arXiv:2302.04826v1 [math.CV] 9 Feb 2023

直像与希尔伯特场

PRANAV UPADRASHTA

Abstract. 本文对与 K¨ähler 流形的全纯纤维化相关的 Bergman 空间场的曲率算子进行了细致研究。我们重点关注纤维为光滑有界伪凸域的情形。

1. Introduction

我们关注与全纯~浸没相关的 Bergman 空间族的几何。更准确地说，设 X 为一个 $n+m$ 维 K¨ähler 流形，设 B 为一个 m-~维复流形，并设 $\widetilde{\pi}: X \to B$ 为一个全纯浸没。设 $X \subset X$ 为一个边界光滑的区域，其纤维 $X_b := \widetilde{\pi}^{-1}(b) \cap X$ 具有光滑伪凸边界。~设 $E \to X$ 为一个带有光滑厄米度量 h的全纯线丛。存在一个与浸没 $\pi := \widetilde{\pi}|_X$ 相关的 Bergman 空间族 $\mathcal{H} \to B$，它为每个 $b \in B$ 赋予 Bergman 空间

$$\mathcal{H}_b = \left\{ f \in \Gamma(X_b, \mathcal{O}(K_{X_b} \otimes E|_{X_b})) : (f,f)_b := \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} \langle f \wedge \overline{f}, h \rangle < \infty \right\}.$$

我们证明关于族 $\mathcal{H} \to B$ 的以下定理。

~定理 1.1. 设 (E,h) 如上所述，且环境流形 X 是 Stein。假设对于每个 $b \in B$，纤维 X_b 满足：作用于 (0, 1)-形式上的诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(0,1)}$ 是~紧的，并且 X_b 在 X_b 中具有 Stein 区域邻域。若 (E,h) 具有非负曲率，且 X 是伪凸的，则 $\mathcal{H}$ 具有非负中野曲率。

事实上，在对纤维化 $X \to B$ 的几何作较少限制的假设下，定理 1.1 仍然成立。为如此一般的纤维化定义 $\mathcal{H}$ 的曲率，是一件涉及技术细节的微妙之事。这些技术困难的主要原因在于，$\mathcal{H} \to B$ 未必是希尔伯特丛，因为它可能并非局部平凡。然而，借助 [LS14] 和 [Var22] 中发展的思想，我们可以为 $\mathcal{H}$ 配备额外的结构，使其曲率得以良好定义。这种额外结构就是 iBLS 场。（详情见第 2.1 节。）

当 $X = \mathbb{C}^n \times B$ 时，$\mathcal{H} \to B$ 的几何结构要域单得多。假设 $X = \mathbb{C}^n \times B$，其中 B 是 $\mathbb{C}$ 的一个结构区域，而 $X = \Omega \times B \subset X$，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个边界光滑的伪凸~区域。设 $(E,h) \to X$ 为带有非平凡度量的平凡线丛。在这种情况下，度量只是一个函数；为简便起见，我们假设它在 $\mathbb{C}^n \times \overline{B}$ 上光滑。因此，希尔伯特空间 $\mathcal{H}_b$ 在拓扑向量空间意义下都典范同构，所以 $\mathcal{H} \to B$ 是一个平凡向量丛。此外，与$\mathcal{H}$ 上的 L^2度量相联系的陈联络的曲率是一个取值于 End($\mathcal{H}$) 的光滑 (1, 1)形式。这里，End($\mathcal{H}$)表示 $\mathcal{H} \to B$ 的丛态射，它们在每个 $b \in B$处都限制为纤维 $\mathcal{H}_b$ 上的连续算子。B. Berndtsson 的一个定理（[Ber09，定理 1.1]）指出，若 (E,h) 具有非负曲率，则 $\mathcal{H}$ 上的陈联络曲率是 Nakano 非负的。

~回到一般浸没 $\tilde{\pi}: X \to B$的情形，X. Wang（[Wan17]）在假设 X 具有一个定义函数 ρ，使得$\rho|_{\tilde{\pi}^{-1}(b)}$ 对每个 $b \in B$都在 X_b 的某个邻域上严格多重次调和的条件下，证明了定理 1.1。在这种情况下， $\mathcal{N}_b^{(0,1)}$ 的紧性可追溯到 J. Kohn 的工作。

在下一个定理中，我们得到 $\mathcal{H}$ 的曲率公式。

~定理 1.2（= 定理 5.4）。设 $\tilde{\pi}: X \to B$ 为全纯浸没，$(E,h) \to X$ 是一个~厄米全纯线丛，并设 $X \subset X$ 为有界区域，使得纤维 $X_b := X \cap \tilde{\pi}^{-1}(b)$ 是光滑有界伪凸域。假设 $\mathcal{H} \to B$ 是一个 iBLS 场。那么 $\mathcal{H}$ 的曲率由下式给出

$$\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1\overline{\sigma_2}} f_1, f_2\right)_b = \left(\Theta^{E}_{\xi_{\sigma_1}\overline{\xi}_{\sigma_2}} u_1, u_2\right)_b - \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} \langle \bar{\partial}\xi_{\sigma_1} \lrcorner u_1 \wedge \overline{\bar{\partial}\xi_{\sigma_2} \lrcorner u_2}, h\rangle + \int_{\partial X_b} \partial\bar{\partial}\rho(\xi_{\sigma_1}, \overline{\xi}_{\sigma_2})\{u_1, u_2\} dS_b$$
$$- \left(P_b^{\perp} L^{1,0}_{\xi_{\sigma_1}} u_1, P_b^{\perp} L^{1,0}_{\xi_{\sigma_2}} u_2\right)_b . \tag{1.3}$$

这里， σ_1, σ_2 是开集 U 上的全纯 (1, 0) 型向量场，该开集包含 b； $\xi_{\sigma_1}, \xi_{\sigma_2}$ 是它们到 X 的水平提升，即 $d\tilde{\pi}(\xi_{\sigma_i}) = \sigma_i$ 且 $\xi_{\sigma_i}(x) \in T^{1,0}_x X$ 对所有 $x \in \partial X \cap \tilde{\pi}^{-1}(U)$ 均成立。此外， $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_b$满足：对于一个在 $\overline{X}$ 上光滑且满足下式的扭曲 $(n, 0)$-形式 u_i，有 $f_i = \iota^*_{X_b} u_i$

$$\iota^*_{X_b} L^{0,1}_{\overline{\xi}_{\sigma_i}} u_i \in \mathcal{H}_b \quad and \quad \iota^*_{X_b} L^{1,0}_{\xi_{\sigma_i}} \bar{\partial} u_i = 0. \tag{1.4}$$

关于记号的几点说明。对于 X 上的 (1, 0) 型向量场 η，形式 $L^{1,0}_{\eta} u$ 是一个取值于 E 的形式 u 的扭曲李导数，其定义为

$$L^{1,0}_{\eta} u = \nabla^{1,0}(\eta \lrcorner u) + \eta \lrcorner \nabla^{1,0} u.$$

类似地， $L^{0,1}_{\overline{\eta}} u$ 是

$$L^{0,1}_{\overline{\eta}} u = \bar{\partial}(\overline{\eta} \lrcorner u) + \overline{\eta} \lrcorner \bar{\partial} u.$$

这里， $\nabla = \nabla^{1,0} + \bar{\partial}$ 是 (E,h) 的陈联络。映射 $\iota_{X_b}: X_b \to X$ 表示自然嵌入，而 $P_b: \Gamma(X_b, L^2(K_{X_b} \otimes E|_{X_b})) \to \mathcal{H}_b$ 表示伯格曼投影。对于局部 (1, 0) 型向量场 $\eta = \eta_k \frac{\partial}{\partial z^k}$ （此处及下文均采用标准求和约定），我们使用记号

$$\bar{\partial}\eta \lrcorner u = \bar{\partial}\eta^k \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \lrcorner u\right).$$

记号 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示由 $E|_{X_b}$ 上的度量 h_b 和 $T^{1,0}$ 上的 K¨ahler 度量 ω_b 在取值于 $E|_{X_b}$ 的形式上诱导的内积，$^0_{X_b}$。最后， ρ 是 X 的定义函数，因此 $\rho_b := \rho|_{\tilde{\pi}^{-1}(b)}$ 是 X_b 的定义函数，满足 $|d\rho_b| = 1$ （在 ∂X_b 上），而 dS_b 是 ∂X_b 上的诱导体积形式，即 $d\rho_b \wedge dS_b = dV_{\omega_b}|_{\partial X_b}$。

注 1.5。(1.3) 右端的值与向量场 σ_1、σ_2 的水平提升 ξ_{σ_1}、ξ_{σ_2} 的选择无关。（见定理 4.12）。元素 $(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1\overline{\sigma}_2} f)(b) \in \mathcal{H}_b$ 仅取决于向量场 σ_i 在 b 处的取值 $\sigma_i(b)$。由满足 (1.4) 的 E 值 $(n, 0)$ 形式 u 限制得到的 f 截面属于算子 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1(b)\overline{\sigma}_2(b)}$ 的区域，并且元素 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1(b)\overline{\sigma}_2(b)} f$ 与将 f 延拓的 u 的选择无关，只要 u 满足 (1.4)。非正式地说，这意味着 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 是一个（可能不光滑的）算子值 (1, 1) 形式。

当线丛 $(E,h) \to X$ 具有非负曲率时，我们可以得到以下估计。

定理 1.6（=定理 4.17）。设 $(E,h)\to X\to B$ 如定理 1.2 所述。假设 (E,h) 具有非负曲率。设 $f_1,\cdots,f_m\in\mathcal{H}_b$ 满足 $f_i=\iota_{X_b}^*u_i$，其中 u_i 是满足 (1.4) 的扭曲 $(n,0)$-形式，$\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 是在包含 b 的开集上的全纯 $(1,0)$ 型向量场，而 $\xi_{\sigma_1},\cdots,\xi_{\sigma_m}$ 是它们到 X 的水平提升。那么我们有以下估计

$$\left\|P_b^{\perp}\left(\sum_{j=1}^m L^{1,0}_{\xi_{\sigma_j}}u_j\right)\right\|^2_{\mathcal{H}_b}\leq\sum_{j,k=1}^m\left[\left(\Theta^E_{\xi_{\sigma_j}\bar{\xi}_{\sigma_k}}f_j,f_k\right)_{\mathcal{H}_b}+\left(\bar\partial\xi_{\sigma_j}\lrcorner f_j,\bar\partial\xi_{\sigma_k}\lrcorner f_k\right)_{\mathcal{H}_b}\right].\tag{1.7}$$

鉴于估计 (1.7) 和定理 1.2，为了得到 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 的中野正性，我们希望有

$$-\sum_{j,k=1}^m\sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle\bar\partial\xi_{\sigma_j}\lrcorner u_j\wedge\overline{\bar\partial\xi_{\sigma_k}\lrcorner u_k},h\rangle=\sum_{j,k=1}^m\left(\bar\partial\xi_{\sigma_j}\lrcorner u_j,\bar\partial\xi_{\sigma_k}\lrcorner u_k\right)_{\mathcal{H}_b}.$$

等价地，令

$$\kappa=\iota_{X_b}^*\left(\sum_{j=1}^m\bar\partial\xi_{\sigma_j}\lrcorner u_j\right)\tag{1.8}$$

我们希望证明

$$-\sqrt{-1}^{n^2}\langle\kappa\wedge\overline{\kappa},h\rangle=\{\kappa,\kappa\}.\tag{1.9}$$

当 κ 是一个本原的、取值于 E 的 $(n-1,1)$-形式时，恒等式 (1.9) 成立（参见 [Huy05，推论 1.2.36]）。回顾一下，若扭曲的 $(n-1,1)$-形式 v 定义在 X_b 上且满足 $\omega_b\wedge v=0$，则称其为本原形式。若作用于 X_b 上 $(0,2)$ 型形式的诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(0,2)}$ 是全局正则的，那么对于 X 上的任意扭曲 $(n,0)$-形式 u，我们可以在 b 的一个邻域上取 τ 的水平提升 $\bar\xi_\tau$ 到 X，使得 $\iota_{X_b}^*(\partial\xi_\tau\lrcorner u)$ 在 X_b 上是本原形式（参见引理 5.6）。这些提升称为原始水平提升，由 [Var22] 在真纤维化的情形下引入。尽管定理 1.1 中我们假设 $\mathcal{N}^0_{,b^1}$ 是紧的，但证明 $\mathcal{H}$ 的中野正性只需 $\mathcal{N}^0_{,b^2}$ 全局正则。回顾一下，$\mathcal{N}^0_{,b^1}$ 的紧性蕴含 $\mathcal{N}^0_{,b^2}$ 的紧性（参见 [Str10，命题 4.5]）；而 $\mathcal{N}^0_{,b^2}$ 的紧性蕴含全局正则性，这是科恩-尼伦伯格的一个结果（[KN65]）。当 $n=1$ 时，也就是说，纤维 X_b 是黎曼曲面，每个 $(0,1)$-形式都是本原形式，因此每个水平提升 ξ_τ 都是 τ 的原始水平提升。因此，对于一维纤维，即使 $\mathcal{N}^0_{,b^2}$ 不存在，定理 1.1 仍然成立。

对于平凡纤维化 $\pi\colon X\to B$，即当 $X=\Omega\times B$ 时，X 的切丛有如下典范分解：$T^{1,0}_X=p_1^*T^{1,0}\Omega\oplus\pi^*T^{1,0}_B$ 其中 $p_1\colon X\to\Omega$ 是到第一个因子的投影。向量场 $\tau\in\Gamma(B,T^{1,0}_B)$ 相对于此分解可提升为 $\xi_\tau=(0,\tau)$。这些提升满足 $\partial\xi_\tau\equiv0$，因此是原始水平提升。由此，要证明定理 1.1，无需假设 $\mathcal{N}^{0,2}$ 在 Ω 上具有全局正则性。平凡纤维化的另一个特点是，这些原始水平提升属于 ∂X 的 Levi 形式的核，即对于上述形式的提升 $\xi_\tau=(0,\tau)$，有 $\partial\bar\partial\rho(\xi_\tau,\bar\xi_\tau)=0$。由于曲率公式 (1.3) 与水平提升的选取无关，因此平凡纤维化的公式 (1.3) 不包含涉及对 $\partial\Omega$ 积分的项。

公式中出现的量 κ（如（1.8）所示）与 $\mathcal{H}$ 的曲率公式有关，也与 X_b 上的复结构变形有关。注意，在平凡纤维化的情形下（即所有纤维都是双全纯的），对于 B 上的任意向量场 τ，我们能够构造出提升 ξ_τ，使得 $\partial\xi_\tau\equiv0$，因此，含有 κ 的项也不会出现在平凡纤维化的曲率公式中。（1.3）的一种解释是，对于域族（E，h）$\to X$，∂X 沿着横截于 $X\to B$ 纤维方向的 Levi形式，以及纤维上的复结构变形，共同促成了 $\mathcal{H}$的曲率。复结构变形之间的关系

在 X_b 上的复结构与涉及 κ 贡献的曲率公式之间的关系，在 π 时可以得到更好的理解：$X \to B$ 是一个真映射（例如参见 [Var22，定理 4]，[Ber11，定理 1.1]）。为了更好地理解 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 的正性与族（E，h）$\to X \to B$ 的几何之间的关系，最好能够得到第二基本映射平方范数的精确公式；该量出现在（1.7）左端（精确定义见第 2.1 节）。

当 X 是 Stein 流形时，我们得到第二基本映射平方范数的两个精确公式，记录如下。然而，似乎很难根据这两个公式中的任意一个确定 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 的正性。

定理 1.10（= 定理 6.8）。设 $(E,h) \to X \to B$ 如定理 1.2 所述。另假设环境流形 X 是 Stein 流形，且作用于 $E|_{X_b}$-值 (n,q)-形式的诺伊曼算子 $N^{n,q}_b$ 对于 $1 \le q \le n$是全局正则的。那么

$$\begin{aligned}\left(P_b^{\perp} L^{1,0}_{\xi_{\sigma_1}} u_1, P_b^{\perp} L^{1,0}_{\xi_{\sigma_2}} u_2\right)_{\mathcal{H}_b} = &-\frac{1}{2}\left(N_b^{(n,1)} \iota^*_{X_b} \bar\partial \nabla^{1,0}(\xi_{\sigma_1} \lrcorner u_1), \iota^*_{X_b}(\xi_{\sigma_2} \lrcorner \Theta^E) u_2 + \iota^*_{X_b} \nabla^{1,0}(\bar\partial \xi_{\sigma_2} \lrcorner u_2)\right)_{\mathcal{H}_b} \\ &-\frac{1}{2}\left(\iota^*_{X_b}(\xi_{\sigma_1} \lrcorner \Theta^E) u_1 + \iota^*_{X_b} \nabla^{1,0}(\bar\partial \xi_{\sigma_1} \lrcorner u_2), N_b^{(n,1)} \iota^*_{X_b} \bar\partial \nabla^{1,0}(\xi_{\sigma_2} \lrcorner u_2)\right)_{\mathcal{H}_b},\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 u_i 是满足 (1.4) 的 E-值 $(n, 0)$ 型形式，并且 $\iota^*_{X_b} u \in \mathcal{H}_b$ 和 ξ_{σ_i} 是在一个包含 b的开集上定义的全纯 (1,0) 向量场 σ_i 的水平提升。

定理 1.12（= 定理 6.12）。设 $(E,h) \to X \to B$ 如定理 1.2 所述。另假设环境流形 X 是 Stein 流形，且作用于 $E|_{X_b}$-值 (n,q)-形式的诺伊曼算子 $N^{n,q}_b$ 对于 $1 \le q \le n$是全局正则的。此外，假设对于所有 $b \in B$，作用于 X_b 上的 (0, 2) 型形式的诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(0,2)}$ 都是全局正则的。设 u 为满足 1.4 的 E-值 $(n, 0)$ 型形式，且满足 $\iota^*_{X_b} u \in \mathcal{H}_b$。那么

$$\left\|P_b^{\perp} L^{1,0}_{\xi_\sigma} u\right\|^2_{\mathcal{H}_b} = \left(\alpha, \iota^*_{X_b}(\xi_\sigma \lrcorner \Theta^E) u\right)_{\mathcal{H}_b} + \left(\bar\partial \Lambda_{\omega_b} \alpha, \iota^*_{X_b}(\bar\partial \xi_\sigma \lrcorner u)\right)_{\mathcal{H}_b} + \int_{\partial X_b} \left\{\iota^*_{X_b}(\overline{\xi}_\sigma \lrcorner \partial\bar\partial \rho) \wedge \Lambda_{\omega_b} \alpha, u\right\} dS_b,$$

其中 $\alpha := \sqrt{-1} N_b^{(n,1)} \iota^*_{X_b} \bar\partial \nabla^{1,0}(\xi_\sigma \lrcorner u)$。这里，$\sigma$ 是定义在 b 某邻域上的全纯 (1, 0) 型向量场，而 ξ_σ 是它的原始水平提升。

1.1. 结果范围。本文的主要定理是定理 1.2 和定理 1.6。这些定理依赖于技术性假设，即 $\mathcal{H} \to B$ 是一个 iBLS 场。以下是满足这一假设的纤维化 $X \to B$ 的若干例子。（详情见第 4.3 节。）

(1) 令 $B \subset \mathbb{C}^m$ 为单位球，令 $X = B \times \mathbb{C}^n$，并令 $E \to X$ 为带有非平凡度量的平凡线丛。令 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一个光滑有界伪凸域。取 $X = B \times \Omega \subset X$，并令 $\pi : X \to B$ 为到第一因子的投影。Ber09]在 [中研究了这一情形。

(2) 设 X 是一个定义在 $n+m$ 维复流形 X 上的厄米全纯线丛，且令 $\tilde\pi : X \to B$ 为一个全纯浸没，其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 是单位球。

取 $X \subset X$ 为区域 $X = \{\rho < 0\}$，其中 ρ 是定义在 X上的光滑实值函数，使得对所有 $b \in B$，(i) $\rho|_{\tilde\pi^{-1}(b)}$ 在 $X_b := X \cap \tilde\pi^{-1}(b)$ 的闭包的某个邻域内是严格多重次调和函数；(ii) 对所有 $x \in \partial X_b$，$d\rho(x) \neq 0$。取 $\pi : X \to B$ 为映射 $\tilde\pi|_X$。这一情形曾由 [Wan17]研究。

~ ~(3) 令 $X = B \times \mathbb{C}^n$，其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 是一个区域；令 $E \to X$ 为带有~ ~非平凡度量的平凡线丛，并令 $\tilde{\pi}$：$X \to B$ 为到第一个因子的投影。取 $X \subset X$ 到~为区域 $X = \{\rho < 0\}$，其中 ρ 是定义在 X 上的光滑实值函数，使得对所有 $b \in B$：(i) X_b 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域；(ii) $\rho|_{\tilde{\pi}^{-1}(b)}$ 是多重次调和函数；(iii) 对所有 $x \in \partial X_b$，$d\rho(x) \neq 0$。取 π：$X \to B$ 为映射 $\tilde{\pi}|_X$。

(4) 令 $\widetilde{X} = B \underset{\sim}{\times} \mathbb{C}^n$ 其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 是一个区域，令 $E \to$ ~ X 为带有~ ~非平凡度量的平凡线丛，并令 $\tilde{\pi}$：$X \to B$ 为到第一个因子的投影。取 $X \subset X$为一个边界光滑的区域，使得区域 X_b：$= X \cap \tilde{\pi}^{-1}(b) \subset \mathbb{C}^n$ 按照 [Str01] 的意义具有良好的 Stein 邻域基。取 π：$X \to B$ 为映射 $\tilde{\pi}|_X$。

1.1.1. 一个具有紧纤维的例子。这里我们重现一个来自 [Var22] 的纤维化π：$X \to B$ 的例子，其纤维是紧流形（无边界）。可以证明，对于任意线丛 $(E, h) \to X \to B$，当纤维是无边界流形时，关联的希尔伯特空间族是一个 iBLS 场（参见 [Var22，命题 4.15]）。

令 $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ 表示上半平面，并令 $X = \mathbb{C} \times \mathbb{H}/\sim$，其中当且仅当 $b = b'$ 且存在 m、$n \in \mathbb{Z}$ 使得 $z - z' = m + nb$ 时，$(z, b) \sim (z', b')$。那么 π：$X \to \mathbb{H}$ 是由投影 $\mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 诱导的映射。因此，纤维 X_b 是对应于由 $\{1, b\}$ 张成的格的环面。令 D_a 表示在商空间 X 上由 $\{a\} \times \mathbb{H} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 经过取商得到的光滑超曲面。令 $E \to X$ 表示与因子 $D := D_0 - D_{\sqrt{-1}}$ 相关联的线丛。因子 $\Delta_b := D \cap X_b$ 是平凡的，当且仅当存在 m、$n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\sqrt{-1} = m + nb$；否则它是 $[0] - [\sqrt{-1}] \in X_b$。令 $B \subset \overline{\mathbb{H}}$ 表示满足存在 m、$n \in \mathbb{Z}$ 使得$\sqrt{-1} = m + nb$ 的 b 的离散集。那么可以证明

$$\mathcal{H}_b = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if} \quad b \in B \\ \{0\} & \text{if} \quad b \in \mathbb{H} \setminus B. \end{cases}$$

与全纯纤维化 π 相关的族 $\mathcal{H} \to B$ 的几何，在纤维 X_b 为无边界紧流形时已得到广泛研究。文章 [LS14]和 [Var22] 对这一主题的参考文献几乎作了详尽的整理，因此有关当前研究现状，请读者参阅这两篇文章。在 [LS14]中，作者建立了希尔伯特场的形式体系，并研究了纤维 X_b 为开流形时的纤维化 $X \to B$ 情形。文章 [Var22] 讨论了与真下沉$X \to B$相关的族 $\mathcal{H} \to B$ 的几何，其中 $E \to X$ 是一个向量丛。在这种情形下，$\mathcal{H} \to B$ 的纤维都是有限维向量空间，但如第 1.1.1 节中的例子所示，$\mathcal{H} \to B$ 不一定是向量丛。

1.2. 论文结构。第 2 节回顾抽象希尔伯特场及其间映射的定义。关键概念是 iBLS 场，我们证明 iBLS 场的曲率是一个可能不光滑的算子值 2-形式。第 3 节详细介绍我们所关注的几何设置。我们还推导出涉及李导数的恒等式，这些恒等式将在曲率计算中用到。第 4 节定义我们关注的希尔伯特场，并定义伯格曼空间族 $\mathcal{H}$的曲率。本节中，我们证明 $\mathcal{H}$ 的曲率与定义它时涉及的各种选择无关。第 5 节和第 6 节给出主要结果的证明。

致谢。感谢我的导师 Dror Varolin，他不仅就本文相关问题与我进行了诸多讨论，也在复几何的一般问题上给予了我许多帮助。对于他的善良、对我追求各种数学形式的持续鼓励，以及给予我充分的

创作自由，让我能够将自己喜欢的任何想法追究至其逻辑结论，我实在无法用言语表达足够的谢意。与他共事一直是一种愉快的经历。

2. Abstract Hilbert Fields

本节汇总有关希尔伯特场的基本定义。我们主要关注 iBLS 场的概念及其曲率的定义。引入这一概念的主要动机源于这样一个事实（见第 4.3 节）：在合理的假设下，与一个全纯浸没相关联的伯格曼空间族是一个 iBLS 场。关于抽象希尔伯特场几何的更深入讨论，敬请参阅 [Var22] 和 [LS14]。

定义 2.1（希尔伯特场）。设 B 为一个光滑流形。

（i）希尔伯特场 $p\colon \mathcal{L} \to B$ 是一个集合映射，其纤维为希尔伯特空间。因此，每个纤维 $\mathcal{L}_b := p^{-1}(b)$ 都配备了一个内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}_b}$。（ii）希尔伯特场 $\mathcal{L} \to B$ 的一个截面 $\mathfrak{f}$ 是一个集合映射 $\mathfrak{f}\colon B \to \mathcal{L}$，满足对每个 $b \in B$ 都有 $\mathfrak{f}(b) \in \mathcal{L}_b$。

为了 讨论可微截面，我们需要为 $\mathcal{L}$ 赋予更多结构 .

定义 2.2. 设 B 为光滑流形， $\mathcal{L} \to B$ 为希尔伯特场 .

(i) 希尔伯特场 $\mathcal{L} \to B$ 的一个光滑结构是一个层 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$，其对应的预层为每个开集 $U \subset B$ 赋予一个 $\mathscr{C}^\infty(U)$-截面模 $\Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$，使得对于每个 $b \in B$，茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b$ 经由在 b 处取值的映射被映到 $\mathcal{L}_b$ 的一个稠密子空间。

(ii) 若函数 $b \mapsto (\mathfrak{f}(b)\ \mathfrak{g}(b))_{\mathcal{L}_b}$ 对所有 $\mathfrak{f}$、$\mathfrak{g} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$ 以及每个开集 $U \subset B$ 都属于 $\mathscr{C}^\infty(U)$，则称 $\mathcal{L} \to B$ 上的度量 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ 是光滑的。

(iii) 设 $\mathcal{L} \to B$ 为带有光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 的希尔伯特场。对于每个满足条件的开集 $U \subset B$，$\nabla^{\mathcal{L}}\colon \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(T^*_B \otimes \mathbb{C})) \times \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})) \to \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$ 是一个联络

$$\nabla^{\mathcal{L}}_{f\sigma+\tau}\mathfrak{f} = f\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathfrak{f} + \nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f} \quad and \quad \nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}(f\mathfrak{f}) = (\sigma f)\mathfrak{f} + f\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathfrak{f} \tag{2.3}$$

对于 U 上的所有复向量场 σ, τ，对于所有 $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ 以及所有 $\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$。

(iv) 如果联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 与度量相容，则称其为 $\mathcal{L} \to B$ 上的联络。

$$\sigma(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) + \left(\mathfrak{f}, \nabla^{\mathcal{L}}_{\bar{\sigma}}\mathfrak{g}\right), \tag{2.4}$$

对于每个开集 $U \subset B$、U 上的所有复向量场 σ 以及截面 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$。（v）光滑希尔伯特场是具有光滑结构、光滑度量和度量相容联络的希尔伯特场。

注 2.5. 可以独立于 $\mathcal{L}$ 上的任何度量，为拓扑向量空间族 $\mathcal{L} \to B$ 建立光滑结构与联络理论。由此便引出拟希尔伯特场的概念，定义见 [Var22]。拟希尔伯特场 $\mathcal{L} \to B$ 的每个纤维 $\mathcal{L}_b$ 都是一个拓扑向量空间，它不保留赋予其拓扑的度量。我们避免使用拟希尔伯特场这一说法，因为希尔伯特场这一说法足以描述本文的结果。

进一步沿着有限秩向量丛与带有联络的希尔伯特场之间的类比，我们可以如下定义其曲率。

定义 2.6. 设 $\mathcal{L} \to B$ 是具有光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 的希尔伯特场，且 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{L}$ 上的一个联络。由下式定义的映射 $\Theta(\nabla^{\mathcal{L}}) : \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\Lambda^2 T_B \otimes \mathbb{C})) \times \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})) \to \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$

$$\Theta(\nabla^{\mathcal{L}})(\sigma, \tau)\mathfrak{f} = \nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \nabla^{\mathcal{L}}_\tau \mathfrak{f} - \nabla^{\mathcal{L}}_\tau \nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \mathfrak{f} - \nabla^{\mathcal{L}}_{[\sigma,\tau]} \mathfrak{f},$$

称为 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 的曲率。这里 $U \subset B$ 是一个开集，$\sigma, \tau \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C}))$ 且 $\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$。

有限秩向量丛 $E \to B$ 的曲率是定义在 B 上、取值于 $\mathrm{End}(E)$ 的 2-形式。为了对带有联络的希尔伯特场曲率作出类似描述，我们引入以下定义。

定义 2.7（希尔伯特场映射）。设 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ 是光滑流形 B 上的希尔伯特场。

(i) 若集合映射 $\mathcal{T}: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 保纤维且在纤维上线性，则称其为希尔伯特场映射。记作 $\mathcal{T} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$。因此，希尔伯特场映射 $\mathcal{T}: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 是一族 $\{\mathcal{T}_b\}_{b\in B}$ 线性算子 $\mathcal{T}_b \in \mathrm{Lin}(\mathcal{L}_b, \mathcal{M}_b)$。(ii) 若对每个 $b \in B$，希尔伯特场映射 $\mathcal{T}: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 都是有界线性算子，则称其为态射。(iii) 若对每个 $b \in B$，希尔伯特场映射 $\mathcal{T}: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 都是稠密定义（分别为闭、可闭）算子，则称其为稠密定义（分别为闭、可闭）。(iv) 设 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 和 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ 分别是 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 的光滑结构。若对所有 $b \in B$ 以及所有 $\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b$，都有 $\mathcal{T}\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})_b$，则称希尔伯特场映射 $\mathcal{T} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ 是光滑的。

由此可知，光滑映射是稠密定义的。然而，光滑映射未必是态射，而态射也未必是光滑的。

定义 2.8. 设 $\mathcal{L}, \mathcal{M} \to B$ 是具有光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 和 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ 的希尔伯特场。

(i) 若层映射 $\mathbb{L}: \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ 满足对所有 $b \in B$ 均有

$$\mathbb{L}(f\mathfrak{f}) = f\mathbb{L}\mathfrak{f} \quad \textit{for all } f \in \mathscr{C}^\infty_{B,b} \textit{ and all } \mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b.$$

(ii) 一个 层映射 $\mathbb{L}: \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ 称为在 $b \in B$ 处张量性的，若

$$\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b \quad \textit{and} \quad \mathfrak{f}(b) = 0 \implies (\mathbb{L}\mathfrak{f})(b) = 0.$$

若 $\mathbb{L}$ 在 B 的每个点处都具有张量性，则称 $\mathbb{L}$ 具有张量性。

与有限秩向量丛的情形不同，沿复向量场 $\sigma, \tau \in \Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C}))$ 的联络$\nabla^{\mathcal{L}}$的曲率 $\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}$ 一般不一定是态射。然而，下面的引理说明，曲率 $\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}$ 具有张量性。此外，它还说明 $\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}$ 是从希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 到其自身的稠密定义、可闭的光滑映射。$\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}$ 的光滑性是联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$定义的结果。

引理 2.9（[LS14，引理 2.2.4]）。（1）$\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f}(b)$ 仅取决于 $\sigma(b)$ $\tau(b)$ 和 $\mathfrak{f}(b)$，因此在 $\mathcal{L}_b$上诱导出一个稠密定义算子，记为 $\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma(b)\tau(b)}$。（2）$\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma(b)\tau(b)}$ 的伴随算子是 $-\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}(b)\overline{\tau}(b)}$的扩张。特别地，该伴随算子是稠密定义的，因此 $\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma(b)\tau(b)}$ 是可闭的。

定义 2.10（子场）。设 $\mathcal{L} \to B$ 为一个希尔伯特场。

(i) $\mathcal{L}$ 的希尔伯特子场 $\mathcal{H}$ 是满足以下条件的希尔伯特场 $\mathcal{H} \to B$：对所有 $b \in B$，$\mathcal{H}_b \subset \mathcal{L}_b$ 都是闭子空间。因此，度量 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_b}$ 是度量 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}_b}$ 在 $\mathcal{H}_b$上的限制。

(ii) 每个希尔伯特子场 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 都配备正交投影算子，即唯一的态射 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ ，使得对于每个 $b \in B$， $\mathcal{P}_{\mathcal{H},\, b} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{L}_b, \mathcal{H}_b)$ 是到 $\mathcal{H}_b$上的正交投影。

(iii) 假设 $\mathcal{L}$ 是一个光滑希尔伯特场。光滑希尔伯特子场 $\mathcal{H}$ 是一个光滑希尔伯特场，其光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})$ 是与预层相关联的层

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})) := \{\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})) : \mathfrak{f}(b) \in \mathcal{H}_b \ for\ all\ b \in U\}.$$

(iv) 如果光滑子场 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 满足 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ 是一个光滑态射，则称其为正则的。

当 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是一个光滑希尔伯特子场时，我们也可以考察希尔伯特子场 $\mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{L}$。一般而言，$\mathcal{H}^\perp$ 不一定是 $\mathcal{L}$ 的光滑子场。但如果 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是一个正则子场，那么 $\mathcal{H}^\perp$ 是 $\mathcal{L}$ 的正则子场。

定义 2.11（光滑子场的第二基本映射）。设 $\mathcal{L} \to B$ 是一个光滑希尔伯特场， $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是一个光滑子场。映射 $N^{\mathcal{L}/\mathcal{H}}$: $\Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C}) \times \Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})) \to \Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$ 定义为

$$N^{\mathcal{L}/\mathcal{H}}(\sigma)\mathfrak{f} = \nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \mathfrak{f} - \nabla^{\mathcal{H}}_\sigma \mathfrak{f}, \quad for\ \mathfrak{f} \in \Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})), \sigma \in \Gamma(B, \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C}))$$

称为 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{L}$中的第二基本映射。

当 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是一个正则子场时，联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 在 $\mathcal{H}$ 上诱导出联络 $\nabla^{\mathcal{H}}$ ，其定义为： $\nabla^{\mathcal{H}} := \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \nabla^{\mathcal{L}}$。诱导联络的第二基本映射为

$$N^{\mathcal{L}/\mathcal{H}}(\sigma)\mathfrak{f} = \nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \mathfrak{f} - \mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \mathfrak{f} = \mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}}_\sigma \mathfrak{f}. \tag{2.12}$$

方程 (2.12) 右端的量类似于有限维向量丛几何中常见的第二基本形式，这也解释了定义 2.11 中“第二基本映射”这一术语。在下一个命题中，我们比较联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 的曲率与其在正则子场 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$上诱导的联络的曲率。对于有限秩全纯向量丛，这一命题是众所周知的（得益于 P. Griffiths）；在希尔伯特丛的情形下，它见于 [Ber09] 。有限秩向量丛情形下的证明稍作修改即可推广到我们的情形。

命题 2.13. 设 $\mathcal{L} \to B$ 是一个带有度量相容联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$的光滑希尔伯特场，且 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{L}$的一个正则子场。设 $\nabla^{\mathcal{H}} := \mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}$ 表示 $\mathcal{H}$上的诱导联络。那么， $\Theta^{\mathcal{H}}$ 的曲率和 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 的曲率 $\Theta^{\mathcal{L}}$ 之间满足关系

$$\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f} = \mathcal{P}\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f} - \mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f} - \nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}\right), \tag{2.14}$$

其中 $U \subset B$是一个开集， $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C}))$ 和 $\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H}))$。这里 $\mathcal{P}^\perp$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$是由纤维上的 $\mathcal{P}^\perp_b = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}_b} - \mathcal{P}_b$给出的光滑映射。此外，对于截面 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H}))$ 和向量场 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty($ $T_B \otimes \mathbb{C}))$，我们有

$$\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) = \left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) + \left(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}_1}\mathfrak{g}\right) - \left(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}_2}\mathfrak{g}\right). \tag{2.15}$$

证明。设 $\mathfrak{g} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$。对于光滑映射 $\mathcal{T}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$，定义映射 $\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{T}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 如下:

$$\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{T}\right)(\mathfrak{g}) = \nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}(\mathcal{T}\mathfrak{g}) - \mathcal{T}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathfrak{g}\right). \tag{2.16}$$

因此， $\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{T}$是希尔伯特场的光滑稠密定义映射。将 (2.16) 两次应用于光滑映射$\mathcal{P}$ ，可得

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}^2\right)(\mathfrak{g}) = \nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}(\mathcal{P}\mathcal{P}\mathfrak{g}) - \mathcal{P}\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathfrak{g}\right) &= \left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathfrak{g}) + \mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}(\mathcal{P}\mathfrak{g}) - \mathcal{P}\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathfrak{g}\right) \\ &= \left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathfrak{g}) + \mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathfrak{g}).\end{aligned} \tag{2.17}$$

由于 $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$,

$$\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathfrak{g})=\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathfrak{g})-\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathfrak{g})=\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}^{\perp}\mathfrak{g})=-\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\left(\mathcal{P}^{\perp}\mathfrak{g}\right), \tag{2.18}$$

其中，最后一个等式由对映射 $\mathcal{P}$ 应用 (2.16)，并注意到 $\mathcal{P}\mathcal{P}^{\perp}\mathfrak{g}=0$ 得出。现在我们计算

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_1}\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_2}(\mathfrak{f})&=\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}(\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f})\\&=\mathcal{P}\left(\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathcal{P}\right)\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)+\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)\right)\\&=\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathcal{P}\right)\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)+\mathcal{P}^2\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)\\&=-\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)+\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f},\end{aligned}$$

其中，第二个等式是利用光滑映射 $\mathcal{P}$ 的方程 (2.16) 得出的，最后一个等式则由 (2.18) 得出。利用这个恒等式（以及交换 σ_1 和 σ_2 的角色后得到的恒等式），我们得到

$$\begin{aligned}\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f}&=\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_1}\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_2}\nabla^{\mathcal{H}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{H}}_{[\sigma_1,\sigma_2]}\mathfrak{f}\\&=-\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}\right)+\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}+\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}\right)-\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}-\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{[\sigma_1,\sigma_2]}\mathfrak{f}\\&=\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{L}}_{[\sigma_1,\sigma_2]}\mathfrak{f}\right)-\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}\right)\\&=\mathcal{P}\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma_1\sigma_2}\mathfrak{f}-\mathcal{P}\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathfrak{f}-\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_2}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_1}\mathfrak{f}\right).\end{aligned}$$

方程 (2.15) 可通过　在 (2.13) 两边与 $\mathfrak{g}$ 取内积，并注意到.....得出　at

$$\begin{aligned}0=\sigma_i\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_j}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)&=\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_j}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)+\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_j}\mathfrak{f},\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}_j}\mathfrak{g}\right)\\&=\left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_i}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_j}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)+\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma_j}\mathfrak{f},\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}_j}\mathfrak{g}\right)\end{aligned}$$

□

定义 2.19（全纯希尔伯特场）。设 B 是一个复流形，$\mathcal{L}\to B$ 是一个具有光滑结构的希尔伯特场。

(i) $\mathcal{L}$ 上的近复结构是一个映射

$$\bar{\partial}^{\mathcal{L}}:\Gamma(B,T^{0,1}_B)\times\Gamma(B,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))\to\Gamma(B,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))$$

满足莱布尼茨法则

$$\bar{\partial}^{\mathcal{L}}(f\mathfrak{f})(\sigma)=\bar{\partial}f(\sigma)\mathfrak{f}+f\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma) \tag{2.20}$$

对所有的 $f\in\mathscr{C}^{\infty}(B)$ $\sigma\in\Gamma(B,T^{0,1}_B)$ 和 $\mathfrak{f}\in\Gamma(B,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))$ 均成立。方程 (2.20) 右侧出现的 $\bar{\partial}$ 是复流形 B 上的 ∂ 算子。

(ii) 我们定义 $(\bar{\partial}^{\mathcal{L}})^2$：$\Gamma(B,\Lambda^2T^{0,1}_B)\times\Gamma(B,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))\to\Gamma(B,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))$ 如下：

$$(\bar{\partial}^{\mathcal{L}})^2\mathfrak{f}(\sigma,\tau)=\sigma(\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\tau))-\tau(\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma))-\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}([\sigma,\tau]).$$

如果对所有 $\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))$、所有 $\sigma,\tau\in\Gamma(U,T^{0,1}_B)$ 以及所有开集 $U\subset B$，都有 $(\bar{\partial}^{\mathcal{L}})^2\mathfrak{f}(\sigma,\tau)=0$，则称 $\bar{\partial}^{\mathcal{L}}$ 是对合的或可积的。

(iii) 具有近复结构的希尔伯特场 $\mathcal{L}\to B$ 上，对于所有开集 $U\subset B$，若 $\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathcal{L})$ 满足 $\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma)=0$ $(\sigma\in\Gamma(U,T^{0,1}_B))$，则称其为全纯。

(iv) （几乎）全纯希尔伯特场是指具有光滑结构和（几乎）复结构的希尔伯特场。若 $\bar{\partial}^{\mathcal{L}}$ 可积，我们称 $(\mathcal{L},\bar{\partial}^{\mathcal{L}})$ 为全纯希尔伯特场。

(v) 设 $(\mathcal{L}, \bar{\partial}^{\mathcal{L}})$ 是一个（几乎）全纯希尔伯特场。若 $\mathcal{L}$ 也是一个光滑希尔伯特场，且满足 $\nabla^{\mathcal{L}(0,1)} = \bar{\partial}^{\mathcal{L}}$，即，我们称其为 Berndtsson-Lempert-Sz″oke 场（简称 BLS 场），如果 $\mathcal{L}$

$$\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathfrak{f} = \bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma)$$

对所有 $\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{L}))$、$\Gamma(U, T^{0,}{}_{B})$ 及开集 $U \subset B$。我们称 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 为 BLS 陈联络。

(vi) 一个 BLS 场称为可积的，如果其近复结构是可积的 .

备注 2.21。 [Var22] 中 BLS 场和光滑希尔伯特场的定义比我们给出的定义稍微更一般。可以证明，这两组定义是等价的。

定义 2.22（BLS 子域）。设 $(\mathcal{L}, \bar{\partial}^{\mathcal{L}}) \to B$ 是一个几乎全纯希尔伯特场。

(i) 如果（几乎）全纯希尔伯特场 $(\mathcal{H}, \bar{\partial}^{\mathcal{H}}) \to B$，则称其为 $\mathcal{L}$ 的（几乎）全纯希尔伯特子场，当且仅当：(a) 对每个 $b \in B$， $\mathcal{H}_b$ 都是 $\mathcal{L}_b$ 的闭子空间，并且 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}|_{\mathcal{H}} = (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$(b) $\bar{\partial}^{\mathcal{L}}|_{\mathcal{H}} = \bar{\partial}^{\mathcal{H}}$，即对于所有 $\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{H}))$、所有 $\sigma \in \Gamma(U, T^{0,}{}_{B}{}^{1})$ 以及每个开集 $U \subset B$， $\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma) = \bar{\partial}^{\mathcal{H}}\mathfrak{f}(\sigma)$。特别地，这意味着每当 $\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{H})_b$ 时，我们有$\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{H})_b$。(ii) 如果（几乎）全纯希尔伯特子场 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 满足 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{L}$的正则子场，即 $\mathcal{P}: \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ 在每个纤维上由正交投影给出的映射是光滑映射，则称其为 BLS 子域。

下一个命题表明，若 $\mathcal{H}$ 是 BLS 场 $\mathcal{L}$ 的可积 BLS 子域，则即使 $\mathcal{L}$ 不可积， $\mathcal{H}$ 所诱导的 BLS 陈联络的曲率仍是算子值 (1, 1)- 形式。

命题 2.23. 设 B 是一个复流形。设 $\mathcal{L} \to B$ 是一个 BLS 场，且 $\mathcal{H} \to B$ 是 $\mathcal{L}$ 的可积 BLS 子域。那么，希尔伯特场 $\mathcal{H}$ 的曲率 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 是算子值 (1, 1)-形式。此外，我们有

$$\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) = \left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) - \left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{g}\right) \tag{2.24}$$

对所有 $\mathfrak{f}$、$\mathfrak{g} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^{\infty}(\mathcal{H}))$ σ、$\tau \in \Gamma(U, T^{1,}{}_{B}{}^{0})$ 以及所有开集 $U \subset B$。

证明。我们要证明 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f} = \Theta^{\mathcal{H}}_{\overline{\sigma}\overline{\tau}}\mathfrak{f} = 0$。由于 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是一个 BLS 子域，由定义 2.22 (i) 可知

$$\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}}\mathfrak{g} = \mathcal{P}^{\perp}\bar{\partial}^{\mathcal{L}}\mathfrak{g}(\overline{\sigma}) = 0. \tag{2.25}$$

由于 $\mathcal{H}$ 是可积全纯希尔伯特场，

$$\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}\overline{\tau}}\mathfrak{g} = (\bar{\partial}^{\mathcal{L}})^2\mathfrak{g}(\overline{\sigma}, \overline{\tau}) = (\bar{\partial}^{\mathcal{H}})^2\mathfrak{g}(\overline{\sigma}, \overline{\tau}) = 0. \tag{2.26}$$

要证明 $\mathcal{P}\Theta^{\mathcal{L}}$ 是算子值 (1, 1)形式，反复使用 (2.4) 可得

$$0 = (\sigma\tau - \tau\sigma - [\sigma, \tau])(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) + \left(\mathfrak{f}, \Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}\overline{\tau}}\mathfrak{g}\right).$$

现在由条件 (2.26)，$\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}\overline{\tau}}\mathfrak{g} = 0$，因此我们得到 $\left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b = 0$；结合截面芽 $\mathfrak{g}(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中的稠密性，可推出对于所有 $b \in U$， $\mathcal{P}\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma(b)\tau(b)}\mathfrak{f}(b) = 0$。

我们断言，当 $\mathcal{P}\nabla^{\mathcal{L}}_{\xi}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\eta}\mathfrak{f} = 0$ 时， ξ 和 η 是同类型的向量场。我们只需证明 ξ和 η都是 (1, 0) 型向量场的情形，因为另一种情形可直接由 (2.25) 得出。再次使用 (2.4)，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = \sigma\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) &= \left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) + \left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f}, \nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}}\mathfrak{g}\right) \\ &= \left(\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma}\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) + \left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma}}\mathfrak{g}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\nabla_\sigma^{\mathcal{L}} \mathcal{P}^\perp \nabla_\tau^{\mathcal{L}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right),$$

其中最后一个等式由 (2.25) 得出。由于芽 $\mathfrak{g}(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，我们看到截面 $\mathcal{P}\nabla_\sigma^{\mathcal{L}}\mathcal{P}^\perp\nabla_\tau^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}$ 对每个 $b \in U$ 都在点 b 处消失。由方程 (2.14) 现在可知， $\Theta^{\mathcal{H}}$ 是一个算子值 (1, 1)形式。方程 (2.24) 现在由 (2.15) 得出。□

注意，在公式 (2.24) 中，映射 $\mathcal{P}$ 的导数并未出现。因此，这个方程可用于定义光滑希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 中一个不一定光滑的希尔伯特子场 $\mathcal{H}$ 的曲率。我们将在下一小节中给出此类希尔伯特场 $\mathcal{H}$ 的精确定义。

2.1. iBLS 场。为了定义 iBLS 场，我们需要引入更多定义。

定义 2.27. 设 $\mathcal{L} \to B$ 是一个带有光滑结构的希尔伯特场，且 $\mathcal{H} \to B$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个希尔伯特子场。

(i) $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 的子茎丛 $\mathcal{S}$ 是指对每个 $b \in B$，选取一个 $\mathbb{C}$-向量空间 $\mathcal{S}_b \subset \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b$。

(ii) 对每个 $b \in B$，令 $\mathcal{H}_{\mathcal{L},b}$ 表示 $\mathcal{L}$ 在 b 处取值于 $\mathcal{H}_b$ 的光滑截面芽。更确切地说，令

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L},b} := \{\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b : \mathfrak{f}(b) \in \mathcal{H}_b\}$$

是茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b$ 的 $\mathbb{C}$ 向量子空间。令 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}} \to B$ 为一个族，其在 b 上的纤维为 $\mathcal{H}_{\mathcal{L},b}$。族 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}} \to B$ 称为 $\mathcal{H}$ 的极大子茎丛。

(iii) 若 $\mathcal{S}$ 是一个子茎丛，且对每个 $b \in B$ 都有 $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{H}_{\mathcal{L},b}$，则称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{H}$ （在 $\mathcal{L}$ 中）的一个调谐。或者说，$(\mathcal{H}, \mathcal{S})$ 是一个调谐希尔伯特域。

(iv) 若调谐 Σ 使 $\mathcal{H} \to B$ 形式化 $\mathcal{H}$，则称其形式化了 $\mathcal{H}$，条件是对每个 $b \in B$

(a) $\mathcal{H}_{\Sigma_b}(b)$ 是一个稠密子空间；(b) 若 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$ 且 $\mathfrak{f}(b) = 0$，则对每个 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$，都有 $(\nabla_\sigma^{\mathcal{L}}\mathfrak{f})(b) \in \mathcal{H}_b$。我们称 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 为一个形式调谐，或称 $\mathcal{H}$ 为一个形式子域（属于 $\mathcal{L}$）。

(v) 假设 $(\mathcal{L}, \bar\partial^{\mathcal{L}}) \to B$ 是一个几乎全纯希尔伯特场，令 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 为一个希尔伯特子场，并令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个调谐。我们称 $(\mathcal{H}, \mathcal{S})$ 是 $\mathcal{L}$ 的无穷小几乎全纯希尔伯特子域，如果对所有 $b \in B$ 都有

$$\bar\partial^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L},b} \text{ for all } \sigma \in \mathscr{C}^\infty(T_B^{0,1})_b, \text{ and for all } \mathfrak{f} \in \mathcal{S}_b.$$

我们称 $(\mathcal{H}, \mathcal{S})$ 是 $\mathcal{L}$ 的无穷小全纯子场，如果对所有 $b \in B$ 都有

$$\bar\partial^{\mathcal{L}}\bar\partial^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}(\sigma, \tau)(b) = 0, \text{ for all } \sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B^{0,1})_b \text{ and } \mathfrak{f} \in \mathcal{S}_b.$$

注记 2.28。我们强调， $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ 和 Σ 都不是层，因此我们不给它们赋予任何额外结构。我们为 $\mathcal{H}$ 配备一个调谐 Σ，以便在 $\mathcal{H}$ 可能不具有光滑结构时定义其曲率。形式调谐 Σ 定义中的条件 (b) 是我们对希尔伯特场态射 $\mathcal{P}$光滑性的替代，因为当态射 $\mathcal{P}$光滑时，该条件会自动满足。事实上，假设 $\mathcal{H}$ 是一个正则子场，并令 $\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})_b$ 满足 $\mathfrak{f}(b) = 0$。那么对于任意 $\mathfrak{g} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})_b$ 和 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$，我们有

$$\left(\mathcal{P}^\perp\nabla_\sigma^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right) = \left(\nabla_\sigma^{\mathcal{L}}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp\mathfrak{g}\right) = \sigma\left(\mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp\mathfrak{g}\right) - \left(\mathfrak{f}, \nabla_{\overline{\sigma}}^{\mathcal{L}}\mathcal{P}^\perp\mathfrak{g}\right) = -\left(\mathfrak{f}, \nabla_{\overline{\sigma}}^{\mathcal{L}}\mathcal{P}^\perp\mathfrak{g}\right).$$

在 b 处计算上述方程两边可知，$(\mathcal{P}^\perp\nabla_\sigma^{\mathcal{L}}\mathfrak{f})(b) \in \mathcal{L}_b$ 与一个稠密子空间正交，因此必为 0。

当满足某些附加条件时，我们可以使用高斯–格里菲斯公式（2.15）或（2.24）定义形式子域 $\mathcal{H}$ 的曲率。为此，我们首先在下文定义形式子域的第二基本映射。

定义 2.29（形式子域的第二基本映射）。设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是光滑希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 的形式子域，且 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是形式调谐。$\mathcal{H}$ 的第二基本映射是一组线性算子

$$N_b : \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b \times \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_b^\perp \text{ defined by } N_b(\sigma)(\mathfrak{f}(b)) = (\mathcal{P}^\perp \nabla_\sigma \mathfrak{f})(b)$$

对所有 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$ 和 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$。注意，对于所有 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$，我们有 $\mathrm{Dom}(N_b(\sigma)) = \Sigma_b(b)$，其中

$$\Sigma_b(b) := \{\mathfrak{f}(b) \in \mathcal{H}_b : \mathfrak{f} \in \Sigma_b\}.$$

第二基本映射是良定义的，因为 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是形式的。若 $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \Sigma_b$ 满足 $\mathfrak{f}_1(b) - \mathfrak{f}_2(b) = 0$，则

$$N_b(\sigma)(\mathfrak{f}_1(b) - \mathfrak{f}_2(b)) = \left(\mathcal{P}^\perp \nabla_\sigma^{\mathcal{L}}(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2)\right)(b) = 0.$$

定义 2.30（半双线性型）。设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ 是光滑希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 的形式子域，且 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是形式调谐。对于 $\sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B)_b$，在 $\mathcal{H}_b$ 上定义半双线性型 $Q_{\sigma\tau}(\cdot,\cdot)_b$，其 $\mathrm{Dom}(Q_{\sigma\tau}(\cdot,\cdot)_b) = \Sigma_b(b)$ 为

$$Q_{\sigma\tau}(\mathfrak{f}(b), \mathfrak{g}(b))_b = \left(\Theta_{\sigma\tau}^{\mathcal{L}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_{\mathcal{H}_b} - \left(N_b(\sigma)\mathfrak{f}, N_b(\overline{\tau})\mathfrak{g}\right)_{\mathcal{H}_b},$$

对于 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \Sigma_b(b)$。

定义 2.31（iBLS 场）。设 $\mathcal{H} \to B$ 是一个希尔伯特场。无穷小 BLS 场（或 iBLS 场）是一个三元组（$\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, Σ），其中 $\mathcal{L} \to B$ 是一个 BLS 场，称为（ $\mathcal{H}$的）环境 BLS 场，并且$\sim\Sigma \subset \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ 是一个调谐，使得

$\sim$ $\sim$ (a) 对于每个 $b \in B$，子空间 $\mathcal{H}_{\mathcal{L},\, b}(b) := \{\mathfrak{f}(b) : \mathfrak{f} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L},\, b}\}$ 在 $\mathcal{H}_b$中稠密。(b) $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是一个形式调谐。(c) $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是 $\mathcal{L}$的一个无穷小几乎全纯希尔伯特子域。(d) 对于所有 $b \in B$、所有 σ、$\tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$以及所有 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$，反线性泛函 $Q_{\sigma\tau}(\mathfrak{f}(b) \cdot)_b$在其区域 $\Sigma_b(b)$ 上连续，其中 $Q_{\sigma\tau}(\cdot, \cdot)_b$如定义 2.30 所述。

注释 2.32. 注意，由 2.31 (c) 可知，$\mathcal{H}$ 的第二基本映射是一族线性算子 N_b: $\mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b \times \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_b^\perp$，其定义为

$$N_b(\sigma)(\mathfrak{f}(b)) = (\mathcal{P}^\perp \nabla_\sigma^{\mathcal{L}(1,0)} \mathfrak{f})(b).$$

对于 σ，$\tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$的半双线性型 $Q_{\sigma\tau}(\cdot,\cdot)_b$是稠密定义的，因为条件 (a) 和 (b) 表明，$N_b(\sigma)$ 和 $N_b(\tau)$ 都是稠密定义的。

定义 2.33（iBLS 场的曲率）。设 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}, \Sigma)$ 是一个 iBLS 场。对于 σ，$\tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$，$\mathcal{H}$ 相对于 $\mathcal{L}$ 的曲率 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 定义为

$$\left(\Theta_{\sigma(b)\tau(b)}^{\mathcal{H}} \mathfrak{f}(b), \mathfrak{g}(b)\right)_{\mathcal{H}_b} := \left(\Theta_{\sigma\tau}^{\mathcal{L}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_{\mathcal{H}_b} - \left(N_b(\sigma)\mathfrak{f}, N_b(\overline{\tau})\mathfrak{g}\right)_{\mathcal{H}_b}. \tag{2.34}$$

因此，曲率 $\Theta_{\sigma(b)\tau(b)}^{\mathcal{H}}$ 是一个稠密定义算子，且 $\mathrm{Dom}(\Theta_{\sigma(b)\tau(b)}^{\mathcal{H}}) = \Sigma_b(b)$。

注释 2.35. 这种定义算子的方法在无界算子理论中很常见。对于每个 $\mathfrak{f}(b) \in \Sigma_b(b)$，稠密定义的反线性泛函 $Q_{\sigma\tau}(\mathfrak{f}(b) \cdot)_b$是连续的。于是，里斯表示定理给出一个元素 $\Theta_{\sigma(b)\tau(b)}^{\mathcal{H}} \mathfrak{f}(b) \in \mathcal{H}_b$，使得

$$\left(\Theta_{\sigma(b)\tau(b)}^{\mathcal{H}} \mathfrak{f}(b), \mathfrak{g}(b)\right)_{\mathcal{H}_b} = Q_{\sigma\tau}(\mathfrak{f}(b), \mathfrak{g}(b))_b.$$

命题 2.36. 设 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}, \Sigma)$ 是一个 iBLS 场。假设 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是一个无穷小全纯的希尔伯特子场。那么 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 具有 (1, 1)-系数，也就是说，对于所有 $b \in B$ 和所有 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$，当 $\sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B \otimes \mathbb{C})_b$ 是同类型的向量场时，量 $(\Theta_{\sigma\tau}^{\mathcal{H}} \mathfrak{f})(b) = 0$。

证明. 由于 $(\mathcal{H},\mathcal{L},\Sigma)$ 是一个 iBLS 场，当 $\eta\in\mathscr{C}^\infty(T^0{}_B{}^1)$ 时，对于所有 $b\in B$ 都有 $N_b(\eta)=0$。因此，当 σ,τ 是同类型的向量场时，(2.34) 右侧的第二项为零。由于 $(\mathcal{H},\Sigma)$ 是一个无穷小全纯的希尔伯特子场，对于所有 $b\in B$、所有 $\sigma,\tau\in\mathscr{C}^\infty(T^1{}_B{}^0)_b$ 以及所有 $\mathfrak{f}\in\Sigma_b$，我们有 $(\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma\tau}}\mathfrak{f})(b)=0$。与命题 2.23 的证明一样，我们有

$$0=\left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)+\left(\mathfrak{f},\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma\tau}}\mathfrak{g}\right).$$

注意到 $\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密：$\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_{\mathcal{L},b}(b)$ 中稠密，$_b(b)$ 也在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，因为 $(\mathcal{H},\Sigma)$ 是形式的，而 $\mathcal{H}_{\mathcal{L},b}(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，因为 $(\mathcal{H},\Sigma,\mathcal{L})$ 是一个 iBLS 场。因此，若 $(\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\sigma\tau}}\mathfrak{g})(b)=0$ 对所有 $\mathfrak{g}\in\Sigma_b$ 都成立，则可推出 $(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f})(b)=0$。由方程 (2.34) 即得该命题。□

我们以 iBLS 场的引理 2.9 的一个类似结果结束本小节。

引理 2.37. 设 $(\mathcal{H},\Sigma,\mathcal{L})$ 是一个 iBLS 场。设 $\sigma,\tau\in\mathscr{C}^\infty(T_B\otimes\mathbb{C})_b$，并设 $\mathfrak{f}\in\Sigma_b$。则

(1) $(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f})(b)$ 仅取决于 $\sigma(b)$ $\tau(b)$ 和 $\mathfrak{f}(b)$，因此诱导出 $\mathcal{H}_b$ 上的一个稠密定义算子，记作 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma(b)\overline{\tau}(b)}$。(2) $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma(b)\tau(b)}$ 的伴随算子是 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\overline{\tau}(b)\overline{\sigma}(b)}$ 的一个扩张。特别地，该伴随算子是稠密定义的，因此 $\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma(b)\tau(b)}$ 是可闭的。

证明。由 (2.34) 可知，第一个结论可由引理 2.9 的陈述 (1) 应用于光滑希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 得出；此外，$(\mathcal{H},\Sigma)$ 是形式调谐。利用联络 $\nabla^{\mathcal{L}}$ 的度量相容性 (2.4)，对于 $\mathfrak{f},\mathfrak{g}\in\Sigma_b$，我们得到

$$\begin{aligned}0=(\sigma\tau-\tau\sigma-[\sigma,\tau])(\mathfrak{f},\mathfrak{g})&=\left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)-\left(\mathfrak{f},\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\tau}\overline{\sigma}}\mathfrak{g}\right)\\&=\left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)-\left(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma^{1,0}}\mathfrak{f},\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\tau}^{1,0}}\mathfrak{g}\right)+\left(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\sigma^{1,0}}\mathfrak{f},\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}}_{\overline{\tau}^{1,0}}\mathfrak{g}\right)-\left(\mathfrak{f},\Theta^{\mathcal{L}}_{\overline{\tau}\overline{\sigma}}\mathfrak{g}\right)\\&=\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\sigma\tau}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)-\left(\mathfrak{f},\Theta^{\mathcal{H}}_{\overline{\tau}\overline{\sigma}}\mathfrak{g}\right).\end{aligned}$$

现在，在 b 处对上述方程求值，并注意到 $\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，即可得出第二个结论。□

3. The geometric setup

为了赋予伯格曼空间族 iBLS 场的结构，我们需要描述产生该族的全纯浸没的几何。本节将对此进行说明。

3.1. 记号。本文余下部分采用以下记号。设 $\widetilde{\pi}:X\to B$ be 是 K¨ahler 流形之间的全纯浸没，其中 $\dim_{\mathbb{C}}X=n+m$ 且 $\dim_{\mathbb{C}}B=m$。设 $(E,h)\to X$ 是一个配有光滑度量 h 的全纯线丛。设 $X\subset X$ 是一个边界光滑的区域，使得对于每个 $b\in B$，纤维 $X_b:=\widetilde{\pi}^{-1}(b)\cap X$ 都是 K¨ahler 流形 $\widetilde{\pi}^{-1}(b)$ 中具有光滑边界的有界伪凸域，且其维数为 n。设 $\pi:X\to B$ 是浸没 $\widetilde{\pi}|_X$。我们称 $\pi:X\to B$ 为伪凸域族。

假设 X 具有定义函数 ρ，并将 ρ 在 $\widetilde{\pi}^{-1}(b)$ 上的限制记为 ρ_b，因此$\sim\rho_b$ 是伪凸域 X_b的定义函数。我们将 X上的 K¨ahler 形式记为 ω，并令 $\omega_b=\iota^*_{X_b}\omega$，因此$dV_{\omega_b}$ 表示 X_b上的体积形式。为简化部分公式，我们假设 $|d\rho_b|_{\omega_b}=1$ 在 ∂X_b 上，并将 ∂X_b 上的诱导体积形式记为 dS_b，即它是满足 $d\rho_b\wedge dS_b=dV_{\omega_b}$ 于 ∂X_b的形式。

本文中的所有厄米全纯线丛均配备相应的陈联络，因此我们交替使用 $\bar\partial=\nabla^{0,1}$ 表示联络的 (0,1) 部分。此外，我们使用

记号 ∇ 表示线丛 $E \to X$的陈联络，也表示线丛 $E|_{X_b} \to X_b$ 的陈联络，希望这不会造成混淆。

我们用 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示由度量 ω 和 h 在取值于 E 的 (p,q)-形式上诱导的内积。我们还使用 X 上取值于 E 的形式之间的另一种配对，记作 $\langle\cdot\wedge\bar{\cdot},h\rangle$。设 u 是 X 上取值于 E 的 (p,q)-形式， v 是 X 上取值于 E 的 (r,s)-形式。设 e 是 E 的一个标架，使得 u 和 v 局部写成 $u=\varphi\otimes e$ 和 $v=\psi\otimes e$。那么配对 $\langle\cdot\wedge\bar{\cdot},h\rangle$ 由下式给出

$$\langle u\wedge\overline{v},h\rangle=\varphi\wedge\overline{\psi}h(e,e).$$

3.2. 水平分布。设 $\pi: X\to B$ 是如第 3.1 节所述的全纯浸没。该浸没 π 的水平分布是切丛 $T_{\overline{X}}$ 的一个子丛 θ，满足

(1) $d\pi|_\theta$ 将每个纤维 θ_x 同构地映到 $T_{B,\,\pi(x)}$（即， $d\pi:\theta\to\pi^*T_B$ 是向量丛的一个同构），

(2) θ 与 X 的边界相切，即 $\theta|_{\partial X}\subset T_{\partial X}$。

由于 π 是全纯映射， $d\pi$ 保持 $\theta\otimes\mathbb{C}$ 和 $T_B\otimes\mathbb{C}$ 分解为 (1, 0) 型与 (0, 1) 型子丛的结构，即对于所有 $x\in X$, $d\pi(\theta^{1,\,0}_x)=T^{1,\,0}_{B,\,\pi(x)}$。此外， $\theta^{1,\,0}|_{\partial X}\subset T^{1,\,0}_{\partial X}$，因为 $\theta|_{\partial X}\subset T_{\partial X}$，所以$\theta^{1,\,0}$与 X的边界相切。设 σ 是 B上的一个 (1, 0) 型向量场。相对于分布 $\theta^{1,\,0}$， σ 的水平提升是 $\theta^{1,\,0}\to\overline{X}$ 的一个截面 ξ^θ_σ，满足 $d\pi(\xi^\theta_\sigma)=\sigma$。

3.2.1. 扭曲李导数。设 X 是如上所述的 K¨ahler 流形。对于 X 上的复向量场 η和复形式 φ，我们将 φ 沿向量场 η 的李导数定义为

$$L_\eta\varphi:=L_{\mathrm{Re}\,\eta}\varphi+\sqrt{-1}L_{\mathrm{Im}\,\eta}\varphi, \tag{3.1}$$

其中，(3.1) 右边出现的李导数是通常的李导数。由 (3.1) 可得 Cartan公式

$$L_\eta\varphi=d(\eta\lrcorner\varphi)+\eta\lrcorner d\varphi$$

对复形式成立。我们将此公式推广，用以定义沿复向量场 η 作用于取值于 E 的 (p,q)-形式 u 的扭曲李导数（仍记作 L_η）：

$$L_\eta u:=\nabla(\eta\lrcorner u)+\eta\lrcorner\nabla u.$$

我们还定义沿复向量场 η 作用于取值于 E 的形式 u 的扭曲的 (1,0) 李导数 $L^{1,\,0}_{\,\eta}$ 和扭曲的 (0,1) 李导数 $L^{0,\,1}_{\,\eta}$:

$$L^{1,0}_\eta u:=\nabla^{1,0}(\eta\lrcorner u)+\eta\lrcorner\nabla^{1,0}u,$$
$$L^{0,1}_\eta u:=\nabla^{0,1}(\eta\lrcorner u)+\eta\lrcorner\nabla^{0,1}u.$$

注意， $L^{1,\,0}_{\,\eta}u$（分别地， $L^{0,\,1}_{\,\eta}u$）与 u 具有相同的双次数，当且仅当 η 是一个 (1, 0) 型向量场（分别地，(0, 1)-向量场）。

3.2.2. 扭曲相对典范丛的截面。回顾一下，我们有一个 K¨ahler 流形之间的全纯浸没映射 $\pi: X\to B$。由于 π 是浸没映射，映射 π^* 将 $T^{1,\,0*}_{B,\,\pi(x)}$ 单射地映入 $T^{1,\,0*}_{X,\,x}$。因此，我们可以将像 $\pi^*T^{1,\,0*}_{B}$ 视为 $T^{1,\,0*}_{X}$ 的一个子丛。这给出一个向量丛的短正合列

$$0\to\pi^*T^{1,0*}_B\to T^{1,0*}_X\to T^{1,0*}_{X/B}\to 0, \tag{3.2}$$

其中第一个映射是将 $\pi^*T^{1,\,0*}_{B}$ 作为子丛的包含映射。商向量丛 $T^{1,\,0*}_{X/B}$ 的最高外幂称为相对典范丛，记作 $K_{X/B}$。

设 $(t^1,\cdots,t^m)$ 是开集 $U\subset B$ 上的局部坐标，使得 $\pi^*dt^1,\cdots,\pi^*dt^m$ 是开集 $\pi^{-1}(U)$ 上 $\pi^*T^{1,0*}_B$ 的一个标架。由短正合列 (3.2) 可知，$T^{1,0*}_{X/B}$ 的截面是 X 上 $(1,0)$-形式关于关系 $\sim$ 的等价类，其中 $\alpha_1\sim\alpha_2$ 当且仅当

$$\alpha_1-\alpha_2=f_1\pi^*dt^1+\cdots+f_m\pi^*dt^m,\quad \text{for some functions } f_j\in\mathscr{C}^\infty(\pi^{-1}(U)),$$

或者等价地，对所有 $b\in U$，若 $\iota_{X_b}^*(\alpha_1-\alpha_2)=0$。由于 $\dim_{\mathbb{C}}(X)-\dim_{\mathbb{C}}(B)=n$，$K_{X/B}$ 的截面是 $(n,0)$- 形式的等价类，其中 $\varphi_1\sim\varphi_2$，如果

$$\varphi_1-\varphi_2=\psi_1\wedge\pi^*dt^1+\cdots\psi_m\wedge\pi^*dt^m,\quad \text{for some } \psi_j\in\Gamma(\pi^{-1}(U),\Lambda_X^{n-1,0}),$$

或者等价地，对所有 $b\in B$，若 $\iota_{X_b}^*(\varphi_1-\varphi_2)=0$。

现在固定一个点 $b\in B$。回想一下，X_b 的余法丛 N^*_{X/X_b} 由 $T^{1,0*}_X\big|_{X_b}$ 中湮灭与 X_b 相切的向量的余向量组成。因此，向量丛之间存在自然的同一识别 $\pi^*T^{1,0*}_B\big|_{X_b}$，而 N^*_{X/X_b} 是 $T^{1,0*}_X\big|_{X_b}$ 的一个子丛，由湮灭与 X_b 相切的向量的 $(1,0)$-余向量组成。将序列 (3.2) 限制到子流形 X_b 上并取行列式，得到

$$K_{X/B}\big|_{X_b}\otimes\det(N^*_{X/X_b})\cong K_X\big|_{X_b}.$$

将最后一个方程两边与 X_b 的法丛的行列式 $\det(N_{X/X_b})$ 张量相乘，并注意到 $\det(N^*_{X/X_b})\otimes\det(N_{X/X_b})$ 是平凡丛，我们得到

$$K_{X/B}\big|_{X_b}\cong K_{X/B}\big|_{X_b}\otimes\det(N^*_{X/X_b})\otimes\det(N_{X/X_b})\cong K_X\big|_{X_b}\otimes\det(N_{X/X_b})\cong K_{X_b},$$

其中最后一个同构由伴随公式得出（参见 [Huy05，命题 2.2.17]）。

同样的论证也适用于取值于 E 的 $(n,0)$-形式以及扭曲相对典范丛 $E\otimes K_{X/B}$ 的截面，我们将其表述为一个引理。

引理 3.3. 设 $E\to X$ 是一个全纯厄米线丛，且 $\pi:X\to B$ 是如第 3.1 节所述的满射全纯次浸。那么对每个 $b\in B$，存在一个同构

$$\iota_b:(K_{X/B}\otimes E)|_{X_b}\to K_{X_b}\otimes E|_{X_b}$$

使得对于包含 b 的开集 U 以及 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个扭曲相对典范截面 f，我们有 $\iota_b(f)=\iota_{X_b}^*u$，其中 u 是表示 f 的一个取值于 E 的 $(n,0)$-形式。

3.3. 涉及李导数的计算。我们得到了一些涉及李导数的恒等式，这些恒等式将在第 4 节中用于赋予 Bergman 空间场 iBLS结构。下面的引理说明，扭曲李导数（相对于度量相容联络定义时）遵循与通常李导数相同的莱布尼茨法则。

引理 3.4. 设 Z 是一个复流形（有边界或无边界），$E\to Z$ 是一个带有厄米度量 h 的全纯线丛。设 $u\in\Gamma(Z,E\otimes\Lambda^{p,q}_Z)$ 和 $v\in\Gamma(Z,E\otimes\Lambda^{r,s}_Z)$ 是 E 值形式。那么，对于 Z 上的复向量场 ξ，我们有

$$L_\xi\langle u\wedge\overline{v},h\rangle=\langle L_\xi u\wedge\overline{v},h\rangle+\langle u\wedge\overline{L_{\overline{\xi}}v},h\rangle,\tag{3.5}$$

证明。证明过程如下，直接计算即可。

$$\begin{aligned}L_\xi\langle u\wedge\overline{v},h\rangle&=\xi\lrcorner d\langle u\wedge\overline{v},h\rangle+d\left(\xi\lrcorner\langle u\wedge\overline{v},h\rangle\right)\\&=\xi\lrcorner\langle\nabla u\wedge\overline{v},h\rangle+(-1)^{p+q}\xi\lrcorner\langle u\wedge\overline{\nabla v},h\rangle+d\langle\xi\lrcorner u\wedge\overline{v},h\rangle+(-1)^{p+q}d\langle u\wedge\overline{\overline{\xi}\lrcorner v},h\rangle\\&=\langle\xi\lrcorner\nabla u\wedge\overline{v},h\rangle+(-1)^{p+q+1}\langle\nabla u\wedge\overline{\overline{\xi}\lrcorner v},h\rangle+(-1)^{p+q}\langle\xi\lrcorner u\wedge\overline{\nabla v},h\rangle+\langle u\wedge\overline{\overline{\xi}\lrcorner\nabla v},h\rangle\end{aligned}$$

$$+\langle\nabla(\xi\lrcorner u)\wedge\overline{v},h\rangle+(-1)^{p+q-1}\langle\xi\lrcorner u\wedge\overline{\nabla v},h\rangle+(-1)^{p+q}\langle\nabla u\wedge\overline{\bar{\xi}\lrcorner v},h\rangle+\langle u\wedge\overline{\nabla(\bar{\xi}\lrcorner v)},h\rangle$$
$$=\langle L_\xi u\wedge\overline{v},h\rangle+\langle u\wedge\overline{L_{\bar{\xi}}v},h\rangle.$$

□

命题 3.6. 设 $\iota_Y\colon Y\hookrightarrow Z$ 是复流形 Z 中一个 n 维子流形，且 $(E,h)\to Z$ 是一个厄米全纯线丛。设 u 是一个取值于 E 的 $(n,0)$-形式，并设 ξ 是 Z 上的一个 $(1,0)$ 向量场。那么

$$\bar\partial\iota_Y^*\left(L_\xi^{1,0}u\right)=\iota_Y^*\left(\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u-(\xi\lrcorner\Theta^E)\wedge u-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi\lrcorner u)+L_\xi^{1,0}\bar\partial u\right). \tag{3.7}$$

$\bar{}$ $\bar{}$应当理解，(3.7) 左端出现的 ∂ 是作用于 Y 上的 $E|_Y$ 值形式的 ∂ 算子，而右端出现的 ∂ 是作用于 Z 上的 E 值形式的 ∂ 算子。本文中我们将继续以这种方式滥用 ∂ 的记号。

证明。证明是一个直接的计算：

$$\begin{aligned}
\bar\partial\iota_Y^*\left(L_\xi^{1,0}u\right)&=\iota_Y^*\left(\bar\partial L_\xi^{1,0}u\right)\\
&=\iota_Y^*\left(\bar\partial\nabla^{1,0}(\xi\lrcorner u)+\bar\partial(\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u)\right)\\
&=\iota_Y^*\left(\bar\partial\nabla^{1,0}(\xi\lrcorner u)+\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u-\xi\lrcorner\bar\partial\nabla^{1,0}u\right)\\
&=\iota_Y^*\left(\Theta^E(\xi\lrcorner u)-\nabla^{1,0}\bar\partial(\xi\lrcorner u)+\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u-\xi\lrcorner(\Theta^E\wedge u)+\xi\lrcorner\nabla^{1,0}\bar\partial u\right)\\
&=\iota_Y^*\left(-(\xi\lrcorner\Theta^E)\wedge u-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi\lrcorner u-\xi\lrcorner\bar\partial u)+\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u+\xi\lrcorner\nabla^{1,0}\bar\partial u\right)\\
&=\iota_Y^*\left(\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u-(\xi\lrcorner\Theta^E)\wedge u-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi\lrcorner u)+\nabla^{1,0}(\xi\lrcorner\bar\partial u)+\xi\lrcorner\nabla^{1,0}\bar\partial u\right)\\
&=\iota_Y^*\left(\bar\partial\xi\lrcorner\nabla^{1,0}u-(\xi\lrcorner\Theta^E)\wedge u-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi\lrcorner u)+L_\xi^{1,0}\bar\partial u\right).
\end{aligned}$$

□

3.3.1. 域族的应用。

命题 3.8. 设 $\pi\colon\ X\to B$ 是一个伪凸域族。假设 X 是较大复流形 X 中的一个区域 $\tilde{}$ $\tilde{}$，且 π 是全纯浸没 $X\to B$ 的限制。设 (E,h) $\tilde{}$ $\to X$ 是一个带有光滑度量 h 的全纯线丛，并设 u、v 是 E 值的（n，0）-形式，在 X 的边界上光滑延拓。设 τ 是 B 上的一个 $(1,0)$ 型向量场，且设 ξ_τ 是 τ 到 X 的一个水平提升。则得到以下恒等式

$$\tau\int_{X_b}\langle u\wedge\overline{v},h\rangle=\int_{X_b}\langle L_{\xi_\tau}^{1,0}u\wedge\overline{v},h\rangle+\int_{X_b}\langle u\wedge\overline{L_{\bar\xi_\tau}^{0,1}v},h\rangle \tag{3.9}$$

$$\overline{\tau}\int_{X_b}\langle u\wedge\overline{v},h\rangle=\int_{X_b}\langle L_{\bar\xi_\tau}^{0,1}u\wedge\overline{v},h\rangle+\int_{X_b}\langle u\wedge\overline{L_{\xi_\tau}^{1,0}v},h\rangle \tag{3.10}$$

证明。将 $\tau=\tau^1+\sqrt{-1}\tau^2$ 和 $\xi_\tau=\xi_\tau^1+\sqrt{-1}\xi_\tau^2$ 写作实向量场 τ^i 和 ξ_τ^i。由于 π 是全纯的，我们有 $d\pi(\xi_\tau^i)=\tau^i$。此外，由于 ξ_τ 与 X 的边界相切，ξ_τ^i 也与之相切。记向量场 ξ_τ^i 的流为 Ψ_t^i。由于形式 $\langle u\wedge\overline{v},h\rangle$ 在 X 的边界处光滑，我们可以在积分号下求导，得到

$$\tau^i\int_{X_b}\langle u\wedge\overline{v},h\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\int_{\Psi_t^i(X_b)}\langle u\wedge\overline{v},h\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \int_{X_b} (\Psi_t^i)^* \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} L_{\xi_\tau^i} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle.$$

因此，利用 $L_{\xi_\tau} = L_{\xi_\tau^1} + \sqrt{\text{-}1} L_{\xi_\tau^2}$ 这一事实以及恒等式 (3.5)，我们得到

$$\tau \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} L_{\xi_\tau} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} \langle L_{\xi_\tau} u \wedge \overline{v}, h\rangle + \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{L_{\overline{\xi}_\tau} v}, h\rangle.$$

注意，由于 $\overline{\xi}_\tau$ 是一个 (0, 1) 型向量场，$L^1, {}_{\overline{\xi}_\tau}{}^0 v = 0$。因此，形式 $\langle u \wedge L^1, {}_{\overline{\xi}_\tau}{}^0 v, h\rangle$ 的积分为零。由于形式 $\langle L^0, {}_{\xi_\tau}{}^1 u \wedge \overline{v}, h\rangle$ 的双次数为 $(n-1, n+1)$，其积分也为零。由此得到 (3.9)。

再次利用恒等式 (3.5)，我们看到

$$\overline{\tau} \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} L_{\overline{\xi}_\tau} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} \langle L_{\overline{\xi}_\tau} u \wedge \overline{v}, h\rangle + \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{L_{\xi_\tau} v}, h\rangle.$$

与之前一样，由于 ξ_τ 是一个 (1, 0) 型向量场，且根据双次数的理由，$\langle u \wedge \overline{L^0, {}_{\xi_\tau}{}^1 v}, h\rangle$ 的积分为零，因此 $L^1, {}_{\overline{\xi}_\tau}{}^0 u = 0$。于是，我们得到 (3.10)。□

推论 3.11. 设 $(E, h) \to X \to B$, τ, u 和 v 如命题 3.8 中所述。设 ξ_τ^1, ξ_τ^2 是 τ 到 X 的水平提升。设 w_τ 为垂直向量场 $w_\tau = \xi_\tau^1 - \xi_\tau^2$。那么

$$0 = \int_{X_b} \langle L_{w_\tau}^{1,0} u \wedge \overline{v}, h\rangle + \langle u \wedge \overline{L_{\overline{w}_\tau}^{0,1} v}, h\rangle, \tag{3.12}$$

$$0 = \int_{X_b} \langle L_{\overline{w}_\tau}^{0,1} u \wedge \overline{v}, h\rangle + \langle u \wedge \overline{L_{w_\tau}^{1,0} v}, h\rangle. \tag{3.13}$$

证明。两次使用恒等式 (3.9)，得到

$$\tau \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle = \int_{X_b} \langle L_{\xi_\tau^i}^{1,0} u \wedge \overline{v}, h\rangle + \int_{X_b} \langle u \wedge \overline{L_{\overline{\xi}_\tau^i}^{0,1} v}, h\rangle$$

对于 $i = 1,2$。将两个方程相减，得到 (3.12)。在 (3.12) 中交换 u 和 v，并取复共轭，得到 (3.13)。□

4. Concrete Hilbert Fields

本节将伯格曼空间族赋予 iBLS 场的结构。回顾一下，iBLS 场是一个三元组 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}, \Sigma)$，其中 $\mathcal{L}$ 是环境 BLS 场，而 $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是针对 $\mathcal{H}$ 的形式调谐。首先，我们引入环境 BLS 场 $\mathcal{L}^\theta$。

4.1. 平方可积截面的希尔伯特场。设 $\pi\colon X \to B$ 是一个伪凸域族，且 $(E, h) \to X$ 是如第 3.1 节所述的厄米全纯线丛。设 $\mathcal{L} \to B$ 为希尔伯特场，其在 B 中点 b 上的纤维 $\mathcal{L}_b$ 由下式给出

$$\mathcal{L}_b = \overline{\left\{ f \in \Gamma(X_b, \mathscr{C}^\infty(K_{X_b} \otimes E|_{X_b})) : (f, f)_b = \sqrt{\text{-}1}^{n^2} \int_{X_b} \langle f \wedge \overline{f}, h\rangle < \infty \right\}},$$

关于范数 $(\cdot, \cdot)_b$ 而言，光滑扭曲相对典范截面的希尔伯特空间完备化。我们赋予 $\mathcal{L} \to B$ 以下的 BLS 场结构。

(1) 层 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$。根据引理 3.3，我们将开集 U 上的层 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 的截面定义为

$$\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})) := \Gamma\left(\overline{\pi^{-1}(U)},\mathscr{C}^\infty(K_{X/B}\otimes E)\right),$$

其中，右侧的 $K_{X/B}\otimes E$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 上的截面在 X 的边界处光滑。给定一个截面 $f\in\Gamma\left(\pi^{-1}(U)\ \mathscr{C}^\infty(K_{X/B}\otimes E)\right)$，我们用 $\mathfrak{f}=\mathfrak{i}(f)$ 表示光滑截面 $\mathfrak{f}$ 是由 $\mathcal{L}$ 诱导的。反过来，给定一个光滑截面 $\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}))$，我们用 $f=\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 表示扭曲相对典范截面 f 与 $\mathfrak{f}$相关联。 $\mathscr{C}^\infty(U)$-模在 $\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 上的结构是显然的——对于 $r\in\mathscr{C}^\infty(U)$ 和$\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$

$$r\mathfrak{f} := \mathfrak{i}((\pi^*r)\mathfrak{a}(\mathfrak{f})).$$

(2) 算子 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}$。固定一个水平分布 $\theta\subset T_X$。定义算子 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}$ 为

$$\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}) = \mathfrak{i}(L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}))$$

对于 $\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 和 $\sigma\in\Gamma(U,{T^{1,0}_B}^*)$。从现在起，我们将希尔伯特场 $\mathcal{L}$ 记作 $\mathcal{L}^\theta$，以强调用于定义算子$\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}$的水平分布 $\theta\subset T_X$。

(3) $\mathcal{L}^\theta$上的联络。设 $\mathfrak{f}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta))$ 和 $\sigma\in\Gamma(U,{T^{1,0}_B}^*)$。我们将联络 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}$ 的 (1, 0) 部分 $^{(1,0)}$ 定义为

$$\nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_\sigma\mathfrak{f} = \mathfrak{i}\left(L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right).$$

若 τ上的复向量场 U 写作其 (1, 0) 和 (0, 1) 分量之和 $\tau=\tau^{1,0}+\tau^{0,1}$，则我们定义

$$\nabla^{\mathcal{L}^\theta}_\tau\mathfrak{f} := \nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_{\tau^{1,0}}\mathfrak{f}+\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\tau^{0,1}).$$

命题 4.1. 对于由层 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta)$ 给出的光滑结构以及上述联络 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}$，几乎全纯希尔伯特场 $(\mathcal{L}^\theta,\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta})$ 是一个 BLS 场。

证明。茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta)_b$ 在 $\mathcal{L}^\theta_b$ 上经由 b 处取值映射所得像的稠密性，源于 $K_{X_b}\otimes E|_{X_b}\to X_b$ 中紧支撑光滑截面的稠密性。

我们取足够小的开集 $U\subset B$，使得 $(t^1,\cdots,t^m)$ 是 B 在U 上的局部坐标。令 $\mathfrak{f},\mathfrak{g}\in\Gamma(U,\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta))$ 和 $\sigma\in\Gamma(U,{T^{1,0}_B}^*)$。我们来验证近复结构 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}$ 定义良好，即与表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的扭曲 $(n,0)$-形式的选取无关。为此，设 u_1 和 u_2 是表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的两个 $(n,0)$-形式。于是，对于某些取值于 E 的 $(n-1,0)$-形式 γ_j，有 $u_1-u_2=\gamma_j\wedge\pi^*dt^j$。若将 $\sigma=\sigma^j\frac{\partial}{\partial t^j}$ 写在这些坐标中，则

$$L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}(u_1-u_2) = L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}\gamma_j\wedge\pi^*dt^j.$$

这表明 $L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}(u_1-u_2)$ 属于由 (1, 0)-形式 $\{\pi^*dt^j\}$ 生成的理想，因此 $L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}u_1$ 和 $L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}u_2$ 表示同一个扭曲相对典范截面。为检验 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma})$ 关于自变量 $\overline{\sigma}$ 是否具有张量性，注意若 $r\in\mathscr{C}^\infty(U)$，则 $(\pi^*r)\overline{\xi}^\theta_\sigma$ 是相对于分布 θ 的 (0, 1)-向量场 $r\overline{\sigma}$ 的水平提升。若 u 是表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的扭曲 $(n,0)$-形式，则

$$\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}) = \mathfrak{i}\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_{\overline{\tau}\sigma}}u\right) = \mathfrak{i}\left((\pi^*r)(\overline{\xi}^\theta_\sigma\lrcorner\bar\partial u)\right) = \mathfrak{i}\left((\pi^*r)\mathfrak{a}(\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}))\right) = r\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}).$$

为检验莱布尼茨法则，对于 $r \in \mathscr{C}^\infty(U)$，我们有

$$\bar{\partial}^{\mathcal{L}^\theta}(r\mathfrak{f})(\overline{\sigma}) = \mathfrak{i}\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right) = \mathfrak{i}\left(\overline{\xi}^\theta_\sigma \lrcorner \bar{\partial}((\pi^* r)u)\right) = \mathfrak{i}\left(\pi^*(\overline{\sigma}r)u + (\pi^* r)\overline{\xi}^\theta_\sigma \lrcorner \bar{\partial} u\right) = \overline{\sigma} r \mathfrak{f} + r\bar{\partial}^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}).$$

$b \mapsto (\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_b$ 的光滑性源于以下事实： $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$、 $\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$以及 E 的度量 h 在 X的边界处均光滑。因此， $\mathcal{L}^\theta$ 的度量是光滑的。我们验证联络 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}$ 的$(1, 0)$部分定义良好。事实上，设 u_1 和 u_2 是表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的两个$(n, 0)$-形式，使得 $u_1 - u_2 = \gamma_j \wedge \pi^* dt^j$。那么

$$L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}(u_1 - u_2) = L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}\gamma_j \wedge \pi^* dt^j + \gamma_j \wedge L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}(\pi^* dt^j) = L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}\gamma_j \wedge \pi^* dt^j + \gamma_j \wedge \pi^* \partial\sigma^j.$$

这表明 $L^1,{}^0_{\xi^\theta_\sigma}(u_1 - u_2)$属于由$(1, 0)$-形式 $\{\pi^* dt^j\}$ 生成的理想，因此 $L^1,{}^0_{\xi^\theta_\sigma}u_1$和 $L^1,{}^0_{\xi^\theta_\sigma}u_2$ 表示同一个扭曲相对典范截面。可以验证， $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)$以类似于验证$\bar{\partial}^{\mathcal{L}^\theta}$的莱布尼茨法则的方式满足莱布尼茨法则。为了检查量 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_\sigma \quad \mathfrak{f}$ 关于自变量 σ 具有张量性，只需证明 $L^1,{}^0_{\xi^\theta_{r\sigma}}u = \mathfrak{a}(\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_{r\sigma} \quad \mathfrak{f})$和$(\pi^* r)L^1,{}^0_{\xi^\theta_\sigma}u = \mathfrak{a}(r\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_\sigma \quad \mathfrak{f})$表示同一个扭曲典范截面。由于 $\xi^\theta_{r\sigma} = (\pi^* r)\xi^\theta_\sigma$，我们有

$$\begin{aligned} L^{1,0}_{\xi^\theta_{r\sigma}}u &= (\pi^* r)(\xi^\theta_\sigma \lrcorner \nabla^{1,0}u) + \nabla^{1,0}((\pi^* r)\xi^\theta_\sigma \lrcorner u) \\ &= (\pi^* r)\left(\xi^\theta_\sigma \lrcorner \nabla^{1,0}u + \nabla^{1,0}(\xi^\theta_\sigma \lrcorner u)\right) + \pi^*\partial r \wedge (\xi^\theta_\sigma \lrcorner u) \\ &= (\pi^* r)L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}u + (\pi^*\partial r) \wedge (\xi^\theta_\sigma \lrcorner u). \end{aligned}$$

由于 $\iota^*_{X_b}(\pi^*\partial r) = 0$，这表明 $L^1,{}^0_{\xi^\theta_{r\sigma}}u$和 $(\pi^* r)L^1,{}^0_{\xi^\theta_\sigma}u$表示同一个扭曲相对典范截面。最后，联络 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta} = \bar{\partial}^{\mathcal{L}^\theta} + \nabla^{\mathcal{L}^\theta}{}_{(1,\ 0)}$ 的度量相容性 (2.4) 由命题 3.8 得出，因此 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}$ 是 $\mathcal{L}^\theta$的 BLS-陈联络。这表明 $\mathcal{L}^\theta$ 是一个 BLS 场。□

4.2. Bergman 空间场。设 $\mathcal{H} \to B$ 是 $\mathcal{L}^\theta$ 的希尔伯特子场，使得其纤维$\mathcal{H}_b \subset \mathcal{L}^\theta_b$ 是包含全纯扭曲典范截面的闭子空间，即，

$$\mathcal{H}_b = \left\{ f \in \Gamma\left(X_b, \mathcal{O}(K_{X_b} \otimes E|_{X_b})\right) : \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} \langle f \wedge \overline{f}, h\rangle < +\infty \right\}.$$

定义层 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})$如下。给定 B的一个开集 U，令

$$\Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})) := \{\mathfrak{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta)) : \mathfrak{f}(b) \in \mathcal{H}_b \quad \text{for all } b \in U\}.$$

因此， $\Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H}))$由满足以下条件的截面 $\mathfrak{f}$ 组成： $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$在 X_b 上的限制 $\iota_b(\mathfrak{a}(\mathfrak{f}))$是 $K_{X_b} \otimes E|_{X_b} \to X_b$ 的全纯截面，并且光滑至 X_b的边界。对于一般的伪凸域族，茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})_b$ 在求值映射下的像未必在 $\mathcal{H}_b$中稠密。即使茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})_b$ 的像在 $\mathcal{H}_b$中稠密， $\mathcal{H}$ 也未必是 BLS 场，因为可能无法为 $\mathcal{H}$ 赋予 BLS-陈联络。事实上，要求存在 BLS-陈联络会对纤维 X_b 施加强限制（例如参见 [Wan17] ，其中定义了陈联络）。因此，我们赋予 $\mathcal{H}$ iBLS 场的结构，并利用环境 BLS 场 $\mathcal{L}^\theta$（它具有 BLS-陈联络）来定义 $\mathcal{H}$的曲率。

4.2.1. 具体 iBLS 场。设 $\mathcal{L}^\theta$ 为第 4.1 节中引入的 BLS 场。那么，相对于 $\mathcal{L}^\theta$ 的 $\mathcal{H}$ 的极大子茎丛 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta}$ 是由茎 $\{\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,b}\}_{b\in B}$ 构成的集合，其中

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,b} := \{\mathfrak{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L}^\theta)_b : \iota_b\mathfrak{a}(\mathfrak{f}) \in \mathcal{H}_b\}.$$

回忆一下，$\iota_b : (K_{X/B}\otimes E)|_{X_b} \to K_{X_b}\otimes E|_{X_b}$ 是引理 3.3 中的限制同构。对于 $b \in B$，我们将$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}(b)$记作$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}$ 在求值映射下的像，即

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,b}(b) := \{\iota_b\mathfrak{a}(\mathfrak{f}) \in \mathcal{H}_b : \mathfrak{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,b}\}.$$

令$\Sigma^\theta \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}$ 为子茎丛，其在点 $b \in B$ 处的纤维 Σ^θ_b 为

$$\Sigma^\theta_b := \{\mathfrak{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,b} : \iota^*_{X_b}L^{0,1}_{\overline{\xi^\theta_\tau}}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}) \in \mathcal{H}_b \text{ and } \iota^*_{X_b}L^{1,0}_{\xi^\theta_\tau}\bar\partial\mathfrak{a}(\mathfrak{f}) = 0 \text{ for all } \tau \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,0}_B)_b\}. \tag{4.2}$$

注 4.3。注意，(4.2) 中的第一个条件意味着 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\tau}) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}$因此 $(\mathcal{H},\Sigma^\theta)$ 是 $\mathcal{L}^\theta$ 的无穷小全纯子场。可以验证，(4.2) 中的第二个条件与代表元 u 对 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的选择无关。为此，令 t^1，...，t^m 为 B在 b附近的坐标，并将 $\tau \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b$ 在这些坐标下写成 $\tau^j\frac{\partial}{\partial t^j}$。只需证明，如果 $\alpha = \gamma_j \wedge dt^j$，那么 $\iota^*_{X_b}L^{1,}{}_{\xi^\theta_\tau}{}^0\bar\partial\alpha = 0$。事实上，

$$\iota^*_{X_b}L^{1,0}_{\xi^\theta_\tau}\bar\partial\alpha = \iota^*_{X_b}L^{1,0}_{\xi^\theta_\tau}(\bar\partial\gamma_j \wedge \pi^*dt^j) = \iota^*_{X_b}\left(L^{1,0}_{\xi^\theta_\tau}(\bar\partial\gamma_j) \wedge \pi^*dt^j + \bar\partial\gamma_j \wedge \pi^*\partial\tau_j\right) = 0.$$

因此，(4.2) 中的第二个条件意味着，$\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 可由一个扭曲的 $(n,0)$-形式 u 表示，使得$\iota^*_{X_b}L^{1,}{}_{\xi^\theta_\tau}{}^0\bar\partial u = 0$对所有 $\tau \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b$ 都成立。由于量 $\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\tau})$ 和 $\iota^*_{X_b}L^{1,}{}_{\xi^\theta_\tau}{}^0\bar\partial\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 关于自变量 τ 是张量性的，因此只需对张成 $T^{1,}{}_B{}^0{}_b$ 的有限个向量场检验 (4.2) 中的条件。

命题 4.4. 设 $\mathcal{H} \to B$ 为 Bergman 空间场，$\mathcal{L}^\theta$ 为上述 BLS 场。设Σ^θ 为由 (4.2) 定义的调谐，并假设对于所有 $b \in B$，$\Sigma^\theta_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}(b)$ 中稠密。那么 $(\mathcal{H},\Sigma^\theta)$ 是形式调谐。此外，对于所有 $b \in B$ 以及所有 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b$，第二基本映射 $N^\theta_b(\sigma)$ 的定义域为 $\Sigma_b(b)$，且

$$N^\theta_b(\sigma)\mathfrak{f}(b) = \mathfrak{i}\left(P^\perp_b L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right).$$

证明。由于 $(\mathcal{H},\Sigma^\theta)$ 是一个无穷小几乎全纯子域，对于所有 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b$ 以及所有 $\mathfrak{f} \in \Sigma^\theta_b$，我们有 $(\mathcal{P}^\perp\bar\partial^{\mathcal{L}^\theta}\mathfrak{f}(\overline{\sigma}))(b) = 0$。因此，要验证 Σ^θ 的形式性，只需证明当 $\mathfrak{f}(b) = 0$ 时，对于所有 $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(T^{1,}{}_B{}^0)_b$，均有 $(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_\sigma\ \mathfrak{f})(b) = 0$。由于 $\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_\sigma\ \mathfrak{f}$ 关于自变量 σ 是张量性的，我们不妨假设 σ 是一个全纯向量场。展开定义后，$\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta}(1,0)_\sigma\ \mathfrak{f}$ 在 b 处消失，等价于 $P^\perp_b(\iota^*_{X_b}L^{1,}{}_{\xi^\theta_\sigma}{}^0u) = 0$，其中 u 是一个表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的扭曲 $(n,0)$-形式，而 P_b 表示伯格曼投影。因此，我们要证明 $\iota^*_{X_b}L^{1,}{}_{\xi^\theta_\sigma}{}^0u$ 是 $K_{X_b}\otimes E|_{X_b} \to X_b$ 的全纯截面。根据命题 3.6，

$$\bar\partial\iota^*_{X_b}L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}u = \iota^*_{X_b}\left(\bar\partial\xi^\theta_\sigma\lrcorner\nabla^{1,0}u - (\xi^\theta_\sigma\lrcorner\Theta^E)\wedge u - \nabla^{1,0}(\bar\partial\xi^\theta_\sigma\lrcorner u) + L^{1,0}_{\xi^\theta_\sigma}\bar\partial u\right). \tag{4.5}$$

由于 σ 是全纯的 (1, 0) 型向量场，$\bar\partial\xi^\theta_\sigma$ 是取值于垂直向量场的 (0, 1)-形式。因此

$$\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\sigma\lrcorner\nabla^{1,0}u) = \bar\partial(\xi^\theta_\sigma|_{X_b})\lrcorner\iota^*_{X_b}\nabla^{1,0}u = 0,$$

由于 $\nabla^{1,\,0}u$是一个 $(n+1,0)$-形式。第二项 $\iota_{X_b}^*((\xi_\sigma^\theta \lrcorner \Theta^E)\wedge u)=0$，因为 $\iota_{X_b}^* u=0$。对于第三项，由于 $\bar\partial\xi_\sigma^\theta$ 是垂直的

$$\iota_{X_b}^*(\nabla(\bar\partial\xi_\sigma^\theta \lrcorner u))=\nabla^{1,0}\iota_{X_b}^*(\bar\partial\xi_\sigma^\theta\lrcorner u)=\nabla^{1,0}\left(\bar\partial(\xi_\sigma^\theta|_{X_b})\lrcorner\iota_{X_b}^* u\right)=0,$$

因为 $\iota_{X_b}^* u=0$。最后 地，我们由条件 (4.2) 得出，方程 (4.5) 中的最后一项为零 . □

引理 4.6。设 $\mathcal{H}\to B$ 为 Bergman 空间场，设 $\mathcal{L}^\theta$ 为环境 BLS 场，并设 Σ^θ 为由 (4.2) 定义的调谐。则 $\Theta^{\mathcal{H}}$ 是一个（可能非光滑的）算子值 (1, 1)形式。

证明。根据命题 2.36，只需证明 $(\mathcal{H},\Sigma^\theta)$ 是 $\mathcal{L}^\theta$ 的无穷小全纯希尔伯特子场，这意味着对于所有 $b\in B$ 和 $\sigma,\ \tau\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,\,0}_B)_b$，我们有 $(\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\overline{\sigma}\overline{\tau}}\mathfrak{f})(b)=0$ 对所有 $\mathfrak{f}\in\Sigma^\theta_b$ 成立。设 u 是表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的 $(n,0)$形式。注意到

$$0=\overline{\xi}^\theta_\tau\lrcorner\overline{\xi}^\theta_\sigma\lrcorner\bar\partial^2 u=L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\tau}u-L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\tau}L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}u-L^{0,1}_{\left[\overline{\xi}^\theta_\sigma,\overline{\xi}^\theta_\tau\right]}u$$

因此

$$\begin{aligned}\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\overline{\sigma}(b)\overline{\tau}(b)}\mathfrak{f}(b)&=\iota_{X_b}^*\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\tau}u-L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\tau}L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_\sigma}u-L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_{[\sigma,\tau]}}u\right)\\&=\iota_{X_b}^*\left(L^{0,1}_{\left[\overline{\xi}^\theta_\sigma,\overline{\xi}^\theta_\tau\right]}u-L^{0,1}_{\overline{\xi}^\theta_{[\sigma,\tau]}}u\right)\\&=\iota_{X_b}^*\left(\left[\overline{\xi}^\theta_\sigma,\overline{\xi}^\theta_\tau\right]-\overline{\xi}^\theta_{[\sigma,\tau]}\right)\lrcorner\bar\partial u\\&=\left(\left[\overline{\xi}^\theta_\sigma,\overline{\xi}^\theta_\tau\right]-\overline{\xi}^\theta_{[\sigma,\tau]}\right)\Big|_{X_b}\lrcorner\iota_{X_b}^*\bar\partial u=0.\end{aligned}$$

这里倒数第二个等式是因为 $\left(\left[\overline{\xi}^\theta_\sigma,\overline{\xi}^\theta_\tau\right]-\overline{\xi}^\theta_{[\sigma,\tau]}\right)$ 是一个垂直向量场，而最后一个等式成立是因为 $\iota_{X_b}^* u$ 沿着 X_b全纯。

□

因此，我们有如下定义。

定义 4.7（Bergman 空间场的曲率）。设 $\mathcal{H}\to B$ 为 Bergman 空间场。假设 $(\mathcal{H},\mathcal{L}^\theta,\Sigma^\theta)$ 是一个 iBLS 场。那么，对于 $b\in B$和 $\sigma,\ \tau\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,\,0}_B)_b$，曲率 $\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\ b\ \overline{\tau}}()(b)$是一个稠密定义算子，其定义域 $\mathrm{Dom}(\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\ b\ \overline{\tau}}())=\Sigma^\theta_b(b)\subset\mathcal{H}_b$由下式给出

$$\left(\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^\theta}_{\sigma(b)\overline{\tau}(b)}\mathfrak{f}(b),\mathfrak{g}(b)\right)_b=\left(\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)_b-\left(\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta}_\sigma\mathfrak{f},\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta}_\tau\mathfrak{g}\right)_b.\tag{4.8}$$

此时，$\mathcal{H}$ 的曲率似乎取决于用于在 $\mathcal{L}^\theta$ 上定义联络的水平分布 θ的选择。事实上，曲率 $\Theta^{\mathcal{L}^\theta}|_{\mathcal{H}}$ 确实取决于 θ，但 (4.8) 右侧的量$\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^\theta}$ 与 θ 无关（见定理 4.12）。下一个命题表明，$\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^\theta}$ 的定义域与水平分布的选择无关。

命题 4.9. 设 $(E,h)\to X\to B$ 如第 3.1 节所述。设 $\mathcal{H}\to B$ 为 Bergman 空间场，且设 $\mathcal{L}^{\theta_1}\to B$（分别为 $\mathcal{L}^{\theta_2}\to B$）为环境 BLS 场，其陈联络 $\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}$（分别为 $\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_2}}$）是相对于水平分布 θ_1（分别为 θ_2）定义的。设 Σ^{θ_1}（分别为 Σ^{θ_2}）为 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{L}^{\theta_1}$（分别在 $\mathcal{L}^{\theta_2}$）中的调谐，由 (4.2) 给出。则

(1) $(\mathcal{H},\Sigma^{\theta_1})$ 是 $\mathcal{L}^{\theta_1}$ 的无穷小全纯希尔伯特子场，当且仅当 $(\mathcal{H},\Sigma^{\theta_2})$ 是 $\mathcal{L}^{\theta_2}$ 的无穷小全纯希尔伯特子场。(2) 调谐 Σ^{θ_1} 和 Σ^{θ_2} 相同。因此，$(\mathcal{H},\Sigma^{\theta_1})$ 是形式调谐，当且仅当 $(\mathcal{H},\Sigma^{\theta_2})$ 是形式调谐。

证明。由于 $\mathcal{L}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{L}^{\theta_2}$ 的光滑结构相同，极大子茎丛 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^{\theta_1}}$ 和 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^{\theta_2}}$ 相等。对于 $b \in B$，令 $\eta \in \mathscr{C}^\infty(T^1_{,B}{}^0)_b$，令 $\xi^{\theta_1}_\eta$ 和 $\xi^{\theta_2}_\eta$ 为相对于分布 θ_1 和 θ_2 的 η 的水平提升。则 $w_\eta = \xi^{\theta_1}_\eta - \xi^{\theta_2}_\eta$ 是一个垂直向量场。令 $\mathfrak{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^{\theta_1},b} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^{\theta_2},b}$，并令 u 为表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 的一个 E 值 $(n,0)$-形式。那么

$$\iota^*_{X_b}(L^{0,1}_{\xi^{\theta_1}_\eta} u - L^{0,1}_{\xi^{\theta_2}_\eta} u) = \iota^*_{X_b}(L^{0,1}_{\overline{w}_\eta} u) = \iota^*_{X_b}(\overline{w}_\eta \lrcorner \bar\partial u) = \overline{w}_\eta\big|_{X_b} \lrcorner \iota^*_{X_b} \bar\partial u = 0,$$

其中，倒数第二个等式取决于 w_η 是垂直的这一事实，而最后一个等式成立是因为 $\iota_b(\mathfrak{a}(\mathfrak{f})) = \iota^*_{X_b} u$ 属于 $\mathcal{H}_b$。因此

$$\iota^*_{X_b} L^{0,1}_{\xi^{\theta_1}_\eta} u \in \mathcal{H}_b \text{ if and only if } \iota^*_{X_b} L^{0,1}_{\xi^{\theta_2}_\eta} u \in \mathcal{H}_b. \tag{4.10}$$

这证明了该命题中的第一个陈述。对于 (4.2) 中的第二个条件，由于 w_η 是垂直的

$$\begin{aligned}\iota^*_{X_b}(L^{1,0}_{\xi^{\theta_1}_\eta} \bar\partial u - L^{1,0}_{\xi^{\theta_2}_\eta} \bar\partial u) = \iota^*_{X_b} L^{1,0}_{w_\eta} \bar\partial u &= \iota^*_{X_b}(w_\eta \lrcorner \nabla^{1,0} \bar\partial u + \nabla^{1,0}(w_\eta \lrcorner \bar\partial u)) \\ &= w_\eta|_{X_b} \lrcorner \nabla^{1,0}(\iota^*_{X_b} \bar\partial u) + \nabla^{1,0}(w_\eta|_{X_b} \lrcorner \iota^*_{X_b} \bar\partial u) = 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $\iota^*_{X_b} u \in \mathcal{H}_b$。因此

$$\iota^*_{X_b} L^{1,0}_{\xi^{\theta_1}_\eta} \bar\partial u = 0 \text{ if and only if } \iota^*_{X_b} L^{1,0}_{\xi^{\theta_2}_\eta} \bar\partial u = 0. \tag{4.11}$$

由 (4.10) 和 (4.11) 可得 $\Sigma^{\theta_1}_b = \Sigma^{\theta_2}_b$。现在，陈述 (2) 的其余部分由命题 4.4 以及以下事实可得：$\mathcal{H}_{\mathcal{L}^{\theta_1},\,b} = \mathcal{H}_{\mathcal{L}^{\theta_2},\,b}$。□

定理 4.12。设 $(E,h) \to X \to B$ 如第 3.1 节所述。设 $\mathcal{H} \to B$ 为 Bergman 空间场。设 $\mathcal{L}^{\theta_1}$, $\mathcal{L}^{\theta_2} \to B$ 和 $\Sigma^{\theta_1}, \Sigma^{\theta_2} \to B$ 如命题 4.9 所述。则对于 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \Sigma^{\theta_1}_b = \Sigma^{\theta_2}_b$ 和 $\sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T^1_{,\,B}{}^0)_b$，我们有

$$\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b - \left(\mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_\sigma \mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_\tau \mathfrak{g}\right)_b = \left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\overline{\tau}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b - \left(\mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_\sigma \mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_\tau \mathfrak{g}\right)_b. \tag{4.13}$$

因此，若 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}^{\theta_1}, \Sigma^{\theta_1})$ 是一个 iBLS 场，则 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}^{\theta_2}, \Sigma^{\theta_2})$ 也是一个 iBLS 场，并且 $\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\,b\,\overline{\tau}}(\,)(b) = \Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\,b\,\overline{\tau}}(\,)(b)$。

证明。由命题 4.9 可知 $\Sigma^{\theta_1} = \Sigma^{\theta_2}$，因此将这两个调谐都记为 Σ。若 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}^{\theta_1}, \Sigma)$ 是一个 iBLS 场，根据定义 (2.31)，我们有

(a) 对每个 $b \in B$，子空间 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}^{\theta_1},b}(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密。(b) $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是一个形式调谐。(c) $(\mathcal{H}, \Sigma)$ 是 $\mathcal{L}^{\theta_1}$ 的一个无穷小全纯希尔伯特子场。(d) 对所有 $b \in B$、所有 $\sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T_B)_b$ 以及所有 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$，反线性泛函 $Q^{\theta_1}_{\sigma\overline{\tau}}(\mathfrak{f}(b)\ \cdot)_b$ 是连续的，其中

$$Q^{\theta_1}_{\sigma\overline{\tau}}(\mathfrak{f}(b), \mathfrak{g}(b))_b = \left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}} \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b - \left(\mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_\sigma \mathfrak{f}, \mathcal{P}^\perp \nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_\tau \mathfrak{g}\right)_b.$$

根据命题 4.9，条件 (a)-(c) 对 $(\mathcal{H}, \mathcal{L}^{\theta_2}, \Sigma)$ 也成立。由 (4.13) 可知，对于 $\sigma, \tau \in \mathscr{C}^\infty(T^1_{,\,B}{}^0)_b$ 以及 $\mathfrak{f} \in \Sigma_b$，泛函 $Q^{\theta_1}_{\sigma\overline{\tau}}(\mathfrak{f}(b)\ \cdot)_b = Q^{\theta_2}_{\sigma\overline{\tau}}(\mathfrak{f}(b)\ \cdot)_b$，因此 $Q^{\theta_2}_{\sigma\overline{\tau}}(\mathfrak{f}(b)\ \cdot)_b$ 也是连续的。因此，$(\mathcal{H}, \mathcal{L}^{\theta_2}, \Sigma)$ 也是一个 iBLS 场，并且根据里斯表示定理，必有 $\Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\,b\,\overline{\tau}}(\,)(b)\mathfrak{f}(b) = \Theta^{\mathcal{H}/\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\,b\,\overline{\tau}}(\,)(b)\mathfrak{f}(b)$。还需证明 (4.13)。

为此，令 u 和 v 为扭曲的 $(n,0)$-形式，分别表示 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 和 $\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$。对于 B 上的 $(1,0)$ 向量场 σ（分别为 τ），令 ξ^i_σ（分别为 ξ^i_τ）表示相对于分布 $\theta^1_{,\,i}{}^0$ 的 σ（分别为 τ）的水平提升，其中 $i = 1, 2$。此外，用 w_σ 和 w_τ 表示垂直向量

场 $w_\sigma = \xi^1_\sigma - \xi^2_\sigma$ 和 $w_\tau = \xi^1_\tau - \xi^2_\tau$。采用这一记号，我们首先计算希尔伯特场 $\mathcal{L}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{L}^{\theta_2}$ 的曲率之差。我们有

$$\begin{aligned}\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)_b &= \left(L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u - L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}u, v\right)_b \\ &= \left(L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b + \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}u, v\right)_b \\ &= \left(L^{1,0}_{w_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b + \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}u, v\right)_b,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)_b &= \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^2_\tau}u - L^{0,1}_{\overline{\xi}^2_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b \\ &= \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^2_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b + \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^2_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b \\ &= \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^2_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b + \left(L^{0,1}_{\overline{w}_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b.\end{aligned}$$

将这两个量相减，得到

$$\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)_b - \left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}\right)_b = \left(L^{1,0}_{w_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b + \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{w}_\tau}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{w_\sigma}u, v\right)_b - \left(L^{0,1}_{\overline{w}_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b. \tag{4.14}$$

我们分别处理方程 (4.14) 右侧的各项。利用恒等式 (3.12)，可知

$$\left(L^{1,0}_{w_\sigma}L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, v\right)_b = -\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v\right)_b = 0,$$

其中，第二个等式成立是因为 $\iota^*_{X_b}(L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v) = 0$。为此，先注意到，对于 X 上的垂直向量场 η 以及一个取值于 E 的 (p,q)-形式 α，有 $\iota^*_{X_b}(\eta\lrcorner\alpha) = \eta|_{X_b}\lrcorner\iota^*_{X_b}\alpha$。由于 w_σ 是垂直的

$$\iota^*_{X_b}(L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v) = \iota^*_{X_b}(\overline{w}_\sigma\lrcorner\bar\partial v) = \overline{w}_\sigma|_{X_b}\lrcorner(\iota^*_{X_b}\bar\partial v) = 0,$$

因为 v 沿着 X_b 全纯。

我们断言，(4.14) 右侧的第二项也为零。事实上，由于 w_τ 和 $[\xi^2_\sigma, w_\tau]$ 都是垂直向量场，

$$\begin{aligned}\iota^*_{X_b}(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}L^{0,1}_{\overline{w}_\tau}u) = \iota^*_{X_b}(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}(\overline{w}_\tau\lrcorner\bar\partial u)) &= \iota^*_{X_b}\left(\overline{w}_\tau\lrcorner(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}\bar\partial u) + [\xi^2_\sigma,\overline{w}_\tau]^{0,1}\lrcorner\bar\partial u\right) \\ &= \overline{w}_\tau|_{X_b}\lrcorner\iota^*_{X_b}(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}\bar\partial u) + [\xi^2_\sigma,\overline{w}_\tau]^{0,1}|_{X_b}\lrcorner\iota^*_{X_b}(\bar\partial u) = 0.\end{aligned}$$

最后一个等式由以下事实推出：$\iota^*_{X_b}(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}\bar\partial u) = 0$ 和 $\iota^*_{X_b}(\bar\partial u) = 0$ 对于一个 E 值的 $(n,0)$-形式 u，它表示与 $\mathfrak{f}\in\Sigma_b(U)$ 相关联的截面 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$。

对于第三项，恒等式 (3.12) 给出

$$\left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, v\right)_b = -\left(u, L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v\right)_b.$$

对该方程两边使用 (3.10) 求导，我们得到

$$\begin{aligned}\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}L^{1,0}_{w_\sigma}u, v\right)_b + \left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b &= \overline{\tau}\left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, v\right)_b \\ &= -\overline{\tau}\left(u, L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v\right)_b \\ &= -\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}^1_\tau}u, L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v\right)_b - \left(u, L^{1,0}_{\xi^1_\tau}L^{0,1}_{\overline{w}_\sigma}v\right)_b = 0.\end{aligned}$$

我们用来说明 (4.14) 右侧前两项为何为零的同样推理表明 $\iota_{X_b}^*(L^0,\ {}^1_{\overline{w}_\sigma}v) = 0$和 $\iota_{X_b}^*(L^1,\ {}^0_{\xi^1_\tau}L^0,\ {}^1_{\overline{w}_\sigma}v) = 0$。

利用恒等式 (3.13)，第四项可以写成

$$-\left(L^{0,1}_{\overline{w}_\tau}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, v\right)_b = \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b.$$

经过上述所有简化，方程 (4.14) 化简为

$$\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b - \left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b = \left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b + \left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b.$$

我们最后再对 (4.14) 进行一次化简。为此，注意到由于 w_σ 是一个垂直向量场，我们有 $\iota^*_{X_b}(w_\sigma \lrcorner \nabla^1,\ {}^0u) = w_\sigma|_{X_b} \lrcorner \iota^*_{X_b}(\nabla^1,\ {}^0u) = 0$，因为 $\nabla^1,\ {}^0u$ 是一个 $(n+1, 0)$-形式。因此我们有

$$\begin{aligned}
\left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b &= \sqrt{\text{-}1}^{n^2}\int_{X_b}\langle\nabla^{1,0}(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle \\
&= \sqrt{\text{-}1}^{n^2}\int_{X_b}\partial\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle + (-1)^n\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{\bar\partial L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle \\
&= \sqrt{\text{-}1}^{n^2}\int_{X_b}\partial\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle + (-1)^n\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{\bar\partial P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle \\
&= \sqrt{\text{-}1}^{n^2}\int_{X_b}\partial\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle - \partial\langle(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle + \langle\nabla^{1,0}(w_\sigma \lrcorner u) \wedge \overline{P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle \\
&= \sqrt{\text{-}1}^{n^2}\int_{X_b} d\left(w_\sigma \lrcorner \langle u \wedge \overline{P_b L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v}, h\rangle\right) + \left(L^{1,0}_{w_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b \\
&= \int_{X_b} d\left(w_\sigma \lrcorner \left\{u, P_b L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right\} dV_{\omega_b}\right) + \left(P_b^\perp L^{1,0}_{w_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b \\
&= \int_{\partial X_b}\partial\rho_b(w_\sigma)\left\{u, P_b L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right\} dS + \left(P_b^\perp L^{1,0}_{w_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b \\
&= \left(P_b^\perp L^{1,0}_{w_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b,
\end{aligned}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示 $E|_{X_b}$值形式上的逐点内积。我们还假设 ρ是 ∂X 的定义函数，因此 $\rho_b := \rho|_{X_b}$ 是 ∂X_b 的定义函数，并且在 ∂X_b上满足 $|\partial\rho_b| = 1$。利用 w_σ 是垂直向量场这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\iota^*_{\partial X_b}\left(\partial\rho_b(w_\sigma)\right) = \iota^*_{\partial X_b}\left(w_\sigma|_{X_b} \lrcorner \partial\rho_b\right) &= \iota^*_{\partial X_b}\left(w_\sigma|_{X_b} \lrcorner \iota^*_{X_b}\partial\rho\right) \\
&= \iota^*_{\partial X_b}\iota^*_{X_b}(w_\sigma \lrcorner \partial\rho) \\
&= \iota^*_{\partial X_b}\iota^*_{X_b}\left(\partial\rho(\xi^1_\sigma) - \partial\rho(\xi^2_\sigma)\right) \\
&= \iota^*_{X_b}\iota^*_{\partial X}\left(\partial\rho(\xi^1_\sigma) - \partial\rho(\xi^2_\sigma)\right) = 0,
\end{aligned}$$

由于 ξ^1_σ 和 ξ^2_σ 与 ∂X 相切。最后一个等式由此得出。类似地，我们可以证明 $\left(L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b = \left(P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b$。经过这最后一步化简后，(4.14) 变为

$$\left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b - \left(\Theta^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b = \left(P_b^\perp L^{1,0}_{w_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b + \left(P_b^\perp L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u, P_b^\perp L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b. \tag{4.15}$$

现在我们计算 $\mathcal{H}$ 关于希尔伯特场 $\mathcal{L}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{L}^{\theta_2}$ 的第二基本映射的平方之差:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\sigma}\mathfrak{f},\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_1}}_{\tau}\mathfrak{g}\right)_b-\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\sigma}\mathfrak{f},\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}^{\theta_2}}_{\tau}\mathfrak{g}\right)_b\\
&=\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b-\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\tau}v\right)_b\\
&=\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b-\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b+\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b-\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\tau}v\right)_b\\
&=\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{w_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^1_\tau}v\right)_b+\left(P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi^2_\sigma}u,P_b^{\perp}L^{1,0}_{w_\tau}v\right)_b. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

恒等式 (4.13) 现在由方程 (4.15) 和 (4.16) 得出。 □

4.3. 关于 iBLS 结构的最后说明。由于 iBLS 场的定义在某种程度上较为技术性，因此似乎难以确定纤维化 $E\to X\to B$ 必须满足的精确几何充要条件，以保证 $\mathcal{H}\to B$ 是 iBLS 场。不过，我们可以给出一些纤维化的例子，使得 $(\mathcal{H},\Sigma)$ 是 iBLS 场。在下文所有例子中，都可以在 $\mathcal{H}\to B$ 上赋予一个光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})$，使得茎 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})_b$ 在求值映射下的像在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，对所有 $b\in B$ 均成立。例 (3)–(5) 中的希尔伯特场可能不是 BLS 场，因为它们未必总能赋予 BLS-陈联络。

所有这些纤维化还满足如下条件：对于所有 $b\in B$，纤维 X_b 都是一个区域，诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(0,2)}$ 在其上作用于 (0, 2) 型形式时全局正则。定理 1.1 需要后一条件，因此该定理适用于这些类别的例子。首先，我们需要关于第二基本映射范数的如下估计。

定理 4.17. 设 $(E,h)\to B$ 与第 3.1 小节中相同。假设线丛 E的曲率半正。设 $\tau_1,\cdots,\tau_m$是开集 U上的全纯 (1, 0) 型向量场， $\xi_{\tau_1},\cdots,\xi_{\tau_m}$是它们到 X的水平提升。那么对于 $\mathfrak{f}_1,\cdots,\mathfrak{f}_m\in\Sigma_b$，我们有以下估计

$$\left\|P_b^{\perp}\iota_b\left(\sum_{j=1}^m L^{1,0}_{\xi_{\tau_j}}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j)\right)\right\|_b^2\le\sum_{j,k=1}^m\left[\left(\Theta^E_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_k}}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j),\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_k)\right)_b+\left(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j),\bar\partial\xi_{\tau_k}\lrcorner\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_k)\right)_b\right]. \qquad (4.18)$$

证明. 设 u_j 是一个取值于 E的 $(n,0)$-形式，表示扭曲相对典范截面 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j)$。由 (3.7) 得

$$\begin{aligned}
\bar\partial\iota^*_{X_b}\left(L^{1,0}_{\tau_j}u_j\right)&=\iota^*_{X_b}\left(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner\nabla^{1,0}u_j-(\xi_{\tau_j}\lrcorner\Theta^E)\wedge u_j-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j)+L^{1,0}_{\xi_{\tau_j}}\bar\partial u_j\right)\\
&=\iota^*_{X_b}\left(-(\xi_{\tau_j}\lrcorner\Theta^E)\wedge u_j-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j)\right).
\end{aligned}$$

事实上， $\iota^*_{X_b}\left(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner\nabla^{1,\ 0}u_j\right)=0$和 $\iota^*_{X_b}\left(L^{1,0}_{\xi_{\tau_j}}\bar\partial u_j\right)=0$与命题 4.4 的证明中相同。因此 $P_b^{\perp}\iota_b\left(\sum_{j=1}^m L^{1,0}_{\xi_{\tau_j}}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j)\right)$是方程的最小 L^2-范数解

$$\bar\partial f=\sum_{j=1}^m\iota^*_{X_b}\left(-(\xi_{\tau_j}\lrcorner\Theta^E)\wedge u_j-\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j)\right)$$

在伪凸域 X_b 上。为简化记号，令

$$\kappa=\sum_{j=1}^m\iota^*_{X_b}\left(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j\right),\qquad\mu=\sum_{j=1}^m\iota^*_{X_b}\left((\xi_{\tau_j}\lrcorner\Theta^E)\wedge u_j\right),$$

并将不等式 (4.18) 右端的量记为 C。根据与完备 K¨ahler 流形上的 $\bar{\partial}$-方程存在性理论相关的通常泛函分析，要得到估计式 (4.18)，只需证明对于所有紧支撑的 E-值 $(n, 1)$-形式α 在 X_b 上，我们有

$$\left|\left(\mu + \nabla^{1,0}\kappa, \alpha\right)_b\right|^2 \leq C\left(\left\|\bar{\partial}\alpha\right\|_b^2 + \left\|\bar{\partial}^\star\alpha\right\|_b^2\right) = C\left(\Box\alpha, \alpha\right)_b.$$

由于 Θ^E 是 X 上的非负 (1, 1)形式，我们可以在局部写成 $\Theta^E = \sum_{k=1}^{n+m}\gamma^k \wedge \overline{\gamma}^k$，其中 γ^1、.....、γ^{n+m} 是 X 上的某些 (1, 0)-形式。令 γ_b^k 表示形式 $\gamma_b^k = \iota_{X_b}^*\gamma^k$，于是 $\sum_{j=1}^{n+m}\gamma_b^k \wedge \overline{\gamma}_b^k := \Theta^{E_b}$ 是线丛 $E|_{X_b}$ 的曲率。最后，令 $\vee$ 表示楔积的伴随算子，即对于 X_b 上具有适当双次数的形式 β 以及扭曲形式 v 和 w，有

$$\{\beta \wedge v, w\} = \{v, \beta \vee w\}.$$

现在，设 α 是 X_b 上的一个紧支撑的 $E|_{X_b}$ 值 $(n, 1)$-形式。那么

$$\begin{aligned}
\left\{\sum_{j=1}^m (\xi_{\tau_j} \lrcorner \Theta^E) \wedge u_j, \alpha\right\} &= \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^{n+m}\left\{\gamma^k(\xi_{\tau_j})\overline{\gamma}_b^k \wedge u_j, \alpha\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n+m}\left\{\sum_{j=1}^m \gamma^k(\xi_{\tau_j})u_j, \overline{\gamma}_b^k \vee \alpha\right\} \\
&\leq \left[\sum_{k=1}^{n+m}\left\{\sum_{j=1}^m \gamma^k(\xi_{\tau_j})u_j, \sum_{i=1}^m \gamma^k(\xi_{\tau_i})u_i\right\}\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{n+m}\left\{\overline{\gamma}_b^k \vee \alpha, \overline{\gamma}_b^k \vee \alpha\right\}\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n+m}\sum_{i,j=1}^m\left\{\gamma^k(\xi_{\tau_j})\overline{\gamma^k(\xi_{\tau_i})}u_j, u_i\right\}\right]^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n+m}\overline{\gamma}_b^k \wedge (\overline{\gamma}_b^k \vee \alpha), \alpha\right\}^{1/2} \\
&= \left[\sum_{i,j=1}^m \{\Theta^E_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j, u_i\}\right]^{1/2}\left\{\left[\Theta^{E_b}, \Lambda_{\omega_b}\right]\alpha, \alpha\right\}^{1/2}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

这里，Λ_{ω_b} 表示关于内积$\{\cdot,\cdot\}$的 X_b 上 Lefschetz算子 L_{ω_b} 的伴随算子。为说明最后一个等式，注意到由于双次数的原因，$\Lambda_{\omega_b}\Theta^{E_b} \wedge \alpha = 0$。局部计算随后表明

$$\sum_k \overline{\gamma}_b^k \wedge (\overline{\gamma}_b^k \vee \alpha) = \Theta^{E_b} \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha = \left[\Theta^{E_b}, \Lambda_{\omega_b}\right]\alpha.$$

对 (4.19) 两边在 X_b上积分，得到

$$\left|(\mu, \alpha)_b\right| \leq \left[\sum_{i,j=1}^m \left(\Theta^E_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j, u_i\right)_b\right]^{1/2}\left(\left[\Theta^{E_b}, \Lambda_{\omega_b}\right]\alpha, \alpha\right)_b^{1/2}. \qquad (4.20)$$

另一方面，我们有

$$\left|\left(\nabla^{1,0}\kappa, \alpha\right)_b\right| = \left|\left(\kappa, \nabla^{1,0*}\alpha\right)_b\right| \leq (\kappa, \kappa)_b^{1/2}\left(\nabla^{1,0*}\alpha, \nabla^{1,0*}\alpha\right)_b^{1/2} = (\kappa, \kappa)_b^{1/2}\left(\Box^{1,0}\alpha, \alpha\right)_b^{1/2}, \qquad (4.21)$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的：$\nabla^{1,0}\alpha = 0$ 这是由于次数的原因。利用方程（4.20）和（4.21），我们得到

$$\left|\left(\mu + \nabla^{1,0}\kappa, \alpha\right)_b\right|^2 \leq \left|(\mu, \alpha)_b\right|^2 + \left|\left(\nabla^{1,0}\kappa, \alpha\right)_b\right|^2 + 2\left|(\mu, \alpha)_b\right|\left|\left(\nabla^{1,0}\kappa, \alpha\right)_b\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Theta^{E}_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j,u_i\right)_b\right]\left(\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]\alpha,\alpha\right)_b+(\kappa,\kappa)_b\left(\Box^{1,0}\alpha,\alpha\right)_b\\
&+2\left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Theta^{E}_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j,u_i\right)_b\right]^{1/2}\left(\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]\alpha,\alpha\right)_b^{1/2}(\kappa,\kappa)_b^{1/2}\left(\Box^{1,0}\alpha,\alpha\right)_b^{1/2}\\
&\leq \left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Theta^{E}_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j,u_i\right)_b\right]\left(\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]\alpha,\alpha\right)_b+(\kappa,\kappa)_b\left(\Box^{1,0}\alpha,\alpha\right)_b\\
&+\left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Theta^{E}_{\xi_{\tau_j}\overline{\xi}_{\tau_i}}u_j,u_i\right)_b\right]\left(\Box^{1,0}\alpha,\alpha\right)_b+\left(\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]\alpha,\alpha\right)_b(\kappa,\kappa)_b\\
&=C\left(\left(\Box^{1,0}\alpha,\alpha\right)_b+\left(\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]\alpha,\alpha\right)_b\right)\\
&=C\left(\Box\alpha,\alpha\right)_b,
\end{aligned}
$$

其中，我们使用了形式恒等式 $\Box^{1,0}+\left[\Theta^{E_b},\Lambda_{\omega_b}\right]=\Box$ 从而得到最后一个等式。证明完毕。□

命题 4.22。假设环境流形 $\widetilde{X}$ 是 Stein，并且对所有 $b\in B$， $\Sigma_b^\theta(b)$ 在 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}(b)$ 中稠密。那么 $(\mathcal{H},\Sigma^\theta,\mathcal{L}^\theta)$ 是一个 iBLS 场。

证明。由于我们假设 $\Sigma_b^\theta(b)$ 在 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}^\theta,\ b}$ 中稠密，根据命题 (4.9)，可得 Σ^θ 形式化了$\mathcal{H}$。唯一还需验证的条件是反线性泛函$Q^\theta_{\sigma\tau}(\mathfrak{f}(b)\ \cdot)_b$ 对所有 $b\in B$、所有 $\sigma,\tau\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,\ }_{\ B}{}^0)_b$ 以及所有 $\mathfrak{f}\in\Sigma_b$ 的连续性。为此，只需验证第二基本映射是有界的，即对所有 $\sigma\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,\ }_{\ B}{}^0)_b$ 和所有 $\mathfrak{g}\in\Sigma_b$，都有 $\left\|\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta}_{\sigma}{}^{1,0}\mathfrak{g}\right\|_b\leq C\left\|\mathfrak{g}\right\|_b$。我们使用估计式 (4.18) 来完成这一点。

令 r 为 X 的光滑多重次调和穷竭函数，并可假设其为正。由于度量 $(E,h)\to X$ 是光滑的，我们可以假设，对于充分大的正数 A， $E\to V$ 上的扭曲度量 he^{-Ar} 具有非负曲率，其中 V 是紧集 $\pi^{-1}(U)$的相对紧开邻域，而 U 是一个包含 ~~b且足够~~小的开集。由于 r 是穷竭函数，我们可以选取足够大的 M ，使得 $\overline{V}\subset r^{-1}(0,\infty)$。于是，根据定理 4.17，我们有

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{P}^\perp\nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_{\sigma}\mathfrak{g}\right\|_b^2&=\int_{X_b}\left\{P_b^\perp L^{1,0}_\sigma u,P_b^\perp L^{1,0}_{\xi_\sigma}u\right\}dV\\
&\leq e^{AM}\int_{X_b}\left\{P_b^\perp L^{1,0}_\sigma u,P_b^\perp L^{1,0}_{\xi_\sigma}u\right\}e^{-Ar}dV\\
&\leq e^{AM}\left[\int_{X_b}\{(\Theta^E_{\xi_\sigma,\overline{\xi}_\sigma}+A\partial\bar\partial r(\xi_\sigma,\overline{\xi}_\sigma))u,u\}e^{-Ar}dV+\int_{X_b}\{\bar\partial\xi_\sigma\lrcorner u,\bar\partial\xi_\sigma\lrcorner u\}e^{-Ar}dV\right]\\
&\leq e^{AM}C_0\left\|u\right\|_b^2=e^{AM}C_0\left\|\mathfrak{g}\right\|_b^2.
\end{aligned}
$$

这里我们用到了以下事实： $e^{-Ar}<1$，并且 $\bar\partial\xi_\sigma$和$\Theta^E_{\xi_\sigma,\ \overline{\xi}_\sigma}+A\partial\bar\partial r(\xi_\sigma,\overline{\xi}_\sigma)$在 $\overline{X}_b$上是光滑的。证明至此完成。□

4.3.1. iBLS 场的例子。在下面所有例子中，我们证明对于所有 $b\in B$， $\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密。根据命题 4.22，与这些域族相关联的 Bergman 空间场是一个 iBLS 场。

(1) 平凡纤维化。设 $B \subset \mathbb{C}^m$ 为单位球，设 $X = B \times \mathbb{C}^n$，并设 $E \to X$ 为带有非平凡度量的平凡线丛。设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一个边界光滑的伪凸区域。那么我们可以取 $X = B \times \Omega \subset X$，并令 $\pi\colon X \to B$ 为到第一因子的投影。为平方可积典范截面的希尔伯特场定义光滑结构 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 如下：

$$\Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})) = \{[f d\vec{z}] : f \in \mathscr{C}^\infty(U \times \Omega) \text{ such that } f(b, \cdot) d\vec{z} \in \mathcal{L}_b \text{ for all } b \in U\},$$

其中，$d\vec{z} := dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$，而 $[f d\vec{z}]$ 表示由$f d\vec{z}$表示的相对典范截面。令 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})$ 表示由下式给出的 $\mathcal{H}$ 的光滑结构

$$\Gamma(U, \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})) = \{[f d\vec{z}] : f \in \mathscr{C}^\infty(U \times \Omega) \text{ such that } f(b, \cdot) d\vec{z} \in \mathcal{H}_b \text{ for all } b \in U\}.$$

注意到，所有纤维 $\mathcal{H}_b$ 都可以与 $\mathcal{H}_0$ 进行规范识别，因为 E 上的度量在 $\overline{X}$上是光滑的。因此，给定任意元素 $f d\vec{z} \in \mathcal{H}_b$，存在 X上的相对典范截面 $[F d\vec{z}]$，使得 $f d\vec{z} = \iota_{X_b}^* F d\vec{z}$。这里，$F d\vec{z}$是 $f d\vec{z}$作为“常截面”的延拓

$$F(b', \cdot) d\vec{z} := f d\vec{z} \quad \text{for all } b' \in B.$$

由于对于此类延拓，$(n, 1)$-形式 $\bar{\partial}(F d\vec{z}) \equiv 0$，我们看到 $[F d\vec{z}]$ 满足（4.2）中的条件。因此，对于所有 $b \in B$，取 $\Sigma_b = \mathscr{C}^\infty(\mathcal{H})_b$，我们看到 Σ_b在映射上的求值所得到的像就是 $\mathcal{H}_b$的全部。正如引言中所述，Ω上的诺伊曼算子在 $(0, 1)$-形式层面的紧性，并不是定理（1.1）成立所必需的。

(2) 令 X为 $n+m$维复流形 X 上的厄米全纯线丛，并令 $\tilde{\pi}\colon X \to B$ 为全纯浸没，其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 为单位球。取 $X \subset X$ 为区域 $X = \{\rho < 0\}$，其中 ρ 是定义在 X 上的光滑实值函数，满足对所有 $b \in B$，(i) $\rho|_{\tilde{\pi}^{-1}(b)}$ 在 $X_b := X \cap \tilde{\pi}^{-1}(b)$ 的闭包的某个邻域内是严格多重次调和函数；(ii) $d\rho(x) \neq 0$ 对所有 $x \in \partial X_b$成立。取 $\pi\colon X \to B$ 为映射 $\tilde{\pi}|_X$。于是，X. Wang 的工作（参见 [Wan17]）表明，$\mathcal{H}$ 可以赋予 BLS 场的结构。

(3) 令 $\widetilde{X} = B \times \mathbb{C}^n$ 其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 是一个区域，令 $E \to X$ 为配有非平凡度量 $e^{-\phi}$ 的平凡线丛，并令 $\tilde{\pi}\colon X \to B$ 为到第一个因子的投影。然后取 $X \subset X$ 为区域 $X = \{\rho < 0\}$，其中 ρ 是定义在 X 上的光滑实值函数，满足对所有 $b \in B$，(i) $\rho|_{\tilde{\pi}^{-1}(b)}$ 是多重次调和函数，且 (ii) $d\rho(x) \neq 0$ 对所有$x \in \partial X_b$成立。取 $\pi\colon X \to B$ 为映射 $\tilde{\pi}|_X$。

令 $\Sigma \to B$ 为如下的子茎丛。茎 Σ_b 由与相对典范截面 $[\tilde{p}_2^* f|_{\pi^{-1}(U)}]$ 相关联的 $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$ 的芽组成，其中 $f \in \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}(\Lambda^n, {}^0_{\mathbb{C}^n}))$，$U$ 是包含 b 的开集，且 $\tilde{p}_2\colon X \to \mathbb{C}^n$ 是到第二个因子的投影。由于 $\bar{\partial}[\tilde{p}_2^* f] \equiv 0$，可知这些截面满足 (4.2)。因此，要证明对于所有 $b \in B$，$\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，只需证明具有 f 整的 $(n, 0)$- 形式 $f d\vec{z}|_{X_b}$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密。证明方法与 [BL16，命题 4.1], 中的论证类似，现简述如下。对于每个 $b \in B$，区域 X_b 都有一个多重次调和定义函数，因此根据 Boas-Straube 的一个结果（见 [BS91]），对所有 $1 \leq q \leq n$，诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(p,q)}$ 都是全局正则的。这又意味着对所有 $b \in B$，边界上光滑的形式在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密。事实上，给定 $f \in \mathcal{H}_b$，令 $\{\chi_j\}$ 为一列在 X_b中具有紧支撑的截断函数，使得 $\chi_j f \to f$在 $\mathcal{L}_b$中。根据 $\mathcal{N}_{(n,1)\,b}$的全局正则性，形式 $P_b(\chi_j f)$ 在边界上光滑

到边界并

$$\|P_b(\chi_j f) - f\|_{\mathcal{H}_b} = \|P_b(\chi_j f - f)\|_{\mathcal{H}_b} \leq \|\chi_j f - f\|_{\mathcal{L}_b},$$

因此 $P(\chi_j f) \to f$属于 $\mathcal{H}_b$。由此，要证明 $\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，只需证明：对于所有在边界上光滑的形式 $f \in \mathcal{H}_b$，存在序列 $\{f_j\} \subset \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}(\Lambda^{n,\ \mathbb{C}^n}{}^0))$，使得 $f_j|_{X_b} \to f$ 属于 $\mathcal{H}_b$。将 f 延拓为一个在 $\mathbb{C}^n$ 中具有紧支撑的光滑形式 F。令$\rho_b := \rho|_{\widetilde{\pi}^{-1}(b)}$，并令 u_j 为满足 L^2-估计的 $\bar{\partial} u_j = \bar{\partial} F$ 的解

$$\int_{\mathbb{C}^n} |u_j|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV \leq C_1 \int_{\mathbb{C}^n} \left|\bar{\partial} F\right|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV.$$

那么 $f_j := F - u_j$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上是全纯的，并且由于 $\|u_j\|_{\mathcal{H}_b} \to 0$， $f_j|_{X_b} \to f$ 属于 $\mathcal{H}_b$。事实上

$$\begin{aligned}
\int_{X_b} |u_j|^2 e^{-\phi} dV &\leq C_2 \int_{X_b} |u_j|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV \\
&\leq C_2 \int_{\mathbb{C}^n} |u_j|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV \\
&\leq C_1 C_2 \int_{\mathbb{C}^n} \left|\bar{\partial} F\right|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV \\
&= C_1 C_2 \int_{\{\rho_b>0\}} \left|\bar{\partial} F\right|^2 e^{-j\max(\rho_b,0)+|z|^2} dV
\end{aligned}$$

当 $j \to \infty$ 时，最后一个量趋于零。

(4) 令 $\widetilde{X} = B \times \mathbb{C}^n$，其中 $B \subset \mathbb{C}^m$ 是一个区域，令 $E \to X$ 为带有一个$\widetilde{\ }$非平凡度量的平凡线丛，并令 $\widetilde{\pi}: X \to B$ 为投影到第一个因子的投影。取 $X \subset X$ 为一个边界光滑的区域，使得区域 $X_b := X \cap \widetilde{\pi}^{-1}(b) \subset \mathbb{C}^n$ 按照 [Str01] 的意义具有良好的 Stein 邻域基。令 $\pi: X \to B$ 为映射 $\widetilde{\pi}|_X$。根据 [Str01], 的结果，诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(p,q)}$ 是紧的，因此对于所有 $0 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ 都是全局正则的。取 $\Sigma \to B$ 为例 (3) 中的子茎丛，并沿用相同的论证，可知 Σ_b 的元素对所有 $b \in B$ 都满足 (4.2)。对于每个$b \in B$，根据 [LTS20，定理 1.5]， $\mathbb{C}^n$ 中的全纯形式在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密，因此 $\Sigma_b(b)$ 在 $\mathcal{H}_b$ 中稠密。

(5) 设 X 是一个 Stein 流形， $E \to X$ 是一个线丛。设 $X \subset X$ 是一个区域，使得对于每个 $b \in B$，纤维化 $X \to B$ 满足：(i) X_b 满足诺伊曼算子 $\mathcal{N}_b^{(0,1)}$ $\widetilde{\ }$作用于 (0, 1)-形式时是紧的；(ii) X_b 在 X_b中具有 Stein 区域邻域。令$\mathscr{C}^\infty(\mathcal{L})$为第 4.1 节中的光滑结构。令 $\Sigma \to B$ 为以下子茎丛。茎 Σ_b包含截面 $F \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}(K_{X/B} \otimes E)$的（等价类），其中 U是一个包含 b的开集，并且对于所有 $b' \in U$， $\iota_{X_{b'}}^* F$在 $\partial X_{b'}$上光滑。由于 F 是 $\pi^{-1}(U)$上的全纯扭曲相对典范截面，因此 F 满足 (4.2) 中的条件。 $\Sigma_b(b)$在 $\mathcal{H}_b$ 中的稠密性是 Shaw-Laurent-Thi´ebaut [LTS20，定理 1.5] 的一个结果。根据他们的定理，$K_{\widetilde{X}_b} \otimes E|_{\widetilde{X}_b} \to X_b$的整体截面$\sim$ $\sim F$ 在 $\mathcal{H}_b$中稠密。由于 X是 Stein，这类截面可延拓为 Λ^n、$\widetilde{X}^0 \otimes E \to \widetilde{X}$的全纯截面 $\widetilde{F}$。因此，$\left[\widetilde{F}|_{\pi^{-1}(U)}\right]$ 是 Σ_b的一个芽的代表元。

5. Curvature formula

5.1. 李导数的交换子。设 ξ、η 是复流形 Z 上的 (1, 0) 向量场，且 $E \to Z$ 是一个厄米全纯线丛。本节我们得到交换子 $\left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right]$ 作用于一个 E 值的 $(n, 0)$-形式 u时的以下公式。

$$\left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] u = \Theta^{E}_{\xi\overline{\eta}} u + L_{[\xi,\overline{\eta}]} u - \left[L^{0,1}_{\xi}, L^{1,0}_{\overline{\eta}}\right] u - \left[L^{0,1}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] u. \tag{5.1}$$

注意，(5.1) 中出现的所有算子都是局部的。为了进行局部研究，我们为线丛 E 引入一个局部全纯标架 e，并写作 $u = \varphi \otimes e$，其中 φ 是一个 $(n, 0)$-形式。若 τ 是 X 上的复向量场，则有

$$\begin{aligned} L_{\tau}(\varphi \otimes e) &= \tau \lrcorner \nabla(\varphi \otimes e) + \nabla((\tau \lrcorner \varphi) \otimes e) \\ &= \tau \lrcorner (d\varphi \otimes e + (-1)^{n} \varphi \wedge \nabla e) + d(\tau \lrcorner \varphi) \otimes e + (-1)^{n-1} (\tau \lrcorner \varphi) \wedge \nabla e \\ &= (\tau \lrcorner d\varphi) \otimes e + (-1)^{n} (\tau \lrcorner \varphi) \wedge \nabla e + \varphi \otimes (\tau \lrcorner \nabla e) + d(\tau \lrcorner \varphi) \otimes e + (-1)^{n-1} (\tau \lrcorner \varphi) \wedge \nabla e \\ &= L_{\tau} \varphi \otimes e + \varphi \otimes (\tau \lrcorner \nabla e). \end{aligned}$$

这里，对于作用在 E 值形式上的扭曲李导数（出现在等式左侧）以及通常的李导数（出现在等式右侧），我们使用了相同的记号。本小节中我们将继续采用这种不严谨的记号。同样，我们有

$$L^{1,0}_{\tau}(\varphi \otimes e) = L^{1,0}_{\tau} \varphi \otimes e + \varphi \otimes (\tau \lrcorner \nabla^{1,0} e) \tag{5.2}$$

$$L^{0,1}_{\tau}(\varphi \otimes e) = L^{0,1}_{\tau} \varphi \otimes e. \tag{5.3}$$

公式 (5.3) 源于这样一个事实： E 的陈联络是 ∇，因此 $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$，并且 $\tau \lrcorner \bar{\partial} e = 0$，因为 e 是线丛 E 的全纯截面。

在下面的计算中，我们反复使用公式 (5.3) 和 (5.2)。首先得到，

$$\begin{aligned} L^{1,0}_{\xi} L^{0,1}_{\overline{\eta}}(\varphi \otimes e) &= L^{1,0}_{\xi}(L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes e) \\ &= L^{1,0}_{\xi} L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes e + L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes (\xi \lrcorner \nabla^{1,0} e) \\ &= L^{1,0}_{\xi} L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes e + L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes \nabla^{1,0}_{\xi} e. \end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} L^{0,1}_{\overline{\eta}} L^{1,0}_{\xi}(\varphi \otimes e) &= L^{0,1}_{\overline{\eta}}(L^{1,0}_{\xi} \varphi \otimes e + \varphi \otimes (\xi \lrcorner \nabla^{1,0} e)) \\ &= L^{0,1}_{\overline{\eta}}(L^{1,0}_{\xi} \varphi \otimes e + \varphi \otimes \nabla^{1,0}_{\xi} e) \\ &= L^{0,1}_{\overline{\eta}} L^{1,0}_{\xi} \varphi \otimes e + L^{0,1}_{\overline{\eta}} \varphi \otimes \nabla^{1,0}_{\xi} e + \varphi \otimes \nabla^{0,1}_{\overline{\eta}} \nabla^{1,0}_{\xi} e. \end{aligned}$$

将这两个量相减，我们得到

$$\begin{aligned} \left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right](\varphi \otimes e) &= \left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] \varphi \otimes e - \varphi \otimes \nabla^{0,1}_{\overline{\eta}} \nabla^{1,0}_{\xi} e \\ &= \left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] \varphi \otimes e + \varphi \otimes \Theta^{E}_{\xi\overline{\eta}} e + \varphi \otimes \nabla_{[\xi,\overline{\eta}]} e \\ &= \left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] \varphi \otimes e + \varphi \otimes \Theta^{E}_{\xi\overline{\eta}} e + \varphi \otimes ([\xi, \overline{\eta}] \lrcorner \nabla e) \\ &= \left[L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}\right] \varphi \otimes e + \varphi \otimes \Theta^{E}_{\xi\overline{\eta}} e + L_{[\xi,\overline{\eta}]}(\varphi \otimes e) - (L_{[\xi,\overline{\eta}]} \varphi) \otimes e \\ &= \Theta^{E}_{\xi\overline{\eta}}(\varphi \otimes e) + L_{[\xi,\overline{\eta}]}(\varphi \otimes e) + \left([L^{1,0}_{\xi}, L^{0,1}_{\overline{\eta}}] \varphi - L_{[\xi,\overline{\eta}]} \varphi\right) \otimes e \end{aligned}$$

根据雅可比恒等式，对于 X 上的微分形式 ψ，我们有 $[L_\xi, L_{\overline{\eta}}]\psi = L_{[\xi,\overline{\eta}]}\psi$。因此我们得到

$$\begin{aligned}[L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi - L_{[\xi,\overline{\eta}]}\varphi &= [L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi - [L_\xi, L_{\overline{\eta}}]\varphi \\ &= [L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi - [L_\xi^{1,0} + L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0} + L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi \\ &= -[L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}]\varphi - [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}]\varphi - [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi \\ &= -[L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}]\varphi - [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是基于以下事实得出的：$L^{1,\ 0}_{\overline{\eta}}\varphi = L^{1,\ 0}_{\overline{\eta}} L^{1,\ 0}_{\xi}\varphi = 0$ 出于类型方面的原因。基于同样的原因，我们看到 $\overline{\eta} \lrcorner \nabla^{1,\ 0} e = 0$。结合这一事实以及方程 (5.2) 和 (5.3)，我们得到

$$[L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}](\varphi \otimes e) + [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}](\varphi \otimes e) = \left([L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}]\varphi\right) \otimes e + \left([L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi\right) \otimes e.$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}\left[L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}\right](\varphi \otimes e) &= \Theta^E_{\xi\overline{\eta}}(\varphi \otimes e) + L_{[\xi,\overline{\eta}]}(\varphi \otimes e) + \left([L_\xi^{1,0}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}]\varphi - L_{[\xi,\overline{\eta}]}\varphi\right) \otimes e \\ &= \Theta^E_{\xi\overline{\eta}}(\varphi \otimes e) + L_{[\xi,\overline{\eta}]}(\varphi \otimes e) - [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{1,0}](\varphi \otimes e) - [L_\xi^{0,1}, L_{\overline{\eta}}^{0,1}](\varphi \otimes e).\end{aligned}$$

这就是方程 (5.1)。

定理 5.4. 设 $(E, h) \to X \to B$ 如第 3.1 节所述。固定一个水平分布 $\theta^{1,\ 0} \subset T^{1,\ 0}_X$。设 σ, τ 是开集 U 上的全纯 (1, 0) 型向量场，其中该开集包含点 b；设 ξ_σ, ξ_τ 是它们关于分布 $\theta^{1,\ 0}$ 的水平提升。那么对于 $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \Sigma_b$，我们有

$$\left(\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b = \left(\Theta^E_{\xi_\sigma\overline{\xi}_\tau}\mathfrak{a}(\mathfrak{f}), \mathfrak{a}(\mathfrak{g})\right)_b - \sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle \bar{\partial}\xi_\sigma \lrcorner \mathfrak{a}(\mathfrak{f}) \wedge \overline{\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner \mathfrak{a}(\mathfrak{g})}, h\rangle + \int_{\partial X_b}\partial\bar{\partial}\rho(\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau)\{\mathfrak{a}(\mathfrak{f}), \mathfrak{a}(\mathfrak{g})\}dS,$$

其中，ρ 是 X 的定义函数，满足 $\rho_b := \rho|_{X_b}$ 是 ∂X_b 的定义函数，并经过归一化，使其在 ∂X_b 上满足 $|d\rho_b| = 1$；dS 是由 X_b 上的凯勒形式 ω_b 在 ∂X_b 上诱导的体积形式，即 $d\rho_b \wedge dS = dV_{\omega_b}|_{\partial X_b}$。

证明。设 u 和 v 是定义在 $\pi^{-1}(U)$ 上的 E 值 $(n, 0)$-形式，分别表示与 $\mathfrak{f}$ 和 $\mathfrak{g}$ 相关联的扭曲相对典范截面 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f})$ 和 $\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$。由于 σ、τ 是 U 上的全纯向量场，我们有 $[\sigma, \overline{\tau}] = 0$。因此，曲率 $\Theta^{\mathcal{L}^\theta}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f} &= \nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_\sigma \nabla^{\mathcal{L}^\theta(0,1)}_{\overline{\tau}}\mathfrak{f} - \nabla^{\mathcal{L}^\theta(0,1)}_{\overline{\tau}} \nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_\sigma \mathfrak{f} \\ &= \nabla^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}_\sigma \left(\mathfrak{i}\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right)\right) - \nabla^{\mathcal{L}^\theta(0,1)}_{\overline{\tau}} \left(\mathfrak{i}\left(L^{1,0}_{\xi_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right)\right) \\ &= \mathfrak{i}\left(L^{1,0}_{\xi_\sigma} L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right) - \mathfrak{i}\left(L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau} L^{1,0}_{\xi_\sigma}\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right) = \mathfrak{i}\left(\left[L^{1,0}_{\xi_\sigma}, L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau}\right]\mathfrak{a}(\mathfrak{f})\right).\end{aligned}$$

利用公式 (5.1)

$$\begin{aligned}\left(\Theta^{\mathcal{L}^\theta}_{\sigma\overline{\tau}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\right)_b &= \left(\left[L^{1,0}_{\xi_\sigma}, L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau}\right]u, v\right)_b \\ &= \sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle \Theta^E_{\xi_\sigma\overline{\xi}_\tau}u \wedge \overline{v}, h\rangle + \sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle L_{[\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]}u \wedge \overline{v}, h\rangle \\ &\quad - \sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle \left[L^{0,1}_{\xi_\sigma}, L^{1,0}_{\overline{\xi}_\tau}\right]u \wedge \overline{v}, h\rangle - \sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle \left[L^{0,1}_{\xi_\sigma}, L^{0,1}_{\overline{\xi}_\tau}\right]u \wedge \overline{v}, h\rangle. \qquad (5.5)\end{aligned}$$

我们分别处理最后一行中的每一项。先处理最后一项。注意，$\left[L^{0,\ 1}_{\xi_\sigma}, L^{0,\ 1}_{\overline{\xi}_\tau}\right] u$ 是一个取值于 E 的 $(n-1,1)$-形式，因此最后一项中的被积函数是一个 $(n-1,n+1)$-形式。因此，最后一项为零。

为简化第三项，注意到 $L^{0,\ 1}_{\xi_\sigma} L^{1,\ 0}_{\overline{\xi}_\tau} u = 0$ 出于类型方面的原因。因此

$$\begin{aligned}
-\int_{X_b} \langle \left[L^{0,1}_{\xi_\sigma}, L^{1,0}_{\overline{\xi}_\tau}\right] u \wedge \overline{v}, h\rangle &= \int_{X_b} \langle L^{1,0}_{\overline{\xi}_\tau} L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle \\
&= \int_{X_b} \langle L_{\overline{\xi}_\tau} L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle \\
&= \int_{X_b} L_{\overline{\xi}_\tau} \langle L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle - \langle L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{L^{0,1}_{\xi_\tau} v}, h\rangle \\
&= \overline{\tau} \int_{X_b} \langle L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle - \int_{X_b} \langle L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{L^{0,1}_{\xi_\tau} v}, h\rangle \\
&= -\int_{X_b} \langle L^{0,1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{L^{0,1}_{\xi_\tau} v}, h\rangle.
\end{aligned}$$

为了得到第二个等式，我们利用这样一个事实：$\langle L^{0,\ 1}_{\overline{\xi}_\tau} L^{0,\ 1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle$ 是一个 $(n-1,n+1)$-形式，因此其积分为零。第三个等式由方程（3.5）得出。最后一个等式源于这样一个事实：$\langle L^{0,\ 1}_{\xi_\sigma} u \wedge \overline{v}, h\rangle$ 是一个 $(n-1,n+1)$-形式，因此对所有接近 b 的 $\widetilde{b}$，其在纤维 $X_{\widetilde{b}}$ 上的积分均为零。

为了简化第二项，注意到 $[\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]$ 是一个垂直向量场，因此

$$\iota^*_{X_b}([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau] \lrcorner \nabla u) = \left([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]\Big|_{X_b}\right) \lrcorner \left(\iota^*_{X_b} \nabla u\right) = 0,$$

其中，最后一个等式成立是因为 $\nabla^{1,0} u$ 是一个 $(n+1,0)$-形式，并且 $\iota^*_{X_b} \bar{\partial} u = 0$ 作为 u 沿着 X_b是全纯的。同样的推理也表明 $\iota^*_{X_b} \nabla v = 0$。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} \langle L_{[\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]} u \wedge \overline{v}, h\rangle &= \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} \langle \nabla([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau] \lrcorner u) \wedge \overline{v}, h\rangle \\
&= \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} d\langle ([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau] \lrcorner u) \wedge \overline{v}, h\rangle + (-1)^n \langle [\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau] \lrcorner u \wedge \overline{\nabla v}, h\rangle \\
&= \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} d\langle ([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]^{1,0} \lrcorner u) \wedge \overline{v}, h\rangle \\
&= \sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_b} d\left([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]^{1,0} \lrcorner \langle u \wedge \overline{v}, h\rangle\right) \\
&= \int_{X_b} d\left([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]^{1,0} \lrcorner \{u, v\} dV_{\omega_b}\right) \\
&= \int_{\partial X_b} \partial \rho_b([\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]^{1,0}) \{u, v\} dS \\
&= \int_{\partial X_b} \partial \bar{\partial} \rho(\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau) \{u, v\} dS.
\end{aligned}$$

我们之前见过的关于最后一个等式的解释如下。由于 $[\xi_\sigma, \overline{\xi}_\tau]^{1,0}$ 是一个垂直向量场，因此有

$$\iota^*_{\partial X_b}\left(\left([\xi_\sigma,\overline{\xi}_\tau]^{1,0}\Big|_{X_b}\right)\lrcorner\partial\rho_b\right)=\iota^*_{\partial X_b}\left(\left([\xi_\sigma,\overline{\xi}_\tau]^{1,0}\Big|_{X_b}\right)\lrcorner\iota^*_{X_b}\partial\rho\right)=\iota^*_{\partial X_b}\iota^*_{X_b}\left([\xi_\sigma,\overline{\xi}_\tau]^{1,0}\lrcorner\partial\rho\right)$$
$$=\iota^*_{X_b}\iota^*_{\partial X}\partial\bar\partial\rho(\xi_\sigma,\overline{\xi}_\tau),$$

其中 最后一个等式成立，是因为 ξ_σ、ξ_τ 是切于 ∂X 的 (1, 0) 型向量场 .

将这些计算应用于方程 (5.5) 右端的各项，即可得到所需的公式。□

引理 5.6。设 $(E,h)\to X\to B$ 如定理 5.4 中所述。假设 $\mathcal{N}_b^{(0,2)}\colon L^2_{0,\ 2}(X_b)\to L^2_{0,\ 2}(X_b)$ 是全局正则的。那么，对于 B 上的任意全纯向量场 τ 以及 X 上任意取值于 E 的 $(n,0)$-形式 u，存在一个水平提升 ξ_τ，使得形式 $\iota^*_{X_b}(\partial\xi_\tau\lrcorner u)$ 是本原的。

证明。固定关于分布 θ 的 τ 的一个初步提升 ξ^θ_τ。那么 $\bar\partial\xi^\theta_\tau$ 是一个光滑的取值于垂直向量场的 (0, 1)-形式。于是我们有

$$\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner(\omega\wedge u))=\bar\partial(\xi^\theta_\tau\big|_{X_b})\lrcorner\iota^*_{X_b}(\omega\wedge u)=0,$$

其中，最后一个等式是由 $\omega\wedge u$ 是一个取值于 E 的 $(n+1,1)$-形式这一事实得出的。因此，我们得到

$$\iota^*_{X_b}((\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)\wedge u)=-\iota^*_{X_b}(\omega\wedge(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner u))=-\omega_b\wedge\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner u).$$

要证明 $\iota^*_{X_t}(\partial\xi_\tau\lrcorner u)$ 是本原的，只需证明 $\iota^*_{X_b}(\partial\xi_\tau\lrcorner\omega)=0$。我们将在与 ∂X_b 相切的 ξ^θ_τ 上添加一个垂直向量场，以得到所需的提升。注意

$$\bar\partial(\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)=\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega-\xi^\theta_\tau\lrcorner\bar\partial\omega=\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega,$$

因此，$\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)=\iota^*_{X_b}\bar\partial(\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)=\bar\partial\iota^*_{X_b}(\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)$。于是，$\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)$ 是 $\bar\partial$-恰当的 (0, 2) 型形式，定义在 X_b 上，因此与调和 (0, 2) 型形式正交。由 $\mathcal{N}_b^{(0,2)}$ 的全局正则性可知，(0, 1)-形式$\beta=\bar\partial^\star\mathcal{N}_{(0,2)}$ $\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)$ 在 X_b 的边界上光滑，并满足 $\bar\partial\beta=\iota^*_{X_b}(\bar\partial\xi^\theta_\tau\lrcorner\omega)$。

令 η 为 X_b 上的 (1,0)-向量场，它由 β 通过升指标得到，即 $\beta=\eta\lrcorner\omega_b$。我们断言 η与 ∂X_b相切。设在 ∂X_b上的某一点的局部坐标中，我们写作 $\beta=\beta_{\overline{j}}d\overline{z}^j$。于是有

$$\beta_{\overline{j}}d\overline{z}^j=\eta^i\frac{\partial}{\partial z^i}\lrcorner\left[(\omega_b)_{l\overline{k}}dz^l\wedge d\overline{z}^k\right]=\eta^l(\omega_b)_{l\overline{k}}d\overline{z}^k.$$

因此，我们有 $\eta^i=\omega_b^{i\overline{k}}\beta_{\overline{k}}$ 以及

$$\eta\rho=\eta\rho_b=\omega_b^{i\overline{k}}\beta_{\overline{k}}\frac{\partial\rho_b}{\partial z^i}=0,$$

，其中最后一个等式是 $\beta\in$Dom($\partial^\star$) 的条件。现在，η 延拓为 X上的向量场 $\widetilde{\eta}$，且与 ∂X 相切，而 $\xi_\tau=\xi^\theta_\tau-\widetilde{\eta}$ 就是所需的提升。□

定理 1.1 的证明。由第 4.3.1 节中的例 (5) 可知，$(\mathcal{H},\Sigma,\mathcal{L})$ 是一个 iBLS 场。令 $\mathfrak{f}_1,\dots,\mathfrak{f}_m\in\Sigma_b$，并令 $\tau_1,\dots,\tau_m$ 是 U 上的全纯 (1, 0) 型向量场。令 u_j 为一个 E 值的 $(n,0)$-形式，表示 $1\le j\le m$ 的扭曲相对典范截面 $\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_j)$。由于 $\mathcal{H}$ 的曲率与提升无关，根据引理 5.6，我们可以选取向量场 τ_j 在 B 上的一个水平提升 ξ_{τ_j}，使得 $\iota^*_{X_b}(\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j)$ 对于 $j=1,\dots,m$ 在 X_b 上是本原的。因此，

$$-\sum_{j,k=1}^m\sqrt{-1}^{n^2}\int_{X_b}\langle\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j\wedge\overline{\bar\partial\xi_{\tau_k}\lrcorner u_k},h\rangle=\sum_{j,k=1}^m\left(\bar\partial\xi_{\tau_j}\lrcorner u_j,\bar\partial\xi_{\tau_k}\lrcorner u_k\right)_b.$$

回忆一下，

$$\sum_{j,k=1}^{m}\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\tau_j,\overline{\tau}_k}\mathfrak{f}_j,\mathfrak{f}_k\right)_b=\sum_{j,k=1}^{m}\left(\Theta^{\mathcal{L}}_{\tau_j,\overline{\tau}_k}\mathfrak{f}_j,\mathfrak{f}_k\right)-\sum_{j,k=1}^{m}\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau_j}\mathfrak{f}_j,\mathcal{P}^{\perp}\nabla^{\mathcal{L}}_{\tau_k}\mathfrak{f}_k\right)_b.$$

因此，由定理 5.4 和方程 (4.18) 可得

$$\sum_{j,k=1}^{m}\left(\Theta^{\mathcal{H}}_{\tau_j\overline{\tau}_k}\mathfrak{f}_j,\mathfrak{f}_k\right)_b\geq\sum_{j,k=1}^{m}\int_{\partial X_b}\partial\bar{\partial}\rho(\xi_{\tau_j},\overline{\xi}_{\tau_k})\{u_j,u_k\}dS_b\geq 0,$$

其中，最后一个不等式由 ∂X 是伪凸的这一事实得出。至此，证明完成。

6. Exact formulas for the second fundamental form

本节在额外假设 X 是 Stein 流形的条件下，推导第二基本形式的精确公式。以下命题用到了关于 X 的 Stein 假设。

命题 6.1. 设 D 是 n 维 Stein 流形 M 中的一个有界伪凸域，且 $E\to M$ 是一个厄米全纯线丛。诺伊曼算子 $N_{(n,0)}:\Gamma(D,L^2(\Lambda^{n,0}_D\otimes E))\to\Gamma(D,L^2(\Lambda^{n,0}_D\otimes E))$ 满足

$$Im(N^{(n,0)})\subset Dom(\Box)\quad and\quad N^{(n,0)}\Box=\Box N^{(n,0)}=Id-P,$$

其中 P 是伯格曼投影。我们还有

$$u=\bar{\partial}^{\star}\bar{\partial}N^{(n,0)}u+Pu\quad for\ all\ u\in\Gamma(D,L^2(\Lambda^{n,0}_D\otimes E)) \tag{6.2}$$

$$\bar{\partial}N^{(n,0)}u=N^{(n,1)}\bar{\partial}u\quad for\ all\ u\in Dom(\bar{\partial})\subset\Gamma(D,L^2(\Lambda^{n,0}_D\otimes E)) \tag{6.3}$$

$$\bar{\partial}^{\star}N^{(n,1)}u=N^{(n,0)}\bar{\partial}^{\star}u\quad for\ al\ u\in Dom(\bar{\partial}^{\star})\subset\Gamma(D,L^2(\Lambda^{n,1}_D\otimes E)) \tag{6.4}$$

$$N^{(n,0)}=\bar{\partial}^{\star}N^{(n,1)}N^{(n,1)}\bar{\partial}. \tag{6.5}$$

该命题取自 [CS01，定理 4.4。3]尽管该定理针对 $\mathbb{C}^n$中区域上的平凡线丛陈述，但其证明可以调整为适用于 Stein 流形中区域上的一般线丛情形。

~命题 6.6（Berndtsson 的代表元选取）。设 E、X、X、B如第 3.1 节所述。~进一步假设 X是 Stein 流形。假设作用于 $E|_{X_b}$-值（n，q）-形式的诺伊曼算子 N^n、$_b{}^q$是全局正则的，即它将空间 $\Gamma(\overline{X}_b,\ \mathscr{C}^{\infty}(E|_{X_b}\otimes\Lambda^n,\ {}^{q}_{X_b}))$ 映射到自身。设 $f\in\Gamma(X,\ \mathscr{C}^{\infty}(K_{X/B}\otimes E))$ 是一个扭曲相对典范截面，使得 $\iota_b f\in\mathcal{H}_b$。那么，对于 B 上的任意全纯 (1, 0) 型向量场 τ 以及将 τ 提升到 X 的任意水平提升 ξ_τ，存在 f的一个代表元 $u\in\Gamma(\overline{X},\ \mathscr{C}^{\infty}(\Lambda^n,\ {}_{X}{}^{0}\otimes E))$，使得 $\iota^*_{X_b}(\xi_\tau\lrcorner\nabla^1,\ {}^0u)$ 是 X_b上的全纯 $E|_{X_b}$-值（n，0）-形式

证明。注意，$\iota^*_{X_b}(\xi_\tau\lrcorner\nabla^{1,\ 0}u)$ 的全纯性与提升 ξ_τ 无关。为此，设 ξ^1_τ 和 ξ^2_τ 是向量场 τ 的两个提升。那么 $v_\tau=\xi^1_\tau-\xi^2_\tau$ 是 X 上的垂直向量场。于是

$$\iota^*_{X_b}(v_\tau\lrcorner\nabla^{1,0}u)=v_\tau|_{X_b}\lrcorner\iota^*_{X_b}(\nabla^{1,0}u)=0,$$

因为 $\nabla^{1,\ 0}u$是一个（$n+1$，0）-形式，所以 $\bar{\partial}\iota^*_{X_b}(\xi^1_\tau\lrcorner\nabla^{1,\ 0}u)=\bar{\partial}\iota^*_{X_b}(\xi^2_\tau\lrcorner\nabla^{1,\ 0}u)$。

令 $\widetilde{u}$为扭曲相对典范截面 f的一个初始代表元。令（t^1，…，t^m）为以 $b\in B$为中心的局部坐标。于是我们可以写成

$$\nabla^{1,0}\widetilde{u}=dt^k\wedge\mu_k,$$

其中 μ_k 是定义在 X上的取值于 E的$(n,0)$-形式。 f 的任意其他代表元 u 都具有如下形式： $u=\widetilde{u}+dt^k\wedge w_k$，其中 w_k是取值于 E的$(n-1,0)$-形式。我们计算

$$\nabla^{1,0}u=dt^k\wedge(\mu_k-\nabla^{1,0}w_k).$$

因此，

$$\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\nabla^{1,0}u)=\tau^k(b)\iota_{X_b}^*(\mu_k-\nabla^{1,0}w_k),$$

其中 $\tau=\tau^k\frac{\partial}{\partial t^k}$。因此，要使 $\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\nabla^{1,0}u)$ 全纯，我们希望对所有 k，都有 $P_b^\perp\iota_{X_b}^*(\mu_k-\nabla^{1,0}w_k)=0$。令 W_k为取值于 $E|_{X_b}$的$(n-1,0)$-形式

$$W_k:=\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_b}\bar\partial N_b^{(n,0)}P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k.$$

Then

$$\begin{aligned}\nabla^{1,0}W_k&=\sqrt{-1}\nabla^{1,0}\Lambda_{\omega_b}\bar\partial N_b^{(n,0)}P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k\\&=\sqrt{-1}[\nabla^{1,0},\Lambda_{\omega_b}]\bar\partial N_b^{(n,0)}P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k\\&=\bar\partial^\star\bar\partial N_b^{(n,0)}P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k\\&=P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k.\end{aligned}$$

这里有几点说明。由于 $\iota_{X_b}^*\mu_k$是一个光滑延伸至边界的扭曲形式，且 $N_{(n,1)b}$是全局正则的，因此我们看到 $P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k$光滑延伸至边界。因此，扭曲形式 $P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_k$属于 Dom($\bar\partial$)。恒等式 $N_{(b}^{n}=\bar\partial^\star N_{,0)(n,1)}$ $_b\quad N_{(b}^{n}\bar\partial_{,1)}$表明 $N_b^{(n,0)}$是全局正则的。因此，扭曲形式 $\bar\partial N_{(b}^{n}\quad P_b^\perp\iota_{X_b}^*\mu_{k,0)}$光滑延伸至 X_b的边界，且属于 Dom $\bar\partial^\star$。回想一下，对于这类形式 $\partial^\star=\vartheta$，有$^-$ $^-$，其中 ϑ 表示 ∂的形式伴随算子。结合 K¨ahler 恒等式 $\sqrt{-1}[\nabla^{1,0},\Lambda_{\omega_b}]=\vartheta$，即可得到倒数第二个等式。

因此， W_k 在 $\overline{X}_b$ 上是光滑的。取 w_k 为 W_k 在 $\overline{X}$上的任意光滑延拓，我们便可知$u=\widetilde{u}+dt^k\wedge w_k$ 就是所需的代表元。□

注 6.7. 再多做一些工作，我们本可以选择一个代表元 u，使得 $\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\nabla^{1,0}u)$是$^-$全纯的，并且 $\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\partial u)$是本原的。选择具有这两个性质的代表元这一做法归功于 B. Berndtsson（另见 [Ber09], 以及 [Var22]）。由于我们并不使用形式 $\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\partial u)$的本原性，因此省去了这些额外工作。

定理 6.8. 设$(E,h)\to X\to B$如命题 6.6 所述。设 $\sigma,\tau\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,0}_{B})_b$为全纯 (1, 0) 型向量场的芽，并设 ξ_σ,ξ_τ为它们的水平提升。设 $\mathfrak{f},\mathfrak{g}\in\Sigma_b$，其中 $\mathfrak{f}(b)=\iota_{X_b}^*u$且 $\mathfrak{g}(b)=\iota_{X_b}^*v$，对于取值于 E的$(n,0)$-形式 u和 v。那么

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}^\perp\nabla_\sigma^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{f},\mathcal{P}^\perp\nabla_\tau^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{g}\right)_b=&-\frac{1}{2}\left(N_b^{(n,1)}\iota_{X_b}^*\bar\partial\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u),\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\Theta^E)v+\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_\tau\lrcorner v)\right)_b\\&-\frac{1}{2}\left(\iota_{X_b}^*(\xi_\sigma\lrcorner\Theta^E)u+\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_\sigma\lrcorner u),N_b^{(n,1)}\iota_{X_b}^*\bar\partial\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner v)\right)_b.\end{aligned}$$

证明。根据命题 3.6

$$\bar\partial\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)=-\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\Theta^E)v-\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_\tau\lrcorner v).\tag{6.9}$$

注意

$$P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma \lrcorner u) = \bar\partial^\star N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u).$$

根据命题 6.6，我们可以取 u 为一个 E 值的 $(n, 0)$-形式，使得 $\iota_{X_b}^*(\xi_\sigma\lrcorner\nabla^{1,\ 0}u)$ 是 $K_{X_b}\otimes E|_{X_b}\to X_b$ 的全纯截面。于是

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla_\sigma^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^{\perp}\nabla_\tau^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{g}\right)_b &= \left(P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\sigma}^{1,0}u), P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)\right)_b\\
&= \left(P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(\nabla^{1,0}\xi_\sigma\lrcorner u), P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)\right)_b\\
&= \left(\bar\partial^\star N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u), P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)\right)_b\\
&= \left(N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u), \bar\partial P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)\right)_b\\
&= \left(N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u), \bar\partial\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}v)\right)_b\\
&= -\left(N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\sigma\lrcorner u), \iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\Theta^E)v + \iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_\tau\lrcorner v)\right)_b, \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (6.9) 得出。

类似地，我们可以取 v 为一个 E 值的 $(n, 0)$-形式，使得 $\iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\nabla^{1,\ 0}v)$ 是 $K_{X_b}\otimes E|_{X_b}\to X_b$ 的全纯截面，并证明

$$\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla_\sigma^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^{\perp}\nabla_\tau^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{g}\right)_b = -\left(\iota_{X_b}^*(\xi_\sigma\lrcorner\Theta^E)u + \iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\bar\partial\xi_\sigma\lrcorner u), N_b^{(n,1)}\bar\partial\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner v)\right)_b. \qquad (6.11)$$

将公式 (6.10) 和 (6.11) 相加，得到所需公式。 □

6.1. 第二基本形式的另一个精确公式。

定理 6.12. 设 $(E, h)\to X\to B$ 如命题 6.6 中所述。进一步假设，对所有 $b\in B$，作用于 X_b 上的 (0, 2) 型形式的诺伊曼算子 $\mathcal{N}_{(0,2)\,b}$ 都是全局正则的。设 $\tau\in\mathscr{C}^\infty(T^{1,\ 0}_B)_b$是全纯 (1, 0) 型向量场的一个芽，并设 ξ_τ 是它的原始水平提升。设 $\mathfrak{f}\in\Sigma_b(b)$，其中 $\mathfrak{f}(b) = \iota_{X_b}^*u$ 是一个取值于 E 的 $(n, 0)$ 型形式 u。那么

$$\left\|P_b^{\perp}\nabla_\tau^{\mathcal{L}^\theta(1,0)}\mathfrak{f}\right\|_b^2 = \left(\alpha, \iota_{X_b}^*(\xi_\tau\lrcorner\Theta^E)u\right)_b + \left(\bar\partial\Lambda_{\omega_b}\alpha, \iota_{X_b}^*(\bar\partial\xi_\tau\lrcorner u)\right)_b + \int_{\partial X_b}\left\{\iota_{X_b}^*(\overline{\xi}_\tau\lrcorner\partial\bar\partial\rho)\wedge\Lambda_{\omega_b}\alpha, u\right\}dS_b,$$

其中 $\alpha := \sqrt{-1}N_{(b}{}^{n}\ \ \iota_{X_b}^*\bar\partial\nabla^1{}_{,1),}{}^0(\xi_\tau\lrcorner u)$，且 $N_b^{(n,1)}$ 是作用于取值于 $E|_{X_b}$ 的 $(n, 1)$ 型形式的诺伊曼算子。

证明。由命题 6.6 可知，我们可以取 u 为一个取值于 E 的 $(n, 0)$ 型形式，使得 $\iota_{X_b}^*(\xi_\sigma\lrcorner\nabla^{1,0}u)$ 是 X_b 上取值于 E 的全纯形式。那么

$$\left(\mathcal{P}^{\perp}\nabla_\tau^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{f}, \mathcal{P}^{\perp}\nabla_\tau^{\mathcal{L}(1,0)}\mathfrak{f}\right)_b = \left(P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}u), P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(L_{\xi_\tau}^{1,0}u)\right) = \left(P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(\nabla^{1,0}\xi_\tau\lrcorner u), P_b^{\perp}\iota_{X_b}^*(\nabla^{1,0}\xi_\tau\lrcorner u)\right).$$

根据我们对 u 的选择以及 (6.2)

$$\begin{aligned}
P^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u) &= \bar\partial^\star\bar\partial N^{(n,0)}P^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u)\\
&= \vartheta\bar\partial N^{(n,0)}P^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u)\\
&= \sqrt{-1}[\nabla^{1,0}, \Lambda_{\omega_b}]\bar\partial N^{(n,0)}P^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u)\\
&= \sqrt{-1}\nabla^{1,0}\Lambda_{\omega_b}N^{(n,1)}\bar\partial P^{\perp}\iota_{X_b}^*\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u)\\
&= \sqrt{-1}\nabla^{1,0}\Lambda_{\omega_b}N^{(n,1)}\iota_{X_b}^*\bar\partial\nabla^{1,0}(\xi_\tau\lrcorner u).
\end{aligned}$$

第二个等式成立，因为 $\bar{\partial} N_{(n,0)} P^{\perp} \iota_{X_b}^* \nabla^{1,0}(\xi_\tau \lrcorner u)$ 是 Dom($\bar{\partial}^*$) 中的光滑形式。第三个等式由 K¨ahler 恒等式 $\sqrt{-1}[\nabla^{1,0}, \Lambda_{\omega_b}] = \underline{\vartheta}$ 得出，而倒数第二个等式由 (6.3) 得出。令 $\alpha := \sqrt{-1} N^{(n,1)} \iota_{X_b}^* \bar{\partial} \nabla^{1,0}(\xi_\tau \lrcorner u)$。于是,

$$
\begin{aligned}
&\big(P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u), P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)\big) \\
&= c_n \int_{X_b} \langle P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u) \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \\
&= c_n \int_{X_b} \langle \nabla^{1,0} \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \\
&= c_n \int_{X_b} \partial \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle + (-1)^n \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\bar{\partial} P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \\
&= c_n \int_{\partial X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle + (-1)^n c_n \int_{X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\bar{\partial} \iota_{X_b}^* (L_{\xi_\tau}^{1,0} u)}, h \rangle. \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

关于 ∂X_b

$$
\begin{aligned}
\langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle &= \left\{ d\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= \left\{ \partial \rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b = 0,
\end{aligned}
$$

因为 $\partial \rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b} \alpha = 0$ 在 ∂X_b 上是满足 $\alpha \in$ Dom(∂^*) 的条件。因此，(6.13) 中的边界积分为零。

将 (6.9) 代入 (6.13) 得

$$
\begin{aligned}
&\big(P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u), P_b^{\perp} \iota_{X_b}^* (\nabla^{1,0} \xi_\tau \lrcorner u)\big) \\
&= (-1)^{n-1} c_n \int_{X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u}, h \rangle + c_n \int_{X_b} (-1)^{n-1} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b^*} \nabla^{1,0} (\bar{\partial} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \\
&= (-1)^{n-1} c_n \int_{X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u}, h \rangle + c_n \int_{X_b} \bar{\partial} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b}^* (\bar{\partial} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \\
&\quad - c_n \int_{X_b} \langle \bar{\partial} \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b}^* (\bar{\partial} \xi_\tau \lrcorner u)}, h \rangle \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

利用扭曲的（$n, 1$）-形式上的恒等式 $L_{\omega_b} \Lambda_{\omega_b} = [L_{\omega_b}, \Lambda_{\omega_B}] =$Id，我们将（6.14）右边的第一项写为

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n-1} c_n \int_{X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u}, h \rangle &= (-1)^{n-1} c_n \int_{X_b} \langle \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{L_{\omega_b} \Lambda_{\omega_b} \iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u}, h \rangle \\
&= -\sqrt{-1} c_{n-1} \int_{X_b} \langle \omega_b \wedge \Lambda_{\omega_b} \alpha \wedge \overline{\Lambda_{\omega_b} \iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u}, h \rangle \\
&= \big(\Lambda_{\omega_b} \alpha, \Lambda_{\omega_b} \iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u\big)_{\mathcal{H}_b} \\
&= \big(L_{\omega_b} \Lambda_{\omega_b} \alpha, \iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u\big)_{\mathcal{H}_b} = \big(\alpha, \iota_{X_b}^* (\xi_\tau \lrcorner \Theta^E) u\big)_{\mathcal{H}_b}.
\end{aligned}
$$

（6.14）右边的第二项化简为对 X_b 边界的积分

$$c_n \int_{X_b} \bar{\partial}\langle \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, h\rangle = c_n \int_{\partial X_b} \langle \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, h\rangle. \tag{6.15}$$

我们使用 Morrey技巧来简化这个边界积分。由于 ξ_τ 与 ∂X 相切，我们可以写成

$$\xi_\tau \lrcorner \partial\rho = r\rho \tag{6.16}$$

在 ∂X 附近，对于某个光滑正函数 r。对等式 (6.16) 两边应用 $\bar{\partial}$，得到

$$\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner \partial\rho - \xi_\tau \lrcorner \bar{\partial}\partial\rho = \rho\bar{\partial}r + r\bar{\partial}\rho. \tag{6.17}$$

由于 $\partial\xi_\tau$ 是竖直的，而 $\partial\rho \wedge u$ 是一个 $(n+1, 0)$-形式，我们有

$$0 = \iota^*_{X_b}\left(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner (\partial\rho \wedge u)\right) = \iota^*_{X_b}\left((\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner \partial\rho) \wedge u - \partial\rho \wedge (\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)\right). \tag{6.18}$$

将等式 (6.17) 两边与 u 做楔积，并利用 (6.18) 将其限制在纤维 X_b 上，我们得到

$$\iota^*_{X_b}\left((\xi_\tau \lrcorner \bar{\partial}\partial\rho) \wedge u + \rho\bar{\partial}r \wedge u + r\bar{\partial}\rho \wedge u - \partial\rho \wedge (\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)\right) = 0. \tag{6.19}$$

在 ∂X_b 上，(6.15) 右侧的被积函数可简化为

$$\begin{aligned}
c_n\langle \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, h\rangle &= c_n \left\{ d\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= c_n \left\{ \bar{\partial}\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= c_n(-1)^{n-1} \left\{ \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\partial\rho_b \wedge \iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= c_n(-1)^{n-1} \left\{ \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\partial\rho \wedge (\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u))}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= (-1)^{n-1} c_n \left\{ \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}((\xi_\tau \lrcorner \bar{\partial}\partial\rho) \wedge u + r\bar{\partial}\rho \wedge u)}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= c_n \left\{ \iota^*_{X_b}(\overline{\xi}_\tau \lrcorner \partial\bar{\partial}\rho) \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{u}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b + c_n \left\{ r\partial\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{u}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b,
\end{aligned}$$

其中，倒数第二个等式由 (6.19) 得出，因为 $\rho|_{\partial X_b} = 0$。因此，方程 (6.15) 化简为

$$\begin{aligned}
&c_n \int_{\partial X_b} \langle \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau \lrcorner u)}, h\rangle \\
&= c_n \int_{\partial X_b} \left\{ \iota^*_{X_b}(\overline{\xi}_\tau \lrcorner \partial\bar{\partial}\rho) \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{u}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b + c_n \int_{\partial X_b} \left\{ r\partial\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha \wedge \overline{u}, \frac{\omega_b^n}{n!} \right\} dS_b \\
&= \int_{\partial X_b} \left\{ \iota^*_{X_b}(\overline{\xi}_\tau \lrcorner \partial\bar{\partial}\rho) \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha, u \right\} dS_b.
\end{aligned}$$

这里，最后一个等式是由以下事实得出的：$\alpha = \sqrt{-1}N_b^{(n,1)}\overline{\iota^*_{X_b}\bar{\partial}\nabla^{1,0}(\xi_\tau \lrcorner u)} \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}^\star)$，且 $\partial\rho_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha = 0$ 是光滑 $(n, 1)$-形式属于 $\mathrm{Dom}(\partial^\star)$ 的条件。

为简化 (6.14) 右侧的第三项，我们按照引理 5.6 选取一个提升 ξ_τ，使得 $\iota^*_{X_b}(\partial\xi_\tau \lrcorner u)$ 是本原的。注意，$\partial\Lambda_{\omega_b}\alpha$ 是本原的。事实上，由于 $\partial\omega_b = 0$，我们有

$$\omega_b \wedge \bar{\partial}\Lambda_{\omega_b}\alpha = \bar{\partial}(\omega_b \wedge \Lambda_{\omega_b}\alpha) = \bar{\partial}L_{\omega_b}\Lambda_{\omega_b}\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0,$$

因为 $L_{\omega_b}\Lambda_{\omega_b}=$ 是作用于 E-值 $(n,1)$-形式上的恒等映射，且 $\alpha\overline{=}\sqrt{-1}\bar{\partial}N^{n,\ 0}_{\ b}\iota^*_{X_b}\nabla^{1,\ 0}(\xi_\tau\lrcorner u)$。因此我们有

$$-c_n\int_{X_b}\langle\bar{\partial}\Lambda_{\omega_b}\alpha\wedge\overline{\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau\lrcorner u)},h\rangle=\int_{X_b}\{\bar{\partial}\Lambda_{\omega_b}\alpha,\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau\lrcorner u)\}dV_{\omega_b}=\left(\bar{\partial}\Lambda_{\omega_b}\alpha,\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau\lrcorner u)\right)_{\mathcal{H}_b}.$$

综上所述，我们得到

$$\left\|P_b^{\perp}L^{1,0}_{\xi_\tau}u\right\|^2_{\mathcal{H}_b}=\left(\alpha,\iota^*_{X_b}(\xi_\tau\lrcorner\Theta^E)u\right)_{\mathcal{H}_b}+\left(\bar{\partial}\Lambda_{\omega_b}\alpha,\iota^*_{X_b}(\bar{\partial}\xi_\tau\lrcorner u)\right)_{\mathcal{H}_b}+\int_{\partial X_b}\left\{\iota^*_{X_b}(\overline{\xi}_\tau\lrcorner\partial\bar{\partial}\rho)\wedge\Lambda_{\omega_b}\alpha,u\right\}dS_b.$$

□

References

[Ber09] Bo Berndtsson. 与全纯纤维化相关的向量丛的曲率。《数学年刊》（第2辑），169(2):531–560，2009年。[Ber11] Bo Berndtsson. 直像丛的严格正性与非严格正性。《数学杂志》，269(3-4):1201–1218，2011年。[BL16] Bo Berndtsson 和 L´aszl´o Lempert. 一种具有锐利估计的 Ohsawa–Takegoshi 定理证明。《日本数学会杂志》，68(4):1461–1472，2016年。[BS91] Harold P Boas 和 Emil J Straube. 定义函数在边界上为多重次调和的区域上的 $\overline{\partial}$诺伊曼算子索伯列夫估计。《数学杂志》，206(1):81–88，1991年。[CS01] So-Chin Chen 和 Mei-Chi Shaw. 多个复变量中的偏微分方程，AMS/IP 高等数学研究第19卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛；国际出版社，波士顿，马萨诸塞州，2001年。[Huy05] Daniel Huybrechts. 复几何。Universitext。施普林格出版社，柏林，2005年。[KN65] J. J. Kohn 和 L. Nirenberg. 非强制边值问题。《纯粹与应用数学通讯》，18:443–492，1965年。[LS14] L´aszl´o Lempert 和 R´obert Sz˝oke. 直像、希尔伯特空间场与几何量子化。《数学物理通讯》，327(1):49–99，2014年。[LTS20] Christine Laurent-Thi´ebaut 和 Mei-Chi Shaw. 通过 Dolbeault 上同调进行全纯逼近。《数学杂志》，296(3-4):1027–1047，2020年。[Str01] Emil J. Straube. 良好的 Stein 邻域基与 $\overline{\partial}$诺伊曼问题的正则性。《伊利诺伊数学杂志》，45(3):865–871，2001年。[Str10] Emil J. Straube. 关于 $\mathscr{L}^2$索伯列夫理论与 $\overline{\partial}$诺伊曼问题的讲座。ESI 数学与物理讲座。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2010年。[Var22] Dror Varolin. 与向量丛真全纯族相关的 Berndtsson-Lempert-Sz˝oke 场。arXiv:2201.12802，2022年。[Wan17] Xu Wang. 与伪凸域族相关的曲率公式。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），67(1):269–313，2017年。