。与 [30, 14], 中一样，我们将半经典卷积定义为弱积分

$$f \star \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho} \star f := \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(z)\,\mathsf{T}_z\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}z. \tag{28}$$

我们将研究由高斯函数进行的卷积，它对任意$z \in \mathbb{R}^{2d}$ 定义为

$$g_h(z) = (2/h)^d\, e^{-|z|^2/\hbar},$$

并且我们将使用以下记号

$$\tilde{f} := g_h * f, \quad \text{and} \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}} := g_h \star \boldsymbol{\rho}.$$

特别地，算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换就是

$$\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} = g_h * f_{\boldsymbol{\rho}} = f_{\tilde{\rho}}$$

而测度 $f$ 的维克量子化（也有时称为相干态叠加、Töplitz 算子或反维克量子化）可写为

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f = g_h \star \boldsymbol{\rho}_f = \boldsymbol{\rho}_{\tilde{f}} = f \star \boldsymbol{\rho}_{g_h}.$$

半经典卷积也满足杨氏不等式（参见例如 [30, 14]），由此可得维克量子化和 Husimi 变换的著名界。

$$\big\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f\big\|_{\mathcal{L}^p} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}, \quad \text{and} \quad \big\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} \le \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p}. \tag{29}$$

更一般地，不难推导出同一不等式对量子 Sobolev 空间和 Besov 空间也成立（参见例如 [14, 不等式（41）和（47）]），即

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f\right\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_{p,q}} \leq \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})}, \quad \text{and} \quad \left\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}\right\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_{p,q}}. \tag{30}$$

主定理证明中的关键步骤是以下命题。

命题 *5.1.* 设 $s \in (0,1]$, $p \in [2,\infty]$, $q \in [1,\infty]$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 是满足 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$, $h^d \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = 1$ 以及 $\boldsymbol{\rho} \in \dot{B}^s_{p,q}$ 且关于 $\hbar$一致有界的（一个序列的）算子。那么存在一个收敛到 0 的序列 $(\hbar_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以及一个序列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{2d})^{\mathbb{N}}$，使得平移后的 *Wigner* 变换序列 $f_{\boldsymbol{\rho}}(\cdot + z_n)$ 对于 $\hbar = \hbar_n$ 收敛到$\mu : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$，且其不为 0 并满足

$$\mu^2 = \mu \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d}).$$

**注 5.1.** 即使没有平移序列，该结果仍然成立，也就是说，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $z_n = 0$，但在这种情况下可能会出现 $\mu = 0$。

证明。 我们为 $\hbar$ 取一个离散值序列，$(\hbar_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\hbar_n \to 0$。必要时我们还会取子序列，但为简便起见，不写出对 $n$ 的依赖，只写作 $\hbar \to 0$。根据假设，存在一个与 $\hbar$ 无关的常数$\dot{\mathrm{D}}_s$，使得

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_{p,q}} \leq \dot{\mathcal{D}}_s. \tag{31}$$

由量子 Sobolev 不等式[14], 可知，这意味着 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^{p_s}} \leq \mathrm{C}^{\mathrm{S}}_{s,\,p}\,\dot{\mathrm{D}}_s$，其中 $\mathrm{C}^{\mathrm{S}}_{s,\,p}$ 是与 $\hbar$ 无关的常数，并且 $\frac{1}{p_s} := \frac{1}{p} - \frac{s}{2d}$ 若 $p < \frac{2d}{s}$，则 $p_s = \infty$；若 $p > \frac{2d}{s}$，则 $p_s \geq p$（且如果 $p = \frac{2d}{s}$，则取充分大的任意 $p_s \geq p$）。由 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$ 这一事实以及 Schatten 范数的 Hölder不等式可知，对于任意 $r \geq 2$,

$$1 = h^d \,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}) \leq \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^1} = \left\|\boldsymbol{\rho}^2\right\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathcal{L}^2} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|^{r'/2}_{\mathcal{L}^r} \|\boldsymbol{\rho}\|^{1-r'/2}_{\mathcal{L}^1},$$

其中 $r'$ 是 $r$ 的赫尔德共轭指数。由于 $p_s \geq p \geq 2$，特别可得

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^{p_s}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p} \dot{\mathcal{D}}_s. \tag{32}$$

结合上述两个方程可知，对于任意 $r \geq 2$,

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^r} \geq (\mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p} \dot{\mathcal{D}}_s)^{1-2/r'}. \tag{33}$$

对于 Husimi 变换，由公式 (29)，根据不等式 (31) 和不等式 (32) 可推出以下界

$$\left\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p} \dot{\mathcal{D}}_s \qquad \text{and} \qquad \left\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}\right\|_{L^{p_s}(\mathbb{R}^{2d})} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p} \dot{\mathcal{D}}_s. \tag{34}$$

此外，由于 $p \in [1, p_s]$，由方程 (29) 和 (30) 以及 Hölder不等式，可得

$$\left\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} + \|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_{p,q}} \leq \left(\mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p} + 1\right) \dot{\mathcal{D}}_s =: \mathcal{D}_s. \tag{35}$$

这些界将使我们能够提取弱收敛子列。然而，这些序列完全可能弱收敛到0。因此，我们将首先运用浓缩紧性原理的思想 [20, 19] 来避免这种情况。我们主要需要防止质量逃逸到无穷远处，因此沿用

˜ ˙[19, 引理 I.1]（另见 [17]），并考察所有序列 $T_z f_{\boldsymbol{\rho}} := f_{\boldsymbol{\rho}}(\cdot - z)$，选出在给定集合中质量大致最大的那个。更精确地说，通过对角线论证，我们可以选取一个序列 $z_\hbar$ 使得

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_Q \left|T_{z_\hbar}\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right| = \limsup_{\hbar\to 0}\left(\sup_{z\in\mathbb{R}^{2d}}\int_Q \left|T_z\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|\right) =: M_Q(\boldsymbol{\rho})$$

其中 $Q$ 是单位立方体 $Q = \{\, z\in\mathbb{R}^{2d}, |z|_\infty \le 1/2\}$。这个新的函数序列$T_{z_\hbar}\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}$ 满足与 相同的界（34）和（35）。因此 $T_{z_\hbar}\tilde f_{\boldsymbol{\rho}} \in B^s_{p,q}\cap L^1 \cap L^{p_s}$在 $\hbar$ 中一致有界，故取一个子序列后，它在 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$ 中弱收敛，并在 $L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2d})$ 中强收敛到函数 $\mu\in B^s_{p,q}\cap L^1\cap L^{p_s}$ 满足

$$\|\mu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})} \le \mathcal{D}_s \quad \text{and} \quad \|\mu\|_{L^1(Q)} = M_Q(\boldsymbol{\rho}).$$

设 $\sigma\in(0,s)$ 且 $\frac{1}{p_\sigma} := \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{2d}$。根据 Gagliardo–Nirenberg插值不等式，对于任意满足 $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p_\sigma} + 1 - \theta$ 的 $r\in(1,p_\sigma)$ 和 $\theta\in(0,1)$，存在一个与 $\hbar$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left|\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|^r = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_Q \left|T_k\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|^r \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\int_Q\left|T_k\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|\right)^{(1-\theta)r}\left\|\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right\|^{\theta r}_{W^{\sigma,p}(Q)}.$$

特别地，取 $r = p\left(1+\frac{\sigma}{2d}\right)$即可选择满足 $\theta r = p$ 的 $r$。因此可得

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left|\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|^r \le C\sup_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\int_Q\left|T_k\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|\right)^{(1-\theta)r}\left\|\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right\|^p_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{2d})}$$

因此，由于 $B^s_{p,\,q}\subset W^{\sigma,\,p}$，可推出

$$\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\right\|_{\mathcal{L}^r} \le \left\|\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^{2d})} \le C\left(\sup_{z\in\mathbb{Z}^d}\int_Q\left|T_z\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|\right)^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}\mathcal{D}_s^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}$$

˜其中，我们使用不等式（29）和 $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}}$ 得到了第一个不等式。另一方面，根据 [14,不等式（42）]，有 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}-\tilde{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^p}\le C\hbar^s\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{B}^s_{p,\,q}}$。由于 $r\ge p$，考虑到 $\mathrm{L}^p$ 范数定义中出现的 $h$，Schatten 范数之间的包含关系给出 $\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}-\tilde{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{k}_{\mathcal{L}^r}\le C\hbar^{s-2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\mathrm{k}\boldsymbol{\rho}\mathrm{k}_{\mathcal{B}^s_{p,\,q}}$，因此

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^r} - C\hbar^{s-\frac{2d\sigma}{(2d+s)p}}\mathcal{D}_s \le C\left(\sup_{z\in\mathbb{Z}^d}\int_Q\left|T_z\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}\right|\right)^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}\mathcal{D}_s^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}.$$

注意到上述方程中 $\hbar$ 的指数为正，并且由于 $r\ge p\ge 2$ 可以使用不等式（33），因此取 $\hbar\to 0$可得

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{S}}_{s,p}\dot{\mathcal{D}}_s)^{1-2/r'} \le C\,\mathcal{D}_s^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}\,\|\mu\|^{\frac{\sigma}{2d+\sigma}}_{L^1(Q)}.$$

特别是，$\mu\neq 0$。

现在还需证明 $\mu^2$ 也是序列$T_{z_\hbar}\tilde f_{\boldsymbol{\rho}}$的极限。为此，我们将使用[7, 引理 31]中证明的以下不等式。对于任意 $p\ge 2$，都有

$$\left\|\frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f\tilde{\boldsymbol{\rho}}_g+\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f\tilde{\boldsymbol{\rho}}_g}{2}-\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{fg}\right\|_{\mathcal{L}^{p/2}} \le 2^{d+1}\,d\,\hbar\,\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}\,\|\nabla g\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})},$$

上述不等式，再结合根据 Hölder不等式可知

$$\left\| \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}_f \tilde{\boldsymbol{\rho}}_g + \tilde{\boldsymbol{\rho}}_f \tilde{\boldsymbol{\rho}}_g}{2} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{fg} \right\|_{\mathcal{L}^{p/2}} \leq \left\| \tilde{\boldsymbol{\rho}}_f \right\|_{\mathcal{L}^p} \left\| \tilde{\boldsymbol{\rho}}_g \right\|_{\mathcal{L}^p} + \|fg\|_{L^{p/2}(\mathbb{R}^{2d})} \leq 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}$$

通过双线性实插值（例如参见 [27, 引理 28。3]）并取 $f = g = \mu$至

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu^2 - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\mu^2} \right\|_{\mathcal{L}^{p/2}} \leq C \hbar^\sigma \|\mu\|^2_{B^\sigma_{p,\tilde{q}}(\mathbb{R}^{2d})} \leq C \hbar^\sigma \|\mu\|^2_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})},$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu^2 = (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu)^2, \tilde{q} \geq 2$，我们用到了这一事实：$(L^p, W^{1,p})_{s,\tilde{q}} = B^s_{p,\tilde{q}}$（例如参见 [28, 第 2.4 节2]），以及连续嵌入 $B^s_{p,q} \subset B^\sigma_{p,\tilde{q}}$ 对任意 $\sigma < s$均成立。也就是说，对算子进行平方这一操作，近似于对函数进行平方。根据 Husimi 变换的性质，我们推得

$$\left\| \tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_{\mu^2}} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^{2d})} \leq C \hbar^\sigma \mathcal{D}_s^2.$$

注意到 $\tilde{f}_{\tilde{\rho}_{\mu^2}} = \tilde{f}_{\rho_{\mu^2}} = g_{2h} * f_{\rho_{\mu^2}} = g_{2h} * \mu^2$，我们推得 $g_h * f_{\tilde{\rho}_\mu^2} - g_h * \mu^2$在 $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ 中收敛至 0。另一方面，由于 $g_h$ 是恒等逼近，$g_h * \mu^2 - \mu^2$ 也在 $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ 中收敛至 0。因此，以下收敛在 $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ 中强成立

$$\tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mu^2. \tag{36}$$

现在我们要证明 $\tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2}$ 与 $\mu$接近。为此，我们利用以下事实：$\boldsymbol{\rho}_h = \boldsymbol{\rho}_h^2$，其中 $\boldsymbol{\rho}_h = \mathrm{T}_{z_h} \boldsymbol{\rho}$，并写成

$$\mu - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2} = \left(\mu - \tilde{f}_{\rho_h}\right) + \left(\tilde{f}_{\rho_h^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_h^2}\right) + \left(\tilde{f}_{\tilde{\rho}_h^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2}\right). \tag{37}$$

我们已经知道，右侧第一项在 0 中收敛于 $L^p$ 局部$(\mathbb{R}^{2d})$。为了估计第二项，我们利用 Husimi变换界（29）得到

$$\left\| \tilde{f}_{\rho_h^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_h^2} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^{2d})} \leq \left\| \boldsymbol{\rho}^2 - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h^2 \right\|_{\mathcal{L}^r}.$$

为了控制这一项，利用以下事实去掉平方项会很有帮助：

$$\boldsymbol{\rho}_h^2 - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\left(\boldsymbol{\rho}_h + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right) + \left(\boldsymbol{\rho}_h + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\left(\boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\right). \tag{38}$$

根据半经典Young卷积不等式（见 [30, 14]）以及以下事实：$\boldsymbol{\rho}_h^2 = \boldsymbol{\rho}_h$，有 $\left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathcal{L}^p} \leq 1$。因此，由（38）和 Hölder不等式可得

$$\left\| \boldsymbol{\rho}_h^2 - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h^2 \right\|_{\mathcal{L}^r} \leq \left( \|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathcal{L}^p} + \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h \right\|_{\mathcal{L}^p} \right) \left\| \boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq 2 \left\| \boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h \right\|_{\mathcal{L}^p}.$$

由于根据 [14], 我们知道 $\left\| \boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq C \hbar^s \, \mathrm{k}\boldsymbol{\rho}_h \mathrm{k}_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$，因此得到

$$\left\| \boldsymbol{\rho}_h^2 - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h^2 \right\|_{\mathcal{L}^r} \leq C \hbar^s \mathcal{D}_s. \tag{39}$$

现在还需处理恒等式（37）右侧的最后一项。其思路是~与第二项类似，但由于仅有 $f_\rho$ 到 $\mu$ 的弱收敛或

局部地，我们转而采用弱拓扑。取 $\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^{2d})$ 为一个测试函数。然后再次利用恒等式（38），将 $\boldsymbol{\rho}_h$ 替换为 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(\tilde{f}_{\tilde{\rho}_h^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2}\right)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(f_{\tilde{\rho}_h^2} - f_{\tilde{\rho}_\mu^2}\right)\tilde{\varphi} = \tfrac{h^d}{2}\operatorname{Tr}\Big(\left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}^*\left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\Big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left(\tilde{\mu} - \tilde{\tilde{f}}_{\boldsymbol{\rho}_h}\right) f_{\boldsymbol{\nu}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left(\mu - \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}_h}\right)\tilde{f}_{\boldsymbol{\nu}}\Big)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\nu} = \left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\varphi$，并且 $f_{\boldsymbol{\nu}}$ 在 $L^{p'}(\mathbb{R}^{2d})$ 中关于 $\hbar$ 一致有界，这是因为根据带有 $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r'}$ 的 Hölder不等式

$$\left\|\tilde{f}_{\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{2d})} \le \left\|\left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mu + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\varphi\right\|_{\mathcal{L}^{p'}} \le \left(\|\mu\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} + \|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathcal{L}^p}\right)\left\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\varphi\right\|_{\mathcal{L}^{r'}} \le 2\|\varphi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^{2d})}.$$

取 $f_{\boldsymbol{\nu}}$ 的紧支撑函数逼近，并利用以下事实：$\mu - \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}_h}$ 在 $0$ 中强收敛于 $L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2d})$，可得 $\tilde{f}_{\tilde{\rho}_h^2} - \tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2}$ 在 $0$ 中弱收敛于 $L^r(\mathbb{R}^{2d})$。回顾不等式（39）并回到方程（37），我们证明了

$$\tilde{f}_{\tilde{\rho}_\mu^2} \underset{h\to 0}{\rightharpoonup} \mu^2$$

在 $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ 中弱收敛。结合方程（36），这证明了 $\mu = \mu^2$。 □

定理 *1* 的证明。假设 $s > 1/p$，或 $s = 1/p$ 和 $q < \infty$，令 $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_\hbar)_{\hbar\in(0,1)}$为一个满足该定理假设的算子序列，并且范数 $\|\boldsymbol{\rho}_\hbar\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$ 不收敛于 $\infty$。于是存在 $\boldsymbol{\rho}$ 的一个子序列，该子序列在 $\mathcal{B}^s_{p+q}$ 关于 $\hbar$ 一致有界。现在将 $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_\hbar)_{\hbar\in(0,1)}$ 记作这个子序列。

情形*1*. 首先假设 $p \in [2,\infty]$。那么根据命题 5.1，存在一个函数$\mu \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$ 使得 $\mu^2 = \mu \ge 0$，也就是说 $\mu$ 是某个集合的特征函数。但已知这不成立：集合的特征函数不可能具有这样的正则性，参见例如 [24]。这就证明了 $p \ge 2$的情形下的结论。

情形*2*. 现在假设 $p \in [1,2)$，并令 $\theta = \frac{1}{2s}$、$r = \frac{q}{\theta}$和 $p_0 = \frac{2s-1}{sp-1}p$。由于$p < 2$，我们推得 $s \in (1/2,\ 1)$，因此 $\theta \in (1/2,\ 1)$ 且 $r \in (q,\ \infty)$；又由于$p \in [1,2)$ 且 $s \in (1/2,\ 1)$ 以及 $sp \ge 1$，我们得到 $p_0 \in (p,\ \infty]$（约定若 $sp = 1$，则 $p_0 = \infty$）。可以将 $p_0$ 和 $r$ 的定义改写如下

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p_0}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}.$$

因此，由不等式（26）可得

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{1/2}_{2,r}} \le \|\boldsymbol{\rho}\|^{\theta}_{\dot{\mathcal{B}}^{s}_{p,q}} \left(4\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^{p_0}}\right)^{1-\theta}.$$

若 $\boldsymbol{\rho}$ 是自伴算子，由于 $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$，$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} = \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathrm{L}^1}^{1/p}$ 不依赖于$\hbar$，这是由假设得出的。因此，若 $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$ 在 $\hbar$中一致有界，则 $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\dot{\mathcal{B}}^{1/2}_{2,r}}$ 也将一致有界，，这与本证明第一部分中已证明的情形 $p = 2$ 矛盾。至此，公式（12）的证明完成。当 $s \in (0,1)$ 时，方程（13）可由公式（12）以及如下事实直接推出：由三角不等式，$\gamma_s^{1/p}\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}} \le 2\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{W}^{s,p}}$。当 $s = 1$ 时，公式（13）则由公式（12）和不等式（27）推出。

当 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ 时，$q$ 不是自伴算子，但我们知道 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{L}^{2+\varepsilon}$ 在 $\hbar$ 中一致成立，$\varepsilon > 0$ 对于某个，则由插值不等式（26），我们可推出 $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{B}^{\alpha}_{\beta,\gamma}$ 对于某个 $\alpha > 0$ 和某个 $\beta > 2$。因此，根据命题5.1，经过平移序列并取一个子序列后，$\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换收敛于某个示性函数 $0 \neq \mu = \mu^2 \in B^{\alpha}_{\beta,\gamma}(\mathbb{R}^{2d})$。若 $\alpha$ 足够小，这种正则性并不排除示性函数。然而，由于 $\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换也一致属于 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$，其中 $\hbar$，因此还可推出 $\mu \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$，而这对示性函数而言是不可能的。这就证明了该情形下的定理。

在特殊情形下，$p \leq \frac{2d}{d+s}$ 那么，$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{L}^{2+\varepsilon}$ 关于 $\hbar$ 一致地成立，这直接源于 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ 关于 $\hbar$ 的一致性可由量子 Sobolev 不等式[14], 得到，因此证明与上一段相同。□

## 6. Proof of the Weyl law in Sobolev spaces

**定理 *3* 的证明。** 证明的开头是经典的（例如参见 [11]）。首先注意到

$$h^d \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\,|\boldsymbol{p}|^2\right) = h^d \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\left(|\boldsymbol{p}|^2 - U(x)\right)\right) + h^d \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}\, U(x)) \leq M_0 \left\|U_+\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \tag{40}$$

其中 $M_h = h^d \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho})$，由此可知 $h^d \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\,|\boldsymbol{p}|^2\right)$ 关于 $\hbar$ 一致有界。由不等式（25），$0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 1$ 且 $\boldsymbol{\rho}$ 在 $\mathrm{L}^1$ 中关于 $\hbar$ 一致有界，因此取一个子序列后，$\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换弱收敛（例如在 $p \in (1,\infty)$ 的 $L^p(\mathbb{R}^{2d})$ 中）到某个满足 $0 \leq f \leq 1$ 的函数 $f$。随后，$\boldsymbol{\rho}$ 的 Wigner 变换弱收敛到同一极限（参见 [21]）。另一方面，薛定谔算子的特征值计数函数的经典渐近公式[22, 26, 25, 8] 给出

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} f_{\boldsymbol{\rho}}(x,\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = h^d \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}) \underset{\hbar\to 0}{\to} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq U(x)}(x,\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = M_0$$

而根据薛定谔算子的能量 Weyl 定律（例如参见 [18, 13]），有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f_{\boldsymbol{\rho}}\left(U(x) - |\xi|^2\right) &= h^d \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\left(U(x) - |\boldsymbol{p}|^2\right)\right) = h^d \operatorname{Tr}\left(\left(U(x) - |\boldsymbol{p}|^2\right)_+\right) \\ &\underset{\hbar\to 0}{\to} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \left(U(x) - |\xi|^2\right)_+ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = \max_{g\in G} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \left(U(x) - |\xi|^2\right) g(x,\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

其中 $G = \{\, g \colon \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R} \mid 0 \leq g \leq 1 \text{ 且 } \int_{\mathbb{R}^{2d}} g = M_0 \,\}$。因此，根据浴缸原理，我们推得 $f = \mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq U(x)}$。

如果 $\boldsymbol{\rho}$ 在 $\mathrm{B}^s_p$ 中有界，且关于 $\hbar$ 一致地满足 $q$，那么根据公式（30），其 Husimi 变换在 $B^s_p$ 中有界，并且关于 $\hbar$ 一致地满足 $q(\mathbb{R}^{2d})$，因此 $f$ 也将属于 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$。如果 $\sqrt{U} \in C^\alpha$，且 $\alpha \in (0,1)$，那么 $\mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq U(x)} \in B^{\alpha/p}_{p\,\infty,}(\mathbb{R}^{2d})$。然而，存在函数 $U \in C^\alpha$ 的例子，使得对于所有 $s > \alpha/p$（参见例如 [24, 第 4 节4] 或 [29]），$\mathbb{1}_{|\xi|^2 \leq U(x)} \notin B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{2d})$。因此，对于这些函数，我们可以推断出，$\boldsymbol{\rho}$ 不可能关于 $\hbar$ 一致地在 $\mathrm{B}^s_{p,q}$ 中有界，从而证明公式（23）。

步骤 *2*：*Husimi* 变换的收敛性。在 $U$ 满足假设（16）且 Ω 有界的特殊情形下，根据定理 2 和公式（30），我们推断出 $\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换关于 $\hbar$ 一致地在 $B_p^{1/p}{}_{\text{中}\infty}(\mathbb{R}^{2d})$ 有界，因此在 $B_p^{1/p}{}_{\text{中}\infty}(\mathbb{R}^{2d})$ 弱收敛到 $f$。

为了在 $L^p$ 中获得强收敛，还需利用 $\boldsymbol{\rho}$ 的矩是有界的。˜事实上，$\boldsymbol{\rho}$ 的 Husimi 变换满足 $0 \leq f_{\boldsymbol{\rho}} \leq 1$，并且

$$\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \left| \xi \right| \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} g_h * f_{\boldsymbol{\rho}} \left| \xi \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi = h^d \operatorname{Tr}\left( \boldsymbol{\rho} \left| \boldsymbol{p} \right|^2 \right) + d\,\hbar,$$

其在 $\hbar \in (0, 1]$ 由不等式（40）可知是一致有界的。另一方面，由 Agmon估计 [1, 2] 可知，存在与 $\hbar$ 和 $N = h^{-d}$ 无关的正常数 $c$ 和 $C$，使得对于所有本征值 $(\psi_j)_{j \in \{1,\ldots,N\}}$ $\boldsymbol{\rho}$ 的本征值，

$$\left\| e^{c|x|} \, \psi_j(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_\varepsilon,$$

其中 $C_\varepsilon$ 取决于假设（ $\varepsilon$ 16）中出现的

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{j=1}^{N} \left| \psi_j \right\rangle \left\langle \psi_j \right|,$$

根据不等式（25），$Nh^d \leq C \, \mathrm{k} U_+ \mathrm{k}_{L^{d/2}(\mathbb{R}^d)}$，这意味着

$$\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \left| x \right| \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 - d\hbar \leq h^d \operatorname{Tr}\left( \boldsymbol{\rho} \left| x \right|^2 \right) = h^d \sum_{j=1}^{N} \left\| |x| \, \psi_j(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_\varepsilon \left\| U_+ \right\|_{L^{d/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

由这些 $|\xi|$ 和 $|x|$ 的矩估计，以及 $\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^{2d})$ 中关于 $s < 1/2$ 的一致有界性，根据 $L^p$ 中经典的 Riesz–Fréchet–Kolmogorov 紧性判据（例如参见 [5, 定理 IV.25]），可知 $\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 中强收敛到 $f$。通过插值，以及 $\tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 中的一致有界性，这意味着对于任意 $p \in (1, \infty)$，在 $L^p$ 中强收敛。更确切地说，对于 $p \in [2, \infty)$，

$$\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} - f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} \leq \left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} - f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^{2/p} \left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} - f \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})}^{1-2/p} \leq \left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} - f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^{2/p}$$

因为 $-1 \leq \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} - f \leq 1$，类似地，将 $L^\infty$ 替换为 $L^1$，即可得到 $p \in (1, 2)$。按照证明 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 的相同方案，但利用 $\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \right\|_{W^{1,\,1}(\mathbb{R}^{2d})}$、$\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \left| x \right|^2 \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}$ 和 $\left\| \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \left| \xi \right|^2 \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}$ 关于 $\hbar$ 一致有界这一性质，也可推出 $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ 中的强收敛。

在 $W^{s,\,p}(\mathbb{R}^{2d})$ 中对所有 $s \in (0,\ 1/p)$ 的收敛性，类似地可由这些空间是 $L^p(\mathbb{R}^{2d})$ 与 $B_p^{1/p}{}_{,\,\infty}(\mathbb{R}^{2d})$之间的插值空间这一事实推出，从而证明方程（21）。步骤 *3*：*Wigner* 变换的收敛。对于 Wigner 变换 $f_{\boldsymbol{\rho}}$，在 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 中的收敛性可由以下事实推出：对于任意 $s < 1/2$,

$$\left\| f_{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{f}_{\boldsymbol{\rho}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq C \, h^s \left\| f_{\boldsymbol{\rho}} \right\|_{H^s(\mathbb{R}^{2d})},$$

根据方程（19），当 $h \to 0$ 时其收敛于 0。因此，Husimi 变换的收敛蕴含 Wigner 变换的收敛。对于 $p \geq 2$，可以利用经典 Sobolev 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^{2d}) \to W^{\sigma,\,p}(\mathbb{R}^{2d})$，对于 $\frac{1}{2} - \frac{s-\sigma}{2d} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ 得到 Wigner 变换关于 $\hbar$ 在 $W^{\sigma,\,p}(\mathbb{R}^{2d})$ 中一致有界，其中 $2 \leq$

$p < \frac{4d}{2d+\sigma(\cdot)} - 1$，而 $W^{t,\,p}(\mathbb{R}^{2d})$ 关于 $t \in [0,\sigma)$ 中的强收敛再次由插值论证得出，从而证明方程（22）。

最后注意到，算子 $\boldsymbol{\rho}$ 在 $x$ 和 $\boldsymbol{p}$ 中的矩有界，因此可以考虑 $p$ 的较低取值。事实上，采用记号 $X = x + y/2$ 和 $Y = x - y/2$，使得 $x = X + Y$，根据 Wigner 变换的定义和多项式定理，对于任意 $n \in 2\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\rho}} |x|^n &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\, y\cdot\xi/\hbar} |X+Y|^n \, \boldsymbol{\rho}(X,Y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\, y\cdot\xi/\hbar} \left( |X|^2 + |Y|^2 + 2\, X\cdot Y \right)^{n/2} \boldsymbol{\rho}(X,Y)\, \mathrm{d}y \\ &= \sum_{|\alpha+\beta|_1 = n} C_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\, y\cdot\xi/\hbar} X^\alpha \, \boldsymbol{\rho}(X,Y)\, Y^\beta \, \mathrm{d}y = \sum_{|\alpha+\beta|_1 = n} C_{\alpha,\beta}\, f_{x^\alpha \boldsymbol{\rho} x^\beta} \end{aligned}$$

其中求和遍及所有满足下式的多重指标 $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$

$$|\alpha+\beta|_1 := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j + \beta_j = n$$

其中 $x^\alpha$ 表示 $x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$。常数 $C_{\alpha,\,\beta}$ 满足其和为 $\left(2\sqrt{d}\right)^n$，取 $X = Y = (1,\ \dots,\ 1)$ 即可看出这一点。因此，取 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 范数，并利用三角不等式以及 Wigner 变换是从 $\mathrm{L}^2$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 的等距映射这一事实，可得

$$\| f_{\boldsymbol{\rho}} |x|^n \|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq \sum_{|\alpha+\beta|_1 = n} C_{\alpha,\beta} \left\| x^\alpha \boldsymbol{\rho}\, x^\beta \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left(2\sqrt{d}\right)^n \sup_{|\alpha+\beta|_1 = n} \left\| x^\alpha \boldsymbol{\rho}\, x^\beta \right\|_{\mathcal{L}^2}$$

由乘以 $\frac{x^\alpha}{|x|^{|\alpha|_1}}$的算子有界性,

$$\left\| x^\alpha \boldsymbol{\rho}\, x^\beta \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left\| |x|^{|\alpha|_1} \, \boldsymbol{\rho}\, |x|^{|\beta|_1} \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq \left\| \boldsymbol{\rho}\, |x|^{|\alpha+\beta|_1} \right\|_{\mathcal{L}^2}$$

其中最后一个不等式由[16, 不等式 (56)]（这主要由 Schatten 范数的 Hölder不等式和 Araki–Lieb–Thirring不等式推出[3]）。因此

$$\| f_{\boldsymbol{\rho}} |x|^n \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq (4d)^n \, \| \boldsymbol{\rho}\, |x|^n \|^2_{\mathcal{L}^2} = (4d)^n \, h^d \, \mathrm{Tr}\left( \boldsymbol{\rho}\, |x|^{2n} \right)$$

这里用到了这样一个事实： $\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{\rho}$。根据 Agmon估计，这个最后的表达式关于 $\hbar$ 一致有界。将 $x$ 替换为 $\xi$，类似的证明可得

$$\| f_{\boldsymbol{\rho}} |\xi|^n \|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq (4d)^n \, h^d \, \mathrm{Tr}\left( \boldsymbol{\rho}\, |\boldsymbol{p}|^{2n} \right) = (4d)^n \, h^d \sum_{j=1}^{N} \left\langle \psi_j \,\middle|\, |\boldsymbol{p}|^{2n} \, \psi_j \right\rangle$$

其中，对于某个 $\lambda_j \leq 0$，$\psi_j$验证 $|\boldsymbol{p}|^2 \, \psi_j = (U(x) + \lambda_j)\, \psi_j$。特别是，如果 $n$ 为奇数，则 $(U(x) - \mu_j)^n \leq U_+^n(x)$，因此

$$\left\langle \psi_j \,\middle|\, |\boldsymbol{p}|^{2n} \, \psi_j \right\rangle \leq \left\langle \psi_j \,\middle|\, U_+^n \psi_j \right\rangle \leq \| U_+ \|^n_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

对于 Wigner 变换，这给出

$$\begin{aligned}\left\|f_{\boldsymbol{\rho}}\,|\xi|^{n}\right\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{2d})}^{2} &\leq (4d)^{n}\,h^{d}\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\rho}\,|\boldsymbol{p}|^{2n}\Big) \leq (4d)^{n}\,h^{d}\sum_{j=1}^{N}\|U_{+}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})}^{n}\\ &\leq C_{d}\,(4d)^{n}\,\|U_{+}\|_{L^{d/2}(\mathbb{R}^{d})}\,\|U_{+}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})}^{n}\,.\end{aligned}$$

由这些加权 $L^2$ 估计，根据Hölder不等式， $p<2$ 的 $L^p$ 估计可得，因为只要 $n>2d$

$$\|f_{\boldsymbol{\rho}}\|_{L^{1}(\mathbb{R}^{2d})} \leq C_{d,n}\,\|f_{\boldsymbol{\rho}}\,(1+|x|^{n}+|\xi|^{n})\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{2d})} \tag{41}$$

其中$C_{d,\,n}$与 $\hbar$无关。 $L^1(\mathbb{R}^{2d})$中的有界性以及 $H^s(\mathbb{R}^{2d})$中 $s<1/2$的有界性，结合 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$中的收敛性，通过插值可推出，对于任意满足 $p\in(1,\ 2)$的 $s<1/p'$，$W^{s,\,p}(\mathbb{R}^{2d})$中的收敛性。

请注意，与上述矩估计（41）类似，更一般地，只要 $n>2d+k$

$$\left\|f_{\boldsymbol{\rho}}\left(1+|x|^{k}+|\xi|^{k}\right)\right\|_{L^{1}(\mathbb{R}^{2d})} \leq C_{d,n}\,\|f_{\boldsymbol{\rho}}\,(1+|x|^{n}+|\xi|^{n})\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{2d})} \tag{42}$$

结合Wigner 变换在 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$中的收敛性（这意味着在 $\mathbb{R}^{2d}$的任意紧集上， $L^1$ 中均收敛），可得 $L^1(\mathbb{R}^{2d})$中的收敛性。□

**致谢**。本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划资助（资助协议编号 865711）。

## 参考文献

[1] S. Agmon。《二阶椭圆方程解的指数衰减讲义：N 体薛定谔算子的特征函数界》。普林斯顿遗产图书馆第 29 卷，数学札记。普林斯顿大学出版社，1982 年。[2]S. Agmon。薛定谔算子的特征函数指数衰减界。载于薛定谔算子，《数学讲义》，第 1–38 页，柏林、海德堡，1985 年。Springer。[3] H. Araki。关于 Lieb 和 Thirring 的一个不等式。《数学物理通讯》，19(2)：167–170，1990 年。[4] N. Benedikter。从半经典理论到随机相位近似的相互作用费米子的有效动力学。《数学物理杂志》，63(8)：081101，2022 年 8 月。[5] H. Brezis。《泛函分析：理论与应用》。Sciences Sup。Dunod，巴黎，2005 年新版，2005 年 5 月。[6] J. J. Chong、L. Lafleche 和 C. Saffirio。从多体量子动力学到具有奇异势的 Hartree–Fock 和 Vlasov 方程。*arXiv:2103.10946*，第 1–74 页，2021 年 3 月。[7] J. J. Chong、L. Lafleche 和 C. Saffirio。关于从 Hartree 方程到 Vlasov–Poisson 方程的极限中的 $L^2$ 收敛速率。《综合理工学院数学杂志》，10：703–726，2023 年。[8] M. Cwikel。薛定谔算子的奇异值和束缚态数目的弱型估计。《数学年刊》，106(1)：93–100，1977 年 7 月。[9] G. De Palma 和 D. Trevisan。利用量子信道进行量子最优传输。《亨利·庞加莱年刊》，22(10)：3199–3234，2021 年 10 月。

[10] A. Deleporte 和 G. Lambert。自由费米子的普适性与半经典薛定谔算子的局部魏尔定律。《欧洲数学学会杂志》，即将出版：1–79，2021 年 9 月。[11] S. Fournais、M. Lewin 和 J. P. Solovej。大型费米子系统的半经典极限。《变分法与偏微分方程》，57(4)：1–105，2018 年 8 月。[12] S. Fournais 和 S. Mikkelsen。关于谱投影与位置算子和动量算子之交换子的最优半经典界。《数学物理通讯》，110(12)：3343–3373，2020 年 12 月。[13] D. Hundertmark、A. Laptev 和 T. Weidl。Lieb–Thirring 常数的新界。《数学新进展》，140(3)：693–704，2000 年 6 月。[14] L. Lafleche。论量子 Sobolev 不等式。arXiv:2210.03013，第 1–24 页，2022 年 10 月。[15] L. Lafleche。量子最优传输与弱拓扑。arXiv:2306.12944，第 1–25 页，2023 年 6 月。[16] L. Lafleche 和 C. Saffirio。从 Hartree 和 Hartree–Fock 到 Vlasov–Poisson 方程的强半经典极限。《分析与偏微分方程》，16(4)：891–926，2023 年 6 月。[17] M. Lewin。描述 Sobolev 空间中的紧性缺失。2010 年 1 月。[18] E. H. Lieb 和 W. E. Thirring。薛定谔哈密顿量的特征值矩不等式及其与 Sobolev 不等式的关系。数学物理研究，《纪念 Valentine Bargmann 文集》，第 269–303 页，1976 年。[19] P.-L. Lions。变分法中的浓缩紧性原理。局部紧情形，第 1 部分。亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析，1(2)：109–145，1984 年。[20] P.-L. Lions。变分法中的浓缩紧性原理。局部紧情形，第 2 部分。亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析，1(4)：223–283，1984 年。[21] P.-L. Lions 和 T. Paul。关于 Wigner 测度。《伊比利亚美洲数学杂志》，9(3)：553–618，1993 年。[22] A. Martin。强耦合极限下的束缚态。《瑞士物理学纪要》，45：140–148，1972 年 7 月。[23] M. Porta、S. Rademacher、C. Saffirio 和 B. Schlein。具有库仑相互作用的费米子平均场演化。统计物理学杂志，166(6)：1345–1364，2017 年 3 月。[24] W. Sickel。关于示性函数的正则性。载于《偏微分方程中的异常现象》，Springer INdAM 丛书第 43 卷，第 395–441 页，Cham，2021 年。Springer 国际出版。[25] B. Simon。利用弱迹理想分析薛定谔算子及束缚态数目。《美国数学会汇刊》，224(2)：367–380，1976 年。[26] H. Tamura。非光滑椭圆算子的渐近特征值分布。《日本学士院纪要 A辑：数学科学》，50(1)：19–22，1974 年 1 月。[27] L. Tartar。《Sobolev 空间与插值空间导论》，意大利数学联合会讲义第 3 卷。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，第 1 版，2007 年。[28] H. Triebel。《插值理论、函数空间、微分算子》。North-Holland 数学图书馆第 18 卷。爱思唯尔科学出版社，1978 年。[29] H. Triebel。《分形与谱：与傅里叶分析和函数空间相关》。Springer 科学与商业媒体，2010 年 10 月。[30] R. Werner。相空间上的量子调和分析。《数学物理杂志》，25(5)：1404–1411，1984 年 5 月。

现地址：纯数学与应用数学系，里昂高等师范学院，意大利大道，69364 里昂，法国