5 次和 6 次德尔佩佐曲面的形式

A. V. Zaitsev

摘要。本文给出了在域 K 上存在 5 次和 6 次德尔佩佐曲面的充要条件，其中绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在 (-1)-曲线图上的作用是给定的。此外，我们还计算了任意域上 5 次德尔佩佐曲面的自同构群。

arXiv:2302.04937v1 [math.AG] 9 Feb 2023

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 3
3. 5次德尔佩佐曲面的构造。第一种构造 5
4. 5次德尔佩佐曲面的构造。第二种构造 6
5. 仿射直线上的点与伽罗瓦群的作用 7
6. 无限域上 5次德尔佩佐曲面类型的实现 10
7. 有限域上 5次德尔佩佐曲面类型的实现 10
8. 5次德尔佩佐曲面的自同构群 11
9. 6 次德尔佩佐曲面的分类 13
参考文献 14

1. 引言

德尔佩佐曲面是具有丰反典范类的光滑射影曲面 X 。I.V. Dolgachev 和 V.A. Iskovskikh 在研究射影平面的双有理自同构群中的有限子群时，于其论文 [4],中完整描述了特征零代数闭域上的德尔佩佐曲面的自同构群。关于任意域上的德尔佩佐曲面自同构，目前仅有部分结果（参见 [5, 17], ，另见 [9]）。理想的结果应是完整描述指定域上的德尔佩佐曲面的自同构群，类似于一维情形下在[2] 和 [6]中得到的结果。尽管如此，描述作用在德尔佩佐曲面上的极小群仍会很有用，因为这可能有助于对任意域上射影平面的双有理自同构群的有限子群进行分类。

典范类 K_X 的自交数称为德尔佩佐曲面的次数。该自交数可取从 1 到 9 的整数值。本文研究各种域上的 5 次和 6 次德尔佩佐曲面。

在代数闭域（或可分闭域）的情形下，次数为d 的德尔佩佐曲面要么同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，要么是通过在射影平面上的$9-d$ 个一般位置的点处进行爆破得到的。特别地，对于 $d=5$、6，这些曲面在同构意义下是唯一的。在任意域 K的情形下，还会出现一个额外的不变量，即伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在 (-1)-曲线图上的作用。论文将研究的正是这一不变量。

设 K 为任意域。令 X 为 K 上的 5 次德尔佩佐曲面。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 通过自同构作用于 (-1)-曲线的图。

该图的自同构群同构于对称群 $\mathfrak{S}_5$，参见 [3, §8.5。4],因此我们得到同态

$$h\colon \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \mathfrak{S}_5.$$

同一个同态对应于群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在 X 上五种圆锥丛结构上的作用。

给定一个子群 $H \subset \mathfrak{S}_5$，我们用 $[H]$表示其共轭类。显然，子群的同构类不能确定其共轭类，例如，子群 $\langle(12)\rangle$ 与 $\langle(12)(34)\rangle$ 并不共轭（为清楚起见，所有共轭类均在第 2节开头列出）。

定义1.1。我们称一个 5 次德尔佩佐曲面具有类型 $[H]$，如果 $\mathrm{Im}\, h \in [H]$。

请注意，一般而言，德尔佩佐曲面的 5 次同构类不能由其类型确定，参见注 3.3。关于特征零的域上德尔佩佐曲面的 5 次同构分类见[13, 定理3.1。3]；另见 [8,命题 4.7(iv)]。

本文将证明以下定理。

定理 *1.2*。 *</style}*存在一个类型为 $[H]$、定义在 K 上的 *5* 次德尔佩佐曲面，当且仅当存在一个伽罗瓦群同构于 H、且域扩张为 $L \supset K$ 的伽罗瓦域扩张。

对于某些重要类型的域，定理 1.2 给出了一个简单的充要条件，用以判定是否存在5 次给定类型的德尔佩佐曲面。

推论 1.3。 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域。那么在 $\mathbb{F}$ 上存在所有类型的 5 次德尔佩佐曲面。

推论1.4。 设 $\mathbb{F}$ 是一个有限域。那么在 $\mathbb{F}$ 上存在一个类型为 $[H]$ 的 5 次德尔佩佐曲面，当且仅当 H 是一个循环群。

注意，对于特征零的域，定理 1.2 可由更精确的结果 [13, 定理 3.1。3]推出。我们采用一种不同的方法来证明它，即使用更初等且更具几何性的途径，该方法适用于任意域，尤其是非完美域。此外，较粗略的分类（由定理 1.2给出）的优点在于，便于用这种方式描述 5 次德尔佩佐曲面的自同构群。5以这类术语描述。

本文的第二个主要结果是根据类型对 5 次德尔佩佐曲面的自同构群进行分类。回顾一下，在代数闭域上，5 次德尔佩佐曲面的自同构群同构于群 $\mathfrak{S}_5$。

定理 1.5。 类型为 $[H]$ 的 *5* 次德尔佩佐曲面的自同构群同构于群 $\mathfrak{S}_5$中子群 H 的中心化子。

5 次德尔佩佐曲面的自同构群的显式列表 5 可见于8。还请注意，定理 1.5 使我们能够针对每个子群 $G \subset \mathfrak{S}_5$ 给出判据，以确定在给定域上是否存在一个 G-极小 5 次德尔佩佐曲面5 （回顾一下，带有群 X 作用的德尔佩佐曲面 G 称为 G-极小曲面，若 $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$）。具体而言，本文将证明以下命题。

命题 1.6. 设 G 是 $\mathfrak{S}_5$ 的一个子群。当且仅当满足以下两个条件之一时，存在一个次数为 5 的 G-极小德尔佩佐曲面。

(1) 群 G 包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 同构的子群（注意，这样的群 G 只能忠实地作用于类型为 $[e]$ 和 $[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}]$的曲面上）。

(2) 群 G 是平凡群，并且存在域 $L \supset K$ 的一个伽罗瓦扩张，使得群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 同构于 $\mathfrak{S}_5$ 中的一个子群，且包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$同构的子群。

类比于 5 次德尔佩佐曲面，5我们可以定义域 6 次 上的德尔佩佐曲面的类型 K：它是群$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在群 $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$中的像的共轭类。更多详情请参见第 9节。作为定理 1.2的推论，我们将证明以下定理。

定理1.7。 存在一个类型为 $[H]$ 、定义在 K 上的 *6* 次德尔佩佐曲面，当且仅当存在一个伽罗瓦群同构于 H 的伽罗瓦域扩张 $L \supset K$ 。

本文安排如下。第 2 节汇集一些一般性论述。第 3 节和4节探讨构造 5 次德尔佩佐曲面的若干方法。第 5节提出并证明用于证明定理 1.2的关键引理。第 6节和第7节分别针对无限域和有限域证明定理 1.2 。随后，第 8节证明定理 1.5和命题 1.6。最后，第 9节证明定理 1.7。

我们将使用以下记号。设 X 是域 K 上的代数簇，且$L \supset K$ 是一个域扩张。那么，我们用 X_L 表示将 X 标量扩张到 L。用 $\overline{K}$ 表示域 K的代数闭包，用 K^{sep} 表示它的可分闭包。

我要感谢我的导师 Constantin Shramov 提出这个问题，并在讨论中给予宝贵意见，以及始终关注这项工作。我还要感谢 Andrey Trepalin 就 6 次曲面提出的建议。

2. 预备知识

本节将汇集一些（众所周知的）一般性结论，以便后文引用。不过，首先我们列出群 $\mathfrak{S}_5$中所有子群的共轭类，并固定以下记号：

- 平凡子群的共轭类 $[e]$ ；
- 由一个对换生成的阶 2 子群的共轭类 $[\langle(1,2)\rangle]$ ；
- 由两个不相交对换的乘积生成的阶 2 子群的共轭类 $[\langle(1,2)(3,4)\rangle]$ ；
- 由一对不相交对换生成的阶 4 子群的共轭类 $[\langle(1,2),(3,4)\rangle]$ ；
- 由两个不同的、各含两个不相交对换的乘积生成的阶 4 子群的共轭类 $[\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle]$ ；
- 阶数分别为 3、4、5 和 6 的循环子群的共轭类 $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$、$[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}]$、$[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}]$ 和 $[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$ ；
- 含 8 个和 10 个元素的二面体子群的共轭类 $[\mathrm{D}_4]$, $[\mathrm{D}_5]$ ；
- 与 $\mathfrak{S}_3$同构的子群的两个共轭类： $[\langle(1,2,3),(1,2)\rangle]$ 和 $[\langle(1,2,3),(1,2)(4,5)\rangle]$ ；
- 与直积 $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$同构的子群的共轭类 $[\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ ；
- 次数为 4 和 5 的交错子群的共轭类 $[\mathfrak{A}_4]$, $[\mathfrak{A}_5]$ ；
- 次数为 4 和 5 的对称子群的共轭类 $[\mathfrak{S}_4]$, $[\mathfrak{S}_5]$ ；
- 群 $\mathrm{GA}(1,5) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$的共轭类 $[\mathrm{GA}(1,5)]$ 。

总共有 19 个共轭类。

注 2.1。 子群 $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $\mathfrak{S}_4$ 是不包含五阶元素的子群中（关于集合包含）极大的子群。

引理 2.2。 设 X 是域 K 上的德尔佩佐曲面。那么， $X_{\overline{K}}$ 上的任意 (-1)-曲线都定义在 K^{sep} 上。

证明。 令 $\mathcal{H}$ 为 (-1)-曲线在 X上的希尔伯特概形。我们证明该概形是光滑的。为此，计算点 $[l] \in \mathcal{H}$ 所对应的 (-1)-曲线 $l \simeq \mathbb{P}^1$处的切空间 $T_{[l]}\mathcal{H}$。切空间 $H^0(l, \mathcal{N}_{l/X})$ 同构于 [11, ，见第 VI 章第 4 节，定理 4]。因此得到

$$T_{[l]}\mathcal{H} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0.$$

因此，概形 $\mathcal{H}$ 是光滑的。因此，K^{sep}-点在 $\mathcal{H}_{\overline{K}}$中稠密，见 [18,引理 056U]。但是，$\mathcal{H}_{\overline{K}}$ 是有限的，因此概形 $\mathcal{H}_{\overline{K}}$ 的所有点都定义在 K^{sep}上。 □

引理 2.3。 设 K 为一个域。设 X 为定义在K上的、类型为 $[H]$ 的 *5* 次德尔佩佐曲面。那么存在一个伽罗瓦域扩张 $L \supset K$，其伽罗瓦群同构于 H，并且 $X_{\overline{K}}$ 上的每条(-1)-曲线都定义在 L上。

证明。考虑我们域的可分闭包。由引理 2.2 可知，每条 (-1)-曲线都定义在 K^{sep} 上。因此，群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 通过自同构作用于 (-1)-曲线的图，由此作用可得同态 h: $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \mathfrak{S}_5$。记 G 为此同态的核。令 $L = (K^{\mathrm{sep}})^G$，则 $L \supset K$ 是一个有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq H$，见 [18, 定理 0BML]。由于每条 (-1)-曲线在群 G 的作用下均为不变量，因此 $X_{\overline{K}}$ 上的每条 (-1)-曲线都定义在 L 上。□

定义 2.4。 设 K 是一个域。射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 中不同的 K 个点组成的集合称为一般位置的点，若其中任意三点都不共线。

引理 2.5. 设 X 是域 K 上次数为 $d \leq 5$ 的德尔佩佐曲面。那么，群 $\mathrm{Aut}(X)$ 通过自同构对曲面 $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 的(-1)-曲线图的自然作用是忠实的。

证明。 我们来证明该作用是忠实的。记该作用的核为 G。那么存在一个 G-等变态射

$$X_{K^{\mathrm{sep}}} \to \mathbb{P}^2_{K^{\mathrm{sep}}},$$

压缩 $9-d \geq 4$ 个互不相交的 (-1)-曲线。这些 $9-d$ 曲线的像将是处于一般位置的 $9-d$个点。但我们知道，固定一般位置的四个点的射影平面的任何自同构都是平凡的。因此， G 是平凡的，且该作用是忠实的。

□

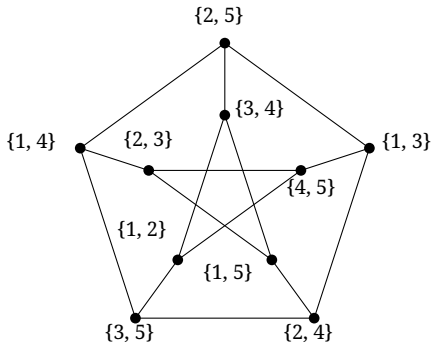

图1。

记 Γ 为代数闭域上次数为 (-1) 的德尔佩佐曲面上的 5-曲线的交图。图 Γ 是一个克neser 图 $KG_{5,\ 2}$，见图1。也就是说，其顶点对应于一个五元集的二元子集，并且当且仅当两个对应集合不相交时，两个顶点相邻。其自同构群同构于对称群 $\mathfrak{S}_5$。

推论 2.6 （见 [3, 定理 8.5。8]或 [14, 命题 3。4]）。 5 次德尔佩佐曲面的自同构群嵌入对称群 $\mathfrak{S}_5$中。

我们将在第 9节证明定理 1.7时需要以下引理。

引理 2.7。 设 Γ 为 *5* 次德尔佩佐曲面上的 (-1)-曲线的图。设$G \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为 $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathfrak{S}_5$中的一个子群。则存在该图的一个顶点 v，其关于群 G的作用是不变量。

证明。注意，图 Γ 有一个关于群 $G' = \langle$**(1, 2, 3)**、**(1, 2)**、**(4, 5)**$\rangle$的作用不变量的顶点。事实上，这就是对应于子集 $\{4, 5\}$的顶点，见图 1。群 G 和 G' 在 $\mathfrak{S}_5$中共轭，即存在一个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ 使得 $G' = \sigma^{-1}G\sigma$。因此，对应于子集 $\{\sigma$**(4)** σ**(5)**$\}$ 的顶点关于群 G的作用是不变量的。□

下面的引理可用类似的推理证明。

引理 2.8. 设 Γ 是一个次数为5的德尔佩佐曲面上(-1)-曲线所构成的图。设G 是$\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathfrak{S}_5$ 中的一个子群。假设图 Γ 不存在由顶点组成的 G- 不变集合，且其中任意两个顶点都不由边相连。那么 G 包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 同构的子群。

证明。 假设 G 不含有阶为 5的元素，我们可以假设 G在具有此性质的子群中是极大的。于是，由注 2.1， $G \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 或 $G \simeq \mathfrak{S}_4$。在第一种情况下，由引理 2.7可知存在一个 G-不变顶点；在第二种情况下，存在一个由四个顶点组成的 G-不变集合，其中任意两个顶点都不由边相连。矛盾，因此群 G 包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 同构的子群。□

3. 5 次德尔佩佐曲面的构造。第一种构造

本节将通过在射影平面上的一个闭集处进行爆破，构造若干类型的 5 次德尔佩佐曲面。要求该闭集在扩张至可分闭包后，成为一般位置的四个点的并集。

例 3.1。 类型为 $[e]$ 的曲面可以在任意域 K 上构造。为此，我们在射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 上选取一般位置的四个点（即使在二元域上也存在这样的点）。在所选的四个点处对平面进行爆破，得到一张 *5* 次德尔佩佐曲面。5此外，所构造曲面的所有(-1)曲线都定义在K上，因此群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在(-1)曲线图上的作用是平凡的。因此，所构造曲面的类型为 $[e]$。

例 3.2。 无法再在任何域上构造类型为 $[\langle(1,2)\rangle]$ 的曲面。设 K 为一个域， $L \supset K$ 为一个伽罗瓦域扩张，其伽罗瓦群同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。记 ω 为生成域扩张 $L \supset K$的元素。用 $\bar{\omega}$表示 ω 在伽罗瓦群的非平凡元素作用下的像 $\mathrm{Gal}(L/K)$。考虑射影平面 $\mathbb{P}^2_{K^{\mathrm{sep}}}$中的四个点：

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (1:\omega:1),\ (1:\bar{\omega}:1).$$

这些点并非全都定义在 K上，然而这四个点构成一个定义在 K上的闭集，因此我们可以在该闭集处吹起射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 。第 h 节中引入的同态*1* 的像将是一个阶为 *2* 的子群，更确切地说，是由一个对换生成的子群。因此，所构造的五次德尔佩佐曲面 的类型为 $[\langle(1,2)\rangle]$。

注 3.3。 存在同一类型的非同构 5 次德尔佩佐曲面 。事实上，考虑一个域 K ，它有两个不同的二次伽罗瓦扩张 $L \supset K$ 和$L' \supset K$。对于每个域扩张，都可以按照例 (1,2)⟩] 中描述的方法构造一个该类型的曲面 3.2。由此得到的 5 次德尔佩佐曲面 类型相同，但彼此不同构。

例 3.4。 使用例 *3.2* 中的记号，并考虑射影平面 $\mathbb{P}^2_{K^{\mathrm{sep}}}$中的四个点：

$$(1:\omega:0),\ (1:\bar{\omega}:0),\ (1:0:\omega),\ (1:0:\bar{\omega}).$$

这四个点构成一个在 K 上定义的闭集。将射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 在这个闭集上爆破，可得到一个类型为 $[\langle(1,2)(3,4)\rangle]$ 的 *5* 次德尔佩佐曲面。

例 3.5。 设 K 是一个域，并假设射影平面 $\mathbb{P}^2_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上有一个处于一般位置的三点组，它在群$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$的作用下保持不变。还假设群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$在这三个点上的置换群中的作用像与 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 同构。给这个三点组添加一个 K 点，使得所得的四个点在 K^{sep} 上处于一般位置（任意一个 K 点都适用，因为原来的三个点在K^{sep} 上处于一般位置，并按循环方式置换；也就是说，经过这三个点中任意两点的三条直线都不可能包含 K 点）。所得的四个点构成一个在K上定义的闭集。将射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 在这个闭集上爆破，可得到一个类型为 $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$ 的 *5* 次德尔佩佐曲面。5

注 3.6. 通过这种构造，我们只能得到类型为 $[H]$ 的 5 次德尔佩佐曲面，其中 H 包含于 $G \subset \mathfrak{S}_5$、$G \simeq S_4$ 中。

4. 5 次德尔佩佐曲面的构造。第二种构造

考虑任意域 K。设 C 是射影平面 $\mathbb{P}^2_K$ 中的一条光滑有理二次曲线。假设曲线上有五个 K^{sep}-点 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 ，它们在群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的作用下不变。由于这五个点在群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的作用下不变，因此这五个点的并集是一个定义在 K 上的闭集 Z 。

吹起平面 $\mathbb{P}^2_K$ 中集合 Z 的点，并将圆锥曲线的严格变换C吹下。我们得到曲面 X，它是一个 5 次德尔佩佐曲面5。稍后在第 7 节中，我们将看到，除类型为 $[e]$ 的曲面在二元域和三元域上的情形外，这种构造可以得到所有可能类型的 5 次德尔佩佐曲面。

通过这一构造，我们清楚地看到了群 $\mathfrak{S}_5$ 与 $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上的 (-1)-曲线图的自同构群之间的同构。当我们置换二次曲线上的五个指定点时，也会置换连接这些点的十条直线；因此，我们置换吹起曲面上的保交点的 (-1)-曲线，即得到该图的一个自同构。唯一作用平凡的点置换是恒等置换。因此，所给出的作用确定了群 $\mathfrak{S}_5$ 与 (-1)-曲线图的自同构群之间的同构。

注记 4.1. 设 X 是域 K 上的 5 次德尔佩佐曲面。众所周知， X 有一个 K-点，例如参见 [14]。假设存在一个不位于 (-1)-曲线上的 K-点（如果域 K 是无限的，这样的 K-点总是存在，因为在这种情况下， X 上的 K-点是扎里斯基稠密的（参见定理 4.4] 的证明 [14, ）；但是，例如，在二元域上的 $[e]$ 类型的 5 次德尔佩佐曲面上不存在这样的点）。那么，上述构造是可逆的。也就是说，可以吹起一个不位于 (-1)-曲线上的点，得到曲面 X'，它是一个 4 次德尔佩佐曲面。在 $X'_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上将有五条彼此不相交的 (-1)-曲线，它们关于群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的作用是不变量（该群恰好由与吹起 $X' \to X$ 的例外曲线 l 相交的 (-1)-曲线组成）。因此，将 X' 收缩到 $\mathbb{P}^2_K$ 是有定义的，并且 l 的像是一条光滑有理二次曲线。

由此可知，在无限域上，任意 5 次德尔佩佐曲面5 都可以通过上述构造得到。这个思路也可用于证明定理 1.2 在无限域上的必要条件，作为另一种证明（参见 $[1, \S10]$）。

5. 仿射直线上的点与伽罗瓦群的作用

正如我们刚刚所见，要构造一个类型为 $[H]$ 的 5 次德尔佩佐曲面，只需在一条光滑有理二次曲线上给出五个点，使它们在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的作用下所产生的置换构成 $R \subset \mathfrak{S}_5$, $R \in [H]$ 的一个子群。由于光滑有理二次曲线与射影直线同构，因此我们只需在 $\mathbb{P}^1$ 上给出这五个点，事实上，甚至只需在仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 上给出即可。

下述引理的证明思路取自 Jeremy Rouse 在网站 https://mathoverflow.net 上的讨论 [19] 中的回答。

引理 5.1. 设有一个自然数 n、一个群 G，以及群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的传递作用。再设有一个伽罗瓦域扩张$L \supset K$，其伽罗瓦群同构于 G。记 H 为 G 中元素 1的稳定子，并考虑域 $M = L^H$。则有以下断言成立。

(1) 域扩张 $M \supset K$ 的次数为 n。*(2)* 存在一个元素 $\beta_1 \in M$，使得 $M = K(\beta_1)$。*(3)* 设 $\mu(x)$ 是元素 β_1 在 K上的最小多项式。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 对多项式 $\mu(x)$ 的根的作用，等价于群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的作用。*(4)* 可以将多项式 $\mu(x)$的根 β_1、 β_2、……、 β_n 编号，使得对于任意 $g \in G$ 和任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，等式 $g(\beta_i) = \beta_{g(i)}$ 成立。

证明。域扩张 $M \supset K$ 的次数计算如下

$$[M : K] = \frac{[L : K]}{[L : M]} = \frac{|\operatorname{Gal}(L/K)|}{|\operatorname{Gal}(L/M)|} = \frac{|G|}{|H|} = n.$$

由于域扩张 $L \supset K$ 是可分的，域扩张 $M \supset K$ 也可分。根据本原元定理 [15, § 40], ，域扩张 $M \supset K$ 是单扩张，即 $M = K(\beta_1)$。因此，断言 1 和 2 得证。

由于域扩张 $L \supset K$ 是正规域扩张，多项式 $\mu(x)$ 的根都属于域 L。因此，伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/L)$ 对这些根的作用是平凡的，所有非平凡作用都来自群 $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq G$。

群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的作用等价于其在子群 H的左陪集上的作用。下面证明，群 G 在多项式 $\mu(x)$的根上的作用，等价于其在同一群 H的左陪集上的作用。

记 S 为根 β_1的稳定子。由于群 G 在多项式 $\mu(x)$的根上的作用是传递的（事实上，我们可以将根 β_1 映射到多项式 $\mu(x)$的任意一个根），因此 $[G:\ S]=n$。

由于 β_1 属于域 L^H，因此子群 H 包含于子群 S 中；此外，子群 H 在群 G 中的指数也等于 n，所以 $H=S$。群 G 对多项式 $\mu(x)$ 的根的作用，等价于 G 对子群 H 的左陪集的作用，由此断言 3 得证。

我们将左陪集 $H_1=H$、 H_2、.....、 H_n 编号，使得对于任意 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，类 H_i 将元素 1 映到元素 i；按照这种编号，对于任意 $g\in G$ 以及任意 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，等式 $gH_i=H_{g(i)}$ 成立。现在我们按如下方式给根编号

$$\beta_2=h_2(\beta_1),\ h_2\in H_2;$$
$$\beta_3=h_3(\beta_1),\ h_3\in H_3;$$
$$\ldots$$
$$\beta_n=h_n(\beta_1),\ h_n\in H_n.$$

容易看出，在引入的记号下，对于任意 $g\in G$ 以及任意 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，等式 $g(\beta_i)=\beta_{g(i)}$ 成立，由此断言 4 得证。□

定义 5.2. 设 G 是对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的一个子群。在 G 对集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的作用下，长度相同的轨道的最大数量称为群 G 的复杂度 $c(G)$。

引理 5.3. 设 n 和 k 是自然数，设 G 是嵌入在 $\mathfrak{S}_n$ 中、复杂度为 k 的群。假设域 K 至少有 $k+1$ 个元素。如果存在一个伽罗瓦扩张 $L\supset K$，其伽罗瓦群同构于 G，那么在 L 上的仿射直线上存在一个含有 n 个点的集合 $B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$，使得对于任意 $g\in G$ 和任意$i\in\{1,2,\ldots,n\}$，等式 $g(\beta_i)=\beta_{g(i)}$ 成立。

证明。 我们将对 G 在集合$\{1,2,\ldots,n\}$上的作用的轨道数进行归纳证明。

归纳基：一个轨道。

由于只有一个轨道，因此 G 是一个传递子群，我们已经知道如何表示所需的点集。具体而言，取集合 B 由多项式的根组成 $\mu(x)$，该多项式在引理5.1中定义。

步骤：假设我们能够表示具有 m 个轨道的作用所对应的所需集合，现来表示具有 $m+1$ 个轨道的作用所对应的集合。

假设集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 在群G的作用下分解为 $m+1$ 个轨道。我们选取长度最小的一个轨道 $\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}$，其中 l 是所选轨道的长度。群 G 在集合 $\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}$ 上传递作用，因此，根据归纳基，仿射直线上的 L 上存在一个由 l 个点组成的集合 $\{\beta'_{i_1},\beta'_{i_2},\ldots,\beta'_{i_l}\}$，使得对于任意 $g\in G$ 和任意 $s\in\{1,2,\ldots,l\}$，等式 $g(\beta'_{i_s})=\beta'_{g(i_s)}$成立。此外，我们可以假设 β'_{i_1} 不等于零（若$l>1$，则总是如此；若 $l=1$，则可以取 1 作为 β'_{i_1}）。

现在考虑集合 $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}$，记作 $\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-l}\}$。群 G 在集合 $\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-l}\}$ 上作用，具有 m 个轨道，因此，根据归纳假设，将存在一组 $n-l$ 个点 $\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\ldots,\beta_{j_{n-l}}\}$，位于 L 上的仿射直线上，使得对于任意 $g\in G$ 以及任意 $s\in\{1,2,\ldots,n-l\}$，等式 $g(\beta_{j_s})=\beta_{g(j_s)}$ 成立。

假设 $\{\beta'_{i_1},\beta'_{i_2},\ldots,\beta'_{i_l}\}\subset\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\ldots,\beta_{j_{n-l}}\}$，但我们需要一组由 n 个不同点组成的集合。注意，对于任意 $a\in K$，集合 $\{a\beta'_{i_1},a\beta'_{i_2},\ldots,a\beta'_{i_l}\}$ 也满足必要条件，即对于任意 $g\in G$ 和任意 $s\in\{1,2,\ldots,l\}$，等式 $g(a\beta'_{j_s})=a\beta'_{g(j_s)}$ 成立。因此，我们只需找到这样一个非零标量 $a\in K$，使得 $a\beta'_{i_1}\notin$

$\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\}$，那么

$$\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\} \cap \{a\beta'_{i_1}, a\beta'_{i_2}, \ldots, a\beta'_{i_l}\} = \varnothing.$$

在这种情况下，我们令 $B = \{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\} \cup \{a\beta'_{i_1}, a\beta'_{i_2}, \ldots, a\beta'_{i_l}\}$，于是证明完成。

假设不存在这样的非零标量 $a \in K$ 使得 $a\beta'_{i_1} \notin \{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\}$，那么反过来便成立：对于任意非零标量 $a \in K$，元素 $a\beta'_{i_1}$ 都包含在 $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\}$ 中。根据引理的条件，我们知道域 K 中至少有 k 个非零标量。这意味着集合 $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\}$ 中至少包含 k 个与 β'_{i_1} 成比例的元素。这些元素各自都位于一个唯一的、长度为 l 的轨道中，这意味着，在群 G 对集合 $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-l}\}$ 的作用所产生的轨道中，至少有 k 个长度为 l 的轨道。因此，在群 G 对整个集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的作用所产生的轨道中，至少有 $k+1$ 个长度为 l 的轨道，这与条件 $c(G) = k$ 矛盾。

因此，我们证明了存在这样的非零标量 $a \in K$，使得

$$\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\} \cap \{a\beta'_{i_1}, a\beta'_{i_2}, \ldots, a\beta'_{i_l}\} = \varnothing.$$

记

$$\beta_{i_1} = a\beta'_{i_1}, \quad \beta_{i_2} = a\beta'_{i_2}, \quad \ldots, \quad \beta_{i_l} = a\beta'_{i_l},$$

于是我们令

$$B = \{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-l}}\} \cup \{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_l}\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$$

并且对任意 $g \in G$ 和任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，等式 $g(\beta_i) = \beta_{g(i)}$ 成立。 □

推论 5.4. 设 n 和 k 为自然数，设 G 是嵌入 $\mathfrak{S}_n$ 中、复杂度为 k 的群。假设域 K 至少有 $k+1$ 个元素。若存在一个伽罗瓦扩张$L \supset K$，其伽罗瓦群同构于 G，则仿射直线 over L 上存在一个含有 n 个点 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 的集合，使得伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在此集合上的作用等价于群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的作用。

证明。 利用引理 5.3，我们得到点集 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 位于 $\mathbb{A}^1_L$，特别是位于 $\mathbb{A}^1_{K^{\mathrm{sep}}}$。由条件可知，对任意 $g \in G$ 及任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，等式 $g(\beta_i) = \beta_{g(i)}$成立，由此立即可得群 G 在集合$\{1, 2, \ldots, n\}$ 及集合 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 上的作用等价。

对于任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 元素 β_i 属于域 L，因此，群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在集合 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 上的作用，是由群 $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq G$ 经由同态 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$ 诱导的；由此，它等价于群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的作用。□

推论 5.5。 推论 5.4 的陈述在将仿射直线替换为射影直线后仍然成立。

证明。 我们使用推论 5.4，然后将仿射直线嵌入射影直线。 □

推论 5.6。 设 n 和 k 为自然数，设 G 为嵌入于 $\mathfrak{S}_n$ 中的一个复杂度为 k的群。假设域 K 至少有 $k+1$ 个元素。若存在一个伽罗瓦扩张 $L \supset K$，其伽罗瓦群与 G同构，则射影平面 $\mathbb{P}^2_{K^{\mathrm{sep}}}$ 中存在一条光滑圆锥曲线 C 以及其上的一个由 n 个点组成的集合 C，该集合在群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$的作用下保持不变，使得伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$在此集合上的作用等价于群 G 在集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的作用。

证明。 利用推论 5.5 将射影直线同构地嵌入射影平面，使其成为一条光滑圆锥曲线。□

6. 无限域上 5 次德尔佩佐曲面类型的实现

现在我们可以证明关于无限域上各种类型的1.2 5 次德尔佩佐曲面的实现的定理5 。

证明。 必要性的证明见引理 2.3。注意，引理 2.3 对原始域没有任何限制，因此实际上，必要性对有限域也得到了证明。

现在我们来证明该条件的充分性。

给定子群 $H \subset \mathfrak{S}_5$ ，并且我们知道域 K 有一个伽罗瓦扩张$L \supset K$ ，其伽罗瓦群与 H同构。我们希望构造一个类型为 $[H]$的 5 次德尔佩佐曲面。

为此，我们针对 $n = 5$， $k = c(H)$， $G = H$ 使用推论 4中所述的构造，以及第 5 节的构造。由此得到的曲面是一个类型为 $[H]$的 5 次德尔佩佐曲面。 □

证明 (推论 1.3)。 只需证明，对于任意子群 $H \subset \mathfrak{S}_5$ ，都存在一个伽罗瓦域扩张 $\mathbb{F}' \supset \mathbb{F}$ ，其伽罗瓦群同构于 H，然后对无限域的已证明情形应用定理 1.2 即可。

注意，群 $\mathfrak{S}_5$ 的所有子群都是可解的，除了 $\mathfrak{A}_5$ 和 $\mathfrak{S}_5$。关于存在具有给定可解伽罗瓦群的数域伽罗瓦扩张，这一点已由 I. R. Shafarevich 在其著作[12, 定理 7]中证明。

关于存在伽罗瓦群同构于 $\mathfrak{A}_5$ 和 $\mathfrak{S}_5$ 的数域伽罗瓦扩张，其证明见论文 [16, §1]。 □

7. 有限域上 5 次德尔佩佐曲面的类型的实现

事实上，有限域的情形与无限域的情形并没有太大区别。例如，对于含有七个或更多元素的域，定理 1.2 的证明与上一节中的证明完全相同。对于含有两个、三个、四个和五个元素的域，虽然存在一些细微差别，但定理仍然成立。

证明。如前所述，关于有限域的定理，其必要条件的证明已由引理2.3完成，因此我们只需证明充分性。

因此，假设我们有一个子群 $H \subset \mathfrak{S}_5$ ，并且已知域 K 有一个伽罗瓦扩张 $L \supset K$ ，其伽罗瓦群与 H同构。我们要构造一个类型为 $[H]$的 5 次德尔佩佐曲面。我们需要考虑以下五种情况:

(1) $|K| > c(H)$。（ $n = 5$、 $k = c(H)$和 $G = H$ 的情形）使用推论 5.6 以及第 4 节所述的构造。由此得到的曲面将是一个类型为 $[H]$的 5 次德尔佩佐曲面。(2) $|K| = 5 = c(H)$。由等式 $c(H) = 5$ 可知，群 H 是平凡的。类型为 $[e]$ 的 5 次德尔佩佐曲面的构造见例 3.1。(3) $|K| = 4 \leqslant c(H)$。由不等式 $c(H) \geqslant 4$ 可知，群 H 是平凡的。类型为 $[e]$ 的 5 次德尔佩佐曲面的构造见例 3.1。(4) $|K| = 3 \leqslant c(H)$。由不等式 $c(H) \geqslant 3$ 可知， H 不是平凡子群，就是由一个对换生成的阶 2 子群。类型为 $[e]$ 和类型为 $[\langle(1, 2)\rangle]$ 的 5 次德尔佩佐曲面的构造见例 3.1 和例 3.2。(5) $|K| = 2 \leqslant c(H)$。由于 H 是有限域的有限扩张的伽罗瓦群，因此 H 是循环的。以下循环子群满足不等式 $c(H) \geqslant 2$:

- H 是平凡子群。类型为 5 的德尔佩佐曲面 $[e]$ 的构造见例 3.1。

- H 是由对换生成的阶 2 子群。类型为 5 的德尔佩佐曲面的构造 $[\langle(1,\ 2)\rangle]$ 在例 3.2中有描述。
- H 是由两个不相交对换的乘积生成的阶 2 子群。类型为 5 的德尔佩佐曲面的构造 $[\langle(1,\ 2)(3,\ 4)\rangle]$在例 3.4中有描述。

- H 是由三循环生成的子群。让我们构造一个类型为$[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$的曲面。利用 5.6 中针对 $n=3,\ k=2$ 和 $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$的情形的推论，我们得到射影平面上的三个一般位置的点，使得伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K)$ 以 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$作用于这个三元组。根据例 3.5，我们得出结论：存在一个类型为 5 的德尔佩佐曲面 $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$，其定义在 K上。

现在所有情形都已考虑，因此定理 1.2 在不对基域施加任何限制的情况下，已得到完全证明。□

8. 5 次德尔佩佐曲面的自同构群

我们已经讨论了给定域上各种类型的 5 次德尔佩佐曲面存在的判据，现在自然要问这些曲面的自同构群。

设 X 是域 K上的一个类型为 $[H]$ 的 5 次德尔佩佐曲面。我们多次注意到，群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 通过自同构作用于 (-1)-曲线的图，相应的到群 $\mathfrak{S}_5$ 的同态记为 h。根据引理 2.5，群 $\mathrm{Aut}(X)$也通过自同构作用于 (-1)-曲线的图。将相应的到群 $\mathfrak{S}_5$ 的同态记为 ψ，由推论 2.6 可知，ψ 是单射。

引理 8.1. 子群 $\psi(\mathrm{Aut}(X))$ </style}包含于子群 ($\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$的中心化子中).

证明。 曲面 X 的自同构与伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在该曲面上的作用可交换。因此，子群 $\psi(\mathrm{Aut}(X))$ 和 $h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K))$ 可交换，即 $\psi(\mathrm{Aut}(X))$ 包含于子群 $h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K))$ 的中心化子中。□

记号 8.2。 设 H 是群 G的一个子群。我们用 $C_G(H)$ 表示群 H 在群 G中的中心化子。

现在我们可以证明定理 1.5。

证明（定理 1.5）。设 X 是域 K上类型为 $[H]$ 的 5 次德尔佩佐曲面。不失一般性，我们可以假设 $h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)) = H$。由引理 8.1 可知，$\psi(\mathrm{Aut}(X)) \subset C_{\mathfrak{S}_5}(H)$。接下来只需证明这些群实际上相同。1 考虑置换 $\sigma \in C_{\mathfrak{S}_5}(H)$。由于每条 (-1)-曲线在$X_{\overline{K}}$ 上都定义在 K^{sep}上，因此存在曲面 $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 的一个自同构 f，使得 $\psi(f) = \sigma$。记 $l_1, l_2, \ldots, l_{10}$ 为曲面 $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上的所有 (-1)- 曲线。由于 σ 包含于子群 H 的中心化子中，因此对于任意 $\gamma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 以及任意$i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$，等式

$$f(\gamma(l_i)) = \gamma(f(l_i)) = \gamma(f)(\gamma(l_i))$$

成立。这里 $\gamma(f)$ 是将元素 γ 作用于自同构 f后得到的一个自同构。由集合 $\{\gamma(l_i)\}_{i=1,\ 2,\ldots,10}$ 与集合$\{l_i\}_{i=1,\ 2,\ldots,10}$相同可知，自同构 f 和 $\gamma(f)$ 在(-1)-曲线的图上诱导出相同的自同构。由引理2.5 可知，这些自同构相同

$$\gamma(f) = f.$$

Sinc对于任意 $\gamma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$，所写的等式都成立，因此利用该等式

$$\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)},$$

我们得出，f 定义在 K 上。因此，每个置换 $\sigma \in C_{\mathfrak{S}_5}(H)$ 都由曲面 X 的一个自同构实现，即 $\psi(\mathrm{Aut}(X)) = C_{\mathfrak{S}_5}(H)$。由于 ψ 是单射，我们得到所需结果 $\mathrm{Aut}(X) \simeq C_{\mathfrak{S}_5}(H)$。□

推论 8.3。设 X 是一个 5 次德尔佩佐曲面。则根据类型的不同，X 具有以下自同构群。

X的类型	自同构群
$[e]$	$\mathfrak{S}_5$
$[\langle(1,2)\rangle]$	$\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\langle(1,2)(3,4)\rangle]$	D_4
$[\langle(1,2),(3,4)\rangle]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}]$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}]$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$[\langle(1,2,3),(1,2)\rangle]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\langle(1,2,3),(1,2)(4,5)\rangle]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\mathrm{D}_4]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$[\mathfrak{S}_5]$, $[\mathfrak{A}_5]$, $[\mathfrak{S}_4]$, $[\mathfrak{A}_4]$, $[\mathrm{D}_5]$, $[\mathrm{GA}(1,5)]$	e

证明。要证明这一点，需要使用定理1.5并计算 $C_{\mathfrak{S}_5}(H)$ 所有类型曲面的中心化子。□

回顾一下，具有群 G 作用的德尔佩佐曲面 X 称为 G-极小，如果 $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$。

引理 8.4（参见 [4,定理 6.4]）。设 X 是域 K 上的 5 次德尔佩佐曲面，且 G 是 $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathfrak{S}_5$ 的一个子群。当且仅当由子群 G 和群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 在同态 h 下的像生成的群 Δ 含有一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 同构的子群时，曲面 X 才是 G-极小的。

证明。考虑如下群的正合序列（见 [7, 练习 3.3.5(iii)]）：

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K(X)).$$

现在，由于 X 上有一个 K-点（例如，参见 [14]），最后一个同态是一个嵌入，因此

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)} = \mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K))}.$$

取 G-不变量，得到一个同构：

$$\mathrm{Pic}(X)^G \simeq \mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\Delta}.$$

若 X 是 G-极小的，则根据引理 2.8，子群 Δ 包含一个与下列群同构的群：$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$。

反之，如果子群 Δ 包含一个群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$，那么 $\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\Delta}) = 1$，因为群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的一个具有一维平凡子表示的五维表示，要么本身是平凡表示（这不是我们的情形），要么恰好包含一个一维平凡子表示。因此，X 是 G-极小的。□

由引理 8.1 和引理 8.4 可得一个推论。

推论 8.5. 5 次德尔佩佐极小曲面的自同构群要么是平凡群，要么同构于 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$。

现在我们来证明命题1.6。

证明 (命题 1.6)。 先证明必要性。假设存在一个 G-极小的 5 次德尔佩佐曲面，其定义在域 K上。根据引理 8.4 ，我们知道由群 Δ 和群 G 在同态 h下的像 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 生成的群包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$同构的子群。由于子群 $G \subset \mathfrak{S}_5$和 $h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}})) \subset \mathfrak{S}_5$ 彼此交换，因此存在一个满同态

$$p\colon G \times h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}})) \twoheadrightarrow \Delta.$$

因此， G 要么包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$同构的子群，要么 $h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}))$ 包含一个与 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$同构的子群。第一种情况下，命题 1.6 的条件 1 成立。第二种情况下，根据定理 1.2，条件 2 成立。此外，根据定理 1.5，子群G包含于中心化子 $C_{\mathfrak{S}_5}(h(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}})))$中，而后者包含于中心化子$C_{\mathfrak{S}_5}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$中。如果条件 1 不成立，即 G 不包含 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$，那么G就是平凡的。

现在证明充分性。假设条件 1 成立。那么，类型 $[e]$ 的 5 次德尔佩佐曲面将是 G-极小的，并且根据定理 1.2 ，任意域上都存在类型 $[e]$的曲面（G-极小性由引理 8.4得出）。假设条件 2 成立。那么根据定理 1.2 ，存在一个类型为 5 、类型为 $[\mathrm{Gal}(L/K)]$的 5 次德尔佩佐曲面，其定义在 K上。根据引理 8.4，曲面 X 将是 G相对于平凡群 G的作用而言的极小曲面。 □

9. 6 次德尔佩佐曲面的分类

考虑任意域 K。设 X 是定义在 K上的 6 次德尔佩佐曲面。伽罗瓦群 Gal(K^{sep}/K) 通过自同构作用于 (-1)-曲线的图。由于 $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 的 (-1)-曲线图的自同构群同构于群$\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，参见[3, 定理 8.4。2], ，我们得到同态

$$h\colon \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

设 H 是 $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个子群，用 $[H]$ 表示它的共轭类。

定义 **9.1 节中,** 我们称一个 6 次德尔佩佐曲面的类型为 $[H]$ ，如果 $\mathrm{Im}\, h \in [H \quad]$.

容易看出，6 次德尔佩佐曲面只有十种类型，即: $[e]$, $[\langle((1,2),0)\rangle]$, $[\langle((1,2),1)\rangle]$, $[\langle(\mathrm{id},1)\rangle]$, $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$, $[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$, $[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$,$[\langle((123),0),((12),0)\rangle]$, $[\langle((123),0),((12),1)\rangle]$, $[\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$, 参见 [10, 图 1]。

证明 （定理 1.7）。 条件必要性的证明与定理 1.2中条件必要性的证明完全类似。因此，我们立即转向充分性的证明。

假设我们有一个子群 $H \subset \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，并且知道域 K 有一个伽罗瓦扩张 $L \supset K$ ，其伽罗瓦群与 H同构。我们要构造一个 $[H]$类型的6次德尔佩佐曲面。为此，我们先构造一个相应类型的5 次德尔佩佐曲面。

考虑一个嵌入

$$i\colon \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathfrak{S}_5.$$

将此同态的像记为 G ，置 $H' = i(H)$，并构造一个类型为 $[H']$ 的 5 次德尔佩佐曲面。此类曲面的存在性由

定理 1.2 保证。由于 H' 是 G中的一个子群，根据引理 2.7，图 Γ 中存在一个顶点 v，它关于群 H'的作用是不变量。因而，与顶点 v 对应的 (-1)-曲线关于群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的作用是不变量，因此定义在 K上。将这条 (-1)-曲线压掉后，我们得到一个类型为 6 次的德尔佩佐曲面，类型为 $[H]$。□

关于完美域上 6 次有理德尔佩佐曲面（特别是 G-极小曲面）的分类，以及关于其自同构群的信息，可见[10, 第 4]节。

参考文献

[1] A. Auel 和 M. Bernardara，《任意域上德尔佩佐曲面的半正交分解与双有理几何》。伦敦数学会会刊（第三辑）117（2018）。[2] A. Beauville，《$\mathrm{PGL}_2(K)$ 的有限子群》。载于《向量丛与复几何》，第 23–29 页，Contemp. Math.，522，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。[3] I. V. Dolgachev，《经典代数几何：现代观点》。剑桥：剑桥大学出版社，2012。[4] I. V. Dolgachev 和 V. A. Iskovskikh，《平面 Cremona 群的有限子群》，数学进展第 269 卷，第 443–548 页。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2009。[5] I. V. Dolgachev 和 V. A. Iskovskikh，《完美域上平面 Cremona 群中的素数阶元素》，《国际数学研究通报》，2009 年第 18 期，2009。[6] M. Garcia-Armas，《零亏格曲线上的有限群作用》。《代数杂志》394（2013）。[7] S. O. Gorchinskiy 和 C. A. Shramov，《非分歧布劳尔群及其应用》。《数学专著译丛》，2015。[8] H.-Y. Lin、E. Shinder、S. Zimmermann，《二维中的分解中心与簇的格罗滕迪克环》。arXiv:2012.04806，2020。[9] J.-P. Serre，《任意域上秩为 2 的 Cremona 群有限子群阶数的闵可夫斯基型界》。《莫斯科数学杂志》9:1（2009）。[10] J. Schneider 和 S. Zimmermann——《完美域上平面 Cremona 群的代数子群》。´《代数几何电子期刊》，2021 年 11 月 16 日，第 5 卷。[11] I. Shafarevich，《基础代数几何。1. 射影空间中的簇》。第三版。译自 2007 年俄文第三版。施普林格，海德堡，2013。[12] I. R. Shafarevich，《构造具有给定可解伽罗瓦群的代数数域》。《苏联科学院学报数学系列》，1954。[13] A. N. Skorobogatov，《扭子与有理点》。《剑桥数学丛书》。剑桥：剑桥大学出版社，2001。[14] A. N. Skorobogatov，《论 Enriques—Swinnerton-Dyer 的一个定理》。《图卢兹数学科学学院年刊：数学》，第 6 系列，第 2 卷（1993）。[15] B. L. van der Waerden，《现代代数》。1953。[16] N. Vila，《论伽罗瓦理论的逆问题》。《数学出版物》36（1992），第 2B 期，1053–1073（1993）。[17] E. A. Yasinsky，《实德尔佩佐曲面的自同构与实平面 Cremona 群》。arXiv: 1912.10980，2019。[18] Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu[19] https://mathoverflow.net/questions/167916/incomplete-failures-of-the-inverse- galois -problem/16791

国家研究型大学“高等经济学院”电子邮件地址：
alvlzaitsev1@gmail.com