arXiv:2302.04941v1 [math.DS] 9 Feb 2023

佩肖托结构稳定性定理的一维版本：基于微积分的证明

Aminur Rahman*†，Denis Blackmore‡

1 摘要

佩肖托结构稳定性与稠密性定理代表了现代动力系统理论及其应用发展中的里程碑。尽管这些定理十分重要，但在动力系统或微分方程的高年级本科课程中，它们往往只是被相当粗略地介绍，甚至完全不涉及。这主要是因为其证明内容深奥且篇幅较长。在本模块中，我们将以直观且相当简单的方式表述并证明佩肖托定理的一维类比，只使用数学科学或相关领域高年级本科生大体上应已熟悉的概念和结果。我们的目的是为那些可能有兴趣进一步学习动力系统的学生提供一种易于理解的一维结构稳定性理论处理方式，从而帮助他们更好地欣赏和理解佩肖托定理及其较新的推广形式。此外，我们认为，让学生了解这些发现的历史背景十分重要且有趣，因为这些数学成果并非孤立完成的。鉴于这是 Mar´ılia Chaves Peixoto 和 Mauricio Matos Peixoto 出生的 100th 周年纪念日（分别为 24th 和 15th 1921月），介绍这一历史背景或许更加恰当。

*通讯作者，arahman2@uw.edu
†应用数学系，华盛顿大学，西雅图，WA 98004
‡数学科学系，新泽西理工学院，纽瓦克，NJ 07102

2 引言

动力系统研究的数学基础由莱布尼茨、牛顿和伯努利家族于17世纪末至18世纪初奠定，他们通过《Nova Methodus》 [1],《Principia》 [2], 《Methodus Fluxionum》 [3], 《Explicationes》 [4], 以及许多其他著作，与现实世界中的问题建立了密切联系。两个世纪后，庞加莱 将新的数学技术应用于天体力学研究 [5, 6], ，这一研究后来被称为动力系统。他表明，可以通过系统的定性性质（相空间）提取有关系统的信息；也就是说，无需解出系统的方程。这正是动力系统理论的核心，而这一过程通常通过对微分方程进行细致的数学分析来实现。

在数学教育的早期，学生学习计算结果，却不必思考所作假设。计算结果真的正确吗？随着教育的深入，我们逐渐认识到，必须先从假设出发，通过逻辑推理证明计算是有效的。一个早期的例子出现在数值分析入门课程中。设计一种算法来求解微分方程或求函数的根并不难，但并非所有方案都能对每一类方程收敛。同样，在动力系统中，我们希望利用方程的局部性质作出全局断言，但这总是可行的吗？

这便是结构稳定性（第5节将正式定义）这一概念发挥作用之处。向量场受到足够大的扰动，会改变任何系统的动力学。如果一个动力系统具有结构稳定性，那么它在定性上不受足够小的扰动影响。对于“现实世界”中的问题，这意味着微小的测量误差不会改变模型的定性行为。以摆为例，它的一个不动点对应于摆锤竖直向下的位置。若摆没有阻尼，当摆锤初始位置偏离不动点时，它会围绕该不动点振荡；但即使只有少量阻尼，不动点也会变成吸引子，摆最终会静止下来。增加的阻尼只会使向量场发生轻微变化，却会显著影响摆的行为。如果测量工具无法检测到少量摩擦，并据此认定摆没有摩擦，那么模型就会预测摆的振幅恒定，而观测结果会证明这一预测不成立。

接下来，我们将尝试主要运用高等微积分技巧，为一维情形下的佩肖托结构稳定性与稠密性定理提供一种新颖的证明。我们假设学生读者已学过一门微分方程入门课程

（或动力系统入门课程），目前或许正在学习高等微积分／实分析。我们也鼓励感兴趣的读者在阅读本文时参考动力系统入门教材（例如 [7, 8, 9, 10]）以及 Smale 的开创性著作 [11] 。不过，在开始之前，值得指出该定理一维版本的一些重要局限。一维微分动力系统可能出现的流的种类有限。事实上，不动点和稳定性等概念依然适用，但孤立的非平凡周期轨道、分界线和奇异吸引子等则不会出现。然而，我们认为，对于高年级本科生或研究生而言，理解本文所介绍的一维证明将有助于他们理解高维流的细微之处。

本文其余部分的组织如下：第 3节简要讨论导致佩绍托定理出现的历史事件。第 4 节介绍最初的结构稳定性定理，随后在第 5节列出一些可能有助于读者理解的定义。第 6 节将重点讨论本文主题：关于一维、闭、连通、连续可微流形的佩肖托结构稳定性定理，该流形必为一个圆（参见 [12]），可表示为端点识别的单位区间。接下来，我们将在第 7节简要讨论佩肖托稠密性定理；该定理由结构稳定性定理推导而来，并在第 8节对这两个定理作一些评论。最后，我们将在第 9 节以关于结构稳定性的总结性论述结束本文。

3 历史背景

毛里´西奥·Peixoto 于一个世纪前的4月出生在巴西东北部的福塔莱萨15^{th} 1921。1943年，Peixoto 以数学领域的贡献而闻名，他从巴西大学（Universi- dade do Brasil）获得土木工程学位 [13]。事实上，和许多现代应用数学家一样，Peixoto 的许多研究都受到“现实世界”观察的启发。正是在这所大学，他结识了妻子兼合作者玛´莉莉亚·Chaves Peixoto。访问芝加哥大学数年后，Peixoto 夫妇、Leopoldo Nachbin 等人共同创立了纯数学与应用数学研究所´（IMPA），时间是 1953 [13]。这一创举留下了深远影响：IMPA 成立仅 60 年后，该所数学家 Artur Avila 就因在动力系统理论方面的贡献获得了菲尔兹奖。毛里´西奥对动力系统结构稳定性的兴趣，可以追溯到他于1957年至1958年访问普林斯顿大学期间；在那里，他师从现代动力系统理论的先驱之一 Solomon Lefschetz。不久后，玛´莉莉亚和毛里´西奥开始了卓有成效的结构稳定性研究计划。1959年，Peixoto 夫妇发表了论文，玛´莉莉亚为第一作者，

发表了一篇关于结构稳定性的论文 [14], ，这篇论文后来成为证明佩绍托定理的关键。不幸的是，1961年玛´莉莉亚·Chaves Peixoto 过早离世，世界痛失一位开拓性的数学家。毛里´西奥后来发表了后来被称为佩绍托定理的成果，时间是 1962 [15]。

4 原始定理

受 Andronov 和 Pontryagin 开创性工作的启发， [16] 并在巴西工程师、数学家 Solomon Lefschetz 的鼓励下，Maur´ıcio Matos Peixoto 在 Mar´ília Chaves Peixoto 的重要贡献下，提出并证明了关于结构稳定性（定义 7）及其在光滑曲面上的稠密性性质的首个全局刻画（即针对整个定义域的结果，而非仅针对不动点所在区间的结果） [14, 17, 15] ，其表述方式已成为现代动力系统理论的标志。这项工作也为无数扩展和推广开辟了道路。Peixoto 定理最有力之处之一，是它运用局部性质来刻画动力系统的全局特征。结构稳定性定理和稠密性定理均包含在定理 P 中（见 Perko [8]）。需要指出的是，这一定理是原始版本，其中可能包含本科生不熟悉的术语，这些术语将在下一节中定义。

P定理 （Peixoto结构稳定性与稠密性定理）。 设 $\dot{x} = f\,(x)$ 是光滑闭曲面上的一个 C^1 （连续可微）动力系统。当且仅当该动力系统满足以下性质时，它才是 C^1 结构稳定 C^1 的：

（*i*）所有循环行为都局限于有限多个双曲不动点和周期轨道。

（*ii*）不存在分界线；也就是说，不存在连接鞍点的轨道。

此外，如果 M 是可定向的，那么结构稳定动力系统的集合在曲面上所有 C^1 动力系统的集合中是 C^1 -开且稠密的。

如前一段所述，这个定理涉及许多有意学习动力系统的高年级本科生并不熟悉的数学概念，而且证明相当冗长复杂。鉴于这些结果无论从理论角度还是应用角度都十分重要，接下来讨论的简单得多的一维类比，很可能有助于理解

佩肖托定理及其推广，它们构成了现代动力系统理论及其应用的重要组成部分。

考虑圆 $\mathbb{S}^1$ 上的动力系统。所有光滑、闭合、连通的一维流形（曲线）都与之等价。我们可以将其表示为实数线上的单位区间，并将端点视为同一点

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示模 1 的实数；也就是说，对于 $x,\ y \in \mathbb{R}, x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y$(模 1) $\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$。现在设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，则我们可以将动力系统定义为

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(x+1) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

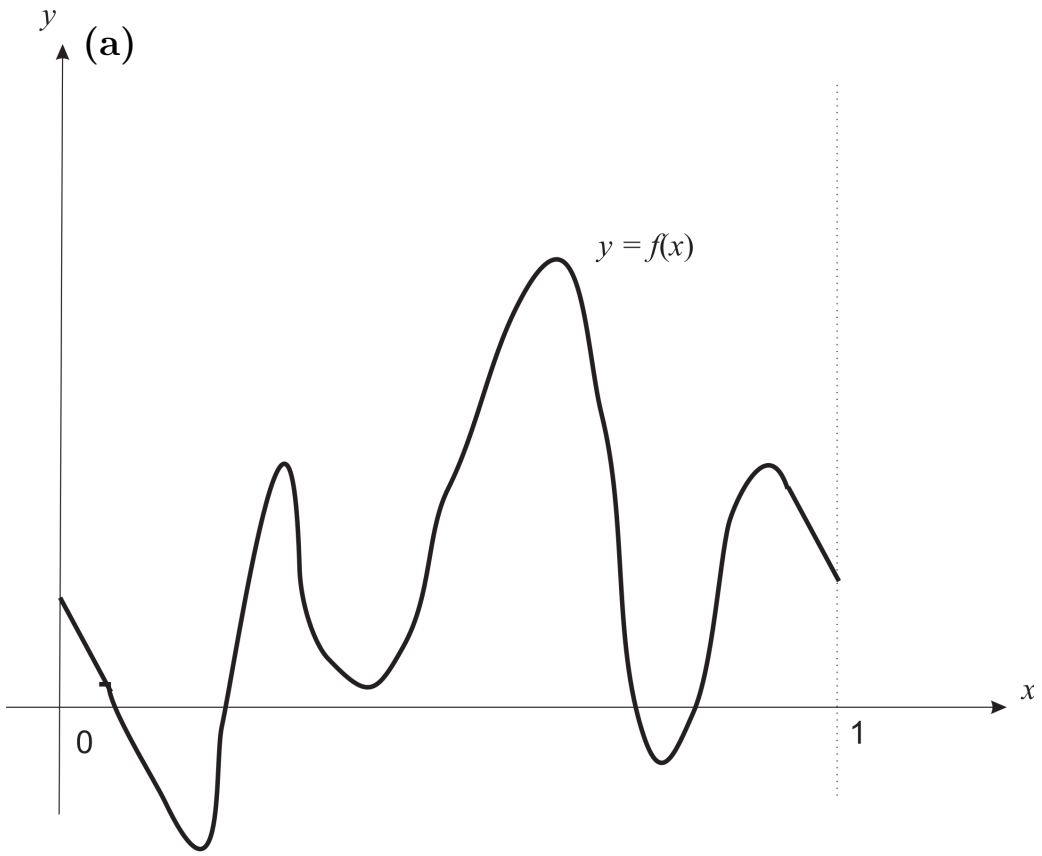
也就是说， f 是周期为一的连续周期函数。只需将范围限制在一个周期内，即单位区间 $0 \le x \le 1$ ，使得 $f(0) = f$(1)。于是（2）变为

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(1) = f(0). \tag{3}$$

在此背景下，函数 f 称为向量场。若函数 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上属于 C^k 类，即该函数具有 k 个连续导数，且每个导数在端点处相等，则称向量场 f 为 C^k 类；也就是说， $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $f^{(m)}$(0) $= f^{(m)}$(1)$\forall\, 0 \le m \le k$。图 1 中的曲线就是一个例子。此外，将向量场作用于点 $x_0 = x$(0)，经过固定时间 $\tau \in \mathbb{R}$ 后会得到正向迭代 $x_1 = x(\tau)$。类似地，反向迭代为 $x_{-1} = x(-\tau)$。将这些迭代合并为一个集合 $\{x_n\colon\ x_n = x(n\tau)\ \forall n \in \mathbb{Z}\}$，便得到系统 (3) 的轨道。例如，在图 1(a) 中，如果初始点位于第二个和第三个不动点之间，就存在一个点序列 x_n ，它逐渐远离第二个不动点并趋近第三个不动点。我们称系统 (3) 的轨道受到第二个不动点的排斥，并被第三个不动点吸引。除了这个例子，在 $\mathbb{S}^1$ 上，根据不动点的方向，还可能出现多种不同的轨道。最简单的轨道是不动点，此时对于所有 $t \in \mathbb{R}$, $\dot{x}|_{x=x_*} = 0 \Rightarrow x(t) = x_*$ 。此外，在 $\mathbb{S}^1$ 上也可能存在周期轨道：假设不存在不动点，那么当 $\dot{x} \ne 0$ 时，存在一个 $\tau \in \mathbb{R}$ ，使得对于所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{Z}\ n \ne m$， $x_n = x(n\tau) = x(m\tau) = x_m$。

5 一些关键定义和预备定理

在开始讨论主要结果之前，我们先介绍一些在分析中起关键作用的定义。从现在起，我们假设所有的



Graph of vector field



Phase portrait

图1：圆上结构稳定动力系统的向量场示例 $\mathbb{S}^1$，（**a**）表示为端点识别的单位区间，以及其在单位区间上的（**b**）相图。

动力系统至少是 C^1 （连续可微）的。此外，为简化表述，我们将关于流形的讨论限制在包含于 C^1 中的简单闭合 $\mathbb{R}^2$曲线上，这些曲线与 C^1 等价于 $\mathbb{S}^1$ （参见 [12]）。对于具备一些拓扑学知识的读者，我们指出，这些曲线继承了 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑所诱导的度量拓扑，该拓扑由开球生成。以下特征描述提供了一些基本背景。

定义 1。 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集，若对每个点 $p \in U$ ，都存在一个以 p 为中心、半径 r 为正的开圆盘，且该圆盘完全包含于 U，则称 U 为开集。显然，空集 $\varnothing$ 和整个平面 $\mathbb{R}^2$都是开集。（$\mathbb{R}^2$，$\mathcal{U}$）中，$\mathcal{U}$ 是所有开集的集合；它与拓扑 $\mathcal{U}$一起构成所谓的拓扑空间。对于平面而言，这种拓扑称为欧几里得拓扑、标准拓扑或通常拓扑。平面的任意子集 S 都继承所谓的子空间拓扑，该拓扑由形如 $\{S \cap U : U \in \mathcal{U}\}$的（开）集构成。特别地， $\mathbb{R}$可视为 $\mathbb{R}^2$的子空间，其拓扑由开区间的并集构成。

定义 2。若不动点、驻点或平衡点 x_* 属于（3），且满足 $f(x_*) = 0$，则称其为该方程的解；若满足双曲的条件 $f'(x_*) \neq 0$，则称其为双曲的；否则称为非双曲。

定义 3。映射 $h: X \to Y$，其中 X 和 Y 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有标准拓扑的子空间，若为双射（一一对应且满射）且双连续（连续且其逆映射连续），则称为同胚。如果该同胚及其逆映射均连续可微，则称为 C^1-微分同胚。

例如，在 [9] 中证明了映射 $h:(0,\infty) \to (0,$ **1)**，定义为 $h = 1/(1+x^2)$ 以及 $h: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 定义为 $h(x) = x + a$余弦 x，当 $|a| < 1$ 时，均为同胚。

定义 4。 M 的一个子集称为一维 C^1-流形，或称为 $\mathbb{R}^2$的一维 C^1-子流形，如果它的每个点都包含在一个开集中，且该开集与带通常拓扑的 $\mathbb{R}$ 中的某个开集 C^1微分同胚。采用这一记号，简单闭曲线与端点识别的单位区间 $\mathbb{S}^1$ 等价这一说法，可以更精确地表述为：二者 C^1微分同胚。

定义 5。实数集 M 上的两个动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 和 $\dot{y} = g(y)$，若存在实数集 M 上的一个同胚 h，使得 h 将第一个系统按时间递增方向定向的轨道映射到第二个系统的定向轨道上，则称它们拓扑等价。这样的 h 称为这两个系统之间的拓扑等价。

容易验证，$-1/4$的一个平移，对应于 $y = h(x) = x - 1/4$，是端点识别的单位区间 $\mathbb{S}^1$上的动力系统 $\dot{x} =$ 正弦函数$(2\pi x)$ 和 $\dot{y} =$ 余弦函数$(2\pi y)$ 之间的拓扑等价。文献 [8] 给出了一个二维例子（在平面 $\mathbb{R}^2$上），说明线性系统 $\dot{x} = Ax$ 与 $\dot{y} = By$ 拓扑等价，其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

通过同胚

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

我们注意到，两个系统的不动点都只有原点，并且对于任意其他初始点 $(x_1^0,\ x_2^0)$，h 会将从该初始点出发的 $\dot{x} = Ax$ 解映射到解 $(y_1^0 e^{2t},\ y_2^0 e^{-4t})$，其中 $(y_1^0,\ y_2^0) = h\ (\ (x_1^0,\ x_2^0)\ ) \ = 1/\sqrt{2}\ (x_1^0 - x_2^0,\ x_1^0 + x_2^0)$。这种拓扑等价如图2所示。

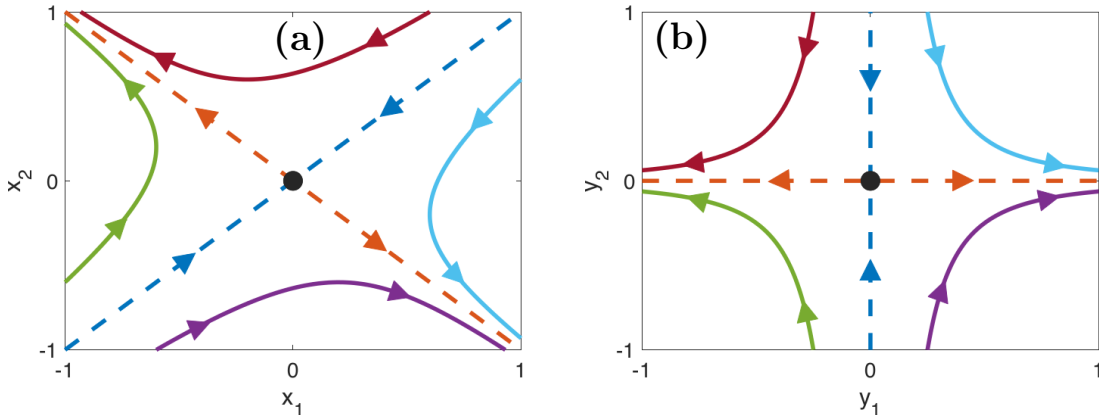


图2：$\dot{x} = Ax$ （**a**）和 $\dot{y} = By$ （**b**）的相平面。箭头指向不动点的蓝线对应于各自的稳定方向；箭头背离不动点（黑点）的红色/橙色线对应于不稳定方向。其他颜色表示具有代表性的轨迹，其中同色轨迹由同胚 $h(x)$从（**a**）映射到（**b**）。

定义6. 用 $C^1(\mathbb{S}^1)$ 表示端点识别的单位区间上的 C^1 映射类。于是

$$\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{S}^1\} + \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{S}^1\},$$

在 $C^1(\mathbb{S}^1)$ 上定义了一个范数，称为 C^1-范数。该范数以通常方式通过开 ϵ-区间 $B^1_\epsilon(f) := \{g \in C^1(\mathbb{S}^1) : \|g - f\|_1 < \epsilon\}$ 生成一个拓扑，称为 C^1-拓扑。

定义 7。 若对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 以及任意 $g \in B^1_\epsilon(f)$，系统 $\dot{x} = f(x)$ 和 $\dot{x} = f(x)$ 与 $\dot{y} = g(y)$ 拓扑等价，则称具有 $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ 的动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 是 C^1结构稳定的。

我们注意到，不难想象如何将最后这两个定义推广到任意有限维闭流形（紧致且无边界）。

以下这个关于单位区间上、端点粘合的两个动力系统 (i) $\dot{x} = f(x)$ 和 (ii) $\dot{y} = g(y)$ 拓扑等价的简单刻画，值得注意。

定理 TE。 同胚 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是从 ***(i)*** 到 ***(ii)*** 的拓扑等价，当且仅当

$$h\left(\{x \in \mathbb{S}^1 : f(x) = 0\}\right) := h(f^{-1}(0)) = \{y \in \mathbb{S}^1 : g(y) = 0\} := g^{-1}(0) \tag{4a}$$

and either

$$(-f)^{-1}(0,\infty) = (g \circ h)^{-1}(0,\infty) \text{ and } (-f)^{-1}(-\infty,0) = (g \circ h)^{-1}(-\infty,0) \tag{4b}$$

if h is a decreasing function,

or

$$f^{-1}(0,\infty) = (g \circ h)^{-1}(0,\infty) \text{ and } f^{-1}(-\infty,0) = (g \circ h)^{-1}(-\infty,0) \tag{4c}$$

if h is an increasing function

证明。 对于充分性，假设 h是一个拓扑等价。最容易选择的 (i) 的轨道是不动点，此时 $f(x) = 0$。由于 h 将 (i) 的轨道映射到 (ii) 的轨道，它必须将 f 的不动点（零点）集同胚地映到 g的不动点（零点）集。此外，由于 h 将 (i) 的定向轨道映射到 (ii) 的定向轨道，对应不动点之间 $f(x)$ 和 $g \circ h(x)$ 的符号必须与 $h(x)$ 的行为（递增或递减）一致；也就是说，若 h 递减，则 $f(x)$ 和 $g \circ h(x)$ 的符号相反；若 h 递增，则 $f(x)$ 和 $g \circ h(x)$ 的符号相同。

为证明必要性，设（4）成立。于是由（4a）， h 将（i）的不动点集同胚地映射到（ii）的不动点集。此外，（4b）和（4c）表明， h 将（i）的正向时间定向轨道映射到（ii）的正向时间定向轨道。因此， h 是一个拓扑等价。 □

有时可能不容易看出 h 在 $\mathbb{S}^1$上是递增还是递减。以 $y = h(x) = -x + 1/2$ 为例，其中 $x, y \in \mathbb{S}^1$，可得 $h(0) = 1/2 \Rightarrow y = 1/2$，且 $h(3/4) = -1/4 \Rightarrow y = 3/4$。不过请注意，$y = -1/4$ 和$y = 3/4$ 对应的是同一个点，这就像圆上 $-\pi/2$ 和 $3\pi/2$对应同一个点一样。因此，即使 $x = 0$ 映射到 $y = 1/2$，而 $x = 3/4$ 映射到 $y = 3/4$，h 确实是递减的。有关拓扑等价的其他刻画，类似于定理 TE，请参见 [10]。

5.1 鼓包函数

在定理的一维类比的证明中，P的充分性部分将广泛用到鼓包函数。一个简单的鼓包函数示例如下：$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为（5），并绘于图3中。

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{for } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{for } x \notin (-1, 1); \end{cases} \tag{5}$$

请注意，我们专门将变量 ψ 留作鼓包函数使用，而用 η 来泛指扰动。

我们可以将鼓包限制在任意区间内，在证明中，该区间将是我们所选定的区间。设 x_0 为区间中心，$r\ (> 0)$ 为半径。那么，将 r 区间记作 $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$，我们的鼓包函数就变为

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-r^2}{r^2-(x-x_0)^2}\right) & \text{for } x \in B_r(x_0), \\ 0 & \text{for } x \notin B_r(x_0); \end{cases} \tag{6}$$

这可以指定为任意区间 $[a, b]$，对应于一个以 $(a + b)/2$ 为中心、半径为 $(b - a)/2$ 的区间；也就是说，

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]\right) & \text{for } x \in (a, b), \\ 0 & \text{for } x \notin (a, b); \end{cases} \tag{7}$$

我们还注意到，利用基础微积分可以很容易地验证，鼓包函数（5）满足

$$\|\psi\|_1 < e^{-1}\left[1 + 6e^{-1}(b - a)^{-1}\right], \tag{8}$$

因此，一旦区间确定，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个任意常数 $\sigma > 0$，使得 $\|\sigma\psi\|_1 < \epsilon$。在证明的充分性部分，我们必须牢记这一重要事实。在许多情况下，我们将使用缩放鼓包函数，对给定的 $C^1(\mathbb{S}^1)$ 中的函数进行小的 C^1 扰动。

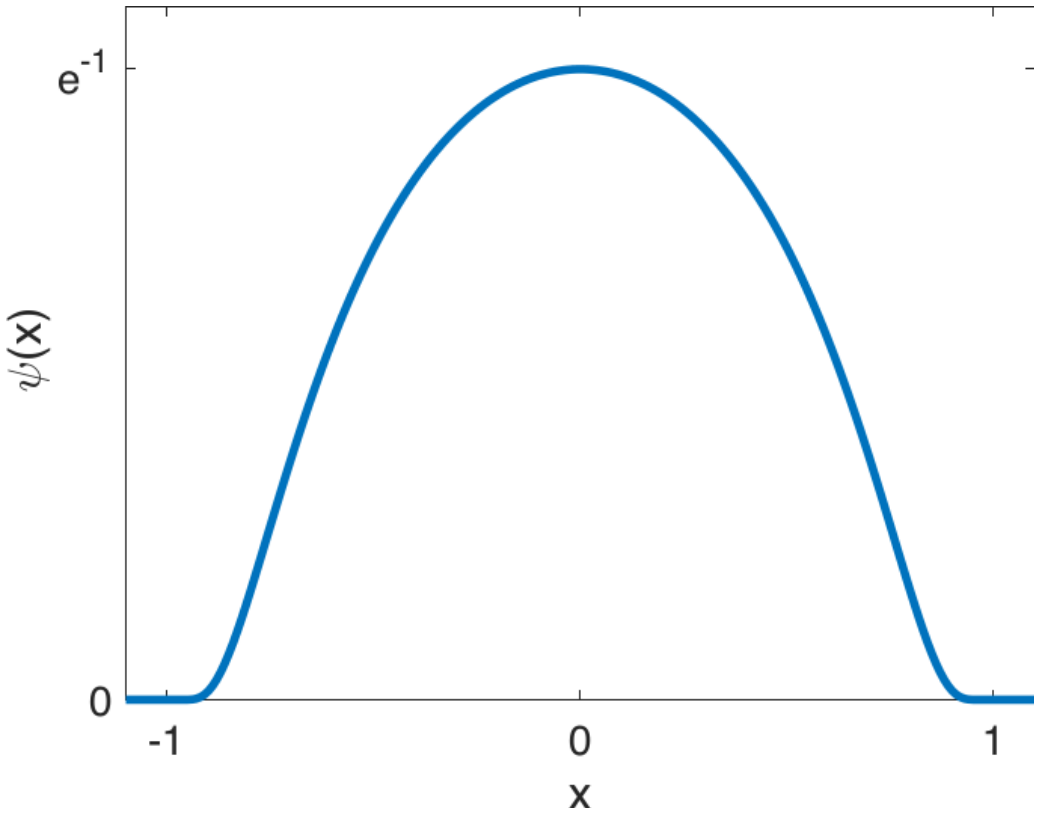


图3：隆起函数的示例。

6 佩绍托定理在 $\mathbb{S}^1$上的

我们再次指出，每个闭且连通的一维 C^1 流形都与端点识别的单位区间微分同胚，如 [12]所示。因此，我们只需将注意力限制在端点识别的单位区间（或更准确地说，一维球面） $\mathbb{S}^1$ 上，即可研究下面定理P 的一维类比。

定理 1. 假设 (3) 是一个定义在 C^1 上的动力系统 $\mathbb{S}^1$。那么 (3) 是 C^1 结构稳定的，当且仅当它有有限个不动点，且这些不动点全都是双曲的。

证明。 对于必要性，我们先证明没有不动点的动力系统满足该结论。假设 (3) 没有不动点，那么 $|f(x)| > 0$ 在 $[0, 1]$上成立。不失一般性，假设 f 为正，这意味着相空间由一条周期性逆时针轨道构成。由于 f 连续，因此存在一个 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$f(x) > \epsilon_0 \, \forall \, x \in [0,1]$。考虑动力系统

$$\dot{y} = g(y), \tag{9}$$

其中 $g \in C^1(\mathbb{S}^1)$ 是 C^1拓扑下 f 的 ϵ 邻域中的任意函数 wit h

$$\|g - f\|_1 < \epsilon < \epsilon_0, \tag{10}$$

那么 g 在 $\mathbb{S}^1$上也必定为正。因此，由（4）可知，恒等映射是一个拓扑等价，所以（3）是结构稳定的。

作为示例，考虑单位区间上端点识别后的函数 $f(x) =$正弦函数$(4\pi x)+4$。那么，对于任意 ϵ 充分小的值，若函数 $g(y)$ 满足（10），就不可能引入新的不动点或改变流的方向；也就是说，$\dot{x} = f(x)$ 和 $\dot{y} = g(y)$ 的动力学保持不变。如图4所示。

接下来证明存在有限个双曲不动点时的结果。设$f(x_k) = 0$且 $f'(x_k) \neq 0$，其中 $k = 1$，2，.....，m。不妨设它们都不是单位区间的端点，因为只需对周期区间作简单平移即可达到这一点。我们按如下方式排列它们，对应于端点识别的单位区间上的逆时针排序：

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m.$$

注意，对于每个区间 $[x_1, x_2], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$，都存在一条与之对应的弧 $\mathbb{S}^1$；此外，还有一条对应于 $[x_m, 1] \cup [0, x_1]$ 的弧，我们将其记为区间$[x_m, x_1]$。

注意，在上述区间内任意两个不动点之间，f 的符号不变；并且由于双曲性和连续性，在每个不动点的某个 δ-邻域内，f' 非零。因此，我们可以选取足够小的 ϵ_0 和 $\delta > 0$，使得在 $[x_k - \delta, x_k + \delta]$ 上，对于 $k = 1, 2, \ldots, m$，有 $|f'(x)| \geq 2\epsilon_0$，其中区间 $[x_k - \delta, x_k + \delta]$ 两两不相交。因此，f 是单调的，并且在这些区间中的每一个区间上恰有一个零点。现在定义 $K(\delta)$ 为这些区间之补集的闭包；该集合本身正是若干互不相交的闭区间之并。由于在任意两个相邻不动点之间，f 的符号不变，因此 f 在 $K(\delta)$ 上非零。此外，由 f 的连续性可知，存在 $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$，使得 $|f(x)| \geq 2\epsilon_1 \, \forall \, x \in K(\delta)$。

现在我们证明结构稳定性成立；特别地，对于任意满足以下条件的 $g \in C^1(\mathbb{S}^1)$

$$\|f - g\|_1 < \epsilon < \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\} \tag{11}$$

动力系统 (9) 与 (3) 拓扑等价。也就是说，存在一个同胚 $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，将 (9) 的定向轨道映射到 (3)。由 (11) 可知 g 具有

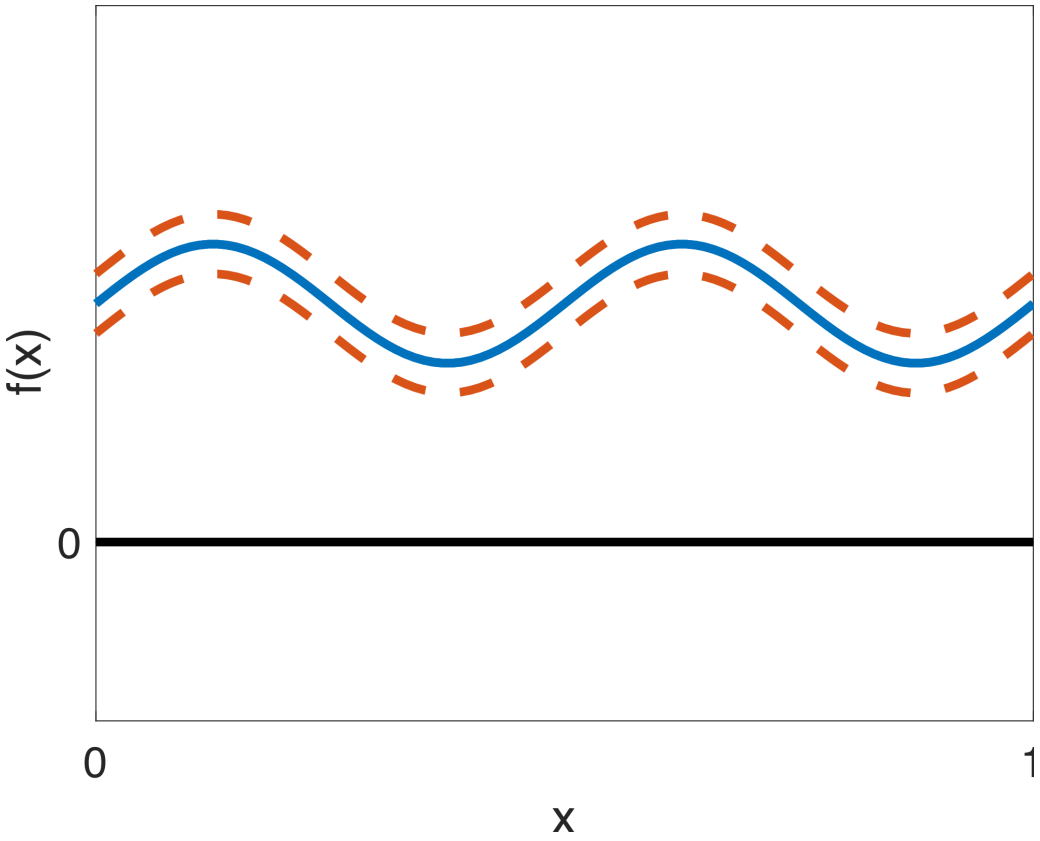


图4：函数（蓝色实线曲线）的示例， $f(x)$，没有不动点。虽然一般来说确实需要考虑导数，但作为演示，我们展示了只要另一个函数 $g(y)$始终处于界限（红色虚线曲线）之内，就不会与水平轴相交；这些界限是（10）的简化版本。

在每个区间 $[x_k-\delta, x_k+\delta]$ 上恰有一个零点，记为 y_k，并且在 $K(\delta)$ 上没有零点。此外，只要 $1 \le k \le m-1$， $g'(y_k) \neq 0$ 与 g 在 (y_k, y_{k+1}) 上的符号就与 f 在 (x_k, x_{k+1}) 上的符号相同；而在 (y_m, y_1) 和 (x_m, x_1) 上也如此。因此，f 与 g 的不动点个数相同，彼此相距不超过 ϵ，并且在各自零点之间对应的区间上符号相同。

我们选取 h 为一个分段线性同胚，使其满足以下性质：$h(0)=h(1)=0$，并且对于 $k=1, 2, \ldots\ldots, m$， $h(x_k)=y_k$；此外，它在区间 $(0, x_1)$，(x_1, x_2)，……，(x_{m-1}, x_m)，$(x_m, 1)$ 上是线性的；具体来说，

$$h(x) := \begin{cases} \left(\frac{y_1}{x_1}\right)x, & 0 \le x \le x_1 \\ \frac{(y_{k+1}-y_k)x+(y_k x_{k+1}-x_k y_{k+1})}{(x_{k+1}-x_k)}, & x_k \le x \le x_{k+1}, 1 \le k \le m-1 \\ \left(\frac{y_m}{x_m-1}\right)(x-1), & x_m \le x \le 1 \end{cases} \tag{12}$$

这证明了该假设的必要性，因为（4）。

再次以函数为例， f（x）$=$正弦函数（$4\pi x$）$+$余弦函数（$2\pi x$）在单位区间上。于是，对于任意 ϵ 充分小的，若函数 g（y）满足（11），就不可能改变不动点的数量或流的方向；也就是说， $\dot{x}=f$（x）与 $\dot{y}=g$（y）的动力学保持不变。需要指出的是，在这种情况下，导数起着非常重要的作用，因为足够大的变化可以将任意一个双曲不动点变为非双曲不动点。图5展示了这种情况。

对于充分性，我们证明，若不满足不动点假设，则（3）不是结构稳定的。为此，我们需要分析该假设可能被违反的所有情形。在每种情形下，我们都证明，只需对原系统作任意小的 C^1-扰动 η，并采用适当的形式，得到g（x）$=f$（x）$+\eta$（x），就能构造出一个与（3）拓扑不等价的系统。分析重点关注非双曲不动点，旨在说明任意小的扰动都能改变原不动点集的同胚类型，从而根据（4），确保扰动后的系统与原系统拓扑不等价。

情形 1：假设 x_* 是一个孤立非双曲不动点（因此 $f'(x_*)=0$），在该点两侧 f 的符号不变。不失一般性，可以假设 $f(x)>0$ 在某个去心 δ区间 $B_\delta(x_*)$ 内$=B_\delta(x_*)\setminus\{x_*\}$，如图 6 所示。注意，如果 x_* 是唯一的不动点，那么扰动 $g(x)=f(x)+\epsilon$定义了一个不动点集为空的动力系统，记为 $g^{-1}(0)\in\varnothing$,

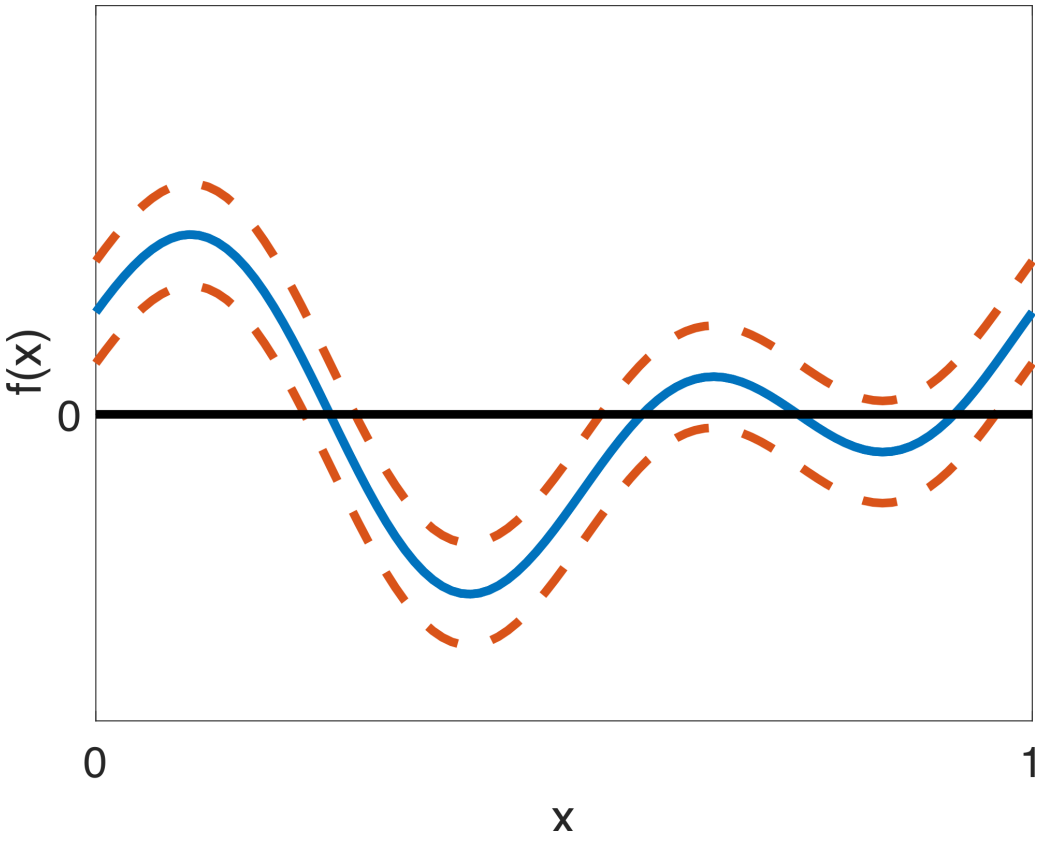


图5：函数的一个例子（蓝色实线曲线），$f(x)$，具有有限个双曲不动点。尽管在这种情况下我们必须特别留意导数，但作为演示，我们展示一个合理的函数 $g(y)$，满足（11）的条件，并始终处于界限（红色虚线曲线）之内；这些界限是（11）的简化版本。

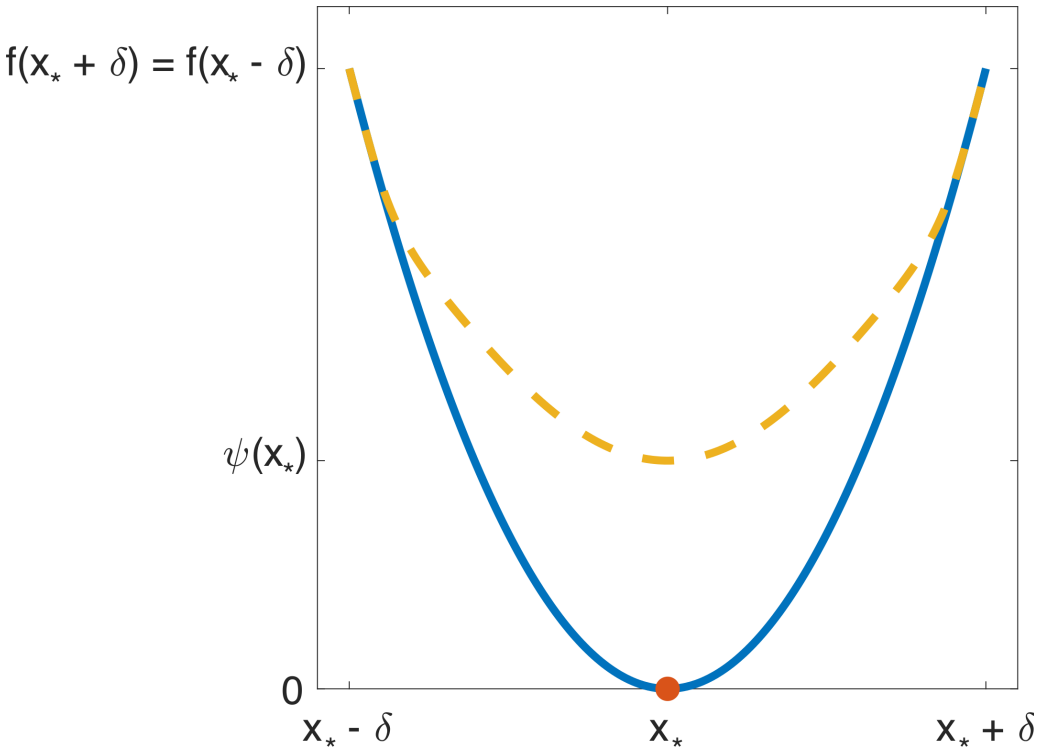


图6：函数的一个例子（13）（底部的蓝色实线曲线） f，它在一个以非双曲不动点$x_* - \delta$， $x_* + \delta$为中心的小区间内不改变符号。函数通过限制在该小区间内的隆起函数进行扰动，图中显示扰动函数（顶部的黄色虚线曲线）失去了不动点 $x_{*\circ}$

$x_{*\circ}$

而 $f^{-1}(0) \in \{x_*\}$，因此由 (TE) 可知， $\dot{x} = f$ 和 $\dot{y} = g$ 在拓扑上不等价。

如果 x_* 不唯一，我们就必须将上述分析局部化。为了便于说明，读者可以考虑一个示例函数

$$f(x) = \begin{cases} f_{\text{in}} \\ f_{\text{out}} \end{cases} = \begin{cases} (x - x_*)^2 & \text{for } x \in (x_* - \delta, x_* + \delta), \\ f_{\text{out}} & \text{for } x \in \mathbb{S}^1 \setminus (x_* - \delta, x_* + \delta); \end{cases} \tag{13}$$

其中， f_{out} 是一个满足定理假设的任意函数。我们希望通过扰动系统消除不动点，同时不影响该区间之外的函数。只在 δ 区间内扰动函数，可以避免平移不动点，或增删相同数量、相同类型的不动点，从而使扰动失去意义。

这可以通过使用隆起函数来实现（参见第5.1节）。由于 x_* 是（$x_* - \delta, x_* + \delta$）中唯一的不动点，我们可以假设它不是单位区间的端点，于是定义

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-\delta^2}{\delta^2-(x-x_*)^2}\right) & \text{for } x \in (x_* - \delta, x_* + \delta), \\ 0 & \text{for } x \notin (x_* - \delta, x_* + \delta); \end{cases} \tag{14}$$

由（8）可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $\sigma > 0$ 使得 $\|\sigma\psi\|_1 < \epsilon$。因此，如果 $g = f + \sigma\psi$，$\|f - g\|_1 < \epsilon$ 且 $\dot{y} = g$ 在（$x_* - \delta$，$x_* + \delta$）中没有不动点。那么，$f^{-1}(0)$ 和 $g^{-1}(0)$ 不可能同胚，这意味着 f 不是结构稳定的。

情形 2：设 x_* 是一个不动点，f 在该点两侧改变符号，但 $f'(x_*) \neq 0$，不妨设其形状如图 7所示。再次，我们定义 $\delta > 0$ 使得 f 在 $B_\delta(x_*)$ 中不为零。对于这种情形，我们将证明存在

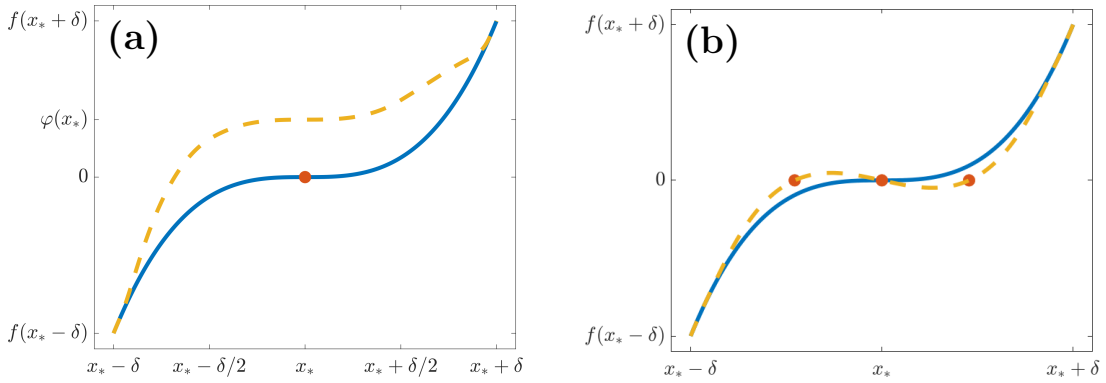


图 7：函数的一个例子（15）（蓝色实线曲线），f，在以非双曲不动点$x_* - \delta$，$x_* + \delta$为中心的小区间内改变符号，x_*。**（a）**函数受到限制在该小区间内的扩展隆起函数（16）的扰动，扰动函数（黄色虚线曲线）显示出已将不动点 x_*，从非双曲转变为双曲。**（b）**函数受到限制在该小区间内的“双”隆起函数（17）的扰动，扰动函数显示出新增了两个双曲不动点，并将原非双曲不动点 x_*，转变为另一个双曲不动点。

任意　　限制在 $B_\delta(x_*)$ 内的任意小 C^1扰动，该扰动具有三个双曲　　ic

不动点，而不是该区间内的一个非双曲不动点。同样地，为便于说明，读者不妨设想一个示例函数

$$f(x) = \begin{cases} f_{\text{in}} \\ f_{\text{out}} \end{cases} = \begin{cases} (x - x_*)^3 & \text{for } x \in (x_* - \delta, x_* + \delta), \\ f_{\text{out}} & \text{for } x \in \mathbb{S}^1 \setminus (x_* - \delta, x_* + \delta); \end{cases} \tag{15}$$

其中， f_{out} 是满足定理假设的任意函数。

首先，我们构造一个扩展隆起函数，它在闭区间$[x_* - \delta/2, x_* + \delta/2]$ 上为 e^{-1} ，并在$(x_* - \delta, x_* + \delta)$的补集上为零；即，

$$\varphi(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \exp\left(-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_* + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]\right), & x_* - \delta < x \le x_* - \delta/2 \\ e^{-1}, & x_* - \delta/2 \le x \le x_* + \delta/2 \\ \exp\left(-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x_* - x + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]\right), & x_* + \delta/2 \le x < x_* + \delta \\ 0, & x \notin (x_* - \delta, x_* + \delta) \end{array} \right\}. \tag{16}$$

注意，除 $x_* - \delta/2$ 和 $x_* + \delta/2$ 这两点外，该函数在整个实数线上均为 C^∞；在这两点处，它仅为 C^1。接下来，我们利用$\psi(x)$ 中的（14）定义一个“双重”隆起函数。

$$\vartheta(x) := -\frac{2(x - x_*)\psi(x)}{\delta e}, \tag{17}$$

其目的是增加不动点。（16）和（17）的示例见图 8。

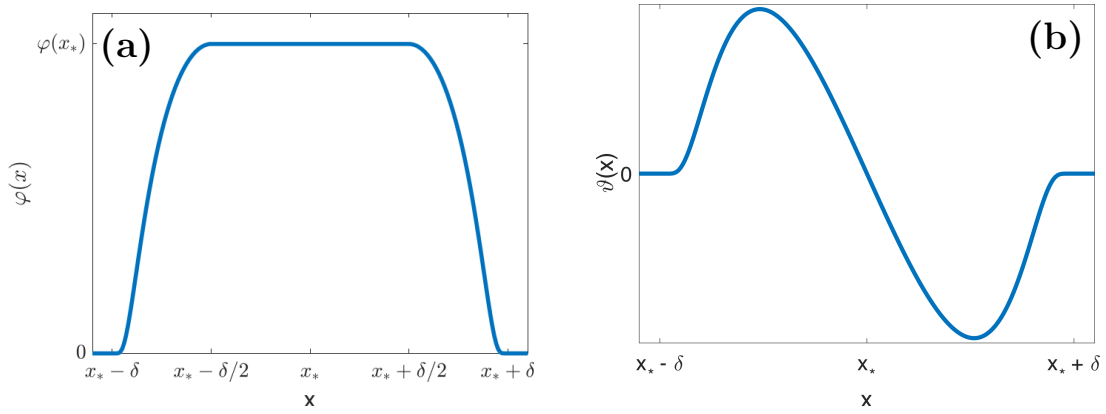


图8： **（a）**（16）和 **（b）**（17）的示例图。

注意，按照惯例，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\sigma > 0$，使得 $\|\sigma\vartheta\|_1 < \epsilon$。此外，$g := f + \sigma\vartheta$ 在 x_* 处有一个零点，且 $g'(x_*) < 0$，并且在 $B_\delta(x_*)$ 中恰好还有另外两个零点，位于

点 $x_* \pm \nu$，其中 $0 < \nu < \delta$，以及 $g'(x_* - \nu) = g'(x_* + \nu) > 0$。由于 $\|f - g\|_1 < \epsilon$和f^{-1}(0) 和 g^{-1}(0) 不同胚，（4）意味着 f 不是结构稳定的。

情形 3：一段（非双曲）不动点区间，也就是说，$f(x) = 0$ 在某个区间 $[a, b] \subseteq [0, 1]$上。如果 $[a, b] = [0, 1]$，那么加上任意小的正数都会使不动点集从整个 $\mathbb{S}^1$ 变为空集，这证明此类系统不可能是 C^1结构稳定的。另一方面，如果该区间是单位区间的真子集，考虑 $[a, b] \subseteq$ (0,1) 且与 $\dot{x} = f$的不动点集中的其他任意点均相隔开的情形。因此，存在一个正的 δ，使得 $[a - \delta, b + \delta] \subset (0, 1)$ 且 $[a - \delta, b + \delta] \cap f^{-1}(0) = [a, b]$。类比上面的情形 1 和情形 2，我们考虑两个子情形：(i) f 在 $(a-\delta, a)$ 和 $(b, b+\delta)$ 上具有相同的符号；(ii) f在 $(a-\delta, a)$ 和 $(b, b+\delta)$ 上具有相反的符号。自然地，不失一般性，我们可以假设 (i) 中的符号为正，而 (ii) 中符号由负变正。对于 (i) 和 (ii)，使用以下隆起函数的类似形式 ψ 很方便：

$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - a + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]\right), & a - \delta < x \leq a - \delta/2 \\ e^{-1}, & a - \delta/2 \leq x \leq b + \delta/2 \\ \exp\left(-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(b - x + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]\right), & b + \delta/2 \leq x < b + \delta \\ 0, & x \notin (a - \delta, b + \delta) \end{cases} . \quad (18)$$

对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $\sigma > 0$ 使得 $\|\sigma \hat{\varphi}\|_1 < \epsilon$，在子情形 (i) 中，扰动 $\dot{y} = g = f + \sigma \hat{\varphi}$ 具有 $\|f - g\|_1 < \epsilon$，且在 $[a - \delta, b + \delta]$ 中没有不动点，这意味着根据 (4)，它不可能与 $\dot{x} = f$ 拓扑等价。另一方面，对于子情形 (ii)，扰动 $\dot{y} = g$，其中

$$g := f + \sigma \hat{\vartheta},$$

with

$$\hat{\vartheta}(x) := -\frac{2\hat{\varphi}(x)}{e\,(a + b)} \left(x - \frac{a + b}{2}\right), \quad (19)$$

产生了对 $\dot{x} = f$ 的任意小 C^1-扰动，该扰动在 $[a - \delta, b + \delta]$ 中恰有三个双曲不动点。因此，对于这些子情形中的任意一种，f 都不是结构稳定的。

情形 4：假设 $\dot{x} = f$ 有互不相同的不动点 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 和 $x_n \to x_*$，因此极限 x_* 是一个非双曲不动点。可以假设该序列及其极限都位于一个包含于 $(0, 1)$ 的开区间 $J = (x_* - r, x_* + r)$ 内，而该区间.....

不包含其他不动点。该序列可能由如图所示的所有双曲不动点组成 9，也可能由双曲不动点与情形 1 和 2 中讨论的类型的非双曲不动点以某种组合构成。再次强调，为了便于说明，读者可以设想一个示例函数

$$f(x) = \begin{cases} f_{\text{in}} \\ f_{\text{out}} \end{cases} = \begin{cases} (x - x_*)\sin\left(\frac{1}{(x-x_*)^3}\right) & \text{for } x \in (x_* - \delta, x_* + \delta), \\ f_{\text{out}} & \text{for } x \in \mathbb{S}^1 \setminus (x_* - \delta, x_* + \delta); \end{cases} \tag{20}$$

其中， f_{out} 是满足定理假设性质的任意函数。

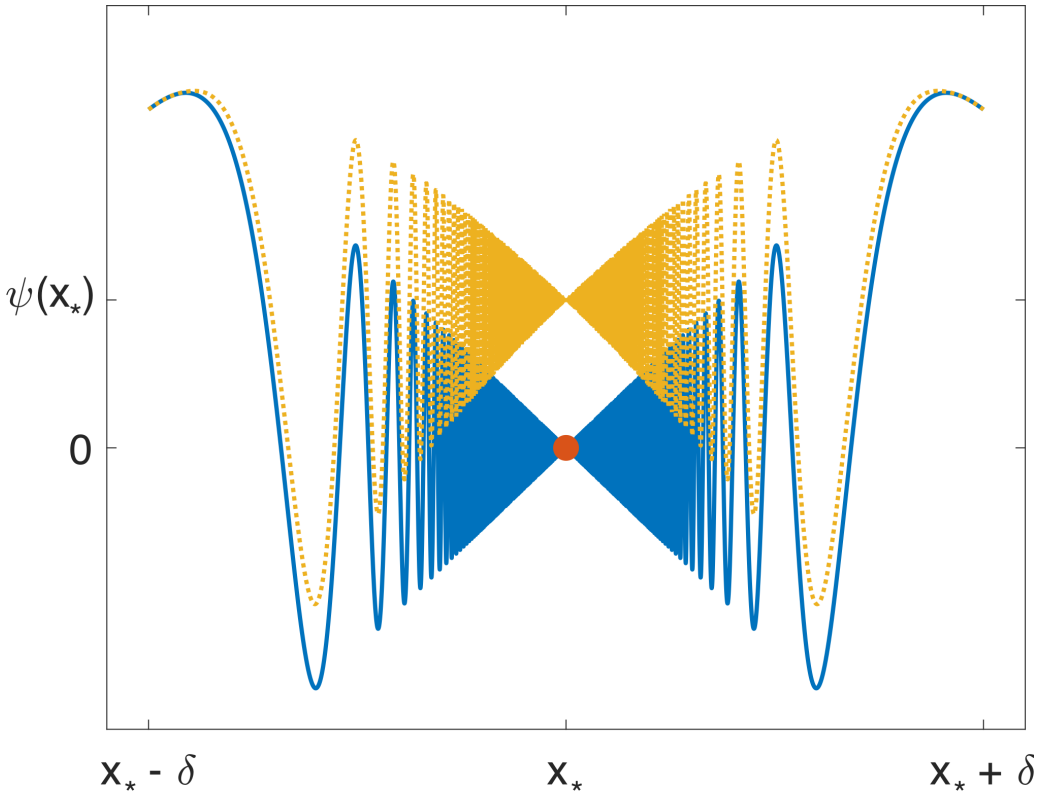


图9：函数的一个例子（20）（底部蓝色实线曲线）， f，在以非双曲不动点 $x_* - \delta$， $x_* + \delta$为中心的小区间内有可数多个不动点（双曲或非双曲）， x_*。该函数受到一个限制在小区间内的隆起函数的扰动，图中显示扰动函数（顶部黄色虚线曲线）失去了无穷多个不动点。

注意，$\{x_n\}$ 是可数无限集，因此，如果我们将系统 $\dot{x} = f$ 扰动为系统 $\dot{y} = g$，使其在 J中只有有限个不动点，并且在 J的补集中具有相同的不动点，那么这两个系统必定拓扑不等价。由于$f \in C^1$，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个正的 $\delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$，使得 $|x - x_*| < \delta$ 蕴含$|f(x)| = |f(x) - f(x_*)| < \epsilon\,|x - x_*|$。此外，对于任意 $0 < s < r$， $J \setminus B_s(x_*)$中只有有限个不动点。下面我们使用隆起函数

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-(r/2)^2}{(r/2)^2-(x-x_*)^2}\right) & \text{for } x \in (x_* - r/2, x_* + r/2), \\ 0 & \text{for } x \notin (x_* - r/2, x_* + r/2); \end{cases}, \tag{21}$$

对于任意给定的 $\epsilon > 0$，选取 $\sigma > 0$，使得 $\|g - f\|_1 = \|(f + \sigma\psi) - f\|_1 < \epsilon$。那么，对于某个 $0 < s < r/2$， g 在 $B_s(x_*)$ 中没有零点，因此在 J 中只有有限个不动点，这意味着 f 不是结构稳定的。至此，关于 $\mathbb{S}^1$ 的佩绍托定理的证明完成。

□

注意到，由于端点识别的单位区间是紧的，定理 1 中只需简单地要求所有不动点都是双曲的。

例 1（结合不同情形）。在这个简短的例子中，我们来考察以下向量场

$$f(x) = \begin{cases} r(x) & \text{for } x \in [0, 1/4], \\ s(x) & \text{for } x \in (1/4, 1/2), \\ 0 & \text{for } x \in [1/2, 1]; \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$r(x) = x^5 \sin(1/x^3);$$

and

$$s(x) = r(1/4) \begin{cases} \exp\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2\right]\right) & \text{for } x \in (0, 1/2), \\ 0 & \text{for } x \notin (0, 1/2); \end{cases}$$

这是情形 3 和情形 4 的结合。在第一个区间 $[0, 1/4]$ 上，函数像情形 4 那样，无数次穿过 x 轴。最后一个区间 $[1/2, 1]$则类似情形 3，其中存在一个由不动点构成的区间，也就是说，不动点有不可数多个。最后，中间区间通过隆起函数，使第一个区间和最后一个区间中的函数平滑地过渡。函数 $f(x)$ 如图 10（a）所示。

现在我们来构造扰动。回顾证明可知，隆起函数能够将扰动限制在一个有界区间内，从而使其余部分

的函数不受影响。这里有两个区间，我们需要在其上引入扰动，以证明定理 1 的充分性。取两个分别以这两个区间为中心、在其他地方处处为零的鼓包函数之和即可。考虑扰动

$$\eta(x)=\epsilon\begin{cases}\exp\left(-\left(\frac{1}{8}\right)^2\Big/\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(x-\frac{1}{8}\right)^2\right]\right) & \text{for } x\in[0,1/4],\\ \exp\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^2\Big/\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right]\right) & \text{for } x\in[1/2,1],\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{23}$$

对于任意充分小的 $\epsilon>0$。组合后的鼓包函数如图10（**b**）所示。

构造好扰动后，只需将其加到原函数上：$g(x)=f(x)+\eta(x)$。我们从图10（**c**）中可以看到，$g(x)$ 现在将有有限个零点；也就是说，$\dot{x}=g(x)$ 有有限个不动点。因此，$\dot{x}=g(x)$ 与 $\dot{x}=f(x)$ 并非拓扑等价，因此满足定理1的充分性判据。

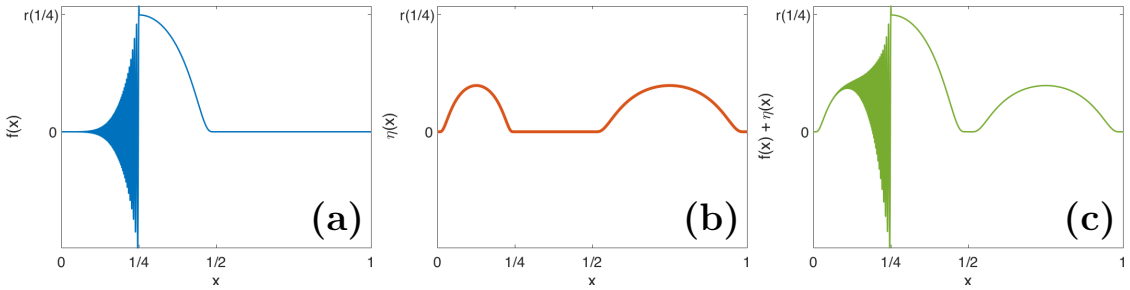


图10：情形3和4的组合。（**a**）函数 $f(x)$（22）的图像。（**b**）扰动 $\eta(x)$（23）的图像。（**c**）扰动函数 $g(x)=f(x)+\eta(x)$ 的图像。

7 $\mathbb{S}^1$上的稠密性定理

现在我们证明定理P中稠密性部分的一维类比。为此，引入以下记号会很方便。定义 $SS^1(\mathbb{S}^1)$ 为 C^1-结构稳定系统 $\dot{x}=f(x)$ 在 $C^1(\mathbb{S}^1)$ 上。

定理 m 2. 动力系统集合 $SS^1(\mathbb{S}^1)$ 在 $C^1(\mathbb{S}^1$ 中是 C^1 开且稠密的 $)$.

证明。 开性直接由定理 1 的必要性证明得出，而稠密性基本上是同一定理充分性论证的直接推论。特别是，必要性证明表明，不动点假设在充分小的扰动下保持不变，因此 $SS^1(\mathbb{S}^1)$ 是 C^1 的开子集 $C^1(\mathbb{S}^1)$。

显然，从定理1充分性部分证明中所用的方法可以看出，对于任意一个 C^1 定义在 $\dot{x} = f(x)$上的动力系统 $\mathbb{S}^1$ ，都存在任意小的 C^1扰动 $\dot{y} = g(y)$，使得 $g(y)$只有有限个零点。接着，采用定理1充分性部分中情形 1 和 2 所用的隆起函数方法，可以得到一个进一步的任意小扰动 $\dot{z} = h(z)$，使其只有双曲不动点，从而完成证明。

□

8 简短补充说明

值得注意的是，在上述定理 1 中关于双曲性假设必要性的证明，以及定理2中的稠密性结果证明里，也可以使用其他几种基于隆起函数的扰动。例如，在定理1 必要性证明的情形 2 和情形 3 (ii)中分别使用的函数 ϑ 和 $\hat{\vartheta}$ ，可以替换为适当形式的隆起函数导数。简单隆起函数（5）的一阶和二阶导数图像见图11，这清楚地说明了这一点。

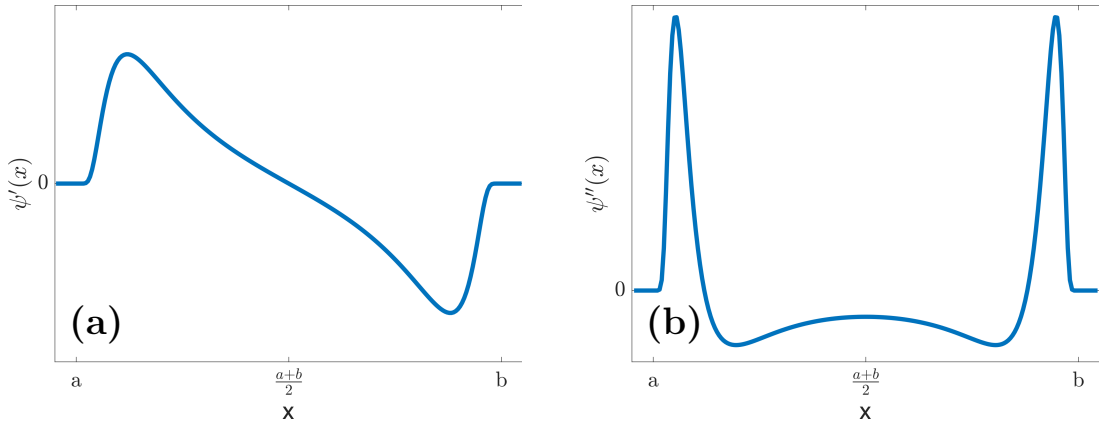


图 11：简单隆起函数的一阶（**a**）和二阶（**b**）导数。

最后值得一提的是，定理1 和2 的证明都可以通过应用一个标准的横截性定理，简化为寥寥数行

例如， [18], 这表明微分拓扑在现代动力系统理论中的重要性。不过，作者也指出，这并非传统本科数学课程中的标准主题。

9 结论与纪念

Peixoto 关于闭曲面上动力系统的划时代结构稳定性定理和稠密性定理，证明过程漫长而复杂，涉及许多本科生爱好者不熟悉的概念。在本文中，我们证明了这些定理的一维类比可以用大多数数学专业本科生熟知的方法加以证明，从而为理解二维证明中的许多要素提供了有益的入门。我们不难想象，Peixoto 夫妇本人也曾考虑过一维版本，并将其与 Andronov 和 Pontryagin 的开创性工作一道，作为他们提出定理的指引。

值此 Mar´ılia 和 Maur´ıcio Peixoto 夫妇诞辰 100th 周年之际，为缅怀二人的一生，作者谨此表达 Peixoto 夫妇的工作，尤其是佩绍托定理，对个人所具有的意义。对 A.R. 而言，在 D.B. 的本科非线性动力学课程中初次接触佩绍托定理，是动力系统研究第一次从对其应用的好奇，转变为对其基础分析的热切兴趣。此外，Maur´ıcio Peixoto 与 Solomon Lefschetz 的友谊也令 A.R. 深有共鸣，因为他同样受到自己与导师 D.B. 之间亲密关系的启发。D.B. 最近猝然离世，更使这一点意义非凡。D.B. 对动力系统的贡献无论怎样评价都不为过，所有认识他的人都会深切怀念他。

10 致谢

作者谨向 SIAM DS Web 致谢；本模块最初构思于 SIAM DS Web 2013年教学奖项目期间。此外，作者也要感谢审稿人提供的详尽反馈和建议，这些意见对改进本文起到了重要作用。特别感谢一位审稿人建议采用例 1 中探讨的函数。A.R. 感谢 UW 应用数学系给予的支持，D.B. 感谢 NJIT 数学科学系给予的支持。最后，A.R. 谨向已故导师兼挚友 D.B. 致以由衷的谢意。

参考文献

[1]戈特弗里德·威廉·莱布尼茨。Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus。《学者学报》，1684年。[2] 艾萨克·牛顿。《自然哲学的数学原理》。英国皇家学会，1687年。[3] 艾萨克·牛顿。Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum eisudem appli- catione ad curvarum geometriam。Opuscola mathematica philosophica et philologica，1744年。[4] 雅各布·伯努利。Explicationes, annotationes et additiones ad ea, quae in actis sup. de curva elastica, iisochrona paracentrica, et velaria, hinc inde memorata, et paratim controversa legundur; ubi de linea mediarum directionum, alliisque novis。《学者学报》，1695年。[5] Jules Henri Poincar´e。Les m´ethodes nouvelles de la m´ecanique c´eleste，第 1 卷。戈蒂耶-维拉尔出版社，巴黎，法国，1892—1899年。[6] Jules Henri Poincar´e。Le¸cons de M´ecanique C´eleste，第 1 卷。戈蒂耶-维拉尔出版社，1905—1910年。[7] 史蒂文·斯特罗加茨。《非线性动力学与混沌》。韦斯特维尤出版社，马萨诸塞州剑桥，1994年。[8] L. 佩尔科。《微分方程与动力系统》。施普林格出版社，纽约，第 3 版，2001年。[9] 詹姆斯·迈斯。《微分动力系统》。工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，2007年。[10] P. 布兰查德、R. L. 德瓦尼和 G. R. 霍尔。《微分方程》，第 4 卷。圣智学习，2011年。[11] 斯蒂芬·斯梅尔。可微动力系统。《美国数学会通报》，73:747–817，1967年。[12] J. 米尔诺。《从可微观点看拓扑学》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1997年。[13] J. 索托马约尔。引言：关于毛里西奥·M. 佩绍托生日的几句话。《计算与应用数学》，20(1):1–5，2001年。

[14] Marilia Chaves Peixoto 和 Maur´ıcio Matos Peixoto。《扩大的边界条件下平面上的结构稳定性》。巴西科学院院刊，31：135–160，1959年。[15] Maur´ıcio Matos Peixoto。《二维流形上的结构稳定性》。拓扑，1：101–120，1962年。[16] A. Andronov 和 L. Pontryagin。《粗糙系统》。苏联科学院院报，14：247–251，1937年。[17] Maur´ıcio Matos Peixoto。《论结构稳定性》。数学年刊，69(2)：199–222，1959年。[18] V. Guillemin 和 A. Pollack。《微分拓扑》。Prentice-Hall，1974年。