arXiv:2302.04921v1 [math.QA] 9 Feb 2023

酉连接的 Q 系统完备性

MAINAK GHOSH

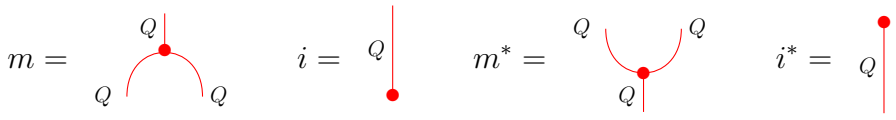
ABSTRACT. Q-系统是 C*-张量范畴中可分 Frobenius 代数对象的酉版本。在最近与 P. Das、S. Ghosh 和 C. Jones 合作的工作中，作者通过构建一个 2-范畴 UC，将布拉泰利图和酉联络范畴化。我们证明，UC 中的每个 Q-系统都可分裂。

1. INTRODUCTION

V. Jones 关于子因子指标的开创性成果 [J83] 推动了子因子理论的显著发展。有限指标 II_1 因子的有限指数子因子的标准不变量最初被定义为一个 λ-格 [P95]。在 [M03], 中，作为 C*-张量范畴或 C*-2-范畴中 Frobenius 代数对象的酉版本的 aQ-系统, 被提出作为有限指数子因子标准不变量的另一种公理化方式（[O88], [P95], [J99]）。这进一步推动了小指数子因子的分类（[JMS14], [AMP15]）。Q-系统最早在 [L94] 中被引入，用以刻画与无限因子的有限指数子因子相关联的典范自同态。

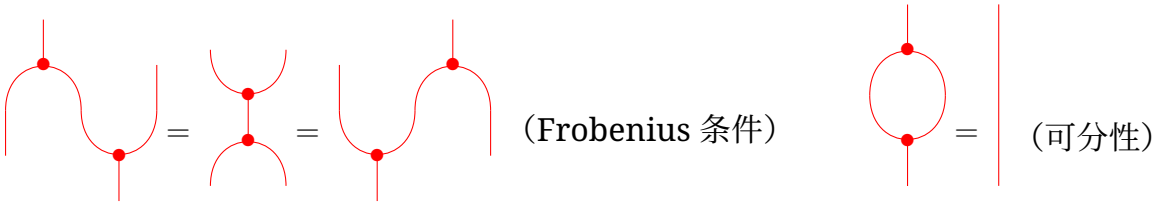
给定任意刚性半单 C*-张量范畴 $\mathcal{C}$（具有简单张量单位 $\mathbb{I}$）、一个不可分解的 Q-系统 $Q \in \mathcal{C}$（$\mathrm{End}_{Q\text{-}Q}(Q) \simeq \mathbb{C}$），以及一个全忠实酉张量函子 $H\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Bim}(N)$（其中 II_1 为因子 N），我们可以应用实现过程（[JP19], [JP20]）构造一个包含 N 的因子 II_1 factor M，将其表示为广义交叉积 $N \rtimes_H Q$。此外， N 的每个不可约有限指数扩张都具有这种形式。

在 C*-2-范畴的语境中，一个 Q-系统是一个 1-胞腔 ${}_bQ_b \in \mathcal{C}_1(b,b)$，连同两个 2-胞腔 $m\colon Q \boxtimes Q \to Q$（乘法）和 $i\colon 1_b \to Q$（单位），它们用图形表示如下：



这些 2-胞腔满足以下条件：





最近，[CPJP22] 引入了 C*/W*-2-范畴的 Q-系统完备化概念。与可分单子的2-范畴 [DR18] 以及 [GJF19]中的凝聚单子相比，这是 C*/W*-2-范畴高阶幂等完备化的另一种形式。给定一个 C*/W*-2-范畴 $\mathcal{C}$，其 Q-系统完备化是由 $\mathcal{C}$ 中的 Q-系统、双模和交织算子构成的 2-范畴 QSys($\mathcal{C}$)。存在一个典范包含 *-2-函子 $\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{QSys}(\mathcal{C})$，它在所有 hom范畴上总是一个等价。若 $\iota_{\mathcal{C}}$ 是 *-2-范畴的一个 *等价，则称 $\mathcal{C}$ 为 Q-系统完备。我们在预 C*-2-范畴的背景下研究 Q-系统完备性。若每个 Q-系统在 $\mathcal{C}$ 中都「分裂」，则称预 C*-2-范畴 $\mathcal{C}$ 为 Q-系统完备。

在我们最近与他人合作发表的论文 [DGGJ22], 中，我们从更大的 W*-2-范畴 $\mathrm{UC}^{\mathrm{tr}}$ 的角度，对布拉泰利图和酉联络给出了高阶范畴解释。$\mathrm{UC}^{\mathrm{tr}}$ 的 0-胞腔是带有迹加权数据的布拉泰利图。这些图推广了由有限指数子因子的相对交换子塔所得到的布拉泰利图。$\mathrm{UC}^{\mathrm{tr}}$ 的 1-胞腔是布拉泰利图之间与迹数据相容的酉联络。最后，2-胞腔被定义为某个 ucp（幺正完全正）映射的不动点。为了定义 $\mathrm{UC}^{\mathrm{tr}}$，我们首先必须考虑一个纯代数范畴 UC。UC 的 0-胞腔是布拉泰利图（不含迹数据）。UC 的 1-胞腔是酉联络，而 2-胞腔是连接之间的自然交织算子，我们称之为平坦序列。UC 与 [CPJ22] 中研究的 2-范畴非常相似，后者讨论的是融合范畴在 AF-C*-代数上的作用；两者仅在 0-胞腔和 2-胞腔层面存在细微差异。

我们研究 UC 的 Q-系统完备性。以下是本文的主定理。

定理1.1。UC 是 Q-系统完备的。

给定 UC 中的一个 Q-系统，要展示它的“分裂”，需要构造一个合适的 0-胞腔，以及一个从初始 0-胞腔到新构造的 0-胞腔的合适可对偶化 1-胞腔，使其能够实现分裂。我们在 UC 中构造合适 0-胞腔的思路来自[CPJP22] ，而我们运用子因子理论思想（[B97], [EK98], [P89],[P94]）来构造 UC 中合适的 1-胞腔。

我们的研究引出了至少两个自然的问题。函子的双忠实性（即函子及其伴随均为忠实函子）在取得我们的结果中发挥了重要作用。因此，第一个问题是：如果去掉 UC 中 0-胞腔和 1-胞腔的双忠实条件（见定义 2.8），修改后的 2-范畴是否仍然是 Q-系统完备的？第二，$\mathrm{UC}^{\mathrm{tr}}$ 是否 Q-系统完备？我们将在未来的工作中尝试回答这些问题。

论文的结构如下。第2节将快速介绍一些基本结果和定义，并建立一些图示记法。在第3节中，我们探讨 UC 中的Q-系统，并证明一些有助于构造 UC 中适当 0-胞腔的结果。在第4节中，我们构造该 0-胞腔和可对偶化 1-胞腔，随后证明我们的主定理。

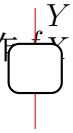
致谢。作者谨此感谢 Shamindra Kumar Ghosh、Corey Jones 和 David Penneys 富有成果的多次讨论。

2. Preliminaries

本节将介绍有关 Q-系统完备化以及酉联络 2-范畴 UC 的必要背景。

2.1. 与 2-范畴相关的记号。关于 2-范畴的基础知识，请读者参阅 [JY21] 。

设 $\mathcal{C}$ 是一个 2-范畴， a、 $b \in \mathcal{C}_0$ 是两个 0-胞腔。从 $a \xrightarrow{X} b$ 出发的 1-胞腔记作 ${}_bX_a$。图示中，1-胞腔用红色线条表示，2-胞腔用一个带有穿过其中的线串的方框表示。设有两个 1-胞腔 X、$Y \in \mathcal{C}_1$（a、 b）

以及一个 2-胞腔 $f \in \mathcal{C}_2$（X、 Y）。那么我们将 f 记作  我们将张量积写作

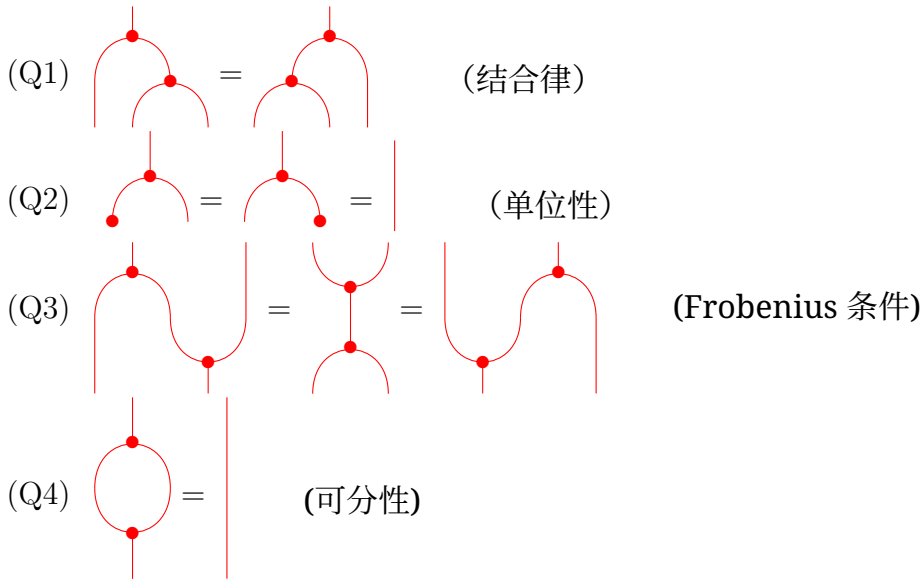
$\boxtimes_b$，并将 1-胞腔从右向左排列 ${}_cY \boxtimes_b X_a$。C*-2-范畴这一概念据信最早见于 [LR97]。关于 C*/W*-2-范畴的基础知识，请读者参阅（[CPJP22],[GLR85]）。

2.2. Q-系统完备化。

定义 2.1. 预 C*-2-范畴是这样一种 2-范畴：其同态 1-范畴满足 C*-范畴的所有条件，但 2- 胞空间不必关于给定范数完备。

设 $\mathcal{C}$ 是一个预 C*-2-范畴。

定义 2.2. $\mathcal{C}$ 中的一个 Q-系统是一个 1-胞腔 ${}_bQ_b \in \mathcal{C}_1(b,b)$，连同乘法映射$m \in \mathcal{C}_2($ $Q \boxtimes_b Q, Q)$和单位映射 $i \in \mathcal{C}_2(1_b, Q)$，如第 1 节所述，并满足以下性质：



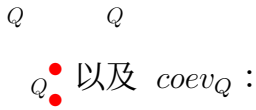
定义 2.3. [CPJP22] 给定一个 Q-系统 (Q, m, i)，我们定义

$d_Q :=$  $\in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1_b)^+$

.

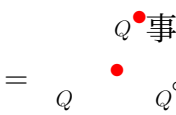
- 如果 d_Q 可逆，我们称 Q 是非退化的，或称其为 1_b的扩张。
- 如果 d_Q 是幂等的，我们称 Q 为 1_b的一个直和项。

我们回顾一下此前在（[CPJP22], [Z07]）中提到的关于 C*-张量范畴中 Q-系统的一些事实。

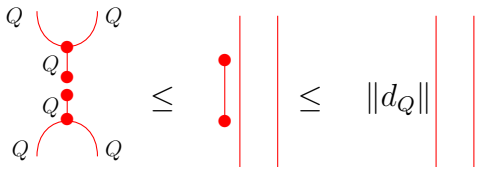


事实 2.4。 (F1) Q 是一个自对偶 1-胞，且满足 ev_Q :

以及 $coev_Q$: =



。 (F2) 利用 (F1) 和 [[Z07] 引理 1。*16]* 我们得到以下不等式:

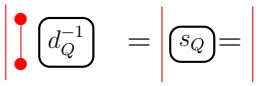


(F3) 根据 *[*[Z07] 推论 1，*19]* 要么 d_Q 可逆，要么零是 Spec(d_Q) 中的一个孤立点。定义，f : Spec(d_Q) $\to \mathbb{C}$ 为

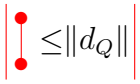
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

滥用记号，令 $d_Q^{-1} := f(d_Q)$。根据连续函数演算，令$s_Q := d_Q d_Q^{-1}$ 。于是我们有如下:

(a)



(b)



定义 2.5。设 $\mathcal{C}$ 是一个预 C*-2-范畴，且 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$。 ${}_bX_a$的一个酉可分左对偶是一个对偶 $\left({}_a\overline{X}_b, ev_X, coev_X\right)$，满足 $ev_X \circ ev_X^* = \mathrm{id}_{1_a}$ [参见例 3.9 [CPJP22]]。

给定 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 的酉可分左对偶，${}_bX \boxtimes \overline{X}_b \in \mathcal{C}_1(b,b)$ 是一个 Q-系统a，其乘法映射为 $m := \mathrm{id}_X \boxtimes ev_X \boxtimes \mathrm{id}_{\overline{X}}$，单位映射为 $i := coev_X$。

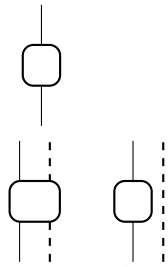
给定一个 Q-系统 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$，如果它具有上述形式，那么我们称该 Q-系统Q “分裂”。

定义 2.6. 若预 C*-2-范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个 Q-系统都“分裂”，则称其为 Q-系统完备；也就是说，给定一个 Q-系统 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$，存在一个对象 $c \in \mathcal{C}_0$ 和一个可对偶化 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(c,b)$，它具有酉可分对偶 $\left(\overline{X}, ev_X, coev_X\right)$，使得 (Q, m, i) 与 ${}_bX \boxtimes \overline{X}_b$ 作为 Q-系统同构。$_c$

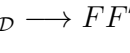
注 2.7. 在 [CPJP22]，中，Q-系统完备化是在 C*/W*-2-范畴的背景下处理的。已证明，定义 2.6 等价于他们对 C*/W*-2-范畴的 Q-系统完备性的定义（见定理 3.36 [CPJP22]）。

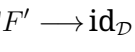
2.3. 酉联络。图示记法。我们将采用第 2.1 节中提及的图形演算，应用于范畴的 2-范畴。

D(i) 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，且 $f \in \mathcal{C}(C, D)$。记作 f，两个态射的复合将表示为两个竖直堆叠并带有标签的方框。(ii) 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为两个范畴，$F, \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为两个函子。那么，自然*G*变换 $\eta : F \to G$ 将记作 η。对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 x，$G \quad x \quad GF$ 态射 $\eta_x \colon Fx \to Gx$ 将记作 $\eta_x \quad = \quad \eta \quad x$。$F \quad x \quad F$



(iii) 对于两个半单 C*-范畴之间的 $*$-线性函子 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，我们将共轭方程的一个解记作

$\rho =$  $: \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \longrightarrow FF'$ and $\rho' =$  $: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow F'F$

$\rho^* =$  $: FF' \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ and $[\rho']^* =$  $: F'F \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

其中 $F' \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是 F 的一个伴随函子。

我们将以显而易见的方式扩展上述字典（即范畴世界中的事物与图示之间的对应关系）。例如，态射与自然变换的复合将用垂直堆叠方框来表示，而对象的张量积（分别是函子的复合）则用平行的竖线来表示。为求简便，有时若方框（标记为态射或自然变换）发出的线（标记为对象或函子）可由上下文推知，我们便不标注所有这些线。除非另有说明，为了区分 0-胞腔中的函子与 1-胞腔中的函子，我们将前者表示为黑色线，后者表示为红色线。

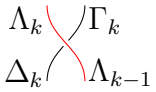
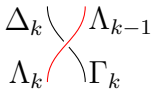
我们来回顾一下文献 [DGGJ22] 中所述的酉联络 UC 的预 C*-2-范畴定义。

定义 2.8。2-范畴 UC 由以下部分构成：

(1) 0-胞是 $*$-线性的双忠实函子 $\Gamma_k \colon \mathcal{M}_{k-1} \to \mathcal{M}_k$（其中 $\mathcal{M}_k$ 是一个有限半单 C*-范畴，其简单对象的同构类由顶点集 $V_{\mathcal{M}_k}$索引）。我们将这样的 0-胞记作 $\left\{\mathcal{M}_{k-1} \xrightarrow{\Gamma_k} \mathcal{M}_k\right\}_{k\geq 1}$，有时也简单记作 $\Gamma_\bullet$。

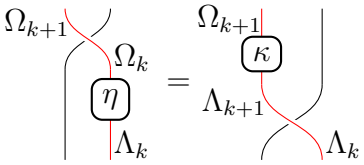
（2）从 0-胞腔 $\left\{\mathcal{M}_{k-1} \xrightarrow{\Gamma_k} \mathcal{M}_k\right\}_{k\geq 1}$ 到 0-胞腔 $\left\{\mathcal{N}_{k-1} \xrightarrow{\Delta_k} \mathcal{N}_k\right\}_{k\geq 1}$ 的一个 1-胞腔由一列 $*$-线性双忠实函子 $\{\Lambda_k : \mathcal{M}_k \to \mathcal{N}_k\}_{k\geq 0}$ 以及自然酉变换 W_k : $\Delta_k\Lambda_{k-1} \to \Lambda_k\Gamma_k$（对 $k \geq 1$）组成。这样的 1-胞腔记作 $(\Lambda_\bullet, W_\bullet)$，或简记为 $\Lambda_\bullet$，而 $W_\bullet$ 称为与 $\Lambda_\bullet$关联的酉联络。从 $\Gamma_\bullet$ 到 $\Delta_\bullet$ 的 1-胞腔集合记作 $\mathrm{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet)$。

从图示上看，1-胞腔中出现的自然酉变换 W_k 将表示为 d

by  and W_k^* by 

(3) L et $\Lambda_\bullet$, $\Omega_\bullet \in \mathrm{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet)$。为描述 2-胞腔，我们需要以下定义 :

定义 2.9。一对 $(\eta, \kappa) \in \mathrm{NT}(\Lambda_k, \Omega_k) \times \mathrm{NT}(\Lambda_{k+1}, \Omega_{k+1})$ 称为满足 y

交换关系，如果条件  holds.

注 2.10。交换关系中的这一对元素分别关于每个变量唯一，也就是说，如果 (η, κ_1) 和 (η, κ_2)（分别地，(η_1, κ) 和 (η_2, κ)）都满足交换关系，那么 $\kappa_1 = \kappa_2$（分别地，$\eta_1 = \eta_2$）；这是因为连接是酉的，并且函子 Γ_k 和 Δ_k 是双忠实的。

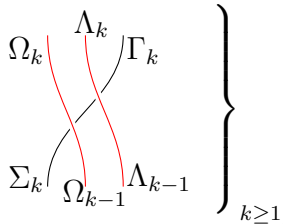
令 $\mathrm{Ex}(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)$ 表示序列 $\{\eta^{(k)} \in \mathrm{NT}(\Lambda_k, \Omega_k)\}_{k\geq 0}$ 的空间，其中存在某个 N，使得对于所有 $k \geq N$，(η_k, η_{k+1}) 满足交换关系。考虑子空间

对所有 $k \geq N$，存在某个 $N \in \mathbb{N}\}$，使得 $\mathrm{Ex}_0(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet) := \{\{\eta_k\}_{k\geq 0} \in \mathrm{Ex}(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet) : \eta_k = 0$

我们定义 2-胞腔空间

$$\mathbf{UC}_2(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet) := \frac{\mathrm{Ex}(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)}{\mathrm{Ex}_0(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)}$$

(4) 对于 $\Omega_\bullet \in \mathrm{UC}_1(\Delta_\bullet, \Sigma_\bullet)$ 和 $\Lambda_\bullet \in \mathrm{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet)$，定义

$$\Omega_\bullet \boxtimes \Lambda_\bullet := \left(\{\Omega_k \Lambda_k\}_{k\geq 0}, \left\{ \text{  } \right\}_{k\geq 1} \right). \tag{2.1}$$

为方便记号，我们不再用序列的等价类表示一个 2-胞腔，而是直接使用该类中的一个序列，并将其截断到某一级；在这一级之后，每一对连续项都满足交换关系，即 $\{\eta^{(k)}\}_{k\geq N} \in \mathrm{UC}_2(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)$，其中 $(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)})$ 对所有 $k \geq N$ 都满足交换关系。

注 2.11. 根据 $\mathrm{UC}_2(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)$ 的定义，我们观察到，两个 2-胞腔 $\{\eta^{(k)}\}_{k\geq N}, \{\tau^{(k)}\}_{k\geq L} \in \mathrm{UC}_2(\Lambda_\bullet, \Omega_\bullet)$ 相等，当且仅当 $\eta^{(k)} = \tau^{(k)}$ 最终成立。因此，如果存在一个自然变换序列 $U_k : \Lambda_k \to \Omega_k$，使其从某一级 l 起满足交换关系，并且最终实现 Λ_k 与 Ω_k 之间的同构，那么两个 1-胞腔 $\Lambda_\bullet$ 和 $\Omega_\bullet$ 在 UC 中同构。

关于 2-胞腔的水平复合和垂直复合，请读者参阅 [DGGJ22]。

给定一个 0-胞腔 $\Gamma_\bullet \in \mathrm{UC}_0$，，我们固定一个对象 $m_0 := \bigoplus v \in \mathrm{ob}(\mathcal{M}_0)$。考虑有限维 C*-代数序列 $\{A_k := \mathrm{End}(\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0)\}_{k\geq 0}$（假设 $A_0 =$6

End(m_0))，以及由下式给出的含单位 $*$-代数包含

$$A_{k-1} \ni \alpha \hookrightarrow \Gamma_k \alpha \in A_k \ . \tag{2.2}$$

事实上， A_{k-1} 在 A_k 中的布拉泰利图由图 Γ_k给出。对于 0-胞腔$\Gamma_\bullet$，我们关联如下的 $*$- 代数 $A_\infty \colon = \underset{k\geq 0}{\cup} A_k$

对于每个 1-胞腔（$\Lambda_\bullet$， $W_\bullet$）$\in$UC$_1$（$\Gamma_\bullet$， $\Delta_\bullet$），我们将关联一个 A_∞-B_∞ 右对应，其中 n_0 和 B_k与 $\left\{\mathcal{N}_{k-1} \xrightarrow{\Delta_k} \mathcal{N}_k\right\}_{k\geq 1}$ 的关系，恰好如同 m_0 和 A_k与 $\left\{\mathcal{M}_{k-1} \xrightarrow{\Gamma_k} \mathcal{M}_k\right\}_{k\geq 1}$ 的关系一样。

对于 $k \geq 0$，令 $H_k \colon = \mathcal{N}_k$（$\Delta_k \cdots \Delta_1 n_0$， $\Lambda_k \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0$）。我们可以按以下方式在 H_k 上定义显然的 A_k-B_k-双模结构：

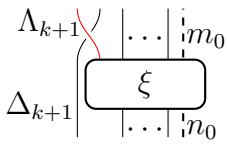
$$A_k \times H_k \times B_k \ni (\alpha, \xi, \beta) \longmapsto \Lambda_k(\alpha) \circ \xi \circ \beta \ \in H_k \ . \tag{2.3}$$

再次，存在一个 B_k值内积于 H_k 上，定义为

$$H_k \times H_k \ni (\xi, \zeta) \overset{\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_k}}{\longmapsto} \langle \xi, \zeta \rangle_{B_k} \coloneqq \zeta^* \circ \xi \ \in B_k \ . \tag{2.4}$$

接下来，注意到 H_k 通过映射嵌入 H_{k+1} 中

$$H_k \ni \xi \overset{I_{k+1}}{\longmapsto} \left[(W_{k+1})_{\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0}\right] \circ [\Delta_{k+1} \xi] \ = \ \in H_{k+1} \ . \tag{2.5}$$



引理 2.12。（[DGGJ22]）包含 $H_k \hookrightarrow H_{k+1}$、 $A_k \hookrightarrow A_{k+1}$、 $B_k \hookrightarrow B_{k+1}$ 及相应的作用以显然的方式相容。

令 $H_\infty \coloneqq \underset{k\geq 0}{\cup} H_k$，显然它成为一个 A_∞-B_∞ 右对应。将 1-胞腔（$\Lambda_\bullet$， $W_\bullet$）关联到 A_∞-B_∞ 右对应 H_∞。

对于右B_∞-模 H_∞，相对于 B_∞值内积，我们还有一个 Pimsner-Popa（PP）基。

引理 2.13。（[DGGJ22]）存在 H_0的一个子集 $\mathscr{S}$，使得$\sum_{\sigma\in\mathscr{S}} \sigma \circ \sigma^* \ = \ 1_{\Lambda_0 m_0}$；此外，任何这样的 $\mathscr{S}$ 都是右 B_∞-模 H_∞的 PP 基。

定理 2.14. ([DGGJ22]) 从一个 2-胞腔 $\left\{\eta^{(k)} \in \text{NT}\ (\Lambda_k, \Omega_k)\right\}_{k\geq K}$ 出发，我们有一个与 $k \geq K$ 无关的交织算子 $\Phi_{\eta^{(k)}_{\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0}} \in {}_{A_\infty}\mathcal{L}_{B_\infty}(H_\infty, G_\infty)$。

反过来，对于每个 $T \in {}_{A_\infty}\mathcal{L}_{B_\infty}(H_\infty, G_\infty)$（$=$ A_∞-B_∞ 线性可伴随算子空间），以及任意 $k \geq K_T \coloneqq \min\ \{l \colon TH_0 \subset G_l\}$，都存在唯一的 $\eta^{(k)} \in \text{NT}(\Lambda_k, \Omega_k)$ 使得 $T = \Phi_{\eta^{(k)}_{\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0}}$。此外，对于所有 $k \geq K_T$， $\left(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)}\right)$ 满足交换关系。

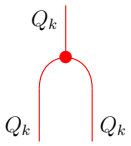
显然，UC 成为一个预 C*-2-范畴。

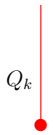
注 2.15. 在第 2.3 节开头所述的图示记法的 (ii) 中，我们将对象 m_0 表示为虚线，并将任何其他对象表示为点线。

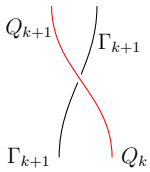
3. Q-system in UC

在本节中，给定 UC 中一个关于某个 0-胞腔的 Q-系统，我们将探究相关双模的某些结构性质；这些性质将进一步使我们能够在下一节中构造新的 0-胞腔和一个新的可对偶化 1-胞腔，从而实现 UC 的 Q-系统完备化。

设 $(\Gamma_\bullet, \mathcal{M}_\bullet)$ 是 UC 中的一个 0-胞腔，且 $(Q_\bullet, W^Q_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 是 $\mathrm{UC}_1((\Gamma_\bullet, \mathcal{M}_\bullet), (\Gamma_\bullet, \mathcal{M}_\bullet))$ 中的一个 Q-系统。图示地，每个自然变换 m_k、i_k 和 W^Q_{k+1} 分别表示为以下图示：

$m_k :=$ 

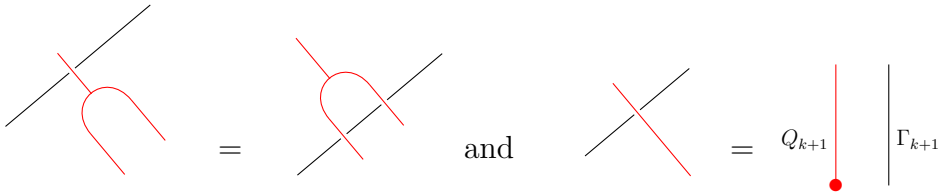
, $i_k :=$ 

and $W^Q_{k+1} :=$ 

$\forall k \geq 0$

.

图示地，关于 $W_\bullet$ 的 m_k 和 i_k 的交换关系表示如下：

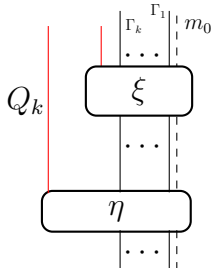


最终对所有 k 均成立。

注3.1. 由注 2.11 可知，对于 UC 中的 Q-系统 $(Q_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$，自然变换 m_k 和 i_k 最终对所有 k 均满足定义 2.2 中的 (Q1)-(Q4)。在本文余下部分，我们固定一个自然数 l，使得 m_k 和 i_k 满足 (Q1)-(Q4) 以及关于 $k \geq l$ 的交换关系。

考虑与 0-胞腔 $\Gamma_\bullet$ 相关联的有限维 C*-代数滤过 $\{A_k := \mathrm{End}(\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0)\}_{k\geq 1}$，其中 m_0 是 $\mathcal{M}_0$ 中一组最大的两两非同构简单对象之直和。令 $\{H_k := \mathcal{M}_k(\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0, Q_k \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0)\}_{k\geq 1}$ 为与 $Q_\bullet$ 相关联的右对应。根据构造（等式 (2.3) 和等式 (2.4)），H_k 是一个右 A_k-A_k 对应。因此，可以将 H_k 视为 2-范畴 C*Alg 中的一个 1-胞腔；该范畴由 C*-代数对上的右对应双模构成。我们将进一步证明，对于 $k \geq l$，每个 H_k 都是 $\mathrm{C^*Alg}(A_k, A_k)$ 中的一个 Q-系统。为此，我们将使用以下识别。

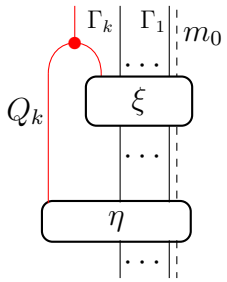
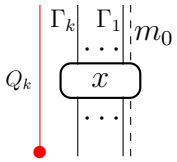
注3.2. 令 $\{Y_k := \mathcal{M}_k(\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0, Q_k^2 \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0)\}_{k\geq 1}$ 表示与 UC 中的 1-胞腔 $Q_\bullet \boxtimes Q_\bullet$ 相关联的右对应。[DGGJ22] 的命题 3.12 的证明 [

告诉我们，映射 $\xi \boxtimes \eta \longmapsto$ 

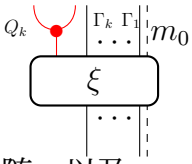
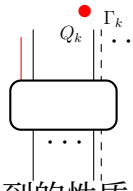
是 $H_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k$ 之间的同构

并且作为右侧 A_k-A_k 对应。

通过上述识别，UC~中的乘法2-胞腔 $m_\bullet$ 和单位2-胞腔 $i_\bullet$ 分别对应于双模层面的映射 $\widetilde{m}_k\colon H_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \to H_k$ 和 $i_k\colon A_k \to H_k$；更明确地说

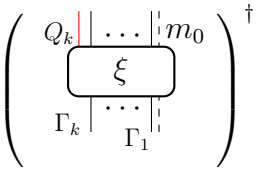
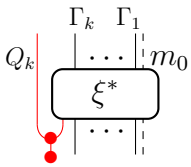
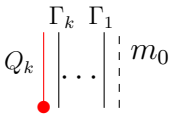
$\widetilde{m}_k(\xi \boxtimes \eta) :=$  and $\widetilde{i}_k(x) :=$  .

~命题3.3. 对于每个 $k \geq l$， $\widetilde{m}_k$ 和 i_k 都是可伴随映射，因此是~C*Alg 中的 2-胞腔。此外，对于每个 $k \geq l$，$(H_k, \widetilde{m}_k, i_k)$ 在 C*Alg(A_k, A_k) 中构成一个 Q-系统。

证明. 根据注3.2中的识别， $\widetilde{m}_k$ 的伴随为  。现在使用 $\widetilde{m}_k$ 、 i_k 及其伴随，以及~而 i_k 的结果为  $m_\bullet$ 和 $i_\bullet$ 在预备知识中提到的性质 (Q1-Q4)，以及 $\left(H_k, \widetilde{m}_k, \widetilde{i}_k\right)$ 的结合律、单位性、Frobenius 性质和可分性都很容易得出。□

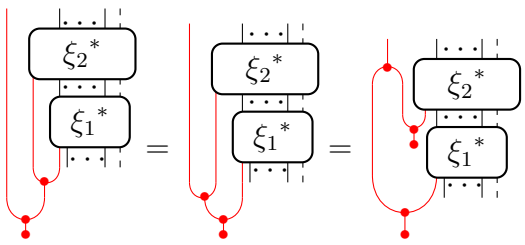
我们现在探讨 H_k的某些结构性质。我们借鉴 [CPJP22]中的思想，证明以下命题。

命题 3.4. 对每个 $k \geq l$，空间 H_k 是一个含单位C*-代数，其乘法、伴随和单位分别定义为

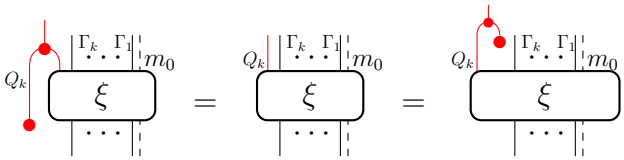
$\xi \cdot \eta := \widetilde{m}_k(\xi \boxtimes \eta)$,  =  *and* 

分别对应于 ξ、 $\eta \in H_k$。

证明。事实上， $\xi^{\dagger\dagger} = \xi$。再者

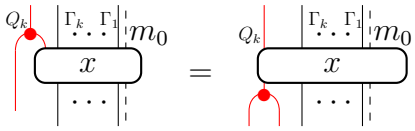
$(\xi_1.\xi_2)^\dagger =$  $= \xi_2^\dagger.\xi_1^\dagger$

其中第二个等式由结合律得出，第三个等式则来自 Frobenius 和单位元条件。此外，

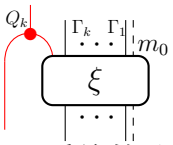
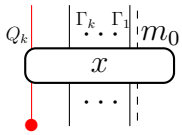
$1_{H_k}\cdot\xi =$  $= \xi\cdot 1_{H_k}.$

因此， H_k 成为一个含单位的*-代数。

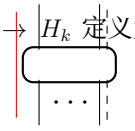
为了证明 H_k 是一个 C*-代数，我们证明它同构于某个有限维 C*-代数的一个*-子代数。定义

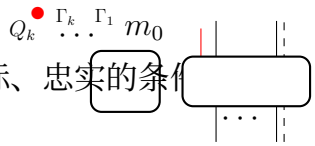
$S_k := \Big\{ x\in \mathrm{End}(Q_k\Gamma_k\cdots\Gamma_1 m_0) \;\Big|$  $\Big\}$

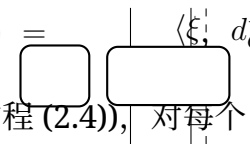
它包含在有限维 C*-代数 End($Q_k\Gamma_k\cdots\Gamma_1 m_0$) 中。显然， S_k 对乘法封闭，且在 * 运算下封闭（利用 Frobenius 性质和单位性）。定义$\phi_1^{(k)}$： $H_k\to S_k$ 和 $\phi_2^{(k)}$： $S_k\to H_k$ 如下：

$\phi_1^{(k)}$ $(\xi) :=$  $\in S_k$ （根据 Q_k的结合律）以及 $\phi_2^{(k)}$ $(x) :=$  .

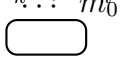
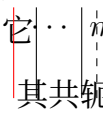
现在，利用 Q-系统的公理，例行验证可知， $\phi_1^{(k)}$ 和 $\phi_2^{(k)}$ 是含单位的*-同态。此外， $\phi_1^{(k)}$ 和 $\phi_2^{(k)}$ 互为逆映射，因此它们是同构。□

$\Gamma_k\cdots\Gamma_1 m_0$引理 3.5. 映射 i_k： $A_k\to H_k$ 定义为 $i_k(a)$ ： $= \widetilde{Q_k}$ a是一个含单位的  C*-代数的包含。反过来，映射 E_k： $H_k\to A_k$ 定义为

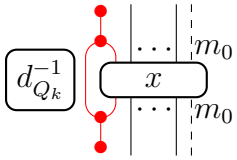
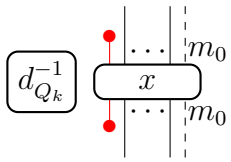
 $E_k(\xi) := d_{Q_k}^{-1}$ ξ(其中 $d_{Q_k} =$ ) 是一个有限指标、忠实的条件

$\Gamma_k\ldots m_0$期望满足 $E_k\left(\eta^\dagger\cdot\xi\right) =$  $\langle\xi, d_{Q_k}^{-1}$ $\eta\rangle_{A_k}$(其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{A_k}$是右 A_k-

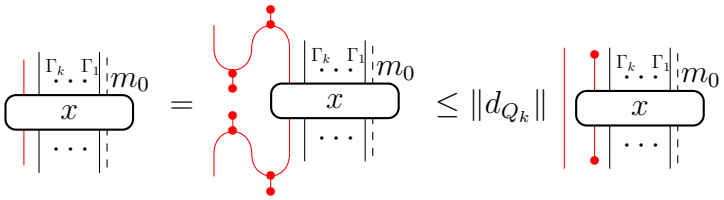
$\ldots\Gamma_k$ m_0值内积，定义见方程 (2.4))，对每个 $k\geq l$ 。

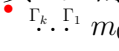
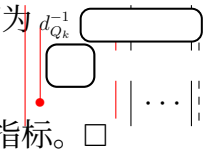
证明。 我们利用 *-代数同构 ϕ_1， ϕ_2 它们将 H_k 与 S_k 联系起来，并发现映射 $\widetilde{i}_k$： $A_k\to H_k$ 对应于 $A_k\ni a \overset{\phi_1^{(k)}\circ\widetilde{i}_k}{\longmapsto} Q_k\, a =$ Q_k  $\in S_k$， 它  m_0确实是一个包含，因为 Q_k 是一个双忠实函子。现在， Q_k 是对称自对偶的，其共轭方程的解由  给出。因此，我们得到一个条件期望

期望由下式给出

$$S_k \ni x \overset{E'}{\longmapsto}$$  $$= \quad \in A_k$$ 

其中等式由 S_k 的定义和可分性公理得出。这个条件期望自动是忠实的，并通过 *-同构 $\phi_2^{(k)}$ 转化为 E_k （在陈述中定义）。现在，对于 $x \in S_k^+$ ，我们有



其中第一个等式由事实 2.4 的 (F1) 得出，第二个不等式则由 (F2) 得出事实 2.4 的  以及 S_k的定义。我们将最后一项改写为  $\leq \|d_{Q_k}\| \; Q_k(E'(x))$。因此，条件期望 E'，进而 E_k 具有有限指标。□

接下来，我们将检验可数族有限维 C*-代数 $\{H_k\}_{k\geq 0}$ 与包含 $H_k \overset{I_{k+1}}{\hookrightarrow} H_{k+1}$ 在 $k \geq 0$ 下的相容性（如 2.5 节所述）。

引理 3.6. 对所有 k，包含 $H_k \overset{I_{k+1}}{\hookrightarrow} H_{k+1}$ 最终是一个 $*$-代数同态。此外，有限维 C*-代数的含单位滤过 $\{A_k\}_{k\geq 0}$ （如 2.2 节所述）通过包含 i_k 嵌入 $H_\infty = \underset{k}{\cup} H_k$ 中：对所有 k， $A_k \to H_k$ 最终成立。特别地，当 (m_k, m_{k+1}) 和 (i_k, i_{k+1}) 开始满足交换关系时，上述条件便开始成立。

证明. 这可由 m_k 和 i_k的交换关系，以及$\sim \widetilde{m}_k$ 和 i_k的定义轻易推出。□

注 3.7. 利用引理 2.13$\sigma\in\mathscr{S}_k$和方程 (2.5)，我们可以得到 $\mathscr{S}_k \subset H_k$ ，使得 $\sum \sigma\sigma^* = 1_{Q_k\Gamma_k\cdots\Gamma_1 m_0}$。

4. Splitting of $(Q_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$

本节首先利用上一节的结果，在 UC 中构造一个合适的 0-胞腔。接着构造一个可对偶化 1-胞腔 $X_\bullet$ ，其从 $\Gamma_\bullet$ 指向新构造的 0-胞腔。随后，我们构造一个从 $\overline{X}_\bullet \boxtimes X_\bullet$ 到 $Q_\bullet$的酉，它将代数映射互相交织，并最终满足交换关系。

记号：本节中，对于有限维 C*-代数 A，我们用 $\mathcal{R}_A$ 表示有限维（作为复向量空间）的右 A-对应范畴。注意， $\mathcal{R}_A$ 是一个有限半单 C*-范畴。

4.1. UC 中的新 0-胞腔。

设 $l \in \mathbb{N}$ 如注3.1所述

对于每个 $k \geq 0$，考虑 C*-代数包含 $A_k \overset{Q_k}{\hookrightarrow} C_k := \mathsf{End}(Q_k \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0)$

…以及 $C_k \ni \gamma \longmapsto \boxed{\quad} \gamma \quad \in C_{k+1}$。注意 $Q_k(A_k) \subset S_k \subset C_k$ 对所有 $k \geq l$。考虑

…如下定义的 C*-代数滤过 $\{B_k\}_{k\geq 0}$：

$$B_k = \begin{cases} H_k & \text{if } k \geq l \\ S_l \cap C_k & \text{if } 0 \leq k \leq l-1 \end{cases}$$

其中，包含 $B_k \hookrightarrow B_{k+1}$ 由 I_k 给出，对于 $k \geq l$，令 $0 \leq k \leq l-2$ 为集合包含，而剩余的包含 $B_{l-1} \hookrightarrow B_l$ 为 $\phi_2^{(l)}\Big|_{S_l \cap C_{l-1}} : S_l \cap C_{l-1} \to H_l$（其中 $\phi_2^{(l)} : S_l \to H_l$是命题 3.4 中定义的同构）。

定义 $\Delta_{k+1} := \bullet \underset{B_k}{\boxtimes} B_{k+1} : \mathcal{R}_{B_k} \to \mathcal{R}_{B_{k+1}}$ 对 $k \geq 0$。每个 Δ_k 都是双忠实函子（这是由有限维 C*-代数的含幺嵌入 $B_k \hookrightarrow B_{k+1}$ 对$k \geq 0$推出的）。因此，我们有一个 0-胞腔 $(\Delta_\bullet, \mathcal{R}_{B_\bullet}) \in \mathsf{UC}_0$。

类似地，利用有限维 C*-代数的含单位滤过 $\{A_k\}_{k\geq 0}$（分别为 $\{C_k\}_{k\geq 0}$），我们定义另一个 0-胞腔 $\Sigma_\bullet$（分别为 $\Psi_\bullet$），其定义为 $\Sigma_k := \bullet \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} A_k : \mathcal{R}_{A_{k-1}} \to \mathcal{R}_{A_k}$ $(\text{resp., } \Psi_k := \bullet \underset{C_{k-1}}{\boxtimes} C_k : \mathcal{R}_{C_{k-1}} \to \mathcal{R}_{C_k})$ for $k \geq 1$.

4.2. 从 $(\Gamma_\bullet, \mathcal{M}_\bullet)$ 到 $(\Delta_\bullet, \mathcal{R}_{B_\bullet})$ 的可对偶化 1-胞腔的构造。

我们的策略是构造两个可对偶化 1-胞腔 $(F_\bullet, W_\bullet^F) : \Gamma_\bullet \to \Sigma_\bullet$ 和 $(\Lambda_\bullet, W_\bullet^\Lambda) : \Sigma_\bullet \to \Delta_\bullet$，并将 $(X_\bullet, W_\bullet)$ 定义为它们在 UC 中的复合，如定义 2.8 的 2.1 所示，由此得到所需的可对偶化 1-胞腔 $X_\bullet : \Gamma_\bullet \to \Delta_\bullet$（位于 UC 中）。我们首先证明以下简单事实。

命题 4.1. 给定一个有限半单 C*-范畴 $\mathcal{M}$ 和一个包含每个简单对象作为子对象的对象 m，函子 $F := \mathcal{M}(m, \bullet) : \mathcal{M} \to \mathcal{R}_A$ 是一个等价，其中 $A = \mathsf{End}(m)$，而 $\mathcal{R}_A$ 是右 A-对应的范畴。

证明. 对于 $x \in \mathsf{ob}(\mathcal{M})$， $F(x)$成为一个右 A-对应，其 A-作用和取值于A的内积定义如下

$$F(x) \times A \ni (u, a) \longmapsto u\, a \in F(x) \quad \text{and} \quad \langle u, v \rangle := v^* u \ .$$

对于 $f \in \mathcal{M}(x, y)$ $F(f)(u) = f\, u \in F(y)$，对每个 $u \in F(x)$成立。事实上， F对 $\mathcal{M}$ 中任意态射的作用都是可伴随的（$F(f)^* = F(f^*)$），且是 A-线性的。显然，每个 F都是忠实函子。

令 $T \in \mathcal{R}_A(F(x)\ F(y))$. 由于每个简单对象都作为子对象出现在 m 中，因此我们可以找到 $\mathscr{S}_x \subseteq F(x)$ 使得 $\sum_{u \in \mathscr{S}_x} u\, u^* = 1_x$。定义 $f := \sum_{u \in \mathscr{S}_x} T(u) u^* \in \mathcal{M}(x, y)$。对于

$v \in F(x)$，我们有，

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{u \in \mathscr{S}_x} u\, u^* v\right) \\ &= \sum_{u \in \mathscr{S}_x} T(u)\, u^* v \quad (\text{since } T \text{ is right } A\text{-linear}) \\ &= F(f)(v) \quad (\text{by definition of } f) \end{aligned}$$

因此， F 是满的。

现在，我们证明每个 F 都是本质满射。由舒尔引理， F 是充分忠实的，因此， $F(x)$ 在 x 为简单对象时也是简单对象。我们证明，对于简单对象 $H \in \mathcal{R}_A$ ，存在 $\mathcal{M}$ 中的简单对象 x ，使得 $F(x)_A \simeq H_A$。取 $\xi \in H \setminus \{0\}$ 使得 $\langle \xi, \xi \rangle_A \neq 0$。由 $\langle$ξ的谱分解$\xi \rangle_A$ ，存在 A 中的极小投影 p ，使得$\langle \xi, \xi \rangle_A p \in \mathbb{C}p \setminus \{0\}$。现在，由于p是极小的， $\langle \xi p, \xi p \rangle_A = p\langle \xi,$ $\xi \rangle_A p \in \mathbb{C}p \setminus \{0\}$。不失一般性，假设 $\xi p = \xi$。现在，由于 H 不可约，我们有 $H = \xi A$。由 $\mathcal{M}$ 的半单性，存在简单对象 $x \in \mathcal{M}$ 以及等距映射 $\alpha :\ x \to m$，使得 $p = \alpha\alpha^*$。注意，$\alpha^* \in F(x)$和 $F(x) = \alpha^* A$。定义 $T'\colon\ F(x)_A \to H_A$为$T'(\alpha^* a) = \xi a$，对所有 $a \in A$均成立。显然， T'定义良好、右-A线性且满射。因此， T'是一个同构。故 F 是一个等价。□

4.2.1. 构造 $\left(F_\bullet, W_\bullet^F\right) \in \mathsf{UC}_1(\Gamma_\bullet,$**{v5)**。

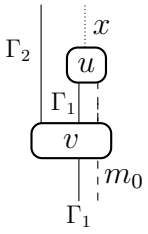
对于每个 $k \geq 0$，令 $m = \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0$ 为命题 4.1 中的对象，我们得到函子$F_k := \mathcal{M}_k$ $(\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0, \bullet)\colon\ \mathcal{M}_k \to \mathcal{R}_{A_k}$，它是一个等价。

注 4.2. F_k 是一个伴随等价 [JY21], 的一部分，因此我们可以得到 F_k 的伴随 $\overline{F}_k$ ，以及实现对偶的求值和余求值，它们都是自然酉变换。因此，对于每个 $k \geq 0$， F_k 的双忠实性是显而易见的。

在描述 F_k 的酉联络之前，我们先稍作岔开，证明一些在构造中会用到的结果。

设 $\mathcal{N}$ 是一个 C* 半单范畴。对于 $x, y \in \in \mathsf{Ob}(\mathcal{N})$，考虑态射空间 $\mathcal{N}(x, y)$，以及 C*-代数 $A = \mathsf{End}(x)$。那么， $\mathcal{N}(x, y)$ 成为一个右-A对应，其 A-值内积为 $\langle u, v \rangle_A = u^* v.$

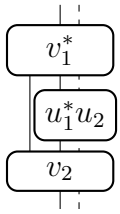
我们继续讨论下面的引理。

引理 4.3. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是有限 C*-半单范畴。设 $\Gamma_1 \colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$和 $\Gamma_2 \colon\ \mathcal{N} \to \mathcal{N}$是双忠实的 $*$-线性函子。那么映射 $T\colon\ \mathcal{N}(\Gamma_1 m_0, x) \underset{\mathrm{End}(\Gamma_1 m_0)}{\boxtimes} \mathcal{N}(\Gamma_1 m_0, \Gamma_2 \Gamma_1 m_0) \to \mathcal{N}(\Gamma_1 m_0, \Gamma_2 x)$ 由 $u \boxtimes v \overset{T}{\longmapsto}$给出 

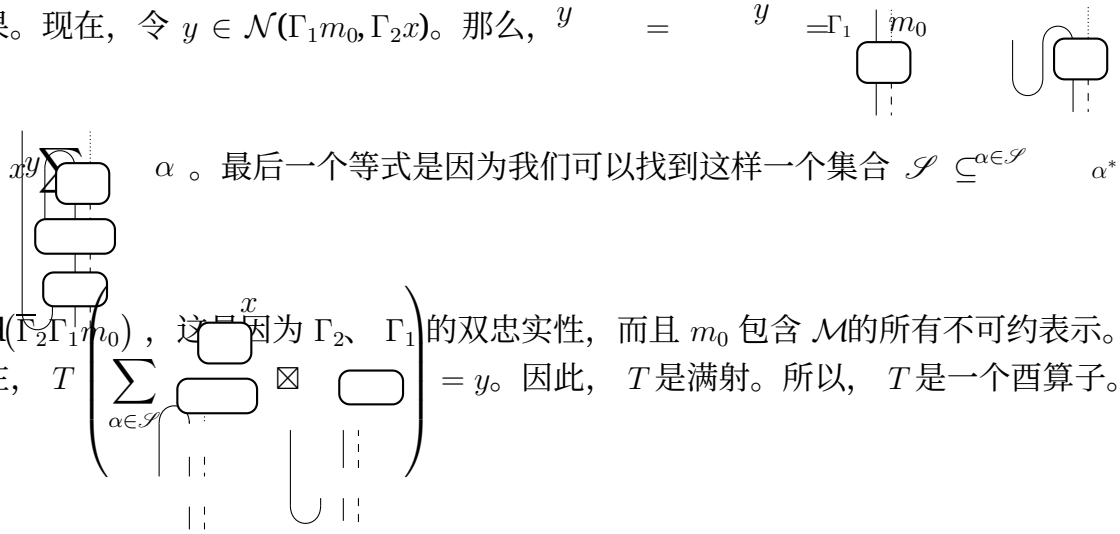
是一个酉映射，作为右 $\mathsf{End}(\Gamma_1 m_0)$-线性映射。

证明。设 $A =$End$(\Gamma_1 m_0)$。显然， T 是中间 A-线性的。现在，

$$\langle T(u_1 \boxtimes v_1), T(u_2 \boxtimes v_2)\rangle_A = \quad = \langle v_1, \langle u_1, u_2\rangle_A v_2\rangle_A = \langle u_1 \boxtimes v_1, u_2 \boxtimes v_2\rangle_A.$$



因此， T 是一个等距映射。若能证明 T 是满射，那么根据 [Lance]，即可得到所需结果。现在，令 $y \in \mathcal{N}(\Gamma_1 m_0, \Gamma_2 x)$。那么，

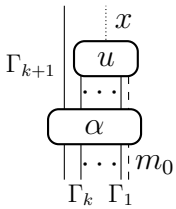


α 。最后一个等式是因为我们可以找到这样一个集合 $\mathscr{S} \subseteq$ End$(\Gamma_2 \Gamma_1 m_0)$ ，这是因为 Γ_2、 Γ_1的双忠实性，而且 m_0 包含 $\mathcal{M}$的所有不可约表示。现在， $T\left(\sum_{\alpha\in\mathscr{S}} \quad \boxtimes \quad\right) = y$。因此， T 是满射。所以， T 是一个酉算子。

□

花冠 引理 4.4。映射 $T_x^k\colon \ F_k(x) \underset{A_k}{\boxtimes} A_{k+1}{}_{A_{k+1}} \to \mathcal{M}_k(\Gamma_{k+1}\Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0, \Gamma_{k+1} x)^{A_{k+}}{}_1$

由 $u \boxtimes \alpha \overset{T_x^k}{\longmapsto}$ 给出



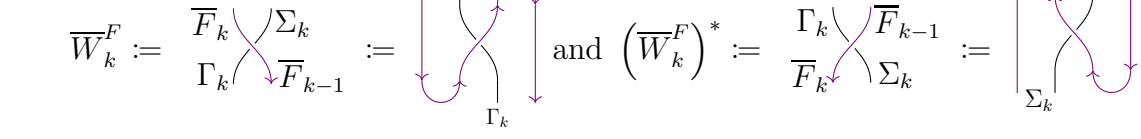
是酉算子，并且对于每个 x，它们关于 x 是自然的 $x \in \mathcal{M}_k$ 和 $k \geq 0$。

证明。显然， T_x^k 是右-A_{k+1} 线性的。 T_x^k 的酉性由引理 4.3 得出。 T^k 的自然性源于 F_k 在态射空间上的作用定义，见命题 4.1。□

现在我们为 $\{F_k\}_{k\geq 0}$定义酉联络 $W_{k+1}^F :=: T^k\colon \ \Sigma_{k+1}F_k \to F_{k+1}\Gamma_{k+1}$如推论 4.4 中所定义，对于每个 $k \geq 0$ 。图示地，对于每个 $k \geq 0$， F_k 我们将 F_k Γ_k Σ_k F_{k-1}表示为，并将 $\overline{F}_k$表示为；对于每个 $k \geq 1$ W_k^F 我们将其表示为 Σ_k F_{k-1}，并将$\left(W_k^F\right)^*$表示为 F_k Γ_k。因此，我们得到一个 1-胞腔 $\left(F_\bullet, W_\bullet^F\right) \in \mathbf{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Sigma_\bullet)$。

对每个 $k \geq 1$，定义

$$\overline{W}_k^F := \quad := \quad \text{and} \quad \left(\overline{W}_k^F\right)^* := \quad :=$$



由于求值和余求值（在注 4.2 中）被选为酉算子，因此 $\overline{W}_k^F$ 也是酉算子。我们声称 $F_\bullet$ 是 UC 中的可对偶化 1- 胞腔，其对偶为 $\left(\overline{F}_\bullet, \overline{W}_\bullet^F\right)$。为此，我们验证共轭方程的解（如注 4.2 中所述）满足关于 $k \geq 0$ 的交换关系，这等价于使 W_k^F 和 $\overline{W}_k^F$ 成为酉算子的方程。

注 4.5。注意，由命题 4.1 可知，我们有一个伴随等价 $G_k \colon \mathcal{M}_k \to \mathcal{R}_{C_k}$，这是因为 $Q_k \Gamma_k \cdots \Gamma_1 m_0$ 包含 $\mathcal{M}_k$ 的每个简单对象作为子对象

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{k+1} & \xrightarrow{G_{k+1}} & \mathcal{R}_{C_{k+1}} \\ {\scriptstyle \Gamma_k}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bullet \underset{C_k}{\boxtimes} C_{k+1}} \\ \mathcal{M}_k & \xrightarrow[G_k]{} & \mathcal{R}_{C_k} \end{array}$$

每个 $k \geq 0$。此外，方块在自然意义下交换

酉的，记作 W_{k+1}^G；其证明与为 F_k 的情形完全相同，由此得到一个可对偶化 1-胞腔 $(G_\bullet, W_\bullet^G)$，它在 UC 中从 $\Gamma_\bullet$ 到 $\Psi_\bullet$。

选取 $G_\bullet$ 的一个对偶 $\overline{G}_\bullet \in \in \mathsf{UC}_1(\Psi_\bullet, \Gamma_\bullet)$，令 $\left(R_\bullet, W_\bullet^R\right) \coloneqq F_\bullet \boxtimes \overline{G}_\bullet \in \in \mathsf{UC}_1(\Psi_\bullet, \Sigma_\bullet)$。也就是说，对于 $k \geq 0$，有 $R_k = F_k \overline{G}_k \colon \mathcal{R}_{C_k} \to \mathcal{R}_{A_k}$，它与酉联络一起，与 Σ_k 和 Ψ_k 兼容。

4.2.2. $\left(\Lambda_\bullet, W_\bullet^\Lambda\right) \in \mathsf{UC}_1(\Sigma_\bullet, \Delta_\bullet)$ 及其对偶的构造。

注意，在第4.1节中，对于每个 $k \geq 0$，我们都有 C*-代数的含幺嵌入 $A_k \hookrightarrow B_k$；特别地，对于 $k \geq l$，这由引理 3.5 给出。因此，对于每个 $k \geq 0$，函子 $\Lambda_k \coloneqq \bullet \underset{A_k}{\boxtimes} B_k \colon \mathcal{R}_{A_k} \to \mathcal{R}_{B_k}$ 都是双忠实的。接下来，我们需要为 $\Lambda_\bullet$ 定义酉联络。我们借助以下简单事实来实现这一点。

事实 4.6. 设 A, B, C, D 是有限维 C*-代数，并且存在一个由含幺嵌入构成的 C ‹ › D 方形图。这诱导出一个由范畴和函子构成的方形图 A ‹ › B

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_C & \xrightarrow{\bullet \underset{C}{\boxtimes} D} & \mathcal{R}_D \\ {\scriptstyle \bullet \underset{A}{\boxtimes} C}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bullet \underset{B}{\boxtimes} D} \\ \mathcal{R}_A & \xrightarrow[\bullet \boxtimes B]{} & \mathcal{R}_{B_A} \end{array}$$

。与这个最后的方块相对应，存在一个酉自然变换，连接函子 $\bullet \underset{A}{\boxtimes} B \underset{B}{\boxtimes} D$ 与 $\bullet \underset{A}{\boxtimes} C \underset{C}{\boxtimes} D$。

对于 $0 \leq k \leq l-1$，酉算子 W_{k+1}^Λ 可通过对.....应用事实 4.6 得到

$$\text{squares} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{A_{k+1}} & \xrightarrow{\Lambda_{k+1}} & \mathcal{R}_{B_{k+1}} \\ {\scriptstyle \Sigma_{k+1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_{k+1}} \\ \mathcal{R}_{A_k} & \xrightarrow[\Lambda_k]{} & \mathcal{R}_{B_k} \end{array}.$$

现在我们明确描述酉算子 $W_k^\Lambda \colon\ \Delta_k \Lambda_{k-1} \to \Lambda_k \Sigma_k$ 对于每个 $k \geq l+1$。对于 $V \in$ 对象 $\left(\mathcal{R}_{A_{k-1}}\right)$，定义 $\left(W_k^\Lambda\right)_V \colon\ V \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} H_{k-1} \underset{H_{k-1}}{\boxtimes} H_k H_k \to V \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} A_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k H_k$ 如下：

$$V \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} H_{k-1} \underset{H_{k-1}}{\boxtimes} H_k \ni q \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} \xi_1 \underset{H_{k-1}}{\boxtimes} \xi_2 \overset{\left(W_k^\Lambda\right)_V}{\longmapsto} q \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} 1_{A_k} \underset{A_k}{\boxtimes} \xi_1 \cdot \xi_2 \quad \text{for each} \quad q \in V\ .$$

容易看出，每个$\left(W_k^\Lambda\right)_V$都是酉的，且关于 V自然，并且 $\left(W_k^\Lambda\right)_V^*$定义如下:

$$V \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} A_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \ni q \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} \alpha \underset{A_k}{\boxtimes} \xi \overset{\left(W_k^\Lambda\right)_V^*}{\longmapsto} q \underset{A_{k-1}}{\boxtimes} 1_{H_{k-1}} \underset{A_k}{\boxtimes} \xi_1 \cdot \xi_2 \quad \text{for each} \quad q \in V \ .$$

因此，我们得到 UC 中的一个 1-胞腔 $(\Lambda_\bullet, W_\bullet) : \Sigma_\bullet \to \Delta_\bullet$。

现在定义 $\left(\overline{\Lambda}_\bullet, \overline{W}_\bullet^\Lambda\right) \in \mathsf{UC}_1(\Delta_\bullet, \Sigma_\bullet)$，使其成为 UC 中 $(\Lambda_\bullet, W_\bullet)$ 的对偶。对于 $0 \leq k \leq l-1$，定义 $\overline{\Lambda}_k := R_k \circ \left(\bullet \underset{B_k}{\boxtimes} C_k\right) : \mathcal{R}_{B_k} \to \mathcal{R}_{A_k}$，其中 $R_k : \mathcal{R}_{C_k} \to \mathcal{R}_{A_k}$ 是注 4.5 中给出的等价。对于 $k \geq l$，定义 $\overline{\Lambda}_k := \bullet \underset{H_k}{\boxtimes} H_k : \mathcal{R}_{H_k} \to \mathcal{R}_{A_k}$。这里，$A_k$ 在 H_k 上的右作用由包含 $A_k \hookrightarrow H_k$ （如引理 3.5 中所述）以及 C*-代数 H_k 中的乘法给出；不过，右 A_k-值内积采用的是 2.4 中定义的内积（而非由条件期望得到的内积）。

注 4.7。尽管对于 $0 \leq k \leq l-1$，函子 $\overline{\Lambda}_k$ 可能并非 Λ_k 的伴随函子，但我们将需要这些函子来定义 $\left(\Lambda_\bullet, W_\bullet^\Lambda\right)$ 在 UC 中的伴随。

我们的下一项工作是为 $\overline{\Lambda}_\bullet$ 定义酉联络 $\left\{\overline{W}_k^\Lambda\right\}_{k \geq 1}$。这将根据 k 分为三个不同的范围，即 $\{1, \ldots, l-1\}$、$\{l\}$ 和 $\{l+1, l+2, \ldots\}$；前两个范围中自然酉变换的选择可以是任意的。

情形 $0 \leq k \leq l-2$：对于酉联络 $\overline{W}_{k+1}^\Lambda$，我们考察以下水平排列的函子方块。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_{B_{k+1}} & \xrightarrow{\bullet \underset{B_{k+1}}{\boxtimes} C_{k+1}} & \mathcal{R}_{C_{k+1}} & \xrightarrow{R_{k+1}} & \mathcal{R}_{A_{k+1}} \\ {\scriptstyle \Delta_{k+1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bullet \underset{C_k}{\boxtimes} C_{k+1}} & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma_{k+1}} \\ \mathcal{R}_{B_k} & \xrightarrow[\bullet \underset{B_k}{\boxtimes} C_k]{} & \mathcal{R}_{C_k} & \xrightarrow[R_k]{} & \mathcal{R}_{A_k} \end{array} \ .$$

这两个方块在自然酉变换意义下都是交换的；左边的方块由事实 4.6 得出，右边的方块则来自注 4.5。$\overline{W}_{k+1}^\Lambda$ 定义为上述两个自然酉变换的适当复合。

情况 $k = l$: 要定义自然酉变换 $\overline{W}_l^\Lambda : \Sigma_l\, \overline{\Lambda}_{l-1} \to \overline{\Lambda}_l\, \Delta_l$，只需 o

check whether the square $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{H_l} & \xrightarrow[\overline{\Lambda}_l]{\bullet \underset{H_l}{\boxtimes} H_l} & \mathcal{R}_{A_l} \\ {\scriptstyle \bullet \underset{B_{l-1}}{\boxtimes} B_l}\uparrow{\scriptstyle \Delta_l} & & {\scriptstyle \Sigma_l}\uparrow{\scriptstyle \bullet \underset{A_{l-1}}{\boxtimes} A_l} \\ \mathcal{R}_{S_l \cap C_{l-1}} & \xrightarrow[R_{l-1} \circ \left(\bullet \underset{B_{l-1}}{\boxtimes} C_{l-1}\right)]{\overline{\Lambda}_{l-1}} & \mathcal{R}_{A_{l-1}} \end{array}$ commutes up to a natural 同构；我们称这个方块为 $\mathbb{S}$。考虑这组水平排列的方块[16]

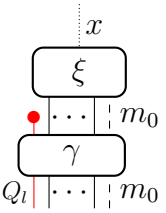
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}_{S_l} & \xrightarrow{\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} C_l} & \mathcal{R}_{C_l} & \xrightarrow{R_l} & \mathcal{R}_{A_l} \\
{\scriptstyle \bullet \underset{S_l \cap C_{l-1}}{\boxtimes} S_l}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Psi_l} & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma_l} \\
\mathcal{R}_{S_l \cap C_{l-1}} & \xrightarrow[\bullet \underset{S_l \cap C_{l-1}}{\boxtimes} C_{l-1}]{} & \mathcal{R}_{C_{l-1}} & \xrightarrow[R_{l-1}]{} & \mathcal{R}_{A_{l-1}}
\end{array}$$ referred as $\mathbb{S}_1$; the first square of $\mathbb{S}_1$

根据事实 4.6，该图交换；第二个结论则由注 4.5 得出。注意， $\mathbb{S}$ 的底边和右边与 $\mathbb{S}_1$的底边和右边相匹配。

接下来我们断言， $\mathbb{S}_1$ 的顶边与 $\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} S_l \colon \mathcal{R}_{S_l} \to \mathcal{R}_{A_l}$自然同构。

为此，考虑方形 $\bullet \underset{C_l}{\boxtimes}$ $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{C_l} & \xleftarrow{G_l} & \mathcal{M}_l \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_l} \\ \mathcal{R}_{S_l} & \xleftarrow[\bullet \underset{A_l}{\boxtimes} S_l]{} & \mathcal{R}_{A_l} \end{array}$ 称为 $\mathbb{S}_2$。对于 $x \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{M}_l)$,

map

$$F_l(x) \underset{A_l}{\boxtimes} S_l \ni \xi \underset{A_l}{\boxtimes} \gamma \longmapsto$$  $$\underset{C_l}{\boxtimes} 1_{C_l} \in G_l(x) \underset{C_l}{\boxtimes} C_l$$

是 S_l-线性的，并且关于 x 自然。为证明该映射是满射，取一个基本张量$\zeta \underset{C_l}{\boxtimes} 1_{C_l} \in G_l(x) \underset{C_l}{\boxtimes} C_l$；注意，它可以表示为以下元素的像： $\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_l} \zeta \circ \sigma \underset{A_l}{\boxtimes} \phi_1^{(l)}\left(\sigma^{\dagger}\right)$

其中 $\mathscr{S}_l$ 如注 3.7 所述，而 $\phi_1^{(l)} \colon H_l \to S_l$ 是命题 3.4 中提到的同构。这就证明了 $\mathbb{S}_2$ 的自然交换性。现在，函子 $\bullet \underset{C_l}{\boxtimes} C_l \colon \mathcal{R}_{C_l} \to \mathcal{R}_{S_l}$ 和 $\bullet \underset{A_l}{\boxtimes} S_l \colon \mathcal{R}_{A_l} \to \mathcal{R}_{S_l}$ （出现在方形 $\mathbb{S}_1$ 中）的伴随分别为 $\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} C_l \colon \mathcal{R}_{S_l} \to \mathcal{R}_{C_l}$ 和 $\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} A_l \colon \mathcal{R}_{S_l} \to \mathcal{R}_{A_l}$；这可通过再次利用集合 $\mathscr{S}_l$ 和条件期望求解共轭方程来实现。因此，对方形 $\mathbb{S}_2$ 取对偶，并利用 F_l 是一个伴随等价这一事实，可得 $R_l \circ \left(\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} C_{l C_l}\right) \cong \left(\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} S_{l A_l}\right)$。利用这个自然同构和自然交换性

$\mathcal{R}_{S_l}$ $\overset{\bullet \underset{S_l}{\boxtimes} S_l}{\rightarrow}$ $\mathcal{R}_{A_l}$ 交换图表的 $\mathbb{S}_1$，我们得到 $R_{l-1} \circ \left(\bullet \underset{S_l \cap C_{l-1}}{\boxtimes} C_{l-1}\right)$

$\bullet \underset{S_l \cap C_{l-1}}{\boxtimes} S_l$ Σ_l 的自然交换性。

最后，利用同构 $\phi_2^{(l)} \colon S_l \to H_l$ （如命题 3.4 所示），我们得到所需的 $\mathbb{S}$ 的自然交换性。令 $\overline{W}_l^{\Lambda}$ 为实现 $\mathbb{S}$ 交换性的自然酉变换。

情形 $k \geq l$: 为了定义 $\overline{W}_{k+1}^{\Lambda}$，我们需要对每个 $k \geq l$ 求出 Λ_k和 $\overline{\Lambda}_k$ 的共轭方程的解。我们将使用以下图示记法:

$$\Lambda_k := \uparrow \quad \text{and} \quad \overline{\Lambda}_k := \downarrow \quad \text{for each} \quad k \geq 0$$

定义 4.8。

(i) $\mathrm{Id}_{\mathcal{R}_{H_k}} \to \Lambda_k\overline{\Lambda}_k$ 是由以下方式定义的自然变换：$_V\colon\ V \to V \underset{H_k}{\boxtimes} H_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k$ 由 $q \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_k} q \underset{H_k}{\boxtimes} \sigma \underset{A_k}{\boxtimes} \sigma^\dagger$ 给出，其中 $V \in \mathcal{R}_{H_k}$ 和 $\mathscr{S}_k$ 如注 3.7 所述。

(ii) $\colon\ \Lambda_k\overline{\Lambda}_k \to \mathrm{Id}^{\mathcal{R}_{H_k}}$ 是如下定义的自然变换：$_V\colon\ V \underset{H_k}{\boxtimes} H_k \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \to V$ 由 $q \underset{H_k}{\boxtimes} \xi_1 \underset{A_k}{\boxtimes} \xi_2 \longmapsto q.(\xi_1\cdot\xi_2)$ 给出，其中 $V \in \mathcal{R}_{H_k}$。

(iii) $\colon\ \mathrm{Id}_{\mathcal{R}_{A_k}} \to \overline{\Lambda}_k\Lambda_k$ 是如下定义的自然变换：$_V\colon\ V \to V \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \underset{H_k}{\boxtimes} H_k$ 由 $q \longmapsto q \underset{A_k}{\boxtimes} 1_{H_k} \underset{H_k}{\boxtimes} 1_{H_k}$ 其中 $V \in \mathcal{R}_{A_k}$。

(iv) $\colon\ \overline{\Lambda}_k\Lambda_k \to \mathrm{Id}^{\mathcal{R}_{A_k}}$ 是如下定义的自然变换：$_V\colon\ V \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \underset{H_k}{\boxtimes} H_k \to V$ 由 $q \underset{A_k}{\boxtimes} \xi_1 \underset{H_k}{\boxtimes} \xi_2 \longmapsto q.\langle\xi_2,\ \xi_1^\dagger\rangle_{A_k}$ 其中$V \in \mathcal{R}_{A_k}$。

引理 4.9. (i) , , , 满足以下对象的共轭方程 $\Lambda_k, \overline{\Lambda}_k$对每个 $k \geq l$.

(ii) 此外，$\left(\quad\right)^* =$ 和 $\left(\quad\right)^* =$。(iii) $=$ $\mathrm{id}^{\mathrm{Id}_{\mathcal{R}_{H_k}}}$

证明。(i) 和 (ii) 的验证很直接，留给读者完成。

对于 (iii)，我们使用引理 3.5 和 [[的例 3.25 22]]CPJP。 □

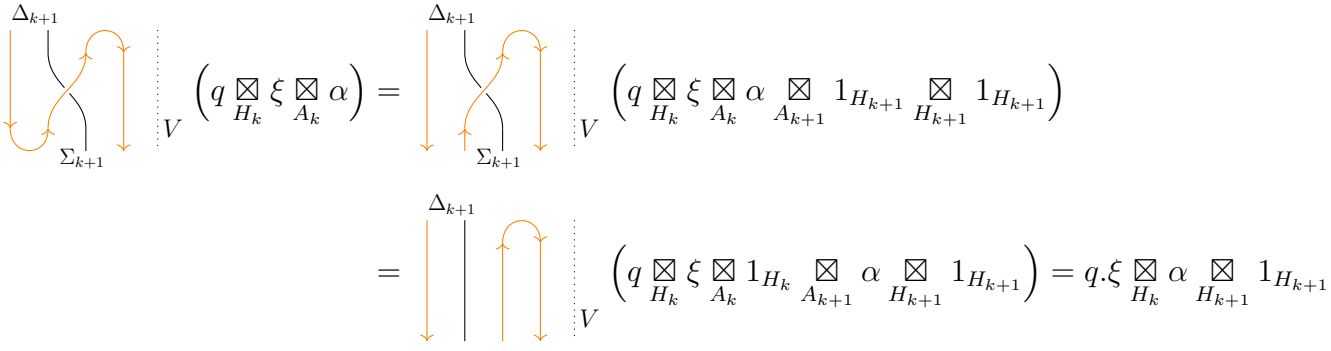
Pictorially, we denote W_k^Λ by $\begin{matrix}\Lambda_k & \Sigma_k\\ \Delta_k & \Lambda_{k-1}\end{matrix}$, $\left(W_k^\Lambda\right)^*$ by $\begin{matrix}\Delta_k & \Lambda_{k-1}\\ \Lambda_k & \Sigma_k\end{matrix}$, $\overline{W}_k^\Lambda$ by $\begin{matrix}\overline{\Lambda}_k & \Delta_k\\ \Sigma_k & \overline{\Lambda}_{k-1}\end{matrix}$

以及 $\left(\overline{W}_k^\Lambda\right)^*$ 对每个 $k \geq 1$ 而言的 $\begin{matrix}\Sigma_k & \overline{\Lambda}_{k-1}\\ \overline{\Lambda}_k & \Delta_k\end{matrix}$。我们已在第 15 页定义了所有 W_k^Λ，并在上述两种情形中定义了 $1 \leq k \leq l$ 对应的 $\overline{W}_k^\Lambda$。现在，对于 $k \geq l$，我们定义

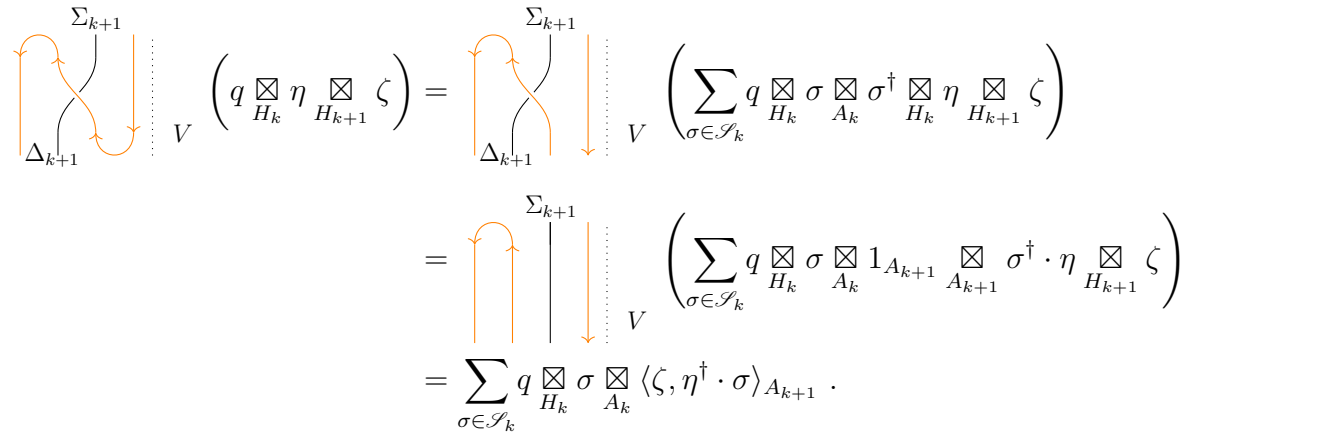
$\overline{W}_{k+1}^\Lambda = \begin{matrix}\overline{\Lambda}_{k+1} & \Delta_{k+1}\\ \Sigma_{k+1} & \overline{\Lambda}_k\end{matrix} :=$ and $\left(\overline{W}_{k+1}^\Lambda\right)^* = \begin{matrix}\Sigma_{k+1} & \overline{\Lambda}_k\\ \overline{\Lambda}_{k+1} & \Delta_{k+1}\end{matrix} :=$

根据下面的注，这些最终会成为自然酉变换。

注 4.10. 对于每个 $k \geq l$ 和 $V \in \mathcal{R}_{H_k}$, $q \in V$, $\xi \in H_k$, $\alpha \in A_{k+1}$, $\eta, \zeta \in H_{k+1}$，元素 $\left(\overline{W}^{\Lambda}_{k+1}\right)_V \left(q \underset{H_k}{\boxtimes} \xi \underset{A_k}{\boxtimes} \alpha\right)$ 可以表示为



并且 $\left(\overline{W}^{\Lambda}_{k+1}\right)^*_V \left(q \underset{H_k}{\boxtimes} \eta \underset{H_{k+1}}{\boxtimes} \zeta\right)$ 可表示为



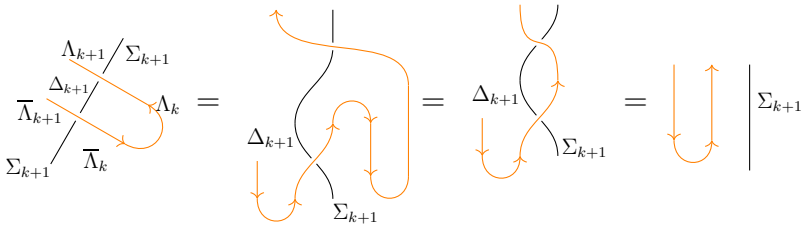
直接验证可知，每个 $\left(\overline{W}^{\Lambda}_{k+1}\right)_V$ 都是酉的，并且关于 V 自然。

因此，我们在 UC 中定义了一个从 $\Delta_\bullet$ 到 $\Sigma_\bullet$ 的 1-胞腔 $\left(\overline{\Lambda}_\bullet, \overline{W}^{\Lambda}_\bullet\right)$。我们需要证明 $\left(\overline{\Lambda}_\bullet, \overline{W}^{\Lambda}_\bullet\right)$ 是 $\left(\Lambda_\bullet, W^{\Lambda}_\bullet\right)$ 的对偶。为了定义共轭方程的解（实际上是 UC 中的一对 2-胞腔），我们可以忽略有限多个项，并在此后定义它们（根据注 2.11）。由引理 4.9 可知，对于每个 $k \geq l$， Λ_k 和 $\overline{\Lambda}_k$ 都存在共轭方程的解。因此，我们只需证明这些解最终满足交换关系。

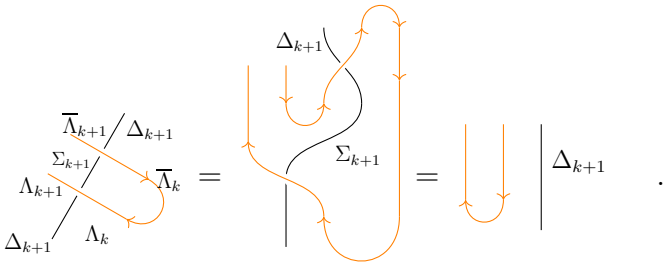
现在我们来验证和满足 $k \geq l$ 的交换关系。

注 4.11. Λ_k 和 Λ_{k+1} 的共轭方程解（如定义 4.8 所述）最终对所有关于 $W^{\Lambda}_\bullet$和 $\overline{W}^{\Lambda}_\bullet$ 的 k 都满足交换关系。这直接源于W^{Λ}_k和 $\overline{W}^{\Lambda}_k$ 是酉算子这一事实。尽管如此，我们仍在此给出证明

如下。注意，



and



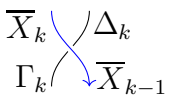
.

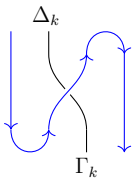
因此，$\left(\Lambda_\bullet, W_\bullet^\Lambda\right)\colon \Sigma_\bullet \to \Delta_\bullet$ 是 UC 中一个可对偶化 1-胞腔，其对偶为上文所述的 $\left(\overline{\Lambda}_\bullet, \overline{W}_\bullet^\Lambda\right)$。

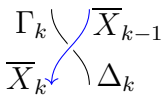
现在我们可以描述所需的可对偶化 1-胞腔 $(X_\bullet, W_\bullet)$，它将把 $(Q_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 分裂为 Q-系统。

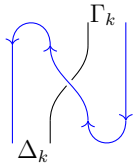
$$\text{Define } (X_\bullet, W_\bullet) := \Lambda_\bullet \boxtimes F_\bullet = \left(\{\Lambda_k F_k\}_{k\geq 0}, \left\{ \begin{array}{c} \Lambda_k \quad F_k \quad \Gamma_k \\ \Sigma_k \\ \Delta_k \quad \Lambda_{k-1} F_{k-1} \end{array} \right\}_{k\geq 1} \right) \in \mathbf{UC}_1\left(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet\right).$$

X_k Γ_k Δ_k X_{k-1}图示如下，我们用 X_k 表示，$\overline{X}_k$ 表示，W_k 表示Δ_k X_{k-1}以及 W_k^* 表示X_k Γ_k。

Define $\overline{W}_k :=$ 

$:=$ 

and $\left(\overline{W}_k\right)^* :=$ 

$:=$ 

。因此，我们得到了所需的 1-胞腔 $(X_\bullet, W_\bullet) \in \mathbf{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet)$。下面列出 $(X_\bullet, W_\bullet)$ 的一些性质。

引理 4.12。

(i) $(X_\bullet, W_\bullet)$ 是 UC 中一个可对偶化 1-胞腔。(ii) $(X_\bullet, W_\bullet)$ 在 UC 中具有酉可分对偶。

证明。(i) $(X_\bullet, W_\bullet)$ 是由两个可对偶化 1-胞腔 $\left(\Lambda_\bullet, W_\bullet^\Lambda\right)$ 和 $\left(F_\bullet, W_\bullet^F\right)$ 复合而成，因此结论成立。(ii) 这直接由注 2.11 和引理 4.9 的 (iii) 得出。

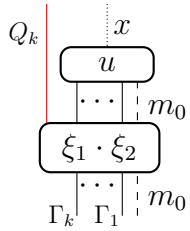
□

4.3. Q-系统的同构。

在本小节中，我们构造 $\overline{X}_\bullet \boxtimes X_\bullet$ 与 $Q_\bullet$ 之间的一个同构。对于每个 $k \geq l$，我们构造酉算子 $\gamma^{(k)}: \overline{X}_k X_k \to Q_k$，使其与乘法和单位映射相 intertwine。在下一小节中，我们验证每个 $k \geq l$ 对应的 $\gamma^{(k)}$ 的交换关系，从而在 UC 中实现上述 Q-系统之间的同构。

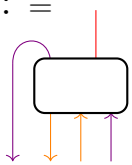
对于 $k \geq l$，并对每个 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_k)$，定义映射 $\beta_x^{(k)}$: $\overline{\Lambda}_k \Lambda_k F_k(x) \to F_k Q_k(x)$如下:

$$F_k(x) \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \underset{H_k}{\boxtimes} H_{kA_k} \ni u \boxtimes \xi_1 \boxtimes \xi_2 \overset{\beta_x^{(k)}}{\longmapsto}$$

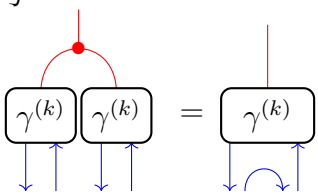


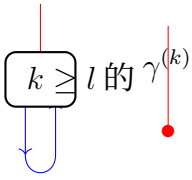
$$\in F_k Q_k(x)$$

容易看出，每个 $\beta_x^{(k)}$都是等距映射。由于 ${}_{A_k}H_k \underset{H_k}{\boxtimes} H_{kA_k}$ 与 ${}_{A_k}H_{kA_k}$ 酉同构，并应用引理 4.3，可知 $\overline{\Lambda}_k \Lambda_k F_k(x)$ 和 $F_k Q_k(x)$ 的维数（作为向量空间）相同。因此可得满射性。于是，每个 $\beta_x^{(k)}$都是酉的。此外，容易推出每个 $\beta_x^{(k)}$在 x中都是自然的。因此，我们得到一个酉自然变换 $\beta^{(k)}: \overline{\Lambda}_k \Lambda_k F_k \to F_k Q_k$。

Q_k定义 $\gamma^{(k)} :=$  $\beta^{(k)}: \overline{X}_k X_k \to Q_k$。我们证明 $\gamma^{(k)}$ 是一个$\overline{F_k}\overline{\Lambda}_k \Lambda_k F_k$的同构

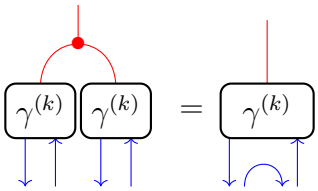
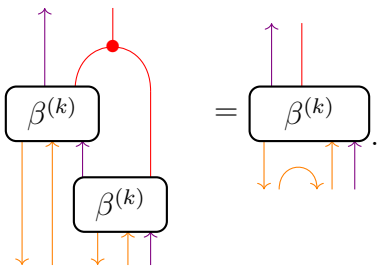
关于 $k \geq l$ 的 Q-系统 $\overline{X}_k X_k$ 和 Q_k。由于每个 $\beta^{(k)}$ 都是酉的，且每个 F_k 都是伴随等价（见注 4.2），因此每个 $\gamma^{(k)}$ 都是酉的。我们需要证明 $\gamma^{(k)}$ 与

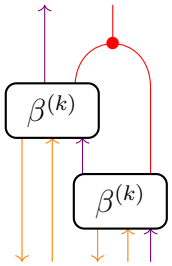
乘法和单位映射相交织。我们需要证明  and



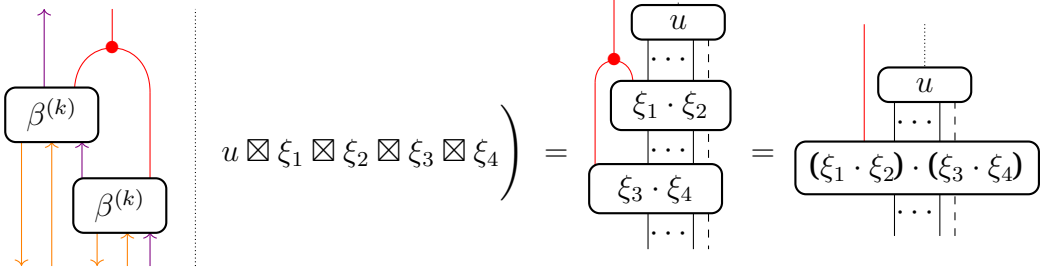
$=$。这正是我们接下来要证明的。

命题 4.13。对于 $k \geq l$, $\gamma^{(k)}: \overline{X}_k X_k \to Q_k$，这是 Q-系统的同构。

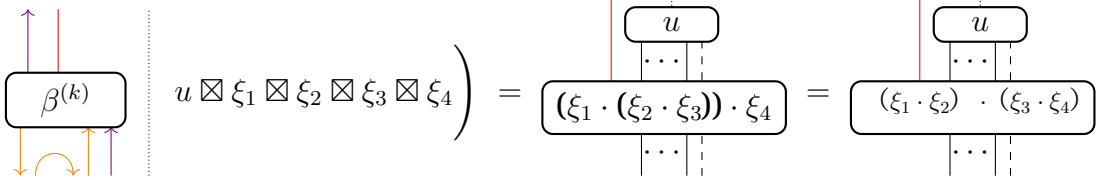
证明。显然可得，  当且仅当  .

现在，映射  : $F_k(x) \boxtimes_{A_k} H_k \boxtimes_{H_k} H_k \boxtimes_{A_k} H_k \boxtimes_{H_k} H_k \to F_k Q_k(x)$ 定义为

如下：

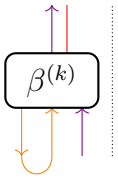


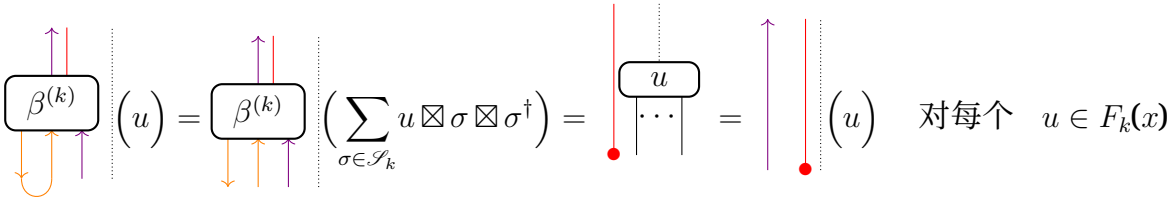
对每个 $u \in F_k(x)$ 以及 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in H_k$ 都成立。容易证明



对每个 $u \in F_k(x)$ 以及 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in H_k$ 都成立。最后一个等式成立，是因为 H_k 的结合律，如命题 3.4 所示。因此， $\gamma^{(k)}$ 对每个 $k \geq l$ 都与乘法映射相 intertwines。

此外，很容易看出  。现在，

map  : $F_k(x) \to F_k Q_k(x)$ 如下给出：



其中， $\mathscr{S}_k \subset H_k$ 如注 3.7 所述。因此，对于每个$k \geq l$， $\gamma^{(k)}$ 都交织单位映射。至此，命题得证。□

4.4. $\gamma^{(k)}$ 的交换关系。

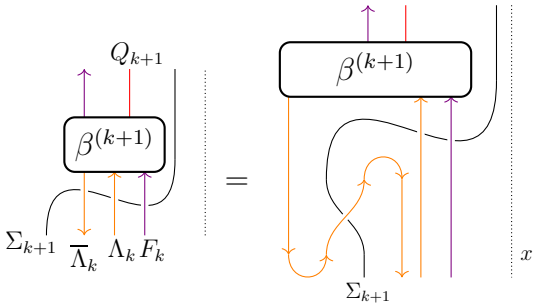
为了在 UC 中实现同构，我们仍需证明 $\gamma^{(k)}$ 满足关于 $k \geq l$ 的交换关系。这将确立 $(Q_\bullet, m_\bullet, i_\bullet) \in \mathsf{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Gamma_\bullet)$ 被 $(X_\bullet, W_\bullet) \in \mathsf{UC}_1(\Gamma_\bullet, \Delta_\bullet)$「分裂」。

注 4.14. 为了证明 $\gamma^{(k)}$ 满足关于 $k \geq l$ 的交换关系，只需证明 $\beta^{(k)}$ 也满足该关系，因为关于 F_k 和 $\overline{F}_k$ 的共轭方程的解对每个 $k \geq l$ 都满足交换关系。因此，我们不证明 $\gamma^{(k)}$ 的交换关系，而是证明 $\beta^{(k)}$ 满足关于 $k \geq l$ 的交换关系。

现在我们继续证明 $\beta^{(k)}$ 满足关于 $k \geq l$ 的交换关系。

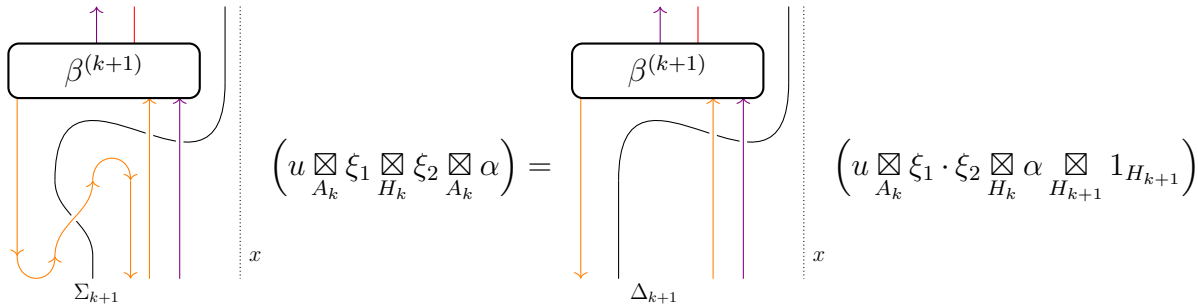
命题 4.15. 对于 $k \geq l$，$\beta^{(k)}$ 满足交换关系。

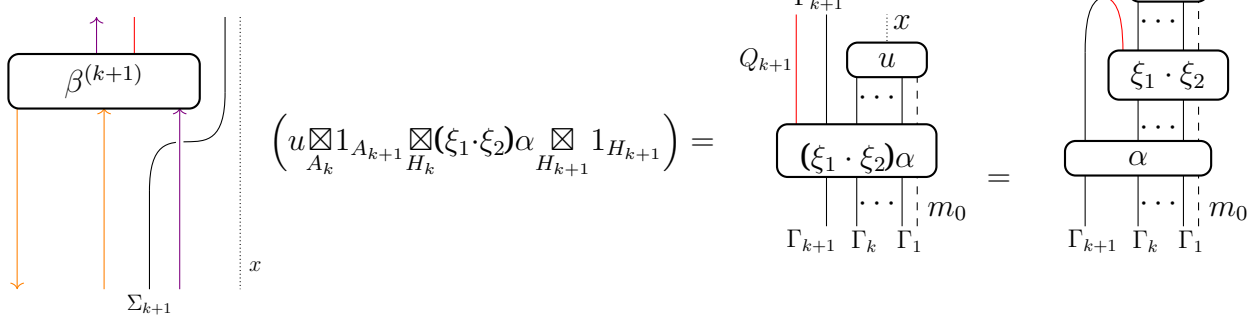
证明. 对于 $x \in \text{对象}(\mathcal{M}_k)$，映射为，



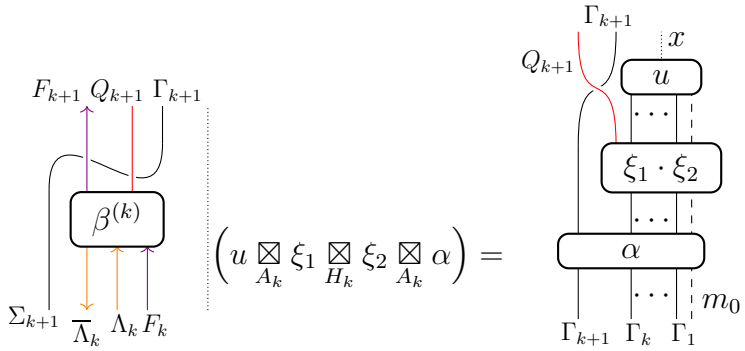
$$: \quad F_k(x) \underset{A_k}{\boxtimes} H_k \underset{H_k}{\boxtimes} H_k \underset{A_k}{\boxtimes} A_{k+1} \to F_{k+1}Q_{k+1}\Gamma_{k+1}(x)$$

如下所示：





对于每个 $u \in F_k(x)$ ξ_1、$\xi_2 \in H_k$、$\alpha \in A_{k+1}$ 均成立。此外，根据 $\beta^{(k)}$ 的定义可直接推出，
对于每个 $u \in F_k(x)$ ξ_1、$\xi_2 \in H_k$、$\alpha \in A_{k+1}$，我们有：



因此，$\beta^{(k)}$ 满足关于 $k \geq l$ 的交换关系。 □

由注 2.11、命题 4.13、注 4.14 和命题 4.15，可得以下定理。

定理 4.16. $(Q_\bullet, W^Q_\bullet)$ 与 $\left(\left\{\overline{X}_k X_k\right\}_{k\geq 0}, \left\{\begin{array}{c} X_{k+1} \quad \Gamma_{k+1} \\ \Gamma_{k+1} \\ \overline{X}_k \quad X_k \end{array}\right\}_{k\geq 1}\right)$ 同构

作为 UC 中的 Q-系统。

References

[AMP15] N. Afzaly、S. Morrison 和 D. Penneys，2015。指标不超过 5 的子因子分类 1 4。https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.00038 即将刊载于美国数学会回忆录。[B97] Dietmar Bisch，1997。与子因子相关的双模、高阶相对交换子和融合代数，载于《算子代数及其应用》（滑铁卢，安大略省，1994/1995），第 13-63 页，Fields 研究所通讯丛书，第 13 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[CPJ22] Q. Chen、R. H. Palomares 和 C. Jones，2022。AF 代数上融合范畴归纳极限作用的 K 理论分类。https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.11854[CPJP22] Q. Chen、R. H. Palomares、C. Jones 和 D. Penneys，2022。C*-2-范畴的 Q-系统完备化。《泛函分析杂志》，第 283 卷，第 3 期，2022，109524，ISSN 0022-1236，https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109524。（https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123622001446）[DGGJ22] P. Das、M. Ghosh、S. Ghosh 和 C. Jones，2022。布拉泰利图上的酉联络。arXiv:2211.03822。[DR18] C. L. Douglas 和 D. Reutter，2018。融合 2-范畴及其 4-流形态和不变量。arXiv:1812.11933。[EK98] D. Evans 和 Y. Kawahigashi，1998。量子对称性与算子代数。牛津数学专著，牛津大学出版社。[GJF19] D. Gaiotto 和 T. Johnson-Freyd，2019。高阶范畴中的凝聚。arXiv:1905.09566。[GLR85] P. Ghez、R. Lima 和 J. E. Roberts，1985。W*-范畴。《太平洋数学杂志》，120(1)：79-109，1985。https://doi.org/pjm/1102703884。[J99] V. F. R. Jones。平面代数 I。arxiv:math.QA/9909027。[J83] V. F. R. Jones，1983。子因子的指标。《Invent. Math.》73：第 1-25 页。

[JMS14] V. Jones、S. Morrison 和 N. Snyder。指标不超过 5 的子因子分类。《Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)》，51(2):277–327，2014。arXiv:1304.6141，doi :10.1090/S0273-0979-2013-01442- 3。[JP19] C. Jones 和 D. Penneys。代数对象的实现与离散子因子。《Adv. Math.》，350:588–661，2019。MR3948170 DOI:10.1016/j.aim.2019.04.039。arXiv:1704.02035。[JP20] C. Jones 和 D. Penneys。Q-系统与紧致 W*-代数对象。《物质拓扑相与量子计算》，Contemp. Math. 第 747 卷，第 63–88 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020。MR4079745 DOI:10.1090/conm/747/15039。arXiv:1707.02155。[JY21] N. Johnson 和 D. Yau。二维范畴。牛津大学出版社。https://doi.org/10.1093/oso/9780198871378.001.0001。arXiv:2002.06055。[L94] R. Longo，1994。Hopf 代数与子因子的对偶 I。《数学物理通讯》，159(1) 133-150，1994。https://doi.org/cmp/1104254494。[LR97] R. Longo 和 J. E. Roberts，1997。维数理论。《K-theory》11(2)：第 103-159 页，1997。[M03] M. Müger，2003。从子因子到范畴与拓扑 I：Frobenius 代数与张量范畴的 Morita 等价。《纯粹与应用代数学杂志》，180.1，第 81-157 页。[O88] A. Ocneanu，1988。量子化群、弦代数与代数的伽罗瓦理论。载于《算子代数及其应用》，伦敦数学学会讲义丛书，136：第 119-172 页。[P89] S. Popa，1989。相对维数、投影塔与子因子的交换方块。《太平洋数学杂志》，第 137 卷（1989），第 1 期，181–207。[P94] S. Popa，1994。II 型可容子因子的分类。《Acta. Math.》172，第 163-225 页。[P95] S. Popa，1995。高阶相对交换子格的公理化。《Invent. Math.》120，第 237-252 页。[Z07] Pasquale A. Zito，2007。具有非简单单位对象的 2-C*-范畴。《Adv. Math.》，210(1):122–164，2007。doi :10.1016/j.aim.2006.05.017。arXiv:math/0509266。

MainakGhosh，Stat-Math Unit，Indian Statistical Institute电子邮件地址：main ghosh@rediffmail.com