arXiv:2302.04872v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Feb 2023

具有漂移的从属分数布朗运动的反常扩散、非高斯性与非遍历性

Yingjie Liang，[1, 2, *] Wei Wang，[2, †] 和 Ralf Metzler[2, 3, ‡]
[1]河海大学力学与材料学院，中国南京 *211100*
[2]波茨坦大学物理与天文学研究所，德国波茨坦-戈尔姆 *14476*
[3]亚太理论物理中心，大韩民国浦项 *37673*
(日期：2023年2月13日)

本文研究无序介质中具有长程相关增量的粒子在外部漂移作用下的随机运动：粒子在运动阶段会间歇性地被固定（俘获阶段）。具体而言，我们考虑俘获事件的持续时间服从无标度分布，且平均俘获时间发散的情形。我们利用带有恒定驱动力的分数布朗运动（FBM）构建这一过程，并通过从属化技术引入俘获效应，将可观测的“实际时间”与“操作时间”联系起来。我们推导了该过程的统计性质，例如非高斯性和非遍历性，并分别考察系综平均和单条轨迹的时间平均。对于概率密度函数、偏度、峰度，以及系综平均和时间平均的均方位移，我们通过大量模拟验证了理论结果，二者吻合良好。我们特别着重比较存在和不存在漂移的情形。

I. 引言

布朗运动（正常扩散）的特征是示踪粒子的均方位移（MSD）与时间呈线性关系 [1–4]。此外，位移的概率密度函数（PDF）服从高斯分布。此类正常扩散的出现依赖于以下三个条件：（i）存在有限的相关时间，经过该时间后，各个位移彼此独立；（ii）位移服从相同分布；（iii）位移的二阶矩有限。与此相反，反常扩散可能在上述任一条件不满足时出现，已在多种系统中被广泛观察到，涵盖软物质和生物物质、凝聚态物质，以及金融市场和地球物理系统 [5–11]。在反常扩散中，均方位移遵循幂律形式

$$\langle x^2(t)\rangle \sim K_\alpha t^\alpha, \tag{1}$$

其中，反常扩散系数的物理量纲为 $[K_\alpha]=$ 长度^2/时间$^\alpha$。根据反常扩散指数的取值，我们将 $0<\alpha<1$ 的情形称为亚扩散，将 $\alpha>1$[5, 6, 11, 12] 的情形称为超扩散。亚扩散的例子包括：亚微米示踪粒子在活体生物细胞拥挤环境中的运动 [13–15] ，或在聚合物拥挤的体外液体中的运动 [16, 17], ；以及驻留于活细胞质膜中的钾通道的运动 [12, 18]。超扩散的例子包括病毒 [19], 、神经元信使核糖核蛋白 [20],、内源性细胞囊泡 [21] 或磁性内体[22] 的马达驱动运输。

只要上述正常扩散的三个条件中有一个或多个不成立，所得随机过程就不再具有普适性，也就是说，给定的均方位移（1）可能对应不同的过程[10–12, 18]。从数据中推断此类过程已受到广泛关注，相关方法包括基于互补统计可观测量构建决策树[23], 动态标度指数 [24, 25], 或 p-变差 [26], , 以及贝叶斯分析等“客观”方法 [27–29] 或机器学习 [30–36], 等等。

本文讨论两种特定的基本反常随机过程在外部漂移作用下组合的情形。这两种过程分别是分数布朗运动（FBM）和次扩散型连续时间随机游走（CTRW）。追溯至柯尔莫哥洛夫[37] 以及曼德布罗特和范·内斯 [38],, 分数布朗运动是一种由均值为零、平稳且具有长程关联的高斯噪声驱动的非马尔可夫过程。分数布朗运动既可以描述次扩散，也可以描述超扩散，具体取决于噪声是反持续性还是持续性（见下文）。次扩散型分数布朗运动的例子包括复杂液体[16, 17] 和活细胞细胞质中的示踪粒子运动 [14, 15], , 以及双层膜中的脂质动力学[39]。在高等动物 [25] 的运动、变形虫细胞中的液泡运动以及变形虫细胞自身的运动中[40], , 均发现了超扩散型分数布朗运动；此外，它还被用作描述持续生长的脑纤维密度的模型 [41]。

蒙特罗尔和魏斯提出的连续时间随机游走（CTRW）[42] 模型是随机游走的一种推广，其中粒子在每次跳跃之间会等待一段随机 τ 时间。当等待时间的相关概率密度函数具有无标度形式时，$\psi(\tau)\simeq\tau^{-1-\alpha}$ 且 $0<\alpha<1$，使得平均等待时间 $\langle\tau\rangle$ 发散时，就会出现形式为（1）的亚扩散，其反常扩散指数由等待时间概率密度函数的标度指数决定。这类连续时间随机游走亚

*电子邮箱：liangyj@hhu.edu.cn
†电子邮箱：weiwangnuaa@gmail.com
‡电子邮箱地址：rmetzler@uni-potsdam.de

扩散的例子包括非晶半导体中电荷载流子的运动[43, 44], ; 等待时间的（渐近）幂律形式 τ 也曾在以下情形中得到发现：活细胞膜中钾通道的运动[45], 、形成玻璃的液体中 [46], 药物分子在两块二氧化硅板之间扩散 [47], 以及地质构造中的示踪剂输运[48]。

越来越多的实例表明，对记录到的动力学进行分析后发现，其中不止一种反常扩散过程协同作用。具体而言，我们在此提及连续时间随机游走和分数布朗运动同时存在的系统。这些系统包括活体 MIN6胰岛素瘤细胞中胰岛素颗粒的运动 [49], 烟碱型乙酰胆碱膜受体[50], 细胞质中的纳米级示踪物 [51], 受二氧化硅板限制的药物分子 [47], 以及海马神经元表面电压门控钠通道的运动 [52]。

近期，研究者基于从属化概念，对具有长程相关性的分数布朗运动与无标度等待时间效应相结合的随机过程进行了研究[52]。在此基础上，我们进一步研究这种随机运动在恒定外部漂移作用下的情形。为此，我们从分数布朗运动过程开始描述，再将其从属化于一个稳定从属过程 [53–60]。从历史上看，从属化的概念由 Bochner 引入 [54] ，并由 Feller 加以应用[55]。因此，此处关注的过程动力学包含三个要素：长程相关性、无标度等待时间以及外部漂移。我们在此对该过程的输运性质进行解析和数值研究。

本文组织如下。在第 II 节中，介绍存在漂移时从属分数布朗运动的朗之万方程。第 III 节给出概率密度函数并展示其非高斯性，同时得到系综平均均方位移。在第 IV 节中推导时间平均均方位移（TAMSD），并讨论弱非遍历统计特性以及 TAMSD 的振幅散布。第 V节讨论相关结果。为方便读者，附录 A 中简要总结无漂移时从属分数布朗运动的结果。

II. 存在漂移的从属分数布朗运动

带漂移的从属分数布朗运动， $x(t) \equiv x(s(t))$ 将长俘获时间和长程相关性与漂移结合起来。它满足耦合随机方程

$$\begin{aligned} \frac{dx(s)}{ds} &= v + \sqrt{2D}\zeta_H(s), \\ \frac{dt(s)}{ds} &= \varepsilon(s), \end{aligned} \tag{2}$$

参见 [60, 61] 中的讨论。在此， $x(s)$ 是粒子轨迹关于“操作时间” s的函数，而 v 是

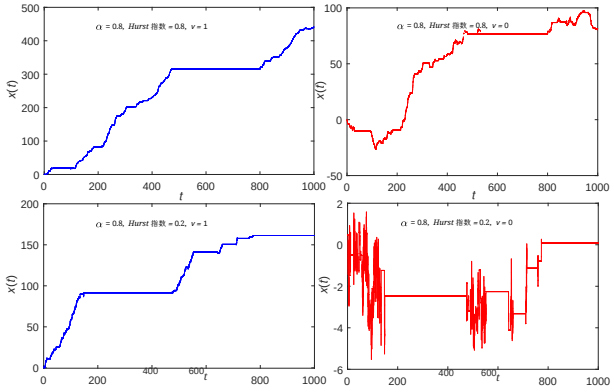

图 1：具有漂移 $v = 1$ 和无漂移（$v = 0$）情况下，从属分数布朗运动 $x(t)$ 的样本轨迹；母体分数布朗运动的赫斯特指数 H 取不同值（见各面板中的图例），等待时间指数为 $\alpha = 0.8$。请注意纵轴的范围各不相同。模拟中的基本时间步长为 $dt = 0.1$。

恒定外部漂移。不失一般性地，令 $D = 0.5$。此外， $\zeta_H(s)$ 表示具有相关函数 $\langle \zeta_H(t_1)\zeta_H(t_2)\rangle \sim H(2H-1)|t_1-t_2|^{2H-2}$ 的分数高斯噪声，其中 $t_1 \neq t_2$ [38]。这里，H，且 $0 < H < 1$ 是赫斯特指数。对于自由分数布朗运动，这会影响具有 $\alpha = 2H$ 的均方位移（1）。第二个方程随后将操作时间 s 转换为“实际”过程时间 t，其中 $\varepsilon(s)$ 表示单侧莱维稳定噪声 [62, 63], ，它是具有稳定指数 $0 < \alpha < 1$ 的莱维稳定子ordinator $t(s)$ 的形式导数。莱维稳定子ordinator 是一种具有平稳独立增量的非递减莱维过程。单侧莱维稳定分布 [64–66] 通过其拉普拉斯变换定义为 $L_\alpha(k) = \exp(-k^\alpha)$，且该函数严格递增。逆子ordinator $s(t)$ 定义为 $s(t) = \inf\{s > 0 : t(s) > t\}$，其中 $s(t)$ 被称为击中时间或首次通过时间过程 [57], ，可将其视为具有重尾等待时间概率密度函数的连续时间随机游走的极限过程。当 $t \to \infty$ 时，它趋于无穷大。我们注意到， $s(t)$ 的分布也称为米塔格-莱弗勒分布，这是基于矩与米塔格-莱弗勒函数 [64] 之间的关系。子ordinator $s(t)$ 负责产生粒子的亚扩散行为及其长时间停滞，而母过程 $x(s)$ 则引入带漂移的相关分数布朗运动。

图 1 展示了带漂移的从属分数布朗运动的样本轨迹 $v = 1$ 和不带漂移的情形（$v = 0$），对应两个 Hurst 指数值（持续性，即正相关的分数布朗运动， $H = 0.8$ 以及反持续性，即负相关的分数布朗运动， $H = 0.2$），并且 $\alpha = 0.8$。对于每个 H 值，我们使用相同的分数高斯噪声时间序列和从属时钟。对于 $\alpha = 1$的情形，即不存在长等待时间的情况，见附录 S4 中的图 A。即使等待时间指数相对较大 $\alpha = 0.8$ ，固定化效应仍然十分明显。

III. 概率密度函数、矩与系综平均均方位移

从属过程的概率密度函数为 [67]

$$P(x,t)=\int_0^{+\infty}P_0(x,s)h(s,t)ds, \tag{3}$$

其中，$P_0(x,s)$ 和 $h(s,t)$ 分别表示母过程 $x(s)$ 和逆稳定从属过程 $s(t)$ 的概率密度函数。具体而言，原过程 $x(s)$ 的概率密度函数为

$$P_0(x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s^{2H}}}\exp\left(-\frac{(x-vs)^2}{2s^{2H}}\right), \tag{4}$$

逆稳定从属过程 $s(t)$ 的概率密度函数为[67]

$$h(s,t)=\frac{t}{\alpha s^{1+1/\alpha}}L_\alpha\left(t/s^{1/\alpha}\right), \tag{5}$$

用单侧莱维稳定分布 L_α表示。于是，方程（3）可改写为

$$\begin{aligned}P(x,t) &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi s^{2H}}}\exp\left(-\frac{(x-vs)^2}{2s^{2H}}\right)\\ &\times\frac{t}{\alpha s^{1+1/\alpha}}L_\alpha\left(\frac{t}{s^{1/\alpha}}\right)ds.\end{aligned} \tag{6}$$

$x(t)$ 的矩 $\langle x^n(t)\rangle$ 为 [65]

$$\langle x^n(t)\rangle=\int_0^{\infty}\langle x^n(s)\rangle h(s,t)ds, \tag{7}$$

其中，$\langle x^n(s)\rangle$ 表示带漂移的母体分数布朗运动过程的矩。一阶矩 μ 为

$$\mu=\langle x(t)\rangle=\int_0^{\infty}vsh(s,t)ds=\frac{v}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}. \tag{8}$$

二阶矩 $\langle x^2(t)\rangle$ 为

$$\begin{aligned}\langle x^2(t)\rangle &= \int_0^{\infty}\left(s^{2H}+v^2s^2\right)h(s,t)d\tau\\ &= \frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(1+2H\alpha)}t^{2H\alpha}+\frac{2v^2}{\Gamma(1+2\alpha)}t^{2\alpha},\end{aligned} \tag{9}$$

渐近情况下，漂移项将占主导地位（$H<1$）。均方位移（或方差）对应于二阶中心矩

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \langle\Delta x^2(t)\rangle\\ &= \frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(1+2H\alpha)}t^{2H\alpha}\\ &+\left(\frac{2}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)^2}\right)v^2t^{2\alpha},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 σ is the standard deviation.

该运动的变异系数 $c=\sigma/\mu$ 为

$$c_v=\frac{\left(\frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(1+2H\alpha)}t^{2H\alpha}+\left(\frac{2}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)^2}\right)v^2t^{2\alpha}\right)^{1/2}}{\frac{v}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}}, \tag{11}$$

偏度 $\theta=\langle[(x-\mu)/\sigma]^3\rangle$ 变为

$$\theta=\frac{\langle(x(t)-\mu)^3\rangle}{\langle(x(t)-\mu)^2\rangle^{3/2}}, \tag{12}$$

为此，我们需要求得三阶中心矩和标准差的三次方，

$$\begin{aligned}\langle(x(t)-\mu)^3\rangle &= \left(\frac{3\Gamma(2+2H)v}{\Gamma(1+\alpha+2H\alpha)}-\frac{3\Gamma(2+2H)v}{(1+2H)\Gamma(1+2H\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\right)t^{2H\alpha+2\alpha}\\ &+\left(\frac{6v^3}{\Gamma(1+3\alpha)}-\frac{6v^3}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}+\frac{2v^3}{\Gamma(1+\alpha)^3}\right)t^{3\alpha},\end{aligned} \tag{13}$$

以及 $\langle(x(t)-\mu)^2\rangle^{3/2}=\left(\sigma^2\right)^{3/2}$ 可利用式（10）计算。漂移为零时，偏度为 0，即概率密度函数是对称的（$v=0$）。

峰度 $\kappa=\langle[(x-\mu)/\sigma]^4\rangle=\langle(x(t)-\mu)^4\rangle/\langle(x(t)-\mu)^2\rangle^2$ 可根据四阶中心矩

和标准差的四次方计算得出,

$$\begin{aligned}\langle(x(t)-\mu)^4\rangle &= \frac{3\Gamma(1+4H)}{\Gamma(1+4H\alpha)}t^{4H\alpha}+\left(\frac{6\Gamma(3+2H)v^2}{\Gamma(1+2H\alpha+2\alpha)}-\frac{12\Gamma(3+2H)v^2}{(2+2H)\Gamma(1+2H\alpha+\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\right.\\ &\left.+\frac{6\Gamma(3+2H)v^2}{(1+2H)(2+2H)\Gamma(1+2H\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}\right)t^{2H\alpha+2\alpha}\\ &+\left(\frac{24v^4}{\Gamma(1+4\alpha)}-\frac{24v^4}{\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+\alpha)}+\frac{12v^4}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}-\frac{3v^4}{\Gamma(1+\alpha)^4}\right)t^{4\alpha},\end{aligned} \tag{14}$$

and

$$\begin{aligned}\langle(x(t)-\mu)^2\rangle^2 &= \frac{\Gamma(1+2H)^2}{\Gamma(1+2H\alpha)^2}t^{4H\alpha}+\left(\frac{4\Gamma(1+2H)v^2}{\Gamma(1+2H\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{2\Gamma(1+2H)v^2}{\Gamma(1+2H\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}\right)t^{2H\alpha+2\alpha}\\ &+\left(\frac{4v^4}{\Gamma(1+2\alpha)^2}-\frac{4v^4}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}+\frac{v^4}{\Gamma(1+\alpha)^4}\right)t^{4\alpha}.\end{aligned} \tag{15}$$

当 $t\to\infty$ 峰度将与时间和漂移无关，而由稳定指数决定 ,

$$\kappa=\frac{\frac{24}{\Gamma(1+4\alpha)}-\frac{24}{\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+\alpha)}+\frac{12}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}-\frac{3}{\Gamma(1+\alpha)^4}}{\frac{4}{\Gamma(1+2\alpha)^2}-\frac{4}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)^2}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)^4}}. \tag{16}$$

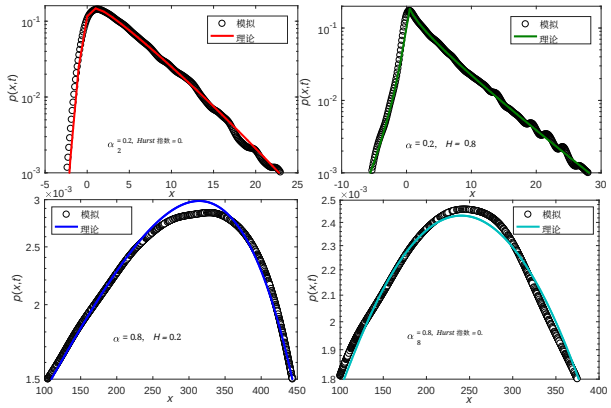

图 2：模拟（深色圆点）和根据式（6）得到的解析结果，展示了带漂移的从属分数布朗运动的概率密度函数 $v=1$ 在时间 $t=1000$ 下，对于不同的赫斯特指数 H 和稳定性指数 α。模拟中的基本时间步长为 $dt=0.1$。

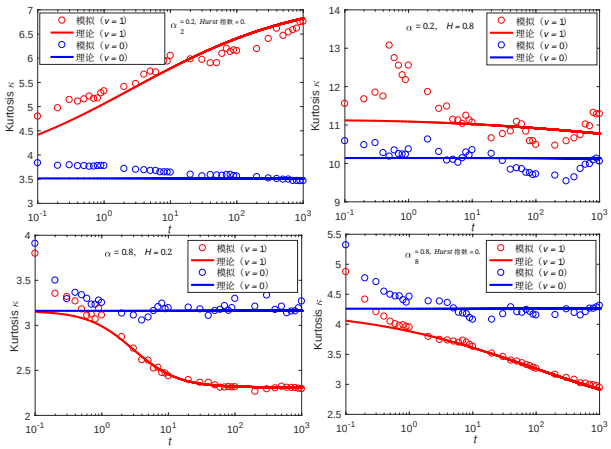

图3：基于方程（14）和（15）得到的从属分数布朗运动峰度模拟结果（圆圈）和理论结果（实线），分别对应存在漂移的情况 $v=1$ 和无漂移的情况$v=0$，赫斯特指数 H 和稳定指数 α 取不同值并随时间增加。模拟中的基本时间步长为 $dt=0.1$。

图 2 展示了我们对带漂移的概率密度函数进行解析计算和随机模拟的结果$v=1$ 在时间 $t=1000$ 下，赫斯特指数为 $H=0.2$和 $H=0.8$，稳定性指数为 $\alpha=0.2$ 和 $\alpha=0.8$。除 $\alpha=0.8$情形的峰值附近存在偏差外，所有情形下的解析结果都与模拟结果非常吻合。与图S1 中的从属分数布朗运动（无漂移）的对称概率密度函数相比，这些概率密度函数是不对称的（见附录A）。无论是否存在漂移，所有概率密度函数在较小的 α 下都具有明显的尖点状峰值。对于 $\alpha=1$ 的从属分数布朗运动（即，操作时间具有相同的

均值行为（作为过程时间）如图S5（附录A）所示。

为检验带漂移的从属分数布朗运动的概率密度函数的非高斯性，我们在图3 中展示了根据公式（14）和（15）计算的、带漂移 $v=1$ 和不带漂移（$v=0$）情况下的峰度，并将解析计算与模拟结果随时间进行了比较。对于不同的 H 和 α 取值，总体上吻合良好。然而，由于峰度中包含均值的四阶项，我们未能获得更高的数值精度

。我们的模拟结果表明，对于一维高斯分布，其峰度值为 $\kappa = 3$；结果显示，概率密度函数呈现非高斯性，这与图2 和S1 （附录A）中的结果完全一致。特别需要指出的是，当 α 较小或 H较大时，峰度值明显高于高斯分布的值 3。

IV. 时间平均均方位移及其分布

TAMSD 定义为 [10, 12, 18, 68]

$$\overline{\delta^2(\Delta)} = \frac{1}{T-\Delta}\int_0^{T-\Delta}[x(t+\Delta)-x(t)]^2 dt, \qquad (17)$$

其中， T 为测量时间， Δ 称为滞后时间。平均 TAMSD 基于自相关函数 $\langle x(t_1)x(t_2)\rangle$，其定义为

$$\begin{aligned}\langle x(t_1)x(t_2)\rangle &= \int_0^\infty\int_0^\infty \langle x(s_1)x(s_2)\rangle h(s_2,t_2,s_1,t_1)ds_1ds_2\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \left[v^2 s_1 s_2 + \frac{1}{2}\left(s_1^{2H}+s_2^{2H}-|s_2-s_1|^{2H}\right)\right] h(s_2,t_2;s_1,t_1)ds_1ds_2\\ &= v^2\langle s(t_1)s(t_2)\rangle + \frac{1}{2}\left[\langle s(t_1)^{2H}\rangle + \langle s(t_2)^{2H}\rangle - \langle|s(t_2)-s(t_1)|^{2H}\rangle\right]. \end{aligned} \qquad (18)$$

正如我们在 第 II 节中 $s(t)$ 是击中时间，也称为截至时间 t的步数。因此 e

$$\langle[x(t_2)-x(t_1)]^2\rangle = \langle x^2(t_2)\rangle + \langle x^2(t_1)\rangle - 2\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = v^2\langle[s(t_2)-s(t_1)]^2\rangle + \langle|s(t_2)-s(t_1)|^{2H}\rangle. \qquad (19)$$

令 $t_1 = t$ 和 $t_2 = t+\Delta$，则 $s(t_2) - s(t_1)$ 的 ϑ 阶分数阶矩为 [52]

$$\langle[s(t+\Delta)-s(t)]^\vartheta\rangle = \frac{\Gamma(1+\vartheta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+\alpha\vartheta)}\,{}_2F_1\left(1,1-\alpha;2-\alpha+\alpha\vartheta;-\frac{\Delta}{t}\right)\frac{\Delta^{1-\alpha+\alpha\vartheta}}{t^{1-\alpha}}, \qquad (20)$$

其中， ${}_2F_1$ 是超几何函数。利用方程（17）和（20），可得平均时间平均均方位移的形式为

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\delta^2(\Delta)}\right\rangle &= \frac{1}{T-\Delta}\int_0^{T-\Delta}\left(\frac{2v^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2+\alpha)}\,{}_2F_1\left(1,1-\alpha;2+\alpha;-\frac{\Delta}{t}\right)\frac{\Delta^{1+\alpha}}{t^{1-\alpha}}\right.\\ &\left.+\frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+2H\alpha)}\,{}_2F_1\left(1,1-\alpha;2-\alpha+2H\alpha;-\frac{\Delta}{t}\right)\frac{\Delta^{1-\alpha+2H\alpha}}{t^{1-\alpha}}\right)dt. \end{aligned} \qquad (21)$$

在极限 $\Delta \ll t$ 下，有 ${}_2F_1(1,1-\alpha;2-\alpha+\alpha\vartheta;0) \sim 1$ [69]，于是方程（21）变为

$$\left\langle[x(t_2)-x(t_1)]^2\right\rangle \sim \frac{2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2+\alpha)}\frac{v^2\Delta^{1+\alpha}}{t^{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+2H\alpha)}\frac{\Delta^{1-\alpha+2H\alpha}}{t^{1-\alpha}}. \qquad (22)$$

对式（17）进行时间积分后，我们得到

$$\left\langle\overline{\delta^2(\Delta)}\right\rangle \sim \frac{2v^2}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(2+\alpha)}\frac{\Delta^{1+\alpha}}{T^{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(1+2H)}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+2H\alpha)}\frac{\Delta^{1-\alpha+2H\alpha}}{T^{1-\alpha}}. \qquad (23)$$

在极限 $\Delta \gg t$下，我们有 ${}_2F_1\left(1,\ 1-\alpha;\ 2-\alpha+\alpha\vartheta;\ -\frac{\Delta}{t}\right) \sim \left(\frac{t+\Delta}{t}\right)^{-(1-\alpha)}\Gamma_{(2-\alpha+\alpha\vartheta)\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha\vartheta)}$，且方程（21）变为

$$\left\langle[x(t_2)-x(t_1)]^2\right\rangle \sim \frac{2v^2}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(\Delta^2+(\alpha-1)t\Delta^{2\alpha-1}\right) + \frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(1+2H\alpha)}\left(\Delta^{2H\alpha}+(\alpha-1)t\Delta^{2H\alpha-1}\right). \qquad (24)$$

同理，由式（17）可得

$$\left\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \right\rangle \sim \frac{2v^2}{\Gamma(1+2\alpha)} \left(\Delta^2 + \frac{(\alpha-1)(T-\Delta)\Delta^{2\alpha-1}}{2} \right) + \frac{\Gamma(1+2H)}{\Gamma(1+2H\alpha)} \left(\Delta^{2H\alpha} + \frac{(\alpha-1)(T-\Delta)\Delta^{2H\alpha-1}}{2} \right). \quad (25)$$

我们注意到，在极限 $\alpha = 1$ 下，带漂移的从属分数布朗运动是一个遍历随机过程 [70–72]。

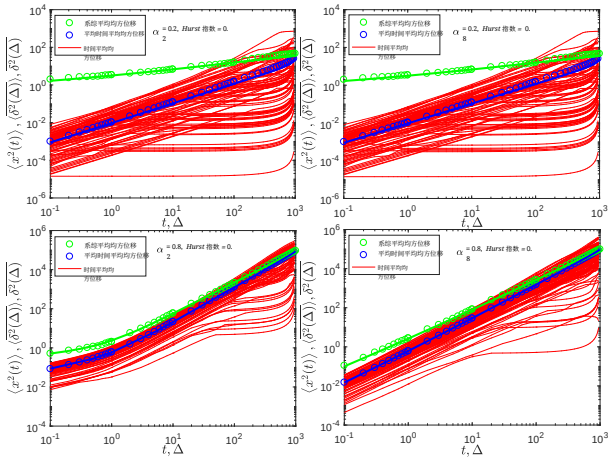

图 4：带漂移的从属分数布朗运动的均方位移（绿色圆点）、若干条单条轨迹的时间平均均方位移（红色细曲线）以及平均时间平均均方位移（蓝色粗圆点），对应不同的 $v = 1$ 和 H 以及 α 值。方程（9）和（21）中给出的均方位移（绿色粗实线）和平均时间平均均方位移（蓝色粗实线）的理论结果与数值结果吻合良好。参数：轨迹长度 $T = 1000$，基本时间步长 $dt = 0.1$，轨迹数量 $n = 300$。

图 4 展示了从属分数布朗运动在存在漂移 $v = 1$ 时，不同 H 和 α取值下均方位移、若干条单独时间平均均方位移以及平均时间平均均方位移的模拟结果。在图 4 中，均方位移和平均时间平均均方位移的解析结果与模拟结果吻合良好。我们还注意到，单独的时间平均均方位移分布范围很广，尤其是当 α取值较小时，这与连续时间随机游走运动的弱非遍历行为一致[10, 12, 18, 68]。如图 S2 （附录 A）所示，与不存在漂移的同类运动相比，存在漂移的从属分数布朗运动的均方位移和时间平均均方位移随时间增长得更快。

为量化单独时间平均均方位移的相对振幅分布，我们使用无量纲变量 [10, 12, 68]

$$\xi(\Delta) = \frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\left\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \right\rangle}. \quad (26)$$

ξ 的取值围绕均值 $\langle \xi(\Delta) \rangle = 1$ 波动。相应的概率密度函数 $\phi(\xi)$ 可表示为修正的全非对称莱维稳定密度 [10, 68]，或通过米塔格-莱弗勒函数 [73]表示。方差 EB $= \langle \xi^2 \rangle - 1$ 称为遍历性破缺参数[10, 12, 18, 68]。

图5 展示了以下参数对应的时间平均均方位移散点概率密度函数：

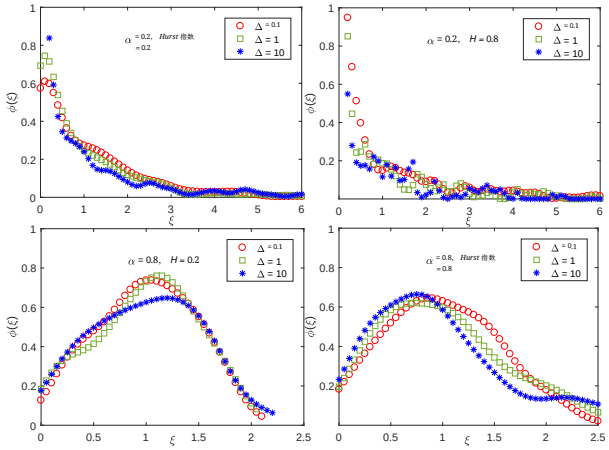

图 5：在不同的 H 和 α 值下，带漂移的从属分数布朗运动的时间平均均方位移的振幅散布概率密度函数 $\phi(\xi)$。圆形、方形和星形符号分别表示滞后时间为 $\Delta = 0.1$、1 和 10 时的模拟。

与图4 相同的参数，分别对应三种不同的滞后时间 $\Delta = 0.1$、1和10。结果表明，分布并非以均值$\langle \xi(\Delta) \rangle = 1$为中心对称，并且在 α较小的取值处有尖峰和长重尾。还可以注意到，当 α 取值较小时，粒子的平均等待时间更长，因此在时间 T之前 $\xi(\Delta) = 0$内没有发生位移的轨迹概率更高，这与图4中观察到的一般趋势吻合良好（另见 [10, 52, 68]中的讨论）。无漂移从属分数布朗运动散点概率密度函数的模拟具有类似的统计性质，见图S3 （附录A）。

V. 讨论

我们研究了存在恒定外部漂移时的从属分数布朗运动，将由赫斯特指数 H表征的长程相关高斯运动，与固定化（等待）时间的长尾无标度概率密度函数相结合，其标度指数为 α。正如预期，在长时间尺度下，漂移项主导输运行为；我们通过系综平均和时间平均矩以及概率密度函数对其进行了量化。从技术上说，我们采用基于稳定从属过程的从属方法，将母体分数布朗运动的“运算时间”转换为固定化事件存在时组合运动的“过程时间”。在 [52] 中研究的所得过程，

在无漂移的情况下，因而结合了两种核心随机运动特性，这些特性已在广泛的实验中得到观测。目前，此类观测主要来自软物质和生物物质中的单粒子跟踪[51, 74, 75]或大规模计算机模拟，参见例如[39, 47]。鉴于实验方法的发展，如今已能记录地球物理环境中的单粒子运动[76, 77]，，未来若能在这一背景下揭示同样丰富的行为，将会很有意思。

在我们的分析中，我们强调了扩散和漂移分别导致均方位移呈现不同的标度行为。由此得到的概率密度函数是非高斯的，我们展示了 H 和 α 如何影响形状参数（偏度和峰度）。我们还通过模拟研究了各个时间平均均方位移的振幅散布。未来的工作中，我们还将考虑老化效应，并推导系综平均矩和时间平均矩的显式表达式。

文献 [52] 研究了无漂移的从属分数布朗运动（FBM），而本文研究了存在漂移时的情形；这补充了文献中报道的类似组合随机过程。这里我们提及几种组合过程：在谢尔宾斯基垫片等分形结构上进行的连续时间随机游走（CTRW）[78]，；分数布朗运动（FBM）与尺度化布朗运动（SBM）的组合[79]，其中扩散系数是时间的幂律函数 [80, 81]，；以及分数布朗运动（FBM）与随机演化（“扩散”）的扩散率相结合的过程[82, 83]。这类过程将为今后基于统计可观测量（如本文所采用的量）、贝叶斯最大似然方法 [27–29]，或机器学习策略 [30–36]的数据分析扩展奠定基础。

致谢

Y. L. 感谢亚历山大·冯·洪堡基金会（资助编号：1217531）和国家自然科学基金（资助编号：11702085）提供的经费支持。R. M. 感谢德国科学基金会（DFG，资助编号：ME 1535/12-1）提供的经费支持。

附录 A：补充图

此处给出补充图，以补充正文中介绍的行为。

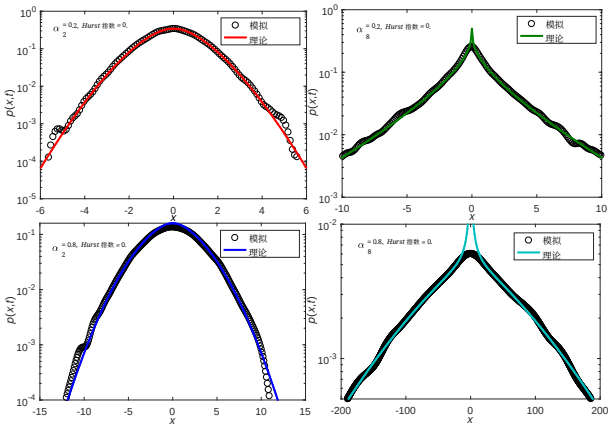

图 S1：无漂移的从属分数布朗运动概率密度函数的模拟结果（深色圆点）与解析结果（实线），根据公式（7），对应于（$v = 0$），以及不同的 H 和 α，其中 $t = 1000$。

[1] N. G. van Kampen，《物理与化学中的随机过程》（北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1981）。[2] P. Hänggi 和 F. Marchesoni，引言：布朗运动一百年，《混沌》**15**，026101（2005）。[3] J. Spiechowicz、I. G. Marchenko、P. Hänggi 和 J. Łuczka，平衡与非平衡状态下布朗粒子的扩散系数：爱因斯坦模型及其拓展，电子预印本 arXiv:2211.14190。[4] P. Lévy，《随机过程与布朗运动》（Gauthier-Villars，巴黎，1965）。[5] R. Metzler 和 J. Klafter，反常扩散的随机游走指南：分数阶动力学方法，《物理报告》**339**，1–77（2000）。[6] J. P. Bouchaud 和 A. Georges，无序介质中的反常扩散：统计机制、模型与物理应用，《物理报告》**195**，127（1990）。[7] R. L. Magin、C. Ingo、L. Colon-Perez、W. Triplett 和 T. H. Mareci，利用分数阶导数和熵表征多孔生物组织中的反常扩散，《微孔与介孔材料》**178**，39（2013）。[8] H. Sun、M. Meerschaert、Y. Zhang、J. Zhu 和 W. Chen，一种用于描述非饱和介质中水分输运非玻尔兹曼标度的分形理查兹方程，《水资源研究进展》**52**，292（2013）。[9] D. Bolster、D. Benson、M. Meerschaert 和 B. Baeumer，多维分数阶平流-弥散系统中的混合驱动平衡反应，《物理学 A》**392**，2513（2013）。[10] R. Metzler、J.-H. Jeon、A. G. Cherstvy 和 E. Barkai，反常扩散模型及其性质：单粒子跟踪百年之际的非平稳性、非遍历性与老化，《物理化学化学物理》**16**，24128 (2014). [11] I. M. Sokolov，拥挤环境中反常扩散的模型，Soft Matter **8**，9043 (2012). [12] E. Barkai、Y. Garini 和 R. Metzler，活细胞中单分子的奇异动力学，Phys. Today **65(8)**，29 (2012). [13] I. Golding 和 E. C. Cox，细菌细胞质的物理本质，《物理评论快报》**96**，098102 (2006). [14] S. C. Weber、A. J. Spakowitz 和 J. A. Theriot，细菌染色体位点在黏弹性细胞质中进行亚扩散运动，《物理评论快报》**104**，238102 (2010)。

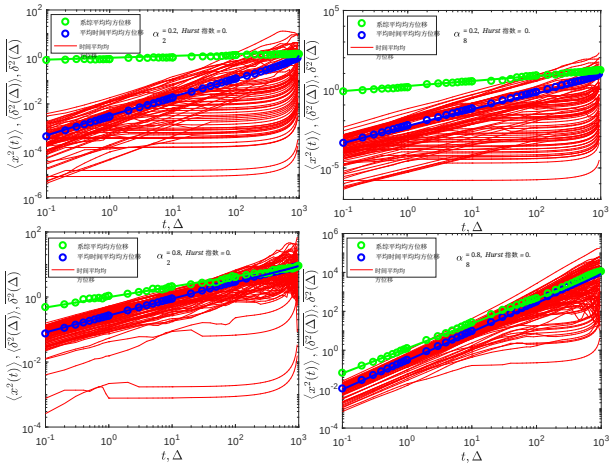

图 S2：无漂移的从属分数布朗运动（$v=0$）在不同 H 和 α 下的 MSD（绿色圆圈）、单条 TAMSD（细红曲线）及平均 TAMSD（粗蓝圆圈）。MSD（粗实绿色曲线）和平均 TAMSD（粗实蓝色曲线）的理论结果分别基于公式（9）和（21）。参数：轨迹长度 $T=1000$，基本时间步长 $dt=0.1$，以及轨迹数量 $n=300$。

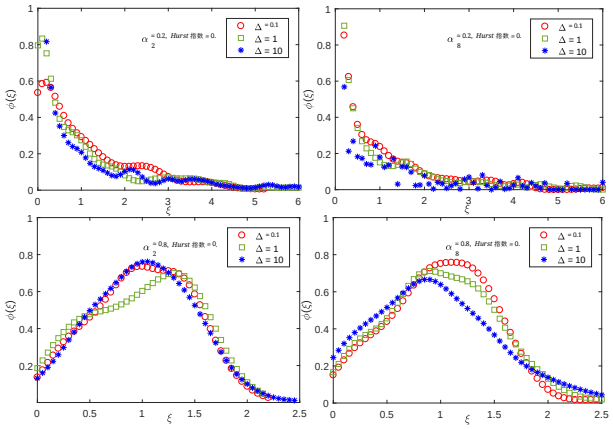

图 S3：不同 H 和 α 条件下，亚从属分数布朗运动（无漂移，$v=0$）的时间平均均方位移振幅散布概率密度函数。圆形、方形和星形符号分别表示滞后时间为 $\Delta=0.1$、1 和 10 时的模拟结果。

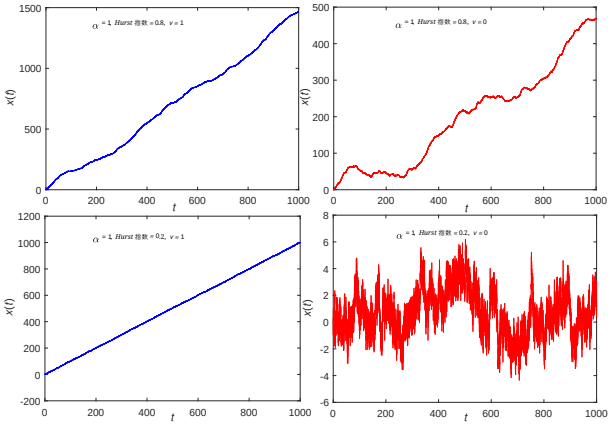

图 S4：具有漂移 $v=1$ 和无漂移（$v=0$）情况下，从属分数布朗运动的样本轨迹，分别对应 $H=0.8$ 和 $H=0.2$，其中 $\alpha=1$。

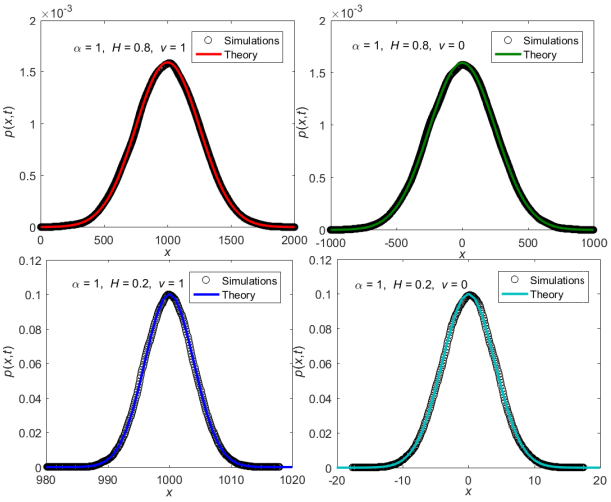

图 S5：从属分数布朗运动概率密度函数的模拟（深色圆点）和公式（6）给出的解析结果（实线），具有漂移 $v=1$ 和无漂移（$v=0$）情况下，对不同的 H 以及 $\alpha=1$ 在 $t=1000$。

[15] J.-H. Jeon、V. Tejedor、S. Burov、E. Barkai、C. Selhuber-Unkel、K. Berg-Sørensen、L. Oddershede 和 R. Metzler，脂质颗粒在体内的反常扩散与弱遍历性破缺，《物理评论快报》**106**，048103 (2011). [16] J. Szymanski 和 M. Weiss，阐明拥挤流体中反常扩散的起源，《物理评论快报》**103**，038102 (2009). [17] J-.H. Jeon、N. Leijnse、L. Oddershede 和 R. Metzler，蠕虫状胶束溶液中的反常扩散与幂律弛豫，新物理学杂志 **15**，045011 (2013). [18] D. Krapf 和 R. Metzler，奇异界面分子动力学，Phys. Today **72(9)**，48 (2019). [19] G. Seisenberger、M. U. Ried、T. Endreß、H. Büning、M. Hallek 和 C. Bräuchle，实时单分子成像腺相关病毒感染途径的……，《科学》**294**，1929（2001）。[20] M. S. Song、H. C. Moon、J.-H. Jeon 和 H. Y. Park，神经元信使核糖核蛋白运输遵循老化莱维行走，《自然·通讯》**9**，344（2018）。[21] J. F. Reverey、J.-H. Jeon、H. Bao、M. Leippe、R. Metzler 和 C. Selhuber-Unkel，超拥挤的致病性卡氏棘阿米巴胞内空间中，超扩散主导粒子运动，《科学报告》**5**，11690（2015）。[22] D. Robert、T. H. Nguyen、F. Gallet 和 C. Wilhelm，结合主动与被动微流变学，在体测定内体运输过程中的波动力，PLoS One **5**，e10046（2010）。[23] Y. Meroz 和 I. M. Sokolov，确定亚扩散机制的工具箱，《物理报告》**573**，1（2015）。[24] E. Aghion、P. G. Meyer、V. Adlakha、H. Kantz 和 K. E. Bassler，莱维行走中的摩西、诺亚和约瑟夫效应，

新物理学杂志 23，023002（2021）。[25] O. Vilk、E. Aghion、T. Avgar、C. Beta、O. Nagel、A. Sabri、R. Sarfati、D. K. Schwartz、M. Weiss、D. Krapf、R. Nathan、R. Metzler 和 M. Assaf，揭示反常扩散的起源：从分子到迁徙鹳鸟，《物理评论研究》4，033055（2022）。[26] M. Magdziarz、A. Weron、K. Burnecki 和 J. Klafter，分数布朗运动与连续时间随机游走：亚扩散动力学的一种简单检验，《物理评论快报》103，18（2009）。[27] J. Krog 和 M. A. Lomholt，利用信息内容模型检验对朗之万方程进行贝叶斯推断，《物理评论E》96，062106（2017）。[28] S. Thapa、M. A. Lomholt、J. Krog、A. G. Cherstvy 和 R. Metzler，单粒子追踪数据的贝叶斯嵌套采样分析：将最大似然模型选择应用于随机扩散率数据，《物理化学化学物理》20，29018（2018）。[29] A. G. Cherstvy、S. Thapa、C. E. Wagner 和 R. Metzler，黏蛋白水凝胶中示踪粒子的非高斯、非遍历和非菲克扩散，Soft Matter 15，2526（2019）。[30] G. Muñoz-Gil、M. A. Garcia-March、C. Manzo、J. D. Martín-Guerrero 和 M. Lewenstein，利用机器学习表征单条轨迹，新物理学杂志 22，013010（2020）。[31] N. Granik、L. E. Weiss、E. Nehme、M. Levin、M. Chein、E. Perlson、Y. Roichman 和 Y. Shechtman，利用深度学习表征单粒子扩散，《生物物理学杂志》117，185（2019）。[32] J. Janczura、P. Kowalek、H. Loch-Olszewska、J. Szwabiński 和 A. Weron，活细胞中粒子轨迹的分类：针对分数阶反常扩散，机器学习与统计假设检验的比较，《物理评论E》102，3（2020）。[33] P. Kowalek、H. Loch-Olszewska、Ł. Łaszczuk、J. Opała 和 J. Szwabiński，通过恰当选择特征提升反常扩散分类器的性能，《物理学杂志A辑》55，24（2022）。[34] S. Bo、F. Schmidt、R. Eichhorn 和 G. Volpe，利用循环神经网络测量反常扩散，《物理评论E》100，1（2019）。[35] G. Muñoz-Gil、G. Volpe、M. A. Garcia-March、E. Aghion、A. Argun、C. B. Hong、T. Bland、S. Bo、J. A. Conejero、N. Firbas、Ò. Garibo i Orts、A. Gentili、Z. Huang、J.-H. Jeon、H. Kabbech、Y. Kim、P. Kowalek、D. Krapf、H. Loch-Olszewska、M. A. Lomholt、J.-B. Masson、P. G. Meyer、S. Park、B. Requena、I. Smal、T. Song、J. Szwabiński、S. Thapa、H. Verdier、G. Volpe、A. Widera、M. Lewenstein、R. Metzler 和 C. Manzo，反常扩散解码方法的客观比较，《自然通讯》12，6253（2021）。[36] H. Seckler 和 R. Metzler，用于反常扩散分析误差估计的贝叶斯深度学习，《自然通讯》13，6717（2022）。[37] A. N. Kolmogorov，不可压缩流体在极高雷诺数下的湍流局部结构，《苏联科学院学报》30，299（1940）。[38] B. B. Mandelbrot 和 J. W. van Ness，分数布朗运动、分数阶噪声及其应用，《SIAM评论》10，422（1968）。[39] J. H. Jeon、M. S. Monne、M. Javanainen 和 R. Metzler，脂质双层中磷脂和胆固醇的反常扩散及其起源，《物理评论快报》109，188103（2012）。[40] D. Krapf、N. Lukat、E. Marinari、R. Metzler、G. Oshanin、C. Selhuber-Unkel、A. Squarcini、L. Stadler、M. Weiss 和 X. Xu，《单条非布朗轨迹的谱成分》，《物理评论X》9，011019（2019）。[41] S. Janušonis、N. Detering、R. Metzler 和 T. Vojta，《血清素能轴突作为分数布朗运动路径：对区域密度自组织的认识》，《计算神经科学前沿》14，56（2020）。[42] E. W. Montroll 和 G. H. Weiss，《格点上的随机游走。II》，《数学物理杂志》6，167（1965）。[43] H. Scher 和 E. W. Montroll，《非晶固体中的异常渡越时间色散》，《物理评论B》12，2455（1975）。[44] M. Schubert、E. Preis、J. C. Blakesley、P. Pingel、U. Scherf 和 D. Neher，《给体/受体共聚物中的迁移率弛豫与电子俘获》，《物理评论E》87，024203（2013）。[45] A. V. Weigel、B. Simon、M. M. Tamkun 和 D. Krapf，《单分子追踪观察到质膜中遍历过程与非遍历过程并存》，《美国国家科学院院刊》108，6438（2011）。[46] O. Rubner 和 A. Heuer，《从基本步骤到结构弛豫：过冷液体的连续时间随机游走分析》，《物理评论E》78，011504（2008）。[47] A. Díez Fernandez、P. Charchar、A. G. Cherstvy、R. Metzler 和 M. W. Finnis，《多柔比星药物分子在二氧化硅纳米通道中的扩散呈非高斯性且具有间歇性》，《物理化学化学物理》22，27955（2020）。[48] B. Berkowitz、A. Cortis、M. Dentz 和 H. Scher，《将地质构造中的非菲克输运建模为连续时间随机游走》，《地球物理学评论》44，RG2003（2006）。[49] S. M. A. Tabei、S. Burov、H. Y. Kima、A. Kuznetsov、T. Huynh、J. J ureller、L. H. Philipson、A. R. Dinner 和 N. F. Scherer，《胰岛素颗粒的细胞内运输是一种从属随机游走》，《美国国家科学院院刊》110，4911（2013）。[50] A. Mosqueira、P. A. Camino 和 F. J. Barrantes，《胆固醇通过调节受限停留时间和纳米簇稳定性来调控乙酰胆碱受体扩散》，《科学报告》8，1（2018）。[51] F. Etoc、E. Balloul、C. Vicario、D. Normanno、J. Piehler、M. Dahan 和 M. Coppey，《非特异性相互作用主导哺乳动物细胞中纳米级物体的细胞质扩散》，《自然·材料》17，740（2018）。[52] Z. R. Fox、E. Barkai 和 D. Krapf，《膜蛋白运输及其他从属随机游走的老化功率谱》，《自然·通讯》12，6162（2021）。[53] D. Applebaum，《莱维过程与随机微积分》，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2009。[54] S. Bochner，《非高斯随机过程的从属化》，《美国国家科学院院刊》48，19（1962）。[55] W. Feller，《概率论及其应用导论》，威利出版社，纽约：威利出版社，1971。[56] A. Chechkin 和 I. M. Sokolov，《广义扩散方程与从属化方案之间的关系》，《物理评论E》103，032133（2021）。[57] M. M. Meerschaert 和 P. Straka，《逆稳定从属过程》，《数学模型与自然现象》8，1（2013）。[58] M. M. Meerschaert 和 H.-P. Scheffler，《具有无限均值等待时间的连续时间随机游走的极限定理》，应用概率学杂志 **41** ，623 (2004)。

[59] *X. Wang* 和 *Y. Chen*，具有俘获事件的随机扩散率系统的遍历性质，《物理评论*E*》*105*，*014106 2022( )*。[60] *M. Magdziarz*、*A. Weron* 和 *K. Weron*，分数阶福克–普朗克动力学：随机表示与计算机模拟，《物理评论*E*》*75*，*016708 (2007)*。[61] *H. C. Fogedby*，连续时间莱维飞行的朗之万方程，《物理评论*E*》*50*，*1657 (1994)*。[62] *W. Gawronski*，单侧稳定律导数的渐近形式，《概率年刊》*16*，*1348 (1988)*。[63] *K. A. Penson* 和 *K. Górska*，单侧莱维稳定分布的精确显式概率密度，《物理评论快报》*105*，*210604 (2010)*。[64] *A. Saa* 和 *R. Venegeroles*，单侧莱维分布和米塔格-莱弗勒分布的替代数值计算，《物理评论*E*》*84*，*026702 (2011)*。[65] *K. A. Penson* 和 *K. Górska*，关于源自单侧莱维稳定律的拉普拉斯变换的性质，《物理学杂志*A*：数学与理论》*49*，*065201 (2016)*。[66] *G. Dattoli*、*K. Górska*、*A. Horzela*、*K. A. Penson* 和 *E. Sabia*，相对论热多项式与单侧莱维分布理论，《数学物理杂志》*58*，*063510 (2017)*。[67] *E. Barkai*，分数阶福克–普朗克方程、解及应用，《物理评论*E*》*63*，*046118 (2001)*。[68] *Y. He*、*S. Burov*、*R. Metzler* 和 *E. Barkai*，随机时间尺度不变扩散与输运系数，《物理评论快报》*101*，*058101 (2008)*。[69] *N. Virchenko*，关于广义合流超几何函数及其应用，《分数阶微积分与应用分析》*9*，*101 (2006)*。[70] *W. Deng* 和 *E. Barkai*，分数阶布朗–朗之万运动的遍历性质，《物理评论*E*》*79*，*011112 (2009)*。[71] *M. Schwarzl*、*A. Godec* 和 *R. Metzler*，用高阶矩量化反常扩散的非遍历性，《科学报告》*7*，*3878 (2017)*。[72] *J.-H. Jeon* 和 *R. Metzler*，遍历系统中时间平均与系综平均的不等价性：限域中的指数弛豫与幂律弛豫，《物理评论*E*》*85*，*021147 2012( )*。[73] *D. A. Darling* 和 *M. Kac*，关于占据时间《马尔可夫过程》，《美国数学会汇刊》*84, 444 (1957).* [74] *C. Manzo* 和 *M. F. Garcia-Parajo*，单粒子跟踪进展综述：从方法到生物物理学洞见，《物理报告》*78, 124601 (2015).* [75] *K. Jaqaman*、*D. Loerke*、*M. Mettlen*、*H. Kuwata*、*S. Grinstein*、*S. L. Schmid* 和 *G. Danuser*，在活细胞延时序列中进行稳健的单粒子跟踪，《自然·方法》*5, 695 (2018).* [76] *R. A. Hardy*、*M. R. James*、*J. M. Pates* 和 *J. N. Quinton*，利用实时粒子跟踪理解降雨事件期间的土壤颗粒运动，《*Catena*》*150, 32 (2017).* [77] *D. Roubinet*、*J.-R. De Dreuzy* 和 *D. M. Tartakovsky*，层级裂隙岩石中反常输运的粒子跟踪模拟，《计算地球科学》*50, 52 (2013).* [78] *Y. Meroz*、*I. M. Sokolov* 和 *J. Klafter*，混合起源的亚扩散：遍历性与非遍历性共存之时，《物理评论*E*》*81, 010101 (2010).* [79] *W. Wang*、*R. Metzler* 和 *A. G. Cherstvy*，具有分数高斯噪声的尺度化布朗运动的反常扩散、老化与非遍历性：相关实验观察和模型综述，《物理化学化学物理》*24, 18482 (2022).* [80] *S. C. Lim* 和 *S. V. Muniandy*，用于模拟反常扩散的自相似高斯过程，《物理评论*E*》*66, 021114 (2002).* [81] *J-.H. Jeon*、*A. V. Chechkin* 和 *R. Metzler*，尺度化布朗运动：一种具有时间依赖扩散率、用于描述反常扩散的悖论性过程，《物理化学化学物理》*16, 15811 (2014).* [82] *W. Wang*、*A. G. Cherstvy*、*A. V. Chechkin*、*S. Thapa*、*F. Seno*、*X. Liu* 和 *R. Metzler*，具有随机扩散率的分数布朗运动：相关时间以下出现的残余非遍历性，《物理学杂志*A*辑》*53, 474001 (2020).* [83] *W. Wang*、*F. Seno*、*I. M. Sokolov*、*A. V. Chechkin* 和 *R. Metzler*，相关随机扩散率过程中的意外交叉转变，《新物理学杂志》*22, 083041 (2020).*